Глава

Квантовая космология в пространстве-времени отрицательной фрактальной размерности и квантовополевая пертурбативная модель вакуума Эйнштейна-Глинера-Зельдовича.

В этой главе показано,что вакуум Эйнштейна-Глинера имеет не макроскопическую, а чисто квантовополевую природу, что было предсказано более 40 лет тому назад в работах Я.Б.Зельдовича [2], исходя из очень общих соображений Построена самосогласcованная пертурбативная модель вакуума Эйнштейна-Глинера-Зельдовича,базирующаяся на квантовой теории поля в пространстве-времени отрицательной фрактальной размерности.

I.Введение.

Методы классической мультифрактальной геометрии за последние 10 лет прочно вошли в современную теоретическую физику [54] и квантовую теорию гравитации [41], а число публикаций посвященных фрактальной космологии и фрактальной квантовой теории поля неуклонно возрастает, см.[23-28],[37-38]. Отметим, что в основополагающей работе К.Свозила [12] посвященной квантовой теории поля (КТП) на фрактальном пространстве-времени,фрактальная геометрия в метрических пространствах положительной хаусдорфовой размерности $D = d_H,$ применялась в основном как новый метод регуляризации, аналогичный известному в КТП классическому методу размерной регуляризации. Однако уже в работах Колкагни [25-27] и других авторов [28], положительные Хаусдорфовы размерности d_H рассматриваются как физические. В работах [38-40] фрактальная размерность пространства-времени, впервые рассматривалась как динамический параметр, который может меняться в процессе эволюции нашей Вселенной. Отрицательные размерности пространства-времени, длительное время рассматривались в физической литературе как нефизические и играли чисто вспомогательную роль. Квантовая механика в пространстве целой отрицательной размерности изучалась в работах Дунна и Холлидэя, а также Рабелло [7-10]. В этих работах показано, что для квантовых систем с конечным числом степеней свободы, пространство целой отрицательной физической размерности, можно интерпретировать как некоторое вполне реальное физическое суперпространство и было также отмечено, что в пространстве целой отрицательной размерности квантовые статистики бозонов и фермионов поменяются местами. Фейнмановский интеграл по траекториям для целых отрицательных размерностей изучен в работах Холлидэя, Дунна и Рикотты [14-15].В КТП отрицательные размерности уже сравнительно давно используются, как эффективный метод исследования обычных Фейнмановских диаграмм [16-22]. Фейнмановский интеграл по траекториям в отрицательных размерностях для систем с континуальным числом степеней свободы построен Сузуки и Шмидтом [20]. Пространство-время как мультифрактал отрицательной размерности, было впервые введено в нашей работе [37], в которой результаты Колкагни [25],расширены на случай обобщенной меры Коломбеау-Стильтьеса $(\rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(x))_\varepsilon$ [37] с носилем на фрактале $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^d$ и такой, что

$$(d\rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(x))_\varepsilon \sim \left(\frac{r^{d-1}dr}{r^{d(1-\delta)}+\varepsilon}\right)_\varepsilon, \qquad (1.1)$$
$$\varepsilon \in (0,1],$$

$\mathbf{Supp}\left((\rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(x))_\varepsilon\right) \subset \mathcal{F},$ где d -топологическая размерность, $\delta \in (-\infty,1].$ Колкагни изучал только случай,когда $\delta \in (0,1]$ [25-27]. В том случае, когда $\delta \in (0,1]$ интегрирование по мере $(d\rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(x))_\varepsilon$ очевидно эквивалентно интегрированию по обычной мере Хаусдорфа $d\mu_H$ с носилем на фрактале $\mathcal{F}$ Хаусдорфовой размерности $d_H(\mathcal{F}) = d \cdot \delta.$ Пусть теперь $\delta \in (-\infty,0].$ Тогда очевидно Гельдеровская экспонента $\alpha(0)$ меры $(\rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(x))_\varepsilon$ в точке $x=0$ отрицательна и равна $-d \cdot |\delta|$:

$$\alpha(0) = \lim_{r\to 0}\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log \rho_\varepsilon^{\mathcal{F}}(B(x,r))}{\log r}\right) = -d \cdot |\delta|. \qquad (1.2)$$

Замечание 1.1. Пусть $B^r_{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap B(0,r)$ -фрактальный "шар" радиуса r. Объм $\rho^{\mathcal{F}}_{\varepsilon}(B^r_{\mathcal{F}})$ фрактального шара $B^r_{\mathcal{F}}$ в силу (1.1) равен $\rho^{\mathcal{F}}_{\varepsilon}(B^r_{\mathcal{F}}) \sim r^{D_-}$, где $D_- = -d \cdot |\delta|$.

Определение 1.1. Для произвольной обобщенной меры Коломбеау-Стильтьеса $(\mu_\varepsilon(x))_\varepsilon$ мы определим верхнюю Гельдеровскую экспоненту $\alpha(x)$ в точке x как

$$\overline{\alpha}(x) = \limsup_{r \to 0} \left(\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu_\varepsilon(B(x,r))}{\log r} \right) \tag{1.3}$$

и

нижнюю Гельдеровскую экспоненту $\underline{\alpha}(x)$ в точке x как

$$\underline{\alpha}(x) = \liminf_{r \to 0} \left(\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu_\varepsilon(B(x,r))}{\log r} \right). \tag{1.4}$$

Определим также множества $\overline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)$ и $\underline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)$ как

$$\begin{gathered} \overline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbf{Supp}((\mu_\varepsilon)_\varepsilon) \middle| \limsup_{r \to 0} \left(\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu_\varepsilon(B(x,r))}{\log r} \right) = \alpha \right\}, \\ \underline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha) = \left\{ x \in \mathbf{Supp}((\mu_\varepsilon)_\varepsilon) \middle| \liminf_{r \to 0} \left(\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \mu_\varepsilon(B(x,r))}{\log r} \right) = \alpha \right\} \end{gathered} \tag{1.5}$$

Замечание 1.2. В дальнейшем, мы рассматриваем только случай, когда выполнено равенство $\overline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha) = \underline{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha) = \Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)$.

Определение 1.3. Если множества $\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)$ для различных значений α имеют фрактальный характер, то мера $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ называется обобщенной мультифрактальной мерой или обобщенным мультифракталом. Семейство множеств $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\}$, для краткости мы также будем называеть обобщенным мультифракталом.

Замечание 1.3. Подчеркнем, что принципиальным отличием обобщенного мультифрактала $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ от классического мультифрактала, является наличие у него, по крайней мере одной отрицательной Гельдеровской экспоненты $\alpha(x) < 0$.

Определение 1.4.Обобщенная мультифрактальная мера $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ называется мультифракталом отрицательной размерности, если найдется по крайней мере одно значение $\alpha = \alpha_- < 0$ такое, что $\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-) \neq \varnothing$. Таким образом справедливо разложение $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\} = \{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_+), \Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-)\}$, где $\alpha_- < 0$ и $\alpha_+ > 0$. Характеристики классических мультифракталов типа отрицательной размерности впервые изучал Б.Б.Мандельброт [28-30]. Отрицательная размерность для случайных фрактальных множеств, была введена в работе [53].

Определение 1.5.В настоящей работе, под пространством отрицательной размерности, мы будем понимать обобщенный мультифрактал $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\} =$ $= \{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_+), \Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-)\}$ у которого все Гельдеровские экспоненты α отрицательны, т.е. $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_+)\} = \varnothing$.

Замечание 1.4.Подчеркнем, что любая мультифрактальная структура $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\}$, заданная на координатном x -пространстве Минковского M_4, каноническим образом индуцирует единственную мультифрактальную структуру $\left\{\widetilde{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\right\}$ на импульсном p -пространстве M_4^* **[12].**

Определение 1.6.Квантовое поле $(\varphi_\varepsilon(t,x))_\varepsilon$, заданное на координатном x -пространстве Минковского M_4, называется фрактальным, если его можно представить как преобразование Фурье операторно-значной обобщенной функции $(\varphi_\varepsilon(p))_\varepsilon$ такой что $\mathbf{supp}((\varphi_\varepsilon(p))_\varepsilon) \subseteq \left\{\widetilde{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\right\}$ для некоторого обобщенного мультифрактала $\left\{\widetilde{\Delta}_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\right\}$ [37].

II.Проблема космологической постоянной.

Общеизвестная старая проблема классической квантовой космологии, как известно состояла в том, что плотность энергии вакуума вычисленная в рамках канонической квантовой теории поля, положительна и недопустимо велика [1].Так например разумная оценка полной энергии вакуумных нулевых колебаний поля массы m, полученная обрезанием по волновому числу колебательных мод $\kappa \gg m$ дает для плотности энергии вакуума $\langle\rho_V\rangle$ ($\hbar = c = 1$) следующее выражение

$$\langle\rho_V\rangle = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_0^\kappa 4\pi k^2(k^2+m^2)^{1/2}dk \simeq \frac{\kappa^4}{16\pi^2}. \qquad (2.1)$$

Согласно общепринятым в настоящее время представлениям, общая теория относительности, а значит и канонические представления о свойствах пространства-времени, справедливы при энергиях вплоть до планковского масштаба. Таким образом мы должны положить в разумном физическом приближении $\kappa \simeq (8\pi G)^{1/2}$, что дает величину [1]

$$\langle\rho_V\rangle = 2^{-10}\pi^{-4}G^{-2} = 2 \cdot 10^{71}\,\text{ГэВ}^4. \qquad (2.2)$$

Такое значение $\langle\rho_V\rangle$ противоречит данным наблюдательной астрономии, см. детальное обсуждение в статье Вайнберга [1], которая написана еще до открытия ускоренного расширения вселенной. Как отмечено Вайнбергом [1],величина $|\langle\rho_V\rangle + (\Lambda/8\pi G)|$ (Λ -Эйнштейновская космологическая постоянная)с необходимостью должна быть меньше чем 10^{-47} ГэВ ^{4} и поэтому два слагаемых $\langle\rho_V\rangle$ и $\Lambda/8\pi G,$ определяюших ее значение, должны сокращаться с точностью, лучшей чем 118 десятичных знаков. Даже если учесть только энергию вакуума в КХД, то соответствуюшая величина $\langle\rho_V\rangle$ имеет порядок 10^{-6} ГэВ ^{4}, что требует точности сокращения с $\Lambda/8\pi G$ порядка не менее 41 десятичного знака. Соответствующая проблема называется проблемой космологической постоянной.
По видимому Я.Б.Зельдович, был первым, кто попытался объяснить ненулевую энергию вакуума Вселенной, за счет квантовых флуктуаций физических полей [2 (1)]. Поскольку каноническая КТП, уже на уровне нулевых колебаний, дает для $\langle\rho_V\rangle$ слишком большое численное значение, Зельдович постулировал, что энергия нулевых колебаний должна в точности сокращаться с членом $\Lambda/8\pi G,$ а ненулевой вклад в $\langle\rho_V\rangle$ дают пертурбативные эффекты только высших порядков и в частности эффект гравитационного взаимодействия между виртуальными частицами в вакуумных флуктуациях. Формально это соответствует отбрасыванию однопетлевых вакуумных диаграмм фейнмана и учету вклада двухпетлевых диаграмм. При этом плотность энергии составляет $\langle\rho_V\rangle \simeq G\kappa^6$ [2 (1)]. Зельдович принял без какого либо серьезного физического основания $\kappa = 1$ ГэВ, что дает $\langle\rho_V\rangle \simeq 10^{-38}$ ГэВ ^{4}, что на много порядков меньше плотности энергии нулевых колебаний, но примерно на 9 порядков больше, чем требовалось из наблюдательных ограничений на величину $|\langle\rho_V\rangle + (\Lambda/8\pi G)|$.

III. Вакуум Эйнштейна-Глинера-Зельдовича.

Напомним, что уравнения Эйнштейна с космологическим членом имеют следующий вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (3.1)$$

и

при любых $\Lambda > 0$ существует статическое решение для Вселенной заполненной пылевидной материей, обладающей нулевым давлением и плотностью $\Lambda/8\pi G.$

В середине 1960 годов Э.Б.Глинер [4-5] выдвинул гипотезу о существовании во Вселенной идеально однородной макроскопической среды с плотностью

$$\rho_V = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \tag{3.2}$$

При этом: (**i**) плотность (3.2) не изменяется во времени и пространстве и остается одной и той же во всех системах отсчета,(**ii**) Среда с плотностью (3.2) обладает отрицательным давлением p_V, и ее уравнение состояния имеет следующий вид:

$$p_V = -\rho_V. \tag{3.3}$$

Э.Б.Глинер показал, что его постулаты (i)-(ii) фактически эквивалентны первоначальному предположению Эйнштейна о наличии ненулевой космологической постоянной $\Lambda > 0.$ Э.Б.Глинер также показал, что
1. Эта среда не может служить системой отсчета, т.е. если имеются две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга с некоторой ненулевой скоростью, то среда с уравнением состояния (2.3) будет сопутствовать и той и другой. Таким образом среда, описываемая уравнениями (3.2)-(3.3), является вакуумом.
2. Среда с уравнением состояния (3.3) является неизменной и "вечной". Ее энергия представляет собой абсолютный и постоянный во времени минимум энергии, содержащейся в мировом пространстве. А этото также обязательное свойство вакуума.
3. Среда с давлением, определяемым уравнением (3.3), создает не тяготение, а антитяготение. В самом деле,согласно общей теории относительности тяготение определяется не только плотностью среды, но и ее давлением. При этом "эффективная гравитирующая плотность" в общем случае выражается в виде суммы двух слагаемых:

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V + 3p_V \tag{3.4}$$

Отметим, что в силу уравнения состояния (3.3) сумма в правой части (3.4) оказывается строго отрицательной:

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V + 3p_V = -2\rho_V < 0. \qquad (3.5)$$

Такое истолкование Э.Б.Глинером Эйнштейновской космологической постоянной, по понятным причинам, встреченное в штыки 40 лет назад, теперь стало общепринятым. В отечественной литературе принято говорить о космической среде с плотностью (3.2) и уравнением состояния (3.3) как о вакууме Эйнштейна-Глинера (ЭГ-вакуум) [3].

Я.Б.Зельдвич в работе "Космологическая постоянная и теория элементарных частиц" [2 (2)], сделал первую попытку, получить уравнение состояния вакуума (3.3) исходя из первых принципов. Плотность энергии вакуума Я.Б.Зельдвич вычисляет в однопетлевом приближении, т.е. с учетом только нулевых колебаний.

Соответствующие формальные выражения для ρ_V и p_V в случае скалярных частиц имеют вид

$$\rho_V^{\mathbf{B}} = \frac{1}{2}\frac{4\pi c}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^\infty p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp = K\int\limits_0^\infty p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp = KI(\mu), \mu = m_0 c \qquad (3.6)$$

и соответственно

$$p_V^{\mathbf{B}} = \frac{K}{3}\int\limits_0^\infty \frac{p^4\,dp}{\sqrt{p^2+\mu^2}} = KF(\mu). \qquad (3.7)$$

Для фермионов мы имеем [2 (2)]

$$\rho_V^{\mathbf{F}} = -4KI(\mu), p_V^{\mathbf{F}} = -4KF(\mu). \qquad (3.8)$$

С учетом вкладов всех бозонов и всех фермионов мы имеем

$$\rho_V = \rho_V^{\mathbf{B}} + \rho_V^{\mathbf{F}} = \sum_i c_i^{\mathbf{B}} I(\mu_i^{\mathbf{B}}) - c_i^{\mathbf{F}} 4I(\mu_i^{\mathbf{F}}),$$
$$p_V = p_V^{\mathbf{B}} + p_V^{\mathbf{F}} = \sum_i c_i^{\mathbf{B}} F(\mu_i^{\mathbf{B}}) - c_i^{\mathbf{F}} 4F(\mu_i^{\mathbf{F}}), \tag{3.9}$$

где соэффициенты $c_i^{\mathbf{B}}$ и $c_i^{\mathbf{F}}$ выражают сответственно число бозонов и число фермионов i -го сорта.Регуляризованные методом Паули-Вилларса [59] выражения (3.9) имеют следующий вид [2 [2]]:

$$\rho_V(m_{\mathbf{eff}}) = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} \left[f^{\mathbf{B}}(\mu) + f^{\mathbf{F}}(\mu) \right] I(\mu) d\mu = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) I(\mu) d\mu,$$
$$p_V(m_{\mathbf{eff}}) = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} \left[f^{\mathbf{B}}(\mu) + f^{\mathbf{F}}(\mu) \right] F(\mu) d\mu = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) F(\mu) d\mu, \tag{3.10}$$

где функция $f(\mu)$ выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия конечности для плотности и давления

$$\rho_V < \infty, p_V < \infty. \tag{3.11}$$

Физический смысл функции $f(\mu)$ будет ясен из дальнейшего изложения. Следуя работе [2 [2]], рассмотрим конечные величины

$$I(\mu,p_0) = \int_0^{p_0} p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp = \int_0^{p_\mu} p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp + \int_{p_\mu}^{p_0} p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp =$$

$$\int_0^{p_\mu} p^2\sqrt{p^2+\mu^2}\,dp + \int_{p_\mu}^{p_0} p^3\sqrt{1+\frac{\mu^2}{p^2}}\,dp \tag{3.12}$$

и

$$F(\mu,p_0) = \frac{1}{3}\int_0^{p_0}\frac{p^4dp}{\sqrt{p^2+\mu^2}} = \frac{1}{3}\int_0^{p_\mu}\frac{p^4dp}{\sqrt{p^2+\mu^2}} + \frac{1}{3}\int_{p_\mu}^{p_0}\frac{p^4dp}{\sqrt{p^2+\mu^2}} =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{p_\mu}\frac{p^4dp}{\sqrt{p^2+\mu^2}} + \frac{1}{3}\int_{p_\mu}^{p_0}\frac{p^3dp}{\sqrt{1+\frac{\mu^2}{p^2}}}, \tag{3.13}$$

где $\mu^2/p_\mu^2 \leq m_{\mathbf{eff}}^2/p_\mu^2 \ll 1.$ Подставив Тейлоровское разложение

$$\sqrt{1+\frac{\mu^2}{p^2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{p^2}-\frac{1}{8}\frac{\mu^4}{p^4}+\frac{1}{16}\frac{\mu^6}{p^6}+\ldots, \tag{3.14}$$

где $\mu^2/p^2 \leq m_{\mathbf{eff}}^2/p^2 \ll 1,$ в формулу (3.12), мы получим

$$I(\mu,p_0) = C_1\mu^4+\frac{1}{4}p_0^4+\frac{1}{4}\mu^2p_0^2-\frac{1}{8}\mu^4\ln\left(\frac{p_0}{\mu}\right)-\frac{1}{32}\frac{\mu^6}{p_0^2}+O(p_0^{-3}). \tag{3.15}$$

Подставив Тейлоровское разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\mu^2}{p^2}}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{p^2} + \frac{3}{8}\frac{\mu^4}{p^4} - \frac{5}{16}\frac{\mu^6}{p^6} + \ldots, \qquad (3.16)$$

где $\mu^2/p \le m_{\mathbf{eff}}^2/p^2 \ll 1,$ в формулу (3.13), мы получим

$$F(\mu, p_0) = C_2\mu^4 + \frac{1}{12}p_0^4 - \frac{1}{12}\mu^2 p_0^2 + \frac{1}{8}\mu^4 \ln\left(\frac{p_0}{\mu}\right) + \frac{5}{32}\frac{\mu^6}{p_0^2} + O(\mu^7 p_0^{-3}). \qquad (3.17)$$

Подставив выражения (3.15) и (3.17) в уравнения (3.10) мы получим

$$\rho_V(m_{\mathbf{eff}}) =$$

$$\frac{1}{4}p_0^4 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \frac{1}{4}p_0^2 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_0\right) \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu + \qquad (3.18)$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu - \left(\frac{1}{p_0^2}\right)\frac{1}{32}\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_0^{-3}),$$

и

$$p_V(m_{\mathbf{eff}}) =$$

$$\frac{1}{12}p_0^4\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu - \frac{1}{12}p_0^2\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_0\right)\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu - \tag{3.19}$$

$$-\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu + \left(\frac{5}{p_0^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_0^{-3}).$$

В силу (3.18)-(3.19) очевидно, что для справедливости неравенств (3.11) необходимо чтобы имели место тождества

$$\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu = \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu = \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu \equiv 0. \tag{3.20}$$

В этом случае мы имеем

$$\rho_V(m_{\mathbf{eff}}) = \frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu,$$

$$p_V(m_{\mathbf{eff}}) = -\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu, \tag{3.21}$$

что и дает требуемое соотношение [2 (2)]

$$p_V = -\rho_V. \tag{3.22}$$

Замечание 3.1. Подчеркнем, что с точки зрения КТП, применение метода Паули-Вилларса совместно с тождествами (3.20), автоматически ведет к теории поля с индефенитной метрикой, см. по этому поводу детальное пояснение в [59]. С другой стороны, не существует также каких либо принципиальных соображений запрещающих нам выбрать

$$\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu = \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu \equiv 0 \qquad (3.23)$$

вместо (3.20) т.е. рассматривать модель КТП с нулевой плотностью энергии вакуума. Однако *настоящая трудность* состоит в том, что численная оценка порядка величины плотности ρ_V, полученная еще самим Я.Б.Зельдвичем на основе выражения вида (3.23), находится в грубом противоречии с астрономическими данными. В [2 (2)] Я.Б.Зельдвич на основе уравнения (3.21) получил следующую оценку

$$\rho_\Lambda = m_{\mathbf{p}}\left(\frac{m_{\mathbf{p}}c}{\hbar}\right)^3 \sim 10^{-17}\text{г}/\text{см}^3,$$

$$\Lambda = 10^{-10}\text{см}^{-2}, \qquad (3.24)$$

где $m_{\mathbf{p}}$ -масса протона. Оценка (3.24) для космологической постоянной Λ, очевидно противоречит как старым так и современным астрономическими данным: $\Lambda \sim 10^{-57}\text{см}^{-2}$.

Замечание 3.2. Подчеркнем, что для устранения вышеуказанного противоречия, достаточно принять условия (3.23) вместо условий (3.20) либо условия (3.), которые будут рассмотренны нами в дальнейшем.

Замечание 3.3.Подчеркнем также, что общий подход к решению проблемы космологической постоянной, указал ещ сам Я.Б.Зельдвич [2 (2)] **... "**Недавно А. Д. Сахаров предложил теорию тяготения, или, точнее, обоснование уравнений ОТО, основанное на рассмотрении вакуумных флуктуаци [32]. В этой теории существенно предположение, что существует некая элементарная длина L или соответствующий предельный импульс $p_0 = \hbar/L$. На меньших длинах или при больших импульсах теория неприменима. Сахаров получает выражение гравитационной постоянной G через L или p_0 :

$$G = \frac{c^3L^2}{\hbar} = \frac{\hbar c^3}{p_0^2}. \qquad (IX.6)$$

Это выражение известно со времен Планка, но его читали «справа налево»: гравитация определяет длину L и импульс p_0. По Сахарову,первичны L и p_0. Подставим (IX,6) в выражение (IX,4), получим

$$\rho_\Lambda = \frac{m^6c^5}{p_0^2\hbar^3}, \varepsilon_{вак} = \frac{m^6c^7}{p_0^2\hbar^3}. \qquad (IX.7)$$

Именно такое выражение имели первые отброшенные (при $p_0 \to \infty$) члены в формулах (VIII.10), (VIII.11). Таким образом, можно предложить следующую интерпретацию космологической постоянной: существует теория элементарных частиц, которая давала бы (по не вскрытому в настоящее время механизму) тождественно нулевую энергию вакуума, если бы эта теория была применима неограниченно, до сколь угодно больших импульсов; существует импульс p_0, за пределами которого теория неприменима *); наряду с другими следствиями, видоизменение теории дает отличную от нуля энергию вакуума; общие соображения делают вероятным, что эффект пропорционален p_0^{-2} .(Понятно, что p_0 входит так, чтобы не нарушать релятивистской инвариантности теории, в отличие от p_0 в формулах приложения VIII *).
Выяснение вопроса о существовании и величине космологической постоянной будет иметь огромное принципиальное значение также и для теории элементарных частиц".
Замечание 3.4. Требование Я.Б. Зельдовича касающееся выполнения постулата Лоренц-инвариантоности теории, в настоящее время не представляется таким же фундаментальным, как и 45 лет тому назад, когда была написана работа [2 (2)]. По современным представлениям, на достаточно малых пространственно-временных масштабах, алгебра Пуанкаре на малых масштабах может быть сильно деформирована, а параметром деформации является некоторая фундаментальная длина, которая является инвариантом соответствующей деформированной группы Лоренца, см. например [60-66] и [67-68].
Замечание 3.5. Вместо постулата Лоренц-инвариантоности заявленного Я.Б. Зельдовичем в [2 (2)], мы постулируем:
(**1**) приближенную Лоренц-инвариантность и
(**2**) инвариантность модуля фундаментального импульса $p_0 = \sqrt{p_{0,1}^2 + p_{0,2}^2 + p_{0,3}^2}$ и фундаментальной длины L относительно подходящим образом деформированной группы Лоренца $DL_+^\uparrow$ [67-68].

В дальнейшем мы обозначаем *инвариантный* фундаментальный импульс и *инвариантную* фундаментальную длину символами $p_* = \sqrt{p_{*1}^2 + p_{*2}^2 + p_{*3}^2}$ и l_* соответственно. Соответствующая инвариантная метрика в импульсном пространстве имеет вид
68]

$$\|p\|^2 = \frac{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}{(1 + l_* p_0)^2}. \tag{3.25}$$

Замечание 3.6. $DL_+^{\updownarrow}$ -инвариантное действие для свободных квантованных полей имеет вид
68]

$$S(\varphi) = \int d^4x \left[\frac{\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha \varphi)(\partial_\beta \varphi)}{(1 + l_*^2 \partial_0 \varphi)^2} + \frac{m^2}{2}\varphi^2 \right]. \tag{3.26}$$

В силу (3.26) уравнения движения свободных будут существенно нелинейны. В данной работе мы используем каноническое квадратичное выражение для $S(\varphi)$. В общем случае решение строится в виде формального ряда $\sum_{i=0}^{\infty} l_*^{2i} \varphi_i(x, p_*)$ по степеням малого параметра l_*^2, где $\varphi_0(x, p_*)$ каноническое свободное поле с импульсным обрезанием.

Определение 3.1. Пусть заданы множество $E \subsetneq \mathbb{R}^4$ и фиксированное число $\delta \in \mathbb{R}, \quad 0 < \delta \ll 1.$ Пусть также задано шаровое покрытие $\Theta = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества $E \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} \omega_i$ шарами диаметра $|\omega_i|$. Если $\inf_{i \in \mathbb{N}} |\omega_i| \geq \delta$ то покрытие Θ_δ называется грубым зернистым δ -покрытием множества E.

Определение 3.2. Определим функцию $\mathcal{F}_d(\Theta_\delta)$ произвольного большого δ -покрытия как $\mathcal{F}_d(\Theta_\delta) = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\omega_i|^d$. Грубой зернистой d -мерой Хаусдорфа $M_d^{\mathbf{GH}}(E, \delta)$ множества E называется величина

$$M_d^{\mathbf{GH}}(E, \delta) = \inf_{\{\Theta_\delta\}} \mathcal{F}_d(\Theta_\delta), \tag{3.27}$$

где инфимум берётся по всем грубым δ -покрытиям множества E.

Определение 3.3. Пусть найдется число $d_G^\delta = d_G(E, \delta)$ такое, что

(i) $\forall d \left(d > d_G^\delta \right) [M_d^{\mathbf{GH}}(E, \delta) = O(\delta)],$

(ii) $\forall d \left(d < d_G^\delta \right) [M_d^{\mathbf{GH}}(E, \delta) = o(\delta^{-1})].$

Тогда $d_G(E,\delta)$ называется грубой зернистой δ -размерностью множества $E.$

Определение 3.4. Пространством-временем (отрицательной размерности) с зернистой микроструктурой называется обобщенный мультифрактал $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha)\} = \{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_+), \Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-)\}$ такой, что (**i**) все Гельдеровские экспоненты α отрицательны, т.е. $\{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_+)\} = \varnothing$ и (**ii**) существует $\delta > 0$ такое что для всех $\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-)$ выполнено соотношение $d_G(\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-),\delta) \approx 4.$

Мы будем исходить из следующих постулатов:

(**i**) темная материя кроме канонического темного сектора, содержит также особый сектор, который описывается "духами" Паули-Вилларса, т.е.полное пространство состояний $\mathbf{H}$ обладает индефинитной метрикой. Обычные, т.е. не духовые (не фрактальные) квантовые поля с импульсным обрезанием $p_*,$ заданные на пространстве Минковского M_4 , мы всегда обозначаем символами $\varphi(x,p_*)$ (бозоны) и $\psi(x,p_*)$ (фермионы), а духовые (не фрактальные) квантовые поля с импульсным обрезанием p_* мы в дальнейшем всегда обозначаем символами $\breve{\varphi}(x,p_*)$ (бозоны) и $\breve{\psi}(x,p_*)$ (фермионы) где $x \in M_4$. Фрактальные поля любых типов мы обозначаем символами $\varphi(x,p_*;D_-), \breve{\varphi}(x,p_*;D_-), \psi(x,p_*;D_-), \breve{\psi}(x,p_*;D_-)$ и т.д.

(**ii**) В классическом пределе $p_* \to \infty$ все не фрактальные квантовые поля сходятся (в смысле обобщенных функций) к каноническим квантовым полям Вайтмана.

(**iii**) Все константы связи духовых полей с квантовыми полями обычной материи тождественно равны нулю. Таким образом, полное пространство состояний $\mathbf{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-,$ где $\mathbf{H}_+$ - обычное Гильбертово пространство, а $\mathbf{H}_-$ -линейное подпространство с семидефинитной метрикой [59]. Пусть Ω_+ -вакуумный вектор для обычной материи, $\Omega_+ \in \mathbf{H}_+$ и Ω_- -вакуумный вектор для темной материи $\Omega_- \in \mathbf{H}_-.$ Тогда векторы Ω_+ и Ω_- удовлетворяют каноническим условиям [59] и в частности: $\langle\Omega_+,\Omega_+\rangle = 1, \langle\Omega_-,\Omega_-\rangle = -1.$

(**iv**) Как обычные так и духовые квантовые поля взаимодействуют с Римановой кривизной R минимальным образом [35].

(**v**) Вклад всех нефрактальных полей в плотность энерги вакуума $\rho_V,$ описывается пертурбативно или только в приближении свободных полей и имеет порядок величины $\rho_V^* = O(p_*^{-2})$ (таким образом, в классическом пределе $p_* \to \infty$ этот вклад будет нулевым).

Это соответствует тому, что при вычислении вакуумных диаграмм, в нефрактальной части гамильтониана взаимодействия, необходимо сделать подстановку

$$\underline{\varphi}(x,p_*) = \varphi(x,p_*) + \sum_n b_n \breve{\varphi}_n(x,p_*,\mu_n^2),$$
$$\underline{\psi}(x,p_*) = \psi(x,p_*) + \sum_n c_n \breve{\psi}_n(x,p_*,\varkappa_n^2), \tag{3.28}$$

где духовые поля удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям

$$[\breve{\varphi}_m(x,p_*,\mu_m^2),\breve{\varphi}_n(x',p_*,\mu_n^2)] = -i\rho_n\Delta(x-x',p_*,\mu_n^2)\delta_{mn},$$
$$[\breve{\psi}_m(x,p_*,\varkappa_m^2),\breve{\psi}_n(x',p_*,\varkappa_n^2)] = -i\varepsilon_n S(x-x',p_*,\varkappa_n^2)\delta_{mn}. \tag{3.29}$$

При этом полные поля $\underline{\varphi}(x,p_*)$ и $\underline{\psi}(x,p_*)$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям

$$\left[\underline{\varphi}(x,p_*),\underline{\varphi}(x',p_*)\right] = i\sum_n \rho_n b_n^2 \Delta(x-x',p_*,\mu_n^2),$$
$$\left[\underline{\psi}(x,p_*),\underline{\psi}(x',p_*)\right] = -i\sum_n \varepsilon_n \bar{c}_n c_n S(x-x',p_*,\varkappa_n^2). \tag{3.30}$$

Для того чтобы теория поля была конечной, на величины $b_n,\rho_n,c_n,\varepsilon_n$ необходимо наложить хорошо известные условия Паули-Вилларса [59]

$$\sum_n \rho_n b_n^2 = 0, \sum_n \rho_n b_n^2 \mu_n^2 = 0,$$
$$\sum_n \varepsilon_n \bar{c}_n c_n = 0, \sum_n \varepsilon_n \bar{c}_n c_n \varkappa_n^2 = 0. \tag{3.31}$$

Подчеркнем, что для того чтобы выполнялось условие Зельдовича см. [2 $_2$] формула (IX.7): $\rho_V = O(p_*^{-2})$, необходимо также наложить дополнительные чисто формальные условия сверхтонкой подстройки (3.23), либо воспользоваться постулатом (**vii** *), введенным ниже.
(**vi**) Физическое пространство-время это пространство-время (отрицательной размерности) с зернистой микроструктурой и такое что: $d_G(\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-),l_*) \approx 4.$
(**vii**) сектор стандартной материи и сектор темной материи зеркально симметричны

друг другу вплоть до энергий порядка Планковской $E_{\mathbf{P}}$, т.е.

$$f(\mu) = f_{\mathbf{s.m}}(\mu) + f_{\mathbf{d.m}}(\mu), \tag{3.32}$$

где $f_{\mathbf{s.m}}(\mu) = -f_{\mathbf{d.m}}(\mu),$ если $\mu < m_{\mathbf{eff}}$ и $f(\mu) = \eta = const,$ если $\mu \geq m_{\mathbf{eff}}$ $m_{\mathbf{eff}} \simeq M_{\mathbf{P}} = E_{\mathbf{P}}/c^2.$ Здесь η -некоторое число $|\eta| \ll 1,$ которое может иметь как положительное так и отрицательное значение.

(**vii** *) сектор стандартной материи (**s.m**) и сектор темной материи (**d.m**) зеркально "почти" симметричны друг другу, т.е.

$$f(\mu) = f_{\mathbf{s.m}}(\mu) + f_{\mathbf{d.m}}(\mu) \simeq 0, \tag{3.33}$$

где $f_{\mathbf{s.m}}(\mu) \simeq -f_{\mathbf{d.m}}(\mu),$ если $\mu < m_{\mathbf{eff}}$ и $f(\mu) = \eta, |\eta| \ll 1,$ если $\mu \geq m_{\mathbf{eff}} m_{\mathbf{eff}} \ll M_{\mathbf{P}} = E_{\mathbf{P}}/c^2.$

Определение 3.5. Вакуумная среда называется классическим вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича, если уравнение состояния этой среды имеет вид

$$\rho_V = -p_V = \Lambda/8\pi G. \tag{3.34}$$

Замечание 3.7. Изотропная космологическая модель, по определению задается метрикой [5]

$$ds^2 = dt^2 - a(t)\left[\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2(\sin^2\vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2)\right], \tag{3.35}$$

где κ -кривизна пространства. Функция $a(t)$ удовлетворяет уравнениям Фридмана

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{\mathbf{m}} + 3p_{\mathbf{m}} + \rho_V + 3p_V)a = -\frac{4\pi G\widetilde{\rho}_{\mathbf{eff}}}{3}a,$$

$$\widetilde{\rho}_{\mathbf{eff}} = \rho_{\mathbf{m}} + 3p_{\mathbf{m}} + \rho_V + 3p_V, \tag{3.36}$$

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{\mathbf{m}} + \rho_V) - \frac{\kappa}{a^2},$$

где $\rho_{\mathbf{m}}$ -плотность материи, $p_{\mathbf{m}}$ -давление материи, $\widetilde{\rho}_{\mathbf{eff}}$ -полная эффективная гравитирующая плотность материи и ваккумной среды. Напомним, что в силу уравнений Фридмана (3.33) условия экспоненциального роста масштабного фактора следующие [5] (i) $\widetilde{\rho}_{\mathbf{eff}} < 0,$ (ii) $\rho_V > 0.$ В случае $\rho_V < 0$ расширение всегда сменится сжатием как в случае замкнутого так и в случае открытого мира [2 (2)].

Определение 3.6. Вакуумная среда называется неклассическим или обобщенным вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича, если эффективная гравитирующая плотность этой среды $\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V + 3p_V$ строго отрицательна,т.е.

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V + 3p_V < 0. \tag{3.37}$$

Для плотности вакуума $\rho_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*)$ в случае пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3 - |D_-| < 0$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний),в силу равенств (3.18) и (V.15) (см.приложение V) мы получаем следующее выражение

$$\rho_V(D_-,m_{\mathbf{eff}},p_*) = \rho_V(m_{\mathbf{eff}}) + \widetilde{\rho}_V(D_-,m_{\mathbf{eff}},p_*)$$

$$\frac{1}{4}p_0^4\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \frac{1}{4}p_0^2\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_0\right)\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu +$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu - \left(\frac{1}{p_0^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_0^{-3}) + \qquad (3.38)$$

$$2K\sqrt{\pi^3}\,\frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm$$

Окончательно для полной плотности энергии вакуума $\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*)$ мы получаем следующее выражение

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$\frac{1}{4}p_*^4\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \frac{1}{4}p_*^2\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_*\right)\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu +$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu - \left(\frac{1}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_0^{-3}) + \qquad (\mathbf{3}.39)$$

$$+2K\sqrt{\pi^3}\sum_{r=1}^{N}\frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm + O(p_*^{-3}).$$

Для давления вакуума $p_V(D_-,m_{\mathbf{eff}},p_*)$ в случае случае пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний),в силу равенств (3.19) и (V.22) (см.приложение V) мы имеем следующее выражение

$$p_V(D_-, m_{\mathbf{eff}} p_*) =$$

$$\frac{1}{12}p_*^4 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu - \frac{1}{12}p_*^2 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right) \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu -$$

$$-\frac{1}{8} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 (\ln\mu) d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (3.40)$$

$$+\frac{K}{3}\frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} p_*^{4-|D_-|} \int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m) m^{8-2|D_-^{(r)}|} dm.$$

С учетом равенства (3.40) для полного давления вакуума $p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*)$ мы получаем следующее окончательное выражение

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}} p_*) =$$

$$\frac{1}{12}p_*^4 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu - \frac{1}{12}p_*^2 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right) \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu -$$

$$-\frac{1}{8} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 (\ln\mu) d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (3.41)$$

$$+\frac{K}{3}\sum_{r=1}^{N}\frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} p_*^{4-|D_-|} \int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m) m^{8-2|D_-^{(r)}|} dm.$$

Выражение для эффективной гравитирующей плотности вакуума $\rho_{\mathbf{eff}}$ в силу равенств (3.39) и (3.41) (см.приложение V) имеет следующий вид

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V^{\mathbf{tot}} + 3p_V^{\mathbf{tot}} =$$

$$\frac{1}{2}p_*^4 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \left(3C_2 + C_1 + \frac{1}{4}\ln p_*\right) \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu$$

$$-\frac{1}{4} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{16} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (3.42)$$

$$+4K\sqrt{\pi^3} \sum_{r=1}^{N} \frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)} \frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)} \int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm.$$

При соблюдении условий сверхтонкой подстройки (3.20), в силу (3.39)-(3.41) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu-\left(\frac{1}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu+O(\mu^7 p_*^{-3})+$$

$$+2K\sqrt{\pi^3}\sum_{r=1}^{N}\frac{p_*^{4-\left|D_-^{(r)}\right|}}{(|D_-^{(r)}|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-\left|D_-^{(r)}\right|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\left|D_-^{(r)}\right|}{2}\right)}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2\left|D_-^{(r)}\right|}dm+O(p_*^{-3}),$$

$$(\mathbf{3}.43)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$-\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu+\left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu+O(\mu^7 p_*^{-3})+$$

$$+\frac{K}{3}\sum_{r=1}^{N}\frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}p_*^{4-|D_-|}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2\left|D_-^{(r)}\right|}dm.$$

При достаточно больших значениях p_* в силу (3.43) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) \simeq \frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(m)m^4(\ln m)dm,$$

$$(3.44)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) \simeq \frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(m)m^4(\ln m)dm.$$

Очевидно, что в этом случае, с большой степенью точности также справедливо равенство (3.34) и следовательно вакуумная среда является классическим вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича.Подчеркнем что оценка (3.26) была получена Я.Б. Зельдовичем с учетом вклада в ρ_V только стандартной материи. Если принять постулат (**vii** *) то очевидным образом мы сможем получить значение ρ_Λ

полностью соответствующее современным астрономическими данным для Λ. Однако при этом должны выполняться соотношения сверхтонкой подстройки [аналогичные условиям (3.20)], следующего вида

$$p_*^4\left(\int_0^{m_{\mathrm{eff}}} f(\mu)d\mu\right) = O(p_*^{-k}), p_*^2\left(\int_0^{m_{\mathrm{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu\right) = O(p_*^{-k}),$$

$$\left(\int_0^{m_{\mathrm{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu\right)\ln p_* = O(p_*^{-k}), k > 2, \tag{3.45}$$

$$\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(m)m^4(\ln m)dm = O(p_*^{-2}).$$

Таким образом мы видим,что в современную космологическую эпоху, вакуумная среда является классическим вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича,если выполняются условия сверхтонкой подстройки (3.45). Не существует каких либо физических соображений, по которым мы можем полностью исключить возможность сверхтонкой подстройки, но тем не менее очевидно, что такая возможность может носить только совершенно случайный характер.Если мы теперь постулируем условия (3.23), то тогда в силу (3.43) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$-\left(\frac{1}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O\left(m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right) +$$

$$+2K\sqrt{\pi^3}\sum_{r=1}^{N}\frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm + O(p_*^{-3}), \qquad (\mathbf{3}.46)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$\left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O\left(m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right) +$$

$$+\frac{K}{3}\sum_{r=1}^{N}\frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}p_*^{4-|D_-|}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm.$$

При достаточно больших значениях параметров $\delta_r = |D_-^{(r)}|-4 \geq 3, r = 1,\ldots,N$ в силу (3.43) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) \simeq -\frac{1}{32p_*^2}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu,$$

$$(3.47)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) \simeq \frac{5}{32p_*^2}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu.$$

Очевидно, что в этом случае, с большой степенью точности также справедливо равенство

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) \simeq -5\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*). \qquad (3.48)$$

При этом вакуумная среда является неклассическим вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича, типа квинтэссенции.Если принять постулат (**vii** *) то в силу (3.39)-(3.41) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\frac{1}{4}\eta m_{\mathbf{eff}} p_*^4 + \frac{1}{4}\eta m_{\mathbf{eff}}^3 p_*^2 + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_*\right)\eta m_{\mathbf{eff}}^5 +$$

$$+\frac{1}{8}\eta \int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}} \mu^4(\ln\mu)d\mu - \frac{1}{32}\eta m_{\mathbf{eff}}^7\left(\frac{1}{p_*^2}\right) + O\left(\eta m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right) + \qquad (3.49)$$

$$+2K\eta\sqrt{\pi^3}\sum_{r=1}^{N}\frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|} m^{9-2|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)(2|D_-^{(r)}|-9)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)} + O(p_*^{-3}).$$

и

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$\frac{1}{12}\eta p_*^4 m_{\mathbf{eff}} - \frac{1}{12}\eta m_{\mathbf{eff}}^3 p_*^2 + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right)\eta m_{\mathbf{eff}}^5 -$$

$$-\frac{1}{8}\eta\int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu + \frac{5}{32}\eta m_{\mathbf{eff}}^7\left(\frac{1}{p_*^2}\right) + O\left(\eta m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right) + \tag{3.50}$$

$$+\frac{K}{3}\sum_{r=1}^{N}\frac{2\sqrt{\pi^3}\,m^{9-2|D_-^{(r)}|}}{(|D_-|-4)(2|D_-^{(r)}|-9)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}p_*^{4-|D_-|}.$$

При достаточно больших значениях параметров $\delta_r = |D_-^{(r)}| - 4 \geq 3, r = 1,\ldots,N$ в силу (3.49)-(3.50) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) = \frac{1}{4}\eta m_{\mathbf{eff}} p_*^4 + \frac{1}{4}\eta m_{\mathbf{eff}}^3 p_*^2 + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_*\right)\eta m_{\mathbf{eff}}^5 +$$

$$+\frac{1}{8}\eta\int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}}\mu^4(\ln\mu)d\mu - \frac{1}{32}\eta m_{\mathbf{eff}}^7\left(\frac{1}{p_*^2}\right) + O\left(\eta m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right),$$

$$\tag{3.51}$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) = \frac{1}{12}\eta p_*^4 m_{\mathbf{eff}} - \frac{1}{12}\eta m_{\mathbf{eff}}^3\, p_*^2 + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right)\eta m_{\mathbf{eff}}^5 -$$

$$-\frac{1}{8}\eta\int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu + \frac{5}{32}\eta m_{\mathbf{eff}}^7\left(\frac{1}{p_*^2}\right) + O\left(\eta m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-3}\right).$$

Выбрав η такое, что $|\eta| = O(p_*^{-7})$, в силу (3.51) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) = \frac{1}{4} m_{\mathbf{eff}} p_*^{-3} + \frac{1}{4} m_{\mathbf{eff}}^3 p_*^{-5} + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_*\right) m_{\mathbf{eff}}^5 p_*^{-7} +$$

$$+\frac{1}{8} p_*^{-7} \int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}} \mu^4 (\ln\mu) d\mu - \frac{1}{32} m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-9} + O\left(m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-10}\right),$$

$$(3.52)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) = \frac{1}{12} p_*^{-3} m_{\mathbf{eff}} - \frac{1}{12} m_{\mathbf{eff}}^3 p_*^{-5} + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right) m_{\mathbf{eff}}^5 p_*^{-7} -$$

$$-\frac{1}{8} p_*^{-7} \int\limits_{\mu_0}^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^4 (\ln\mu) d\mu + \frac{5}{32} m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-9} + O\left(m_{\mathbf{eff}}^7 p_*^{-10}\right).$$

Выбрав теперь p_* такое, что $p_* = O(m_{\mathbf{eff}}),$ в силу (3.52) мы имеем

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}} p_*) = O(p_*^{-2}) - \frac{1}{8} O(p_*^{-2} \ln p_*),$$

$$(3.53)$$

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) = O(p_*^{-2}) + \frac{1}{8} O(p_*^{-2} \ln p_*).$$

Очевидно, что при достаточно больших p_* ,вакуумная среда является классическим вакуумом Эйнштейна-Глинера-Зельдовича.

IV.Квантовая механика и квантовая теория поля в пространствах отрицательной фрактальной размерности.

Пусть задана пара $\{X, \mu_H\}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$ и μ_H это D -мерная мера Хаусдорфа на $X.$ Пусть $f(x)$ это μ_H -измеримая функция на X такая что $f(x) = f(|x|) = f(r).$ Тогда при известных предположениях о множестве X справедливо следующее равенство [12]

$$\mathbf{J}_D(f) = \int_X f(x)d\mu_H(x) = \frac{D\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)}\int_0^\infty f(r)r^{D-1}dr \qquad (4.1)$$

Пусть интеграл в правой части равенства (4.1) сходится абсолютно при $D \geq 0$. Тогда интеграл $\mathbf{J}_D(f)$ как функция параметра D, очевидным образом определен также при всех комплексных значениях $D = D_{\mathbb{C}_+}$, лежащих в правой комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+$. При известных предположениях о свойствах функции $f(r)$ интеграл $\mathbf{J}_D(f)$ как мероморфную функцию комплексного параметра $D = D_{\mathbb{C}_-}$, можно задать и в некоторой полосе левой комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_-$, посредством канонической процедуры аналитического продолжения. В этом случае мы пишем

$$\mathbf{J}_{D_{\mathbb{C}}}(f) = \frac{D\pi^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right)}\int_0^\infty f(r)r^{D_{\mathbb{C}}-1}dr, \qquad (4.2.a)$$

предполагая, что соответствующее аналитическое продолжение существует.

$$(\mathbf{J}_{D_{\mathbb{C}},\varepsilon}(f))_\varepsilon = \frac{D\pi^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right)}\left(\int_0^\infty \frac{f(r)r^{i\operatorname{Im}D_{\mathbb{C}}}}{r^{-\operatorname{Re}D_{\mathbb{C}}+1}+\varepsilon}dr\right)_\varepsilon. \qquad (4.2.b)$$

Пусть теперь $f(0) < \infty$ и $f(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Тогда при $|D_{\mathbb{C}}| \to 0$ справедливо следующее формальное асимптотическое разложение [11]

$$\mathbf{J}_{D_{\mathbb{C}}}(f) = \frac{\pi^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right)}\sum_{n=0}^\infty b_n(f)\frac{D_{\mathbb{C}}^n}{n!},$$

$$b_0(f) = -\int_0^\infty f'(r)dr, b_n(f) = -\int_0^\infty f'(r)(\ln r)^n dr. \qquad (4.3)$$

Разложение (4.3) называется размерным разложением [11]. Свойства размерных разложений для случая положительной размерности $D \in \mathbb{R}_+$ изучались в работе [11]. Объем и площадь поверхности сферы единичного радиуса в метрическом пространстве $X \subset \mathbb{R}^n$ Хаусдорфовой размерности $D_+ = d_H \in \mathbb{R}_+$ задаются следующими стандартными формулами [11-12]:

$$V_{D_+} = \frac{\pi^{\frac{D_+}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{D_+}{2}\right)}, S_D = \frac{D\pi^{\frac{D_+}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{D_+}{2}\right)}. \qquad (4.4)$$

На произвольные комплексные размерности $D_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ формулы (4.2) можно распространить с помощью аналитического продолжения правых частей уравнений (4.4) в комплексную плоскось $\mathbb{C}$. Таким образом для $D_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$
мы имеем

$$V_{D_{\mathbb{C}}} = \frac{\pi^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right)}, S_{D_{\mathbb{C}}} = \frac{D_{\mathbb{C}}\pi^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right)}. \qquad (4.5)$$

Для
функций (4.5) размерное разложение (4.3) имеет вид

$$\begin{aligned} V_{D_{\mathbb{C}}} &= 1 + \frac{1}{2}(\gamma + \ln\pi)D_{\mathbb{C}} + \frac{1}{48}\left[6(\gamma + \ln\pi)^2 - \pi^2\right]D_{\mathbb{C}}^2 + \ldots \\ S_{D_{\mathbb{C}}} &= D_{\mathbb{C}} + \frac{1}{2}(\gamma + \ln\pi)D_{\mathbb{C}}^2 + \ldots \ . \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Основная идея квантовой механики в отрицательных размерностях, как известно состояла в том чтобы придать строгий математический смысл решению исходной КМ задачи, первоначально заданной в целых положительных размерностях,также и для отрицательных или даже комплексных значений параметра $D = D_{\mathbb{C}}$, а затем использовать связь между свойствами решений в физических и целых отрицательных или комплексных размерностях [8-9],[11].Рассмотрим в качестве примера простейшее стационарное уравнение Шредингера вида
11]

$$
\begin{gathered}
\psi''(r) - \frac{D_{+}-1}{r}\psi'(r) = E\psi(r), \\
D_{+} \in \mathbb{R}_{+} \\
\psi(0) < \infty, \psi(1) = 0.
\end{gathered} \tag{4.7}
$$

Общее решение краевой задачи (4.7) имеет следующий вид

$$
\psi(r) = r^{1-D_{+}/2}\left[AJ_{1-D_{+}/2}\left(r\sqrt{E}\right) + BJ_{-1+D_{+}/2}\left(r\sqrt{E}\right)\right], \tag{4.8}
$$

где $J_{\nu}(x)$ -Бесселева функция. С учетом граничных условий, уравнение для собственных значений в положительных размерностях имеет следующий вид

$$
J_{-1+D_{+}/2}\left(r\sqrt{E}\right) = 0. \tag{4.9}
$$

Поведение функций $E_n(D)$ в плоскости комплекного переменного $D = D_{\mathbb{C}}$ детально изучено в [11]. В частности установлено, что для $D \in (-\infty, +\infty)$, все функции $E_n(D)$ -это ветви одной и той же комплексной функции $E_n(D)$.

Рассмотим теперь модель евклидовой квантовой теории поля с лагранжианом вида

$$
\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + g\varphi^{2K}. \tag{4.10}
$$

Нас будет интересовать плотность свободной энергии, как функция комплексной размерности $D_{\mathbb{C}},$ которую мы обозначим через $\mathcal{F}_K(D_{\mathbb{C}})$. Для $K = 1$ и $0 < D_{+} < 2$ плотность свободной энергии имеет вид [11]:

$$
\mathcal{F}_1(D) = \frac{1}{D}\left[\frac{g}{2\pi}\right]^{\frac{D}{2}}\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \tag{4.11}
$$

Поскольку функция в правой части (4.11) допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, мы имеем

$$\mathcal{F}_1(D_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{D_{\mathbb{C}}}\left[\frac{g}{2\pi}\right]^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}\Gamma\left(1-\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right) \qquad (4.12)$$

и

в частности для $D_{\mathbb{C}} = D_{-}$, где $-\infty < D_{-} < 0$ мы имеем

$$\mathcal{F}_1(D_{-}) = -\frac{1}{|D_{-}|}\left[\frac{2\pi}{g}\right]^{\frac{|D_{-}|}{2}}\Gamma\left(1+\frac{|D_{-}|}{2}\right). \qquad (4.13)$$

Таким образом в случае $K = 1, -\infty < D_{-} < 0$ плотность свободной энергии конечна и строго отрицательна.

Введем в рассмотрение также следующую функцию

$$A_K(D_{\mathbb{C}}) = 2Kg^{\nu(K,D_{\mathbb{C}})}\frac{\partial \mathcal{F}_K}{\partial g},$$
$$\nu(K,D_{\mathbb{C}}) = 1 - \frac{D_{\mathbb{C}}}{2K - D_{\mathbb{C}}(K-1)}. \qquad (4.14)$$

В

силу (4.14) мы имеем

$$g\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial g} = \frac{1}{2}\left[\frac{g}{2\pi}\right]^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}\Gamma\left(1-\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right). \qquad (4.15)$$

Таким образом

$$A_1(D_{\mathbb{C}}) = \left[\frac{1}{2\pi}\right]^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}\Gamma\left(1-\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right). \qquad (4.16)$$

Размерное разложение для $A_1(D_{\mathbb{C}})$ имеет следующий вид

$$A_1(D_{\mathbb{C}}) = 1 - \frac{D_{\mathbb{C}}}{2}[\ln(2\pi) - \gamma] + \frac{D_{\mathbb{C}}^2}{48}[6\ln^2(2\pi) - 12\gamma\ln(2\pi) + \pi^2 + \gamma^2]. \qquad (4.17)$$

Отметим что радиус сходимости разложения (4.17) равен 2 [11]. Рассмотим теперь модель евклидовой квантовой теории поля с лагранжианом вида

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + g\varphi^{2K} + m\varphi^2. \qquad (4.18)$$

Плотность свободной энергии для (4.18) $\mathcal{F}^K = \mathcal{F}_K(D_{\mathbb{C}}, m)$ определяется из соотношения

$$\exp(-\mathcal{F}^K V_{D_{\mathbb{C}}}) = \int [D\varphi] \exp\Big[-\int d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}\Big]. \qquad (4.19)$$

Запишем правую часть (4.19) в виде

$$\exp(-\mathcal{F}^K(D_{\mathbb{C}})V_{D_{\mathbb{C}}}) = \int [D\varphi] \exp\Big[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}_0\Big] \times$$

$$\frac{\int [D\varphi] \exp\Big[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}\Big]}{\int [D\varphi] \exp\Big[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}_0\Big]}, \qquad (4.20)$$

где

$$\mathcal{L}_0 = \tfrac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + m\varphi^2. \qquad (4.21)$$

В силу (4.20) мы имеем разложение $\mathcal{F}^K(D_{\mathbb{C}}) = \mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}}) + \mathcal{F}_2^K(D_{\mathbb{C}})$, где

$$\mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}}) = -\frac{1}{V_{D_{\mathbb{C}}}}\ln\left(\int[D\varphi]\exp\left[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}_0\right]\right) \tag{4.22}$$

и

$$\mathcal{F}_2^K(D_{\mathbb{C}}) = -\frac{1}{V_{D_{\mathbb{C}}}}\ln\left(\frac{\int[D\varphi]\exp\left[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}\right]}{\int[D\varphi]\exp\left[-\int_V d^{D_{\mathbb{C}}}x\mathcal{L}_0\right]}\right). \tag{4.23}$$

Подставив в (4.13) $g = m^2/2$ мы имеем для $\mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}})$ явное выражение

$$\mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}}) = \frac{1}{D_{\mathbb{C}}}\left[\frac{m^2}{4\pi}\right]^{\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}}\Gamma\left(1-\frac{D_{\mathbb{C}}}{2}\right). \tag{3.24}$$

Отметим, что для $\mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}})$ справедливо следующее размерное разложение

$$\mathcal{F}_1^K(D_{\mathbb{C}}) = m^{D_{\mathbb{C}}}\left\{\frac{1}{D_{\mathbb{C}}} + \frac{1}{2}[\gamma - \ln(4\pi)] + O(|D_{\mathbb{C}}|)\right\}. \tag{4.25}$$

Используя теперь такой же метод как и в [11], мы получим для $\mathcal{F}_2^K(D_{\mathbb{C}})$ явное выражение

$$\mathcal{F}_2^K(D_{\mathbb{C}}) = -m^{D_{\mathbb{C}}}\ln\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\exp(-x^{2K})}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\exp(-x^2/2)} = -m^{D_{\mathbb{C}}}\ln\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{K}\right)\right], \tag{4.26}$$

где $|D_{\mathbb{C}}| \to 0.$ В силу (4.25)-(4.26) мы имеем

$$\mathcal{F}^K(D_{\mathbb{C}}) = m^{D_{\mathbb{C}}}\left\{\frac{1}{D_{\mathbb{C}}} + \frac{1}{2}[\gamma - \ln(4\pi)] - \ln\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]\right\} + O(|D_{\mathbb{C}}|^2). \qquad (4.27)$$

В частности для $D_{\mathbb{C}} = D_-$, где $-\delta < D_- < 0$ мы имеем

$$\mathcal{F}^K(D_-) = \frac{1}{m^{|D_-|}}\left\{-\frac{1}{|D_-|} + \frac{1}{2}[\gamma - \ln(4\pi)] - \ln\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]\right\} + O(|D_-|^2) \simeq$$

$$-\frac{1}{|D_-|m^{|D_-|}}, \qquad (4.28)$$

где $|D_-| \to 0.$

Замечание 4.1. В силу (4.28) плотность энергии вакуума для квантового массивного самодействующего евклидова фрактального поля с плотностью Лагранжиана (4.18) имеет вид

$$\mathcal{F}^K(D_-) \simeq -\frac{1}{|D_-|m^{|D_-|}} + O(|D_-|^2), \qquad (4.29)$$

где $|D_-| \to 0.$

V. Индуцированная гравитация Сахарова в римановом пространстве отрицательной фрактальной размерности.

Концепция индуцированной гравитации была предложена А.Д.Сахаровым в работе [32].Основная идея, А.Д.Сахарова первоначально представленная в очень короткой статье содержащей в общей сложности 4 формулы, состоит в том, что гравитация не является фундаментальным взаимодействием.Вместо этого он утверждал, что общая теория относительности вытекает из квантовой теории поля примерно в том же смысле, как гидродинамика, вытекает из молекулярной физики.
Исходные постулаты Сахарова были сформулированы им только для пространства целой положительной размерности и состояли в следующем [31-32]:

1.Пусть задано некоторое Лоренцево многообразие (M,g).

2.Никакие априорные предположения о динамике многообразия (M,g) не делаются, метрика g описывает чисто классический фон и все физические поля

кроме гравитационного квантуются на этом фоне.
3.Рассматривается квантовая теория скалярного поля $\varphi_m = \varphi(t,x;m)$ массы m на (M,g) в однопетлевом приближении.

4.Тогда однопетлевое эффективное действие примет следующий вид

$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{c_0 + c_1\ R(g) + c_2\ (R^2(g))\right\}. \tag{5.1}$$

Сравним (5.1) с каноническим лагранжианом Эйнштейновской гравитации

$$\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left\{-\Lambda - \frac{R(g)}{16\pi\ G} + K\ (R^2) + \mathcal{L}_{\mathrm{matte}}\right\}. \tag{5.2}$$

Таким образом однопетлевое эффективное действие автоматически содержит член пропорциональный космологической константе,член пропорциональный классическому действию Эйнштейна-Гильберта плюс квадратичные по кривизне члены. Однопетлевой вклад в эффективное действие для скалярного поля задается выражением

$$\mathcal{S}_g = -\frac{1}{2}\ln\det(\Delta_g + m^2 + \xi R) = -\frac{1}{2}\mathbf{Tr}\ln(\Delta_g + m^2 + \xi R). \tag{5.3}$$

Стандартный результат квантовой теории поля на римановом многообразии, как хорошо известно, состоит в следующем [31-33]:

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{g_0} + \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}[\exp(-s[\Delta_g + m^2 + \xi R]) - \exp(-s[\Delta_{g_0} + m^2 + \xi R_0])]. \tag{5.4}$$

Регуляризованное эффективное действие имеет вид

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{g_0} + \frac{1}{2}\mathbf{Tr}\int\limits_{\kappa^{-2}}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s}[\exp(-s[\Delta_g + m^2 + \xi R]) - \exp(-s[\Delta_{g_0} + m^2 + \xi R_0])], \tag{5.5}$$

где $[s] = [\kappa^{-2}]$. Для $s \to 0$ мы имеем асимптотическое разложение

$$\exp(-s[\Delta_g + m^2 + \xi R]) = \frac{\sqrt{-g}}{(4\pi s)^2}[a_0(g) + a_1(g)s + a_2(g)s^2 + \cdots]. \tag{5.6}$$

Подставив (5.6) в выражение (5.5) мы окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{g_0} + \frac{1}{32\pi^2}\mathbf{Tr}\Big\{[a_0(g) - a_0(g_0)]\ \frac{\kappa^4}{2} + [a_1(g) - a_1(g_0)]\ \kappa^2 \\ +[a_2(g) - a_2(g_0)]\ \ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\Big\} + \text{УФ конечные члены}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

где [35]

$$a_0(g) = 1, \tag{5.8}$$

$$a_1(g) = k_1\ R(g) - m^2, \tag{5.9}$$

$$a_2(g) = k_2\ C_{abcd}C^{abcd} + k_3\ R_{ab}R^{ab} + k_4\ R^2 + k_5\ \nabla^2 R - m^2\ k_1\ R(g) + \frac{1}{2}m^4. \tag{5.10}$$

После очевидных преобразований мы получаем

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_{g_0} + \frac{1}{32\pi^2}\mathbf{str}\left[\frac{\kappa^4}{2} - m^2\kappa^2 + \frac{m^4}{2}\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right]\int d^4x\left[\sqrt{-g} - \sqrt{-g_0}\right]$$

$$+\mathbf{str}\left[k_1\kappa^2 - k_1 m^2\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right]\int d^4x\left[\sqrt{-g}\ R(g) - \sqrt{-g_0}\ R(g_0)\right]$$

$$+\mathbf{str}\left[k_2'\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right]\int d^4x\left[\sqrt{-g}\ C^2(g) - \sqrt{-g_0}\ C^2(g_0)\right] \qquad (5.11)$$

$$+\mathbf{str}\left[k_4'\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right]\int d^4x\left[\sqrt{-g}\ R^2(g) - \sqrt{-g_0}\ R^2(g_0)\right]$$

+УФ конечные члены.

Следуя [31] возьмем Лагранжиан гравитационного взаимодействия в виде

$$\int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\Lambda - \frac{R(g)}{16\pi\ G} + K_2\ C_{abcd}\ C^{abcd} + K_4\ R^2 + \mathcal{L}_{\text{matter}}\right\}. \qquad (5.12)$$

Тогда квантовые однопетлевые поправки к затравочным константам $\Lambda_0, G^{-1}, K_2^0,$ примут следующий явный вид

$$\Lambda = \Lambda_0 - \frac{1}{32\pi^2}\ \mathbf{str}\left[\frac{\kappa^4}{2} - m^2\kappa^2 + \frac{m^4}{2}\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right] + \text{УФ конечные члены.} \qquad (5.13)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} - \frac{1}{2\pi}\ \mathbf{str}\left[k_1\kappa^2 - k_1 m^2\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right] + \text{УФ конечные члены.} \qquad (5.14)$$

$$K_2 = K_2^0 + \frac{1}{32\pi^2}\ \mathbf{str}\left[k_2' \ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right] + \text{УФ конечные члены.} \qquad (5.15)$$

$$K_4 = K_4^0 + \frac{1}{32\pi^2}\ \mathbf{str}\left[k_4' \ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)\right] + \text{УФ конечные члены.} \qquad (5.16)$$

Отметим, что справедливое следующее соотношение [31],[36]:

$$\int_0^\kappa \kappa^2\sqrt{\kappa^2+m^2}\,dk = \frac{\kappa^4}{4} + \frac{m^2\kappa^2}{4} - \frac{m^4}{8}\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right) + \text{УФ конечные члены.} \qquad (5.17)$$

$$\frac{\kappa^4}{2} - m^2\kappa^2 + \frac{m^4}{2}\ln\left(\frac{\kappa^2}{m^2}\right)$$

Правая часть равенства (5.17) по порядку величины совпадает с однопетлевой квантовой поправкой к космологической константе Λ в (5.13),а левая часть равенства (5.17) пропорциональна плотности энергии вакуума $|0\rangle$ свободного квантового поля массы m [35]:

$$\langle\rho_{\mathbf{vac}}\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^{D-1}}\int_{\mathbb{R}^{\omega-1}}\sqrt{\kappa^2+m^2}\,d^{\,D-1}\kappa =$$

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)}\int_0^\infty\sqrt{\kappa^2+m^2}\,\kappa^{D-2}d\,\kappa = \qquad (5.18)$$

$$= \frac{m^D\Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)}{2^{D+1}\pi^{\frac{D}{2}}},$$

где в рассмотенном выше случае $D=4$ и $\rho_{\mathbf{vac}} = \infty$.

Введем следующее обобщение исходных постулатов А.Д.Сахарова:

1.Пусть задано некоторое четырехмерное Лоренцево многообразие (M,g).

2.Никакие априорные предположения о динамике многообразия (M,g) не делаются, метрика g описывает чисто классический фон и все физические поля кроме гравитационного квантуются на этом фоне.
3.Рассматривается пертурбативная квантовая теория скалярного поля $\Phi(t,x;m,D), D \in (-\infty,4]$ такая, что:
(**i**) квантованное поле $\Phi(t,x;m,D)$ взаимодействует с классическим тензорным полем g минимальным образом;
(**ii**) соответствующее "затравочное" свободное поле $\varphi_m = \varphi(t,x;m,D)$ массы m на
(M,g) удовлетворят следующим условиям:
(**a**) пусть $D = D_+ \geq 0,$ тогда носитель $Supp\left(\widehat{\varphi}_m\right)$ преобразования Фурье $\widehat{\varphi}_m$ операторнозначной обобщенной функции φ_m лежит на массовом гиперболоиде $H_m^{(4)}$ и имеет размерность Хаусдорфа $d_H = D_+,$
(**b**) пусть $D = D_- < 0,$ тогда носитель $Supp\left(\widehat{\varphi}_m\right)$ преобразования Фурье $\widehat{\varphi}_m$ операторнозначной обобщенной функции φ_m лежит на массовом гиперболоиде $H_m^{(4)}$ и имеет размерность Коломбеау-Хаусдорфа $d_{CH} = D_-;$
(**iii**) взаимодействие квантовых полей $\Phi(t,x;m,D)$ и классического тензорного поля g_{ik} рассматривается только в однопетлевом приближении.

В силу (5.18) мы имеем для положительной размерности $D_+ \in (0,4]$

$$\int_0^\infty \sqrt{\kappa^2+m^2}\,\kappa^{D_+-2}d\,\kappa = -c_1(D_-)m^{D_+}\Gamma\left(-\frac{D_+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D_+-1}{2}\right), \qquad (5.19)$$

где $c_1(D_-) > 0.$ Легко видеть, что (5.13) в рассматриваемом случае примет следующий вид

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{1}{32\pi^2}c_1(D_-)m^{D_+}\Gamma\left(-\frac{D_+}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D_+-1}{2}\right). \qquad (5.20)$$

Правая часть (5.20) конечна при $D_+ \neq 0,2,4.$ В силу (5.18) мы имеем для отрицательной размерности D_- :

$$\int_0^\infty \sqrt{\kappa^2 + m^2}\, \kappa^{-|D_-|-2} d\kappa = -c_2(D_-) m^{-|D_-|} \Gamma\left(\frac{|D_-|}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{|D_-|+1}{2}\right), \qquad (5.21)$$

где $c_2(D_-) > 0$. Легко видеть, что (5.13) в рассматриваемом случае примет следующий вид

$$\Lambda \simeq \Lambda_0 + \frac{1}{32\pi^2} c(D_-) m^{-|D_-|} \Gamma\left(\frac{|D_-|}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{|D_-|+1}{2}\right). \qquad (5.22)$$

Правая часть (5.22) конечна при $|D_-| \neq 2n+1$. Для получения более точной оценки, необходимо построить адиабатическое разложение для соответствующей двухточечной функции Грина.Пусть $D = D_- < 0$. Исследуем поведение двухточечной функции Грина $G(x, x'; D_-)$ при $x \to x'$. Введем для этого нормальные римановы координаты y^μ точки x с началом в точке x'. Тогда в окрестности точки $y = 0$ для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ справедливо разложение [35]

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} y^\alpha y^\beta - \frac{1}{6} R_{\mu\alpha\nu\beta;\gamma} y^\alpha y^\beta y^\gamma + \ldots \qquad (5.23)$$

Введем в рассмотрение функцию $\Re(x, x'; D_-)$

$$\Re(x, x'; D_-) = [-g(x)]^{\frac{1}{2}} G(x, x'; D_-) \qquad (5.24)$$

и

ее фурье-образ $\widehat{\Re}(k; D_-)$

$$\Re(x, x'; D_-) = (2\pi)^{-4} \int d^4k \exp(-iky) \widehat{\Re}(k; D_-) \qquad (5.25)$$

где $ky = \eta^{\alpha\beta} k_\alpha y_\beta$. Двухточечная функция Грина $G(x, x'; D_-)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$[\Box_x + m^2 + \xi R(x)]G(x,x';D_-) = -[-g(x)]^{\frac{1}{2}}\delta^{4,D_-}(x-x';D_-), \qquad (5.26)$$

где $\delta^{4,D_-}(x-x';D_-) = \delta(t-t')\delta^{3,D_-}(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ -обобщенная дельта-функция (см. **Пр.II)**. Уравнение (5.26) представляет собой прямое обобщение уравнения (**III.17)** см.**Пр.III**. Разлагая все геометрические величины входящие в уравнение (5.26) в нормальных координатах и переходя к k пространству,мы получим с учетом четырех членов разложения (5.23)

$$\widehat{\Re}(k;D_-) \approx |\mathbf{k}|^{-|D_-|}(k^2-m^2+i\epsilon)^{-1} - \left(\tfrac{1}{6}-\xi\right)R|\mathbf{k}|^{-|D_-|}(k^2-m^2+i\epsilon)^{-2} +$$

$$\tfrac{i}{2}\left(\tfrac{1}{6}-\xi\right)R_{;\alpha}|\mathbf{k}|^{-|D_-|}\partial^\alpha(k^2-m^2+i\epsilon)^{-2} - \tfrac{1}{3}a_{\alpha\beta}|\mathbf{k}|^{-|D_-|}\partial^\alpha\partial^\beta(k^2-m^2+i\epsilon)^{-2} + \qquad (5.27)$$

$$\left[\left(\tfrac{1}{6}-\xi\right)^2R^2 + \tfrac{2}{3}a^\lambda{}_\lambda\right]|\mathbf{k}|^{-|D_-|}(k^2-m^2+i\epsilon)^{-3},$$

где $\partial^\alpha = \partial/\partial k^\alpha$. Подстановка разложения (5.27) в (5.25) дает

$$\Re(x,x';D_-) \approx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4|\mathbf{k}|^{-|D_-|}}e^{iky}\times$$

$$(5.28)$$

$$\left[1 + a_1(x,x')\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right) + a_2(x,x')\left(\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^2\right](k^2-m^2+i\epsilon)^{-1}.$$

Учитывая теперь тождество

$$(k^2-m^2+i\epsilon)^{-1} = -i\int_0^\infty ds\exp[is(k^2-m^2+i\epsilon)] \qquad (5.29)$$

и

выполнив в (5.28) интегрирование по d^4k , мы получим

$$\Re(x,x';D_-) = -i(4\pi)^{-2}\int\limits_0^\infty ids(is)^{-2+|D_-|}\exp\left[-im^2 s+\frac{\sigma(x,x')}{2is}\right]F(x,x';s), \qquad (5.30)$$

где $\sigma(x,x') = \frac{1}{2}y_\alpha y^\alpha$, а функция $F(x,x';is)$ допускает каноническое адиабатическое разложение [35]

$$F(x,x';is) \approx 1 + a_1(x,x')(is) + a_2(x,x')(is)^2 + \ldots = \sum_{j=0}^\infty a_j(x,x')(is)^j. \qquad (5.31)$$

Для функции Грина $G(x,x';D_-)$ в силу (5.30) окончательно получаем выражение

$$G(x,x';D_-) = -i(4\pi)^{-2}\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')\int\limits_0^\infty i\,ds(is)^{-2+|D_-|}\exp\left[-im^2 s+\frac{\sigma(x,x')}{2is}\right]F(x,x';s), \qquad (5.32)$$

где $\Delta(x,x')$ -детерминант ван-Флека. Подставив разложение (5.31) в выражение (5.32) получим адиабатическое разложение функции Грина в координатном пространстве

$$G(x,x';D_-) \approx -i(4\pi i)^{-2+|D_-|}\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')\sum_{j=0}^\infty a_j(x,x')\left(-\frac{\partial}{\partial m^2}\right)^j \times \left[\left(\frac{2m^2}{-\sigma(x,x')+i\epsilon}\right)^{\frac{|D_-|}{4}} H^{(2)}_{\frac{|D_-|}{2}}\left((2m^2(\sigma(x,x')+i\epsilon))\right)\right]. \qquad (5.33)$$

Пусть $D = D_- < 0,$ тогда можно показать, что для однопетлевого эффективного действия $W(D_-)$ справедливо следующее формальное представление

$$W(D_-) = \frac{i}{2}\int d^4x[-g(x)]^{\frac{1}{2}}\left(\lim_{x\to x'}\int\limits_{m^2}^{\infty} dm^2 G(x,x';D_-)\right). \qquad (5.34)$$

Формально изменяя порядок интегрирования и переходя к пределу $x \to x'$, мы получим

$$W(D_-) = \frac{i}{2}\int\limits_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^4x[-g(x)]^{\frac{1}{2}} G(x,x;D_-). \qquad (5.35)$$

Плотность эффективного лагранжиана $\mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-}(x)$ задается уравнением

$$W(D_-) = \frac{i}{2}\int\limits_{m^2}^{\infty} dm^2 \int d^4x[-g(x)]^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-}(x). \qquad (5.36)$$

В силу (5.34) и (5.36) мы имеем

$$\mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-}(x) = \frac{i}{2}\lim_{x\to x'}\int\limits_{m^2}^{\infty} dm^2 G(x,x';D_-). \qquad (5.37)$$

Адиабатическое разложение для эффективного лагранжиана $\mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-}(x)$ имеет следующий вид

$$\mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-} \approx \lim_{x\to x'} \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(x,x')}{2(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,x') \int\limits_0^{\infty} ids(is)^{j-3+|D_-|} \exp\left[-\left(m^2 s - \frac{\sigma(x,x')}{2s}\right)\right], \qquad (5.38)$$

где $\sigma(x,x')$ -половина квадрата расстояния, между точками x и x'. Выполнив теперь в (5.38) формальное аналитическое продолжение по переменной $D = |D_-|$ и переходя к пределу $x \to x'$, мы получим

$$\mathcal{L}_{\mathbf{eff}}^{D_-} \approx \frac{(4\pi)^{\frac{|D_-|}{2}}}{2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\int_0^{\infty} ids(is)^{j-3+|D_-|}\exp[-(m^2 s)] =$$

$$\frac{(4\pi)^{\frac{|D_-|}{2}}}{2}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)(m^2)^{-\frac{|D_-|}{2}-j}\Gamma\left(\frac{|D_-|}{2}+j\right), \tag{5.39}$$

где $a_j(x) = a_j(x,x)$. Функции $a_j(x,x)$ имеют тот же самый вид, что и в классическом случае,см.например [33-35].

Приложение I.Обобщенные мультифрактальные меры Коломбеау- Хаусдорфа. Интегрирование функций заданных на множествах отрицательной размерности Коломбеау-Хаусдорфа.

Пусть функция $s(x)$ задана на $\mathbb{R}^N$ и $s(x) = s(r)$, где $r = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} x_j^2}$. Пусть $0 < D \leq N$, тогда дробный интеграл Вейля $W^{-D}s(x)$ от функции $s(x)$ задают следующей формулой [12]:

$$W^{-D}s(x) = \int_0^{\infty} s(r)r^{D-1}dr. \tag{$\mathbf{I}.1$}$$

Оператор дробного интегрирования (I.1) и его различные обобщения,имеют важные приложения в современной квантовой теории поля см.например [12],[23-27], [37].В том случае когда $-\infty < D \leq 0$ интеграл Вейля $W^{-D}s(x)$ корректно определен только в смысле теории обобщенных функций Коломбеау [44] и задается следующей формулой [37]:

$$(W_{\varepsilon}^{-D}s(x))_{\varepsilon} = \left(\int_0^{\infty} \frac{s(r)}{r^{D+1}+\varepsilon}dr\right)_{\varepsilon}. \tag{$\mathbf{I}.2$}$$

Определение I.1.Пусть X - произвольное метрическое пространство, а Σ_X -произвольная σ -алгебра подмножеств E_i пространства $X.$ Обозначим через $\mathbf{M}_{\Sigma_X}$ множество всех счетно-аддитивных мер на $\Sigma_X.$
Пусть $\mathcal{E}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) = (\mathbf{M}_{\Sigma_X})^I, I = (0,1],$

$$\mathcal{E}_M(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) \triangleq \Big\{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) |\ \forall E_i(E_i \in \Sigma_X)\ \exists p(p \in \mathbb{N})$$

$$\left[\sup_{E_i \in \Sigma_X} \mu_\varepsilon(E_i) = O(\varepsilon^{-p}) \text{ если } \varepsilon \to 0\right]\Big\},$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) \triangleq \Big\{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) |\ \forall E_i(E_i \in \Sigma_X) \forall q(q \in N) \tag{I.3}$$

$$\left[\sup_{E_i \in \Sigma_X} \mu_\varepsilon(E_i) = O(\varepsilon^{q}) \text{ если } \varepsilon \to 0\right]\Big\}.$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}) = \mathcal{E}_M(\mathbf{M}_{\Sigma_X})/\mathcal{N}(\mathbf{M}_{\Sigma_X}).$$

$\mathcal{E}_M(\mathbf{M}_{\Sigma_X})$ это алгебра с канонической операцией сложения мер. Алгебра $\mathcal{G}(\mathbf{M}_{\Sigma_X})$ коммутативна и ассоциативна.Элементы алгебры $\mathcal{G}(\mathbf{M}_{\Sigma_X})$ мы обозначаем $[(\mu_\varepsilon)_\varepsilon],$ где $(\mu_\varepsilon(\cdot))_\varepsilon$ представитель соответствующего класса эквивалентности.
Определение I.2.Класс $[(\mu_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}(\mathbf{M}_{\Sigma_X})$ называется обобщенной мерой Коломбеау.

В этом приложении мы покажем, что интеграл Коломбеау-Вейля $\left[(W_\varepsilon^{-D} s(x))_\varepsilon\right],$ определенный первоначально выражением (I.2), может быть задан как интеграл по некоторой обобщенной мере Коломбеау, которая является прямым обобщением классической меры Хаусдорфа размерности d_H для случая интегрирования по обобщенным мультифрактальным множествам отрицательной размерности $d_-.$
Пусть X - произвольное метрическое пространство, а Σ_X -произвольная σ -алгебра подмножеств E_i пространства $X.$ Обозначим через $\mathcal{F}_{\Sigma_X}$ множество всех неотрицательных функций $\varsigma : \mathcal{F}_\Sigma \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$ т.е.

$$\forall E_i(E_i \in \Sigma)\forall r_i(r_i \in E_i)[0 \leq \varsigma(E_i, r_i) \leq \infty]. \tag{I.4}$$

Определение I.3.Пусть $\mathcal{E}(\Sigma_X) = (\mathcal{F}_{\Sigma_X})^I, I = (0,1],$

$$\mathcal{E}_M(\Sigma_X) \triangleq \Big\{(\varsigma_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}(\Sigma_X) | \ \forall E_i (E_i \in \Sigma) \forall r_i (r_i \in E_i) \ \exists p (p \in \mathbb{N})$$

$$\Big[\sup_{E_i \in \Sigma, r_i \in E_i} \varsigma_\varepsilon(E_i, r_i) = O(\varepsilon^{-p}) \text{ если } \varepsilon \to 0 \Big] \Big\},$$

$$\mathcal{N}(\Sigma_X) \triangleq \Big\{(\varsigma_\varepsilon)_\varepsilon | \ \forall E_i (E_i \in \Sigma) \forall r_i (r_i \in E_i) \forall q (q \in N) \qquad (\mathbf{I}.5)$$

$$\Big[| \sup_{E_i \in \Sigma, r_i \in E_i} \varsigma_\varepsilon(E_i, r_i) = O(\varepsilon^{q}) \text{ если } \varepsilon \to 0 \Big] \Big\}.$$

$$\mathcal{G}(\Sigma_X) = \mathcal{E}_M(\Sigma_X) / \mathcal{N}(\Sigma_X).$$

Определение I.4. Предмерой Коломбеау-Каратеодори $\left(\phi_\varepsilon^{(\delta)}(E_i)\right)_\varepsilon$ на Σ_X, где $0 < \delta \leq \infty$, называется обобщенная мера Коломбеау, которая определена как

$$\left(\phi_\varepsilon^{(\delta)}(E)\right)_\varepsilon = \left(\inf_{E_i \in \Sigma, r_i \in E_i} \left\{ \sum_i \varsigma_\varepsilon(E_i, r_i) : E \subset \cup E_i, \mathbf{diam}(E_i) \leq \delta \right\} \right)_\varepsilon . \qquad (\mathbf{I}.6)$$

Замечание I.1. Ясно, что для любого фиксированного $\varepsilon \in (0,1]$ справедливо следующее неравенство

$$\phi_\varepsilon^{(\delta_1)}(E) \geq \phi_\varepsilon^{(\delta_2)}(E), \qquad (\mathbf{I}.7)$$

где $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \infty$.

Определение I.5. Обобщенная мера Коломбеау-Каратеодори на Σ_X задается как

$$(\mu_\varepsilon(E))_\varepsilon = \left(\lim_{\delta\to 0_+} \phi_\varepsilon^{(\delta)}(E)\right)_\varepsilon = \left(\sup_{\delta>0} \phi_\varepsilon^{(\delta)}(E)\right)_\varepsilon. \qquad (\mathbf{I}.8)$$

В силу предыдущего замечания, это определение корректно. Пусть топологическая размерность метрического пространства X равна $\dim X = D$ и $Y \subsetneqq \cup_{i=1}^{\infty} E_i, Y \subsetneqq X.$ Возьмем например

$$(\varsigma_\varepsilon(E_i, r_i; D', d_Y))_\varepsilon = \frac{\omega(D')[\mathbf{diam}(E_i)]^{D'}}{\left(r_i^{d_Y} + \varepsilon\right)_\varepsilon}, \qquad (\mathbf{I}.9)$$

где $r_i \in E_i$. Здесь $0 < D' \leq D$, а $\omega(D')$ -геометрический фактор который определяется геометрическими свойствами покрытия $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, а d_Y -геометрический фактор который определяется только мультифрактальными свойствами множества $Y \subsetneqq X$. В частности, если покрытие $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из замкнутых шаров то

$$\omega(D') = \frac{\pi^{\frac{D'}{2}}}{2^{D'}\Gamma\left(1 + \frac{D'}{2}\right)}. \qquad (\mathbf{I}.10)$$

Пусть теперь $Y \subsetneqq X = \mathbb{R}^4$ и множество Y удовлетворяет следующим условиям:

(i) Y -обобщенный мультифрактал, т.е. $Y = \{Y_{\alpha_-}\} = \{\Delta_{(\mu_\varepsilon)_\varepsilon}(\alpha_-)\}$

(ii) каждое Y_{α_-} есть замкнутое неограниченное множество

Для любых $x, y \in Y$ определим расстояние как

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}(x_i - y_i)^2}. \qquad (\mathbf{I}.11)$$

Для любого множества $E \subsetneqq Y$ определим его диаметр $d(E) = \mathbf{diam}(E),$ т.е.

$$d(E) = \sup\{d(x,y)|x,y \in E\}. \qquad (\mathbf{I}.12)$$

Определение I.6. Мера Коломбеау-Хаусдорфа $(\mu_{CH}(E;D',d_Y,\varepsilon))_\varepsilon$ (ассоциированной размерности (D',d_Y)) множества $E \subseteqq Y_{\alpha_-}$ определена как

$$(\mu_{CH}(E;D',d_Y,\varepsilon))_\varepsilon = \lim_{\epsilon\to 0} \inf_{\{E_i\}} \left\{ \sum_i \varsigma_\varepsilon(E_i,r_i;D',d_Y) \middle| Y_{\alpha_-} \subset \bigcup_i E_i \right\}, \qquad (\mathbf{I}.13)$$

где функция $\varsigma_\varepsilon(E_i,r_i;D',d_Y)$ определена формулой (1.9).

Определение I.7. Интеграл Коломбеау-Стилтьеса от непрерывной функции по обобщенной мере $(\mu_{CH}(E;D',d_Y,\varepsilon))_\varepsilon$ определен как

$$\int_{Y_{\alpha_-}} f(x)(d\mu_{CH}(x;D',d_Y,\varepsilon))_\varepsilon =$$

$$\left(\lim_{d(E_i)\to 0} \sum_{\cup_i E_i = X} f(x_i) \inf_{\{E_{ij}\},\cup_j E_{ij}\supset E_i \ni r_{ij}} \sum_j \varsigma_\varepsilon(E_{ij},r_{ij};D',d_Y) \right)_\varepsilon, \qquad (\mathbf{I}.14)$$

где $\{E_i\}$ -дизъюнктное покрытие множества Y_{α_-}. Если $d(E_i) \to 0$ то очевидно $\cup_j E_{ij} \to E_i \ni x_i$ и (I.14) примет вид

$$\int_{Y_{\alpha_-}} f(x)(d\mu_{CH}(x;D',d_{Y_{\alpha_-}},\varepsilon))_\varepsilon = \lim_{d(E_i)\to 0} \sum_{E_i \ni r_i} f(x_i)\varsigma_\varepsilon(E_i,r_i;D',d_{Y_{\alpha_-}}), \qquad (\mathbf{I}.15)$$

где $r_i = d(0,x_i)$. Множество Y_{α_-} удобно задавать в полярных координатах (r,Ω), $\Omega = (\varphi,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{D-1},\vartheta_{D-2})$ так что $r = d(0,x)$. Пусть $\{E_{r_i,\Omega_i}\}$ -сферически симметричное покрытие с центром в начале координат (см.Рис.I.1), а функция $\varsigma_\varepsilon(E_i,r_i,\Omega_i;D',d_{Y_{\alpha_-}})$ задана формулой (I.9),тогда в пределе $d(E_{r_i,\Omega_i}) \to 0$ мы получим

$$(d\mu_{CH}(r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_{\varepsilon} = \left(\lim_{d(E_{r,\Omega})\to 0} \varsigma_{\varepsilon}(E_{r,\Omega},r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}})\right)_{\varepsilon} =$$

$$\left(\lim_{d(E_{r,\Omega})\to 0} \frac{\Delta\Omega^{D'-1} r^{D'-1}\Delta r}{r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon}\right)_{\varepsilon} = \frac{d\Omega^{D'-1} r^{D'-1} dr}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon)_{\varepsilon}}, \qquad (\mathbf{I}.16)$$

где $1 < D' \le D, d_{Y_{\alpha-}} \in [1,\infty)$.

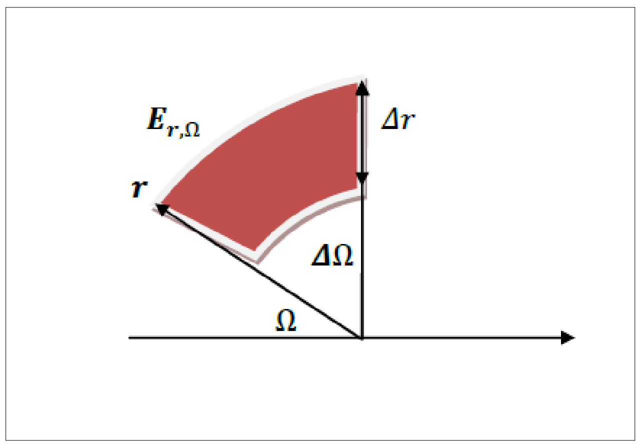

Рис.I.1.Элемент сферического покрытия для $D = 2$.

Для целых $D' = D \ge 2$ мы имеем ($\Omega = (\varphi,\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_{D'-1},\vartheta_{D'-2})$)

$$S_{D'} = \int d\Omega^{D'-1} =$$

$$\int d\varphi \int (\sin\vartheta_1) d\vartheta_1 \int (\sin\vartheta_2)^2 d\vartheta_2 \ldots \int (\sin\vartheta_{D-1})^{D'-1} d\vartheta_{D'-1} \int (\sin\vartheta_{D'-2})^{D'-2} d\vartheta_{D'-2} = \qquad (\mathbf{I}.17)$$

$$\frac{2\pi^{\frac{D'}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D'}{2}\right)}.$$

Для $1 < D' \leq D, d_{Y_{\alpha-}} \in [1, \infty)$ и любого ограниченного μ_{CH} -измеримого множества $E,$ справедливо равенство

$$\int_E (d\mu_{CH}(r;\Omega;D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_\varepsilon = \int_E \frac{d\Omega^{D'-1} r^{D'-1} dr}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon)_\varepsilon} =$$

$$\int_E \frac{[\mathbf{J}(\Omega, D)]^{D'-1} r^{D'-1} dr d\varphi d\vartheta_1 d\vartheta_2 \ldots d\vartheta_{D-1} d\vartheta_{D-2}}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon)_\varepsilon}, \tag{I.18}$$

где D -топологическая размерность и

$$\mathbf{J}(\Omega, D) = (\sin\vartheta_1)(\sin\vartheta_1)^2 \ldots (\sin\vartheta_{D'-1})^{D-1}(\sin\vartheta_{D'-2})^{D-2}. \tag{I.19}$$

Определение I.8.

$$(d\mu_{CH}(r;\Omega;D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_\varepsilon = \frac{d\Omega^{D'-1} r^{D'-1} dr}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon)_\varepsilon}, \tag{I.20}$$

где $D' > 1, d_{Y_{\alpha-}} \in [1, \infty)$

Замечание I.2. Обычно мы будем записывать формулу (I.19) в символической форме

$$(d\mu_{CH}(r;\Omega;D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_\varepsilon = d\Omega^{D'-1} r^{D'-d_{Y_{\alpha-}}-1} dr. \tag{I.21}$$

Пусть функция $s(x)$ симметрична по отношению к некоторому центру $x_0 \in Y_{\alpha-},$ т.е. $s(x) = const$ для любых x таких что $d(x_0, x) = r.$ Тогда выполнив преобразование $Y_{\alpha-} \to Z_{\alpha-} : z = x - x_0$ мы получим

$$\int_{Y_{\alpha-}} s(x)(d\mu_{CH}(x;D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_\varepsilon = \frac{2\pi^{\frac{D'}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D'}{2}\right)} \int_0^\infty s(r) r^{D'-d_{Y_{\alpha-}}-1} dr, \tag{I.22}$$

где в силу предыдущего замечания, интеграл в правой части равенства (I.22) следует понимать в смысле теории обобщенных функций Коломбеау [44], т.е.

$$\int_{Y_{\alpha-}} s(x)(d\mu_{CH}(x;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_{\varepsilon} = \frac{2\pi^{\frac{D'}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D'}{2}\right)}\int_0^{\infty}\frac{s(r)r^{D'-1}dr}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon)_{\varepsilon}}. \qquad (\mathbf{I}.23)$$

Пусть $\{E_{r_i,\Omega_i}\}$ -сферически симметричное покрытие с центром в начале координат. Положим

$$(\varsigma'_{\varepsilon}(E_i,r_i;D',d_{Y_{\alpha-}}))_{\varepsilon} = \frac{\omega(D')[\mathbf{diam}(E_i)]^{D'}}{\left([\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}}r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon\right)_{\varepsilon}},$$

$$\mathbf{J}(\Omega,D) = (\sin\vartheta_1)(\sin\vartheta_1)^2\ldots(\sin\vartheta_{D-1})^{D-1}(\sin\vartheta_{D-2})^{D-2}, \qquad (\mathbf{I}.24)$$

тогда в пределе $d(E_{r_i,\Omega_i}) \to 0$ мы получим

$$(d\mu'_{CH}(r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_{\varepsilon} = \left(\lim_{d(E_{r,\Omega})\to 0}\varsigma'_{\varepsilon}(E_{r,\Omega},r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}})\right)_{\varepsilon} =$$

$$\left(\lim_{d(E_{r,\Omega})\to 0}\frac{\Delta\Omega^{D'-1}r^{D'-1}\Delta r}{[\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}}r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon}\right)_{\varepsilon} = \frac{d\Omega^{D'-1}r^{D'-1}dr}{\left([\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}}r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon\right)_{\varepsilon}}, \qquad (\mathbf{I}.25)$$

где $D' > 1, d_{Y_{\alpha-}} \in [1,\infty)$, а функция $\varsigma'_{\varepsilon}(E_i,r_i;D',d_Y)$ задана формулой (I.24). Для $1 < D' \leq D, d_{Y_{\alpha-}} \in [1,\infty)$ и любого ограниченного μ'_{CH} -измеримого множества E, справедливо равенство

$$\int_E (d\mu_{CH}(r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon = \int_E \frac{d\Omega^{D'-1}r^{D'-1}dr}{(r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon)_\varepsilon} =$$

$$\int_E \frac{[\mathbf{J}(\Omega,D)]^{D'-1}r^{D'-1}drd\varphi d\vartheta_1 d\vartheta_2\ldots d\vartheta_{D-1}d\vartheta_{D-2}}{\left([\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}}r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon\right)_\varepsilon}, \qquad (\mathbf{I}.26)$$

где D -топологическая размерность метрического пространства X .
Определение I.9.

$$(d\mu'_{CH}(r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon = \frac{d\Omega^{D'-1}r^{D'-1}dr}{\left([\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}}r^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon\right)_\varepsilon}. \qquad (\mathbf{I}.27)$$

Замечание I.3. Обычно мы будем записывать формулу (I.27) в краткой символической форме

$$(d\mu'_{CH}(r;\Omega;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon = d\Omega^{D'-d_{Y_{\alpha-}}-1}r^{D'-d_{Y_{\alpha-}}-1}dr. \qquad (\mathbf{I}.28)$$

Пусть функция $s(x)$ симметрична по отношению к некоторому центру $x_0 \in Y_{\alpha-}$, т.е. $s(x) = const$ для любых x таких что $d(x_0,x) = r.$ Тогда выполнив преобразование $Y_{\alpha-} \to Z_{\alpha-} : z = x - x_0$ мы формально получим

$$\int_{Y_{\alpha-}} s(x)(d\mu'_{CH}(x;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon = \frac{2\pi^{\frac{D'-d_{Y_{\alpha-}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D'-d_{Y_{\alpha-}}}{2}\right)}\int_0^\infty s(r)r^{D'-d_{Y_{\alpha-}}-1}dr, \qquad (\mathbf{I}.29)$$

где интеграл в правой части равенства (I.26) следует понимать в смысле теории обобщенных функций Коломбеау [44], т.е.

$$\int_{Y_{\alpha-}} s(x)(d\mu'_{CH}(x;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_{\varepsilon} = \int_0^{\infty} \frac{s(r)r^{D'-1}drd\Omega^{D'-1}}{\left([\mathbf{J}(\Omega,D)]^{d_{Y_{\alpha-}}} r^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon\right)_{\varepsilon}}. \qquad (\mathbf{I}.30)$$

Пусть задан фрактал $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда как известно, существует разбиение $\{E_{i_1,\ldots,i_n}\}$ множества $\mathbb{R}^n$ на параллелепипеды $E_{i_1,\ldots,i_n}$ следующего вида

$$E_{i_1,\ldots,i_n} = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in X \,|x_j = (i_j-1)\Delta x_j + \alpha_j, 0 \leq \alpha_j \leq \Delta x_j, j = 1,\ldots,n\right\}. \qquad (\mathbf{I}.31)$$

Пусть $\{E_{i_1,\ldots,i_n}\}$ - произвольное разбиение вышеуказанного вида и $x_{i_1,\ldots,i_n} \in E_{i_1,\ldots,i_n}$. Зададим обобщенную функцию множества $(\xi(E_{i_1,\ldots,i_n}, x_{i_1,\ldots,i_n}; D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_{\varepsilon}$ как

$$(\xi(E_{i_1,\ldots,i_n}, x_{i_1,\ldots,i_n}; D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon))_{\varepsilon} = \omega(D')\frac{[\mathbf{diam}(E_{i_1,\ldots,i_n})]^{D'}}{\left|x_{i_1,\ldots,i_n}\right|^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon}. \qquad (\mathbf{I}.32)$$

Определим теперь меру Коломбеау-Хаусдорфа множества $E \subset X$ с помощью покрытий $\{E'_{i_1,\ldots,i_n}\} \subseteqq \{E_{i_1,\ldots,i_n}\}$ как

$$(\mu'_{CH}(E;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_{\varepsilon} =$$

$$\left(\lim_{\epsilon\to 0} \inf_{\{E_{i_1,\ldots,i_n}\}'} \left\{\sum_{i_1,\ldots,i_n} \xi(E'_{i_1,\ldots,i_n}, x_{i_1,\ldots,i_n}; D', d_{Y_{\alpha-}}, \varepsilon)\right|\right. \qquad (\mathbf{I}.33)$$

$$\left.\left. E \subseteqq \bigcup_{i_1,\ldots,i_n} E'_{i_1,\ldots,i_n}; \mathbf{diam}(E'_{i_1,\ldots,i_n}) \leq \epsilon\right\}\right)_{\varepsilon}.$$

В силу (I.32) мы имеем

$$(d\mu'_{CH}(x;D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon = \left(\lim_{\mathbf{diam}\left(E_{i_1,\ldots,i_n}\right)\to 0} \xi(E_{i_1,\ldots,i_n},x_{i_1,\ldots,i_n};D',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon)\right)_\varepsilon =$$

$$\left(\lim_{\mathbf{diam}\left(E_{i_1,\ldots,i_n}\right)\to 0} \prod_{j=1}^{n} \frac{[\Delta x_j]^{\frac{D'}{n}}}{\left|x_{i_1,\ldots,i_n}\right|^{\frac{d_{Y_{\alpha-}}}{n}}+\varepsilon}\right)_\varepsilon = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{[dx_j]^{\frac{D'}{n}}}{\left|x_{i_1,\ldots,i_n}\right|^{\frac{d_{Y_{\alpha-}}}{n}}+\varepsilon}\right)_\varepsilon. \qquad (\mathbf{I}.34)$$

Пусть теперь $Y=\prod_{i=1}^{n} Y_i$ и $\dim Y=n.$ Тогда в силу теоремы Фубини мы имеем

$$\int f(x)\left(d\mu'_{CH}\left(x;d',d_{Y_{\alpha-}},\varepsilon\right)\right)_\varepsilon = \int\ldots\int f(x_1,\ldots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\left(d\mu'_{i,CH}\left(x_i;d_i',d_{Y_{i,\alpha-}},\varepsilon\right)\right)_\varepsilon, \qquad (\mathbf{I}.35)$$

где $d'=\sum_{i=1}^{n} d_i'$, $\quad d_{Y_{\alpha-}}=\sum_{i=1}^{n} d_{Y_{i,\alpha-}}$ и

$$\left(d\mu'_{i,CH}\left(x_i;d_i',d_{Y_{i,\alpha-}},\varepsilon\right)\right)_\varepsilon = \frac{2\pi^{\frac{d_i'-d_{Y_{i,\alpha-}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d_i'-d_{Y_{i,\alpha-}}}{2}\right)}\frac{|x_i|^{d_i'-1}dx_i}{|x_i|^{d_{Y_{i,\alpha-}}}+\varepsilon}, \qquad (\mathbf{I}.36)$$

где $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{D} x_i^2}$. Для сферически симметричной функции, т.е. такой, что $f(\mathbf{r})=f(r),$ мы имеем очевидным образом

$$\int\ldots\int f(r)\prod_{i=1}^{n}(d\mu'_{CH}(x_i;D_i',d_{Y_{i,\alpha-}},\varepsilon))_\varepsilon =$$

$$c\left(d_1',\ldots,d_1';d_{Y_{1,\alpha-}},\ldots,d_{Y_{n,\alpha-}},\right)\left(\int f(r)\frac{|r|^{d'-1}dr}{|r|^{d_{Y_{\alpha-}}}+\varepsilon}\right)_\varepsilon, \qquad (\mathbf{I}.37)$$

где $c\left(d_1^{'}, \ldots, d_1^{'}; d_{Y_{1,\alpha-}}, \ldots, d_{Y_{n,\alpha-}},\right)$ -некоторая константа. Легко видеть, что правая часть (I.37) совпадает с правой частью формулы (I.29). Пусть например $n = 3$ и $Y = \prod_{i=1}^{3} Y_i \subsetneqq \mathbb{R}^3$, тогда мы имеем

$$\int f(r) d\mu_{1,CH}\left(x_1; d_1^{'}, d_{Y_{1,\alpha-}}, \varepsilon\right) d\mu_{2,CH}\left(x_2; d_2^{'}, d_{Y_{2,\alpha-}}, \varepsilon\right) d\mu_{3,CH}\left(x_3; d_3^{'}, d_{Y_{3,\alpha-}}, \varepsilon\right) =$$

$$\frac{2\pi^{\frac{d'-d_{Y_{\alpha-}}}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d'-d_{Y_{\alpha-}}}{2}\right)} \left(\int f(r) \frac{|r|^{d'-1} dr}{|r|^{d_{Y_{\alpha-}}} + \varepsilon}\right)_{\varepsilon}, \tag{I.38}$$

где $d' = d_1^{'} + d_2^{'} + d_3^{'}$ и $d_{Y_{\alpha-}} = d_{Y_{1,\alpha-}} + d_{Y_{2,\alpha-}} + d_{Y_{3,\alpha-}}$.

Замечание I.4. При выводе равенства (I.38) используется тождество

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1}(z) \cos^{\nu-1}(z) = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \tag{I.39}$$

где $\mu, \nu \in \mathbb{C}, \mu, \nu \notin \mathbb{Z}_-$.

Приложение II. Преобразование Лежандра обобщенной меры Коломбеау и его основные свойства.

Определение II.1. Пусть $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ -мера Коломбеау на произвольном метрическом пространстве X, а $\mathcal{F}_\varepsilon$ -семейство всех счетных разбиений $(U_{i,\varepsilon})$ носителя меры μ_ε, т.е. $\mathbf{Supp}(\mu_\varepsilon) = \cup_i U_{i,\varepsilon}$, где $U_{i,\varepsilon} \cap U_{j,\varepsilon} = \varnothing, \varepsilon \in (0,1]$. Для $\varepsilon \in (0,1]$ и любых $q, \tau \in \mathbb{R}$ определим обобщенную функцию $(\Gamma_\varepsilon(q,\tau))_\varepsilon$

$$(\Gamma_\varepsilon(q,\tau))_\varepsilon = \left(\lim_{r\to 0} \sup_{(U_i)\in\mathcal{F}_\varepsilon} \sum_i [\mu_\varepsilon(U_i, r_{U_i})]^q (\mathbf{diam} U_i)^\tau\right)_\varepsilon, \tag{II.1}$$

где $\sup_{i\in\mathbb{N}}(\mathbf{diam} U_i) \le r, r_{U_i} = d(0, x_i), x_i \in U_i$.

Теорема 1. Пусть обобщенная функция $(\Gamma_\varepsilon(q,\tau))_\varepsilon$ задана формулой (II.1). Тогда
(**i**) для любого $\varepsilon \in (0,1]$ и $q \in \mathbb{R}$ существует единственное чило $\tau(\varepsilon,q)$ такое что

$$(\Gamma_\varepsilon(q,\tau))_\varepsilon = \begin{cases} \infty \text{ если } \tau < (\tau(\varepsilon,q))_\varepsilon \\ 0 \text{ если } (\tau(\varepsilon,q))_\varepsilon < \tau \end{cases} \qquad (\mathbf{II}.2)$$

(**ii**) для любого $q \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(\tau(\varepsilon,q))_\varepsilon = \left(\lim_{r\to 0} \frac{\log\left[\sup\limits_{(U_i)\in\mathcal{F}_\varepsilon} \sum\limits_i [\mu_\varepsilon(U_i, r_{U_i})]^q\right]}{-\log r} \right)_\varepsilon, \qquad (\mathbf{II}.3)$$

где $\sup_{i\in\mathbb{N}}(\mathbf{diam}\, U_i) \leq r, r_{U_i} = d(0,x_i), x_i \in U_i$.
(**iii**) (a) определим мультифрактальный спектр обобщенной меры $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ как $\widetilde{\mathbb{R}}$ -значную функцию $(f_{\mu_\varepsilon}(\alpha))_\varepsilon$ заданную равенством

$$(f_{\mu_\varepsilon}(\alpha))_\varepsilon = (d_H(\Delta_{\mu_\varepsilon}(\alpha)))_\varepsilon. \qquad (\mathbf{II}.4)$$

(b) определим преобразование Лежандра $(\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon$ обобщенной функции $(\tau(\varepsilon,q))_\varepsilon$ как

$$(\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon = \left(\inf_q \left[\alpha q + \tau(\varepsilon,q)\right] \right)_\varepsilon. \qquad (\mathbf{II}.5)$$

Мультифрактальный спектр $(f_{\mu_\varepsilon}(\alpha))_\varepsilon$ обобщенной меры $(\mu_\varepsilon)_\varepsilon$ совпадает с преобразованием Лежандра $(\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon$:

$$(f_{\mu_\varepsilon}(\alpha))_\varepsilon = \begin{cases} (\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon \text{ если } 0 \leq (\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon \\ 0 \text{ если } (\tau^*(\varepsilon,q))_\varepsilon < 0. \end{cases} \qquad (\mathbf{II}.6)$$

Замечание 2. Отметим, что Теорема II.1 является прямым обобщением хорошо известного классического результата [56].

Приложение III. Фрактальные квантовые поля отрицательной размерности. Функции Грина соответствующие фрактальным квантовым полям.

Свободные скалярные квантовые фрактальные поля отрицательной размерности $\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-)$ и их канонически сопряженные $\Pi_m(t,\mathbf{x};D_-)$ как обобщенные операторные функции Коломбеау, формально определены равенством [37]

$$\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3,D_-}} \frac{d^{3,D_-}\mathbf{p}}{\sqrt{2\mu(\mathbf{p})}} \times$$

$$\{a^\dagger(\mathbf{p})\exp[i(\mu(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})] + a(\mathbf{p})\exp[-i(\mu(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})]\},$$

$$(\mathbf{III}.1)$$

$$\Pi_m(t,\mathbf{x};D_-) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3,D_-}} d^{3,D_-}\mathbf{p}\sqrt{\frac{\mu(\mathbf{p})}{2}} \times$$

$$\{a^\dagger(p)\exp[i(\mu(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})] - a(p)\exp[-i(\mu(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})]\}.$$

где

$\mu(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}+m^2}$, а операторы $a(\mathbf{p})$ и $a^\dagger(\mathbf{p})$ удовлетворяют обычным ККС

$$[a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0,$$

$$(\mathbf{III}.2)$$

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}').$$

Скалярные квантовые фрактальные поля отрицательной размерности в нулевой момент времени $\varphi_m(\mathbf{x};D_-)$ и их канонически сопряженные $\pi_m(\mathbf{x};D_-)$ определены равенством

$$\varphi_m(\mathbf{x};D_-) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3,D_-}} \frac{d^{3,D_-}\mathbf{p}}{\sqrt{2\mu(\mathbf{p})}} \{a^\dagger(p)\exp[-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})] + a(p)\exp[i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})]\},$$

$$\pi_m(\mathbf{x};D_-) = \qquad (\mathbf{III}.3)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{3,D_-}} d^{3,D_-}\mathbf{p}\sqrt{\frac{\mu(\mathbf{p})}{2}} \{a^\dagger(p)\exp[-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})] - a(p)\exp[i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})]\}.$$

В силу (**III**.1)-(**III**.2) мы имеем

$$[\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-),\Phi_m(t',\mathbf{x}';D_-)] = iD_0(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}';D_-), \qquad (\mathbf{III}.4)$$

где

$$D_0(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}';D_-) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^{3,D_-}\mathbf{p}\exp[i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]\frac{\sin[\mu(\mathbf{p})(t-t')]}{\mu(\mathbf{p})}. \qquad (\mathbf{III}.5)$$

В силу (**III**.4)-(**III**.5) для $t = t'$ мы имеем

$$[\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-),\Phi_m(t,\mathbf{x}';D_-)] = iD_0(0,\mathbf{r}-\mathbf{r}';D_-) = 0,$$

$$[\Pi_m(t,\mathbf{x};D_-),\Pi_m(t,\mathbf{x}';D_-)] = i\frac{\partial^2}{\partial t\partial t'}D_0(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}';D_-)\Big|_{t=t'} = 0, \qquad (\mathbf{III}.6)$$

$$[\Pi_m(t,\mathbf{x};D_-),\Phi_m(t,\mathbf{x}';D_-)] = i\frac{\partial}{\partial t}D_0(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}';D_-)\Big|_{t=t'} = -i\delta^{3,D_-}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

где

$$\delta^{3,D_-}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^{3,D_-}\mathbf{p}\exp(i\mathbf{pr}). \qquad (\mathbf{III}.7)$$

Преобразование Фурье-Коломбеау $\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-)$ квантового поля $\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-)$ определено с помощью интегрального уравнения

$$\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{3,D_-}} dp_0 d^{3,D_-}\mathbf{p}\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-)\exp[i(p,x)], \qquad (\mathbf{III}.8)$$

где $(p,x) = p_0x_0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$. Обобщенная функция $\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-)$ удовлетворяет каноническому уравнению Клейна-Гордона

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-) = 0. \qquad (\mathbf{III}.9)$$

В силу (**III**.9) носитель обобщенной функци $\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-)$ лежит на массовом гиперболоиде H_m, т.е. $\mathbf{Supp}\Big(\widehat{\Phi}_m(p_0,\mathbf{p};D_-)\Big) \subsetneqq H_m$.
Таким образом мы имеем представление

$$\Phi_m(t,\mathbf{x};D_-) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \times$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{3,D_-}} dp_0 d^{3,D_-}\mathbf{p}\{a^\dagger(p)\theta(p_0)\delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\exp[-i(p,x)] + a(p)\exp[i(p,x)]\}. \qquad (\mathbf{III}.10)$$

В эквивалентности (**III**.1) и (**III**.10) легко убедиться прямым вычислением. Дробные функции Грина, соответствующие фрактальным квантовым полям определены как

$$iG(x,x';D_-) = \langle 0|[\Phi_m(x;D_-),\Phi_m(x';D_-)]|0\rangle,$$
$$G^{(1)}(x,x';D_-) = \langle 0|\{\Phi_m(x;D_-),\Phi_m(x';D_-)\}|0\rangle, \tag{III.11}$$

где $x = (t,\mathbf{x})$. Разобьем эти функции на положительно- и отрицательно-частотные части

$$iG(x,x';D_-) = G^+(x,x';D_-) - G^-(x,x';D_-),$$
$$G^{(1)}(x,x';D_-) = G^+(x,x';D_-) + G^-(x,x';D_-), \tag{III.12}$$

где

$$G^+(x,x';D_-) = \langle 0|\Phi_m(x;D_-)\Phi_m(x';D_-)|0\rangle,$$
$$G^-(x,x';D_-) = \langle 0|\Phi_m(x';D_-)\Phi_m(x;D_-)|0\rangle. \tag{III.13}$$

Дробный Фейнмановский пропагатор $G_{\mathcal{F}}(x,x';D_-)$ зададим каноническим образом как

$$G_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = \langle 0|T(\Phi_m(x;D_-)\Phi_m(x';D_-))|0\rangle =$$
$$\theta(t-t')G^+(x,x';D_-) + \theta(t'-t)G^-(x,x';D_-). \tag{III.14}$$

Дробную запаздывающую $G_R(x,x';D_-)$ и опережающую $G_A(x,x';D_-)$ функции Грина зададим каноническим образом как

$$G_R(x,x';D_-) = -\theta(t-t')G(x,x';D_-),$$
$$G_A(x,x';D_-) = \theta(t'-t)G(x,x';D_-), \qquad (\mathbf{III}.15)$$

Тогда справедливо равенство

$$G_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = -\overline{G}(x,x';D_-) - \frac{1}{2}G^{(1)}(x,x';D_-),$$
$$\overline{G}(x,x';D_-) = \frac{1}{2}[G_R(x,x';D_-) + G_A(x,x';D_-)]. \qquad (\mathbf{III}.16)$$

Функции $G, G^{(1)}, G^{\pm}$ удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$(\Box_x + m^2)G^{(1),\pm}(x,x';D_-) = 0. \qquad (\mathbf{III}.17)$$

В силу определений и коммутационных соотношений (**III**.6) мы имеем

$$(\Box_x + m^2)G_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = -\delta(t-t')\delta^{3,D_-}(\mathbf{x},\mathbf{x}'),$$
$$(\Box_x + m^2)G_{R,A}(x,x';D_-) = \delta(t-t')\delta^{3,D_-}(\mathbf{x},\mathbf{x}'). \qquad (\mathbf{III}.18)$$

Для фрактальных спинорных полей спина $1/2$ мы введем функции

$$S_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = \langle 0|T(\Psi(x;D_-)\overline{\Psi}(x';D_-))|0\rangle,$$
$$S^{(1)}(x,x';D_-) = \langle 0|[\Psi(x;D_-),\overline{\Psi}(x';D_-)]|0\rangle, \qquad (\mathbf{III}.19)$$

которые, как легко видеть, удовлетворяют следующим уравнениям

$$(i\gamma^a\partial_a - m)S_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = \delta(t-t')\delta^{3,D_-}(\mathbf{x},\mathbf{x}'),$$

$$(i\gamma^a\partial_a - m)S^{(1)}(x,x';D_-) = 0,$$

$$S_{\mathcal{F}}(x,x';D_-) = (i\gamma^a\partial_a - m)G_{\mathcal{F}}(x,x';D_-), \tag{III.20}$$

$$S^{(1)}(x,x';D_-) = -(i\gamma^a\partial_a - m)G^{(1)}(x,x';D_-).$$

Фейнмановский пропагатор для фрактального электромагнитного квантового поля зададим выражением

$$iD_{\mathcal{F}\alpha\beta}(x,x';D_-) = \langle 0|[A_\alpha(x;D_-),A_\beta(x';D_-)]|0\rangle. \tag{III.21}$$

Учитывая уравнения поля, мы получим уравнение для дробного Фейнмановского пропагатора

$$[\eta_{\alpha\lambda}\Box_x - (1-\xi^{-1})\partial^x_\alpha\partial^x_\lambda]D_{\mathcal{F}\alpha\beta}(x,x';D_-) = \delta^\beta_\alpha\delta(t-t')\delta^{3,D_-}(\mathbf{x},\mathbf{x}'). \tag{III.22}$$

Приложение IV. Выражения для давления и плотности энергии вакуума в до Планковскую и Планковскую космологические эпохи.

Определение IV.1.(i) Под Планковской космологической эпохой мы будем подразумевать промежуток времени в течении которого Вселенная имеет размер L полядка Планковской длины, т.е. $L \simeq l_{\mathbf{P}} = \sqrt{\hbar G/c^3}$. Планковская эпоха заканчивается в момент времени $t \simeq t_{\mathbf{P}} = 10^{-40}$ сек после Большого Взрыва.
(ii) Под до Планковской космологической эпохой мы будем подразумевать промежуток времени в течении которого Вселенная имеет размер $L \ll l_{\mathbf{P}}$. Началу до Планковской космологической эпохи, соответствует момент времени $t^*_{\mathbf{P}} \ll t_{\mathbf{P}}$.
В дальнейшем, мы будем предполагать выполненными следующие условия:
(**i**) в до Планковскую и Планковскую космологические эпохи, пространство-время является обобщенным мультифракталом $\{\Delta_{\alpha^r_-}\}^N_{r=1}$ отрицательной размерности

(т.е. $d_{CH}(\Delta_{\alpha_-^r}) < 0, r = 1,\ldots,N$) в псевдоримановом пространстве (M,g).
(ii) на протяжении всей до Планковской космологической эпохи,спектр размерностей $d_{CH}(\Delta_{\alpha_-^r}), r = 1,\ldots,N$ остается постоянным.

Как и в работе Я.Б. Зельдовича **[2** 2], здесь мы рассматриваем приближение в котором гравитационное поле $g_{ik}(x)$ описывается чисто классически. Напомним, что в соответствии с общие методологией принятой в данной работе, предполагается, что носители всех полей как квантовых так и классических не являются фрактальными множествами и в частности $Supp(g_{ik}(x)) = \Omega \subseteq \mathbb{R}^4$, где Ω -произвольная область в $\mathbb{R}^4$. Таким образом эволюция масштабного фактора $a(t)$ описывается в рамках стандартных Λ -моделей **[2** 2]. Обобщенные Λ -модели для случая пространства-времени отрицательной размерности $D_- < 0$, были рассмотрены нами в работе [37]. Мы будем использовать следующее интегральное представление для Бета-функции Эйлера

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^\infty dz z^{\alpha-1}(1+z)^{-\alpha-\beta}. \qquad (\mathbf{IV}.1)$$

В дальнейшем, нам потребуются интегралы

$$\mathbf{J}_\pm(\alpha) = \int_0^\infty dz z^{\alpha-1}(1+z^2)^{\pm\frac{1}{2}}. \qquad (\mathbf{IV}.2)$$

Преобразуем интегралы (**IV**.2) к виду (**IV**.1). Замена переменной в интегралах (**IV**.2) $z^2 = y, 2dz = dy$ дает

$$\mathbf{J}_\pm(\alpha) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dy y^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty dy y^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{-\frac{\alpha-1}{2}+\left(\frac{\alpha-1}{2}\pm\frac{1}{2}\right)} \qquad (\mathbf{IV}.3)$$

В силу (**IV**.1) и (**IV**.3) мы имеем

$$\mathbf{J}_{+}(\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dyy^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{-\frac{\alpha-1}{2}+\left(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dyy^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{-\frac{\alpha-1}{2}-\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} = \qquad (\mathbf{IV}.4)$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Аналогичным образом мы получаем

$$\mathbf{J}_{-}(\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dyy^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{-\frac{\alpha-1}{2}+\left(\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} dyy^{\frac{\alpha-1}{2}}(1+y)^{-\frac{\alpha-1}{2}-\left(\frac{-\alpha+2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}+\frac{-\alpha+2}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \qquad (\mathbf{IV}.5)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

Плотность энергии вакуума $\rho_V(D_-,m)$ для отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (3.10),(III.1) и (IV.3) имеет следующий вид

$$\rho_V(D_-,m) = K\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,d^{3,D_-}\mathbf{k}. \qquad (\mathbf{IV}.6)$$

В полярных координатах (k,φ,θ), где $k = \sqrt{\mathbf{k}^2}$ мы получим

$$\rho_V(D_-,m) =$$

$$K\int_{\mathbb{R}^3} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,d^{3,D_-}\mathbf{k} = K\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}(\sin\theta)^{1-|D_-|}d\theta\int_0^{\infty} f(m)\sqrt{k^2+m^2}\,k^{2-|D_-|}dk. \qquad (\mathbf{IV}.7)$$

Учитывая равенство

$$\Delta(D_-) = \int(\sin\theta)^{1-|D_-|}d\theta = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}, \qquad (\mathbf{IV}.8)$$

мы получим

$$\rho_V(D_-,m) =$$

$$K\int_{\mathbb{R}^3} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\,d^{3,D_-}\mathbf{k} = 2K\sqrt{\pi^3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}\int_0^{\infty} f(m)\sqrt{k^2+m^2}\,k^{2-|D_-|}dk = \qquad (\mathbf{IV}.9)$$

Замена переменной $k = my$ в интеграле, входящем в правую часть уравнения (**IV**.9) дает

$$\int_0^{\infty} f(m)\sqrt{k^2+m^2}\,k^{2-|D_-|}dk = f(m)m^{4-|D_-|}\int_0^{\infty}(1+y^2)y^{2-|D_-|}dy. \qquad (\mathbf{IV}.10)$$

С учетом (**IV**.10),(**IV**.3) и (**IV**.4) мы окончательно получим

$$\rho_V(D_-,m) = -\frac{K}{2}\sqrt{\pi^3}\,f(m)m^{4-|D_-|}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3-|D_-|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \qquad (\mathbf{IV}.11)$$

$$\left[-\frac{K\pi}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}\right]f(m)m^{4-|D_-|}.$$

Плотность энергии вакуума $\rho_V(D_-)$ для отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (3.10) и (IV.11) имеет следующий вид

$$\rho_V(D_-) = \left[-\frac{K\pi}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}\right]\int_0^\infty f(m)m^{4-|D_-|}dm. \qquad (\mathbf{IV}.12)$$

Здесь мы предполагаем, что $4-|D_-| \leq -2$, а функция $f(m)$ удовлетворяет следующим условиям: (i)

$$\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(m)m^{4-|D_-|}dm = 0 \qquad (\mathbf{IV}.13)$$

и

(ii) $f(m) = \eta, |\eta| \ll 1$ при $m \geq m_{\mathbf{eff}}$ В силу вышеуказанных условий (i)-(ii), мы получаем

$$\rho_V(D_-) = -\frac{K\eta\pi}{2}\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-|}}{|D_-|-5}\frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}. \qquad (\mathbf{IV}.14)$$

Окончательно для плотности энергии вакуума

$\rho_V^{\mathbf{tot}}$ мы получаем следующее выражение

$$\rho_V^{\mathbf{tot}} = \sum_{r=1}^{N} \rho_V(D_-^{(r)}) = -\frac{K\eta\pi}{2} \sum_{r=1}^{N} \frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-^{(r)}|}}{|D_-^{(r)}|-5} \frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}. \qquad (\mathbf{IV}.15)$$

Давление вакуума $p_V(D_-,m)$ для отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (3.10) и (IV.11) имеет следующий вид

$$p_V(D_-,m) = K \int_{\mathbb{R}^3} f(m)\left(\overline{u_x k_x}\right) d^{3,D_-}\mathbf{k}, \mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{k^2+m^2}}, \overline{u_x k_x} = \frac{1}{3}(\mathbf{uk}). \qquad (\mathbf{IV}.16)$$

В силу (IV.16) мы имеем

$$p_V(D_-,m) = \frac{K}{3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(m)\mathbf{k}^2 d^{3,D_-}\mathbf{k}}{\sqrt{k^2+m^2}} = K' F(D_-,m), \qquad (\mathbf{IV}.17)$$

где $K' = K/3$. В полярных координатах (k,φ,θ), где $k = \sqrt{\mathbf{k}^2}$ мы получим

$$F(D_-,m) = 2K'\sqrt{\pi^3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} \int_0^{\infty} f(m) k^{4-|D_-|}(k^2+m^2)^{-\frac{1}{2}} dk. \qquad (\mathbf{IV}.18)$$

Замена переменной $k = my$ в интеграле, входящем в правую часть уравнения (**IV**.18) дает

$$\int_0^{\infty} f(m) k^{4-|D_-|}(k^2+m^2)^{-\frac{1}{2}} dk = f(m) m^{4-|D_-|} \int_0^{\infty} y^{4-|D_-|}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}} dy. \qquad (\mathbf{IV}.19)$$

Учитывая теперь (**IV**.5) мы получаем

$$\int_0^{\infty} f(m)k^{4-|D_-|}(k^2+m^2)^{-\frac{1}{2}}dk = \frac{1}{2}f(m)m^{4-|D_-|}\frac{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-2+|D_-|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \qquad (\mathbf{IV}.20)$$

С учетом (**IV**.18) и (**IV**.20) мы получим

$$p_V(D_-,m) = \frac{1}{2}K'\sqrt{\pi^3}f(m)m^{4-|D_-|}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-|-2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = \qquad (\mathbf{IV}.21)$$

$$\frac{\pi}{2}K'm^{4-|D_-|}\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-|-2}{2}\right).$$

Давление вакуума $p_V(D_-)$ для отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (3.10) и (IV.21) имеет следующий вид

$$p_V(D_-) = p_V(D_-,m) = \left[\frac{\pi}{2}K'\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-|-2}{2}\right)\right]\int_0^{\infty} f(m)m^{4-|D_-|}dm. \qquad (\mathbf{IV}.22)$$

Подставив в (**IV**.22) выражение для интеграла $\int f(m)m^{4-|D_-|}dm$, указанное выше, мы получим

$$p_V(D_-) = \frac{\pi\eta}{2}K'\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-|}}{|D_-|-5}\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-|-2}{2}\right). \qquad (\mathbf{IV}.23)$$

Полное давление вакуума $p_V^{\mathbf{tot}}$ для отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (IV.23) имеет следующий вид

$$p_V^{\mathbf{tot}} = \frac{\pi\eta}{2}K'\sum_{r=1}^{N}\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-^{(r)}|}}{|D_-^{(r)}|-5}\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-^{(r)}|-2}{2}\right). \qquad (\mathbf{IV}.24)$$

В силу (IV.15) и (IV.24) с учетом равенства $K' = K/3$ для эффективной гравитирующей плотности вакуума $\rho_{\mathbf{eff}}$ мы получаем следующее выражение

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V^{\mathbf{tot}} + 3p_V^{\mathbf{tot}} =$$

$$-\frac{K\eta\pi}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-^{(r)}|}}{|D_-^{(r)}|-5}\frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-^{(r)}|-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)} -$$

$$-\frac{K\eta\pi}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-^{(r)}|}}{|D_-^{(r)}|-5}\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-^{(r)}|-2}{2}\right) = \qquad (\mathbf{IV}.25)$$

$$-\frac{K\eta\pi}{2}\sum_{r=1}^{N}\frac{m_{\mathbf{eff}}^{5-|D_-^{(r)}|}}{|D_-^{(r)}|-5}\left[\frac{\Gamma^2\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-^{(r)}|-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. +\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|D_-^{(r)}|-2}{2}\right)\right].$$

Согласно уравнениям Фридмана, необходимым условием для ускоренного расширения космологической среды является условие $\rho_{\mathbf{eff}} < 0.$

Приложение V. Уравнение состояния вакуумной среды в современную космологическую эпоху.

Плотность энергии вакуума $\rho_V(D_-, m)$ для случая пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3 - |D_-| < 0$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний),в силу (3.10) и (III.1) имеет следующий вид

$$\rho_V(D_-,m) = \rho_V(m,p_*) + \widetilde{\rho}_V(D_-,m,p_*) =$$

$$K \int\limits_{\|\mathbf{k}\|<p_*} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\, d^3\mathbf{k} + K \int\limits_{\|\mathbf{k}\|\geq p_*} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\, d^{3,D_-}\mathbf{k}. \qquad (\mathbf{V}.1)$$

Функция $\rho_V(m,p_*)$ уже была вычислена нами в параграфе 3, поэтому здесь мы рассмотрим только функцию

$$\widetilde{\rho}_V(D_-,m,p_*) = K \int\limits_{\|\mathbf{k}\|\geq p_*} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\, d^{3,D_-}\mathbf{k}. \qquad (\mathbf{V}.2)$$

В полярных координатах (k,φ,θ), где $k = \sqrt{\mathbf{k}^2}$ мы получим

$$\widetilde{\rho}_V(D_-,m,p_*) =$$

$$K \int\limits_{\|\mathbf{k}\|\geq p_*} f(m)\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}\, d^{3,D_-}\mathbf{k} = K\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} (\sin\theta)^{1-|D_-|} d\theta \int\limits_{p_*}^{\infty} f(m)\sqrt{k^2+m^2}\, k^{2-|D_-|} dk =$$

$$K\Delta(|D_-|) \int\limits_{p_*}^{\infty} f(m)\sqrt{k^2+m^2}\, k^{2-|D_-|} dk, \qquad (\mathbf{V}.3)$$

$$\Delta(|D_-|) = 2\sqrt{\pi^3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}.$$

Замена переменной $k = mp$ в интеграле, входящем в правую часть уравнения (**V**.3) дает

$$\widetilde{\rho}_V(D_-,m,p_*) = K\Delta(|D_-|)f(m)m^{4-|D_-|}\int\limits_{mp_*}^{\infty}\sqrt{p^2+1}\,p^{2-|D_-|}dp =$$

$$K\Delta(|D_-|)f(m)m^{4-|D_-|}\int\limits_{mp_*}^{\infty}\sqrt{p^2+1}\,p^{2-|D_-|}dp. \qquad (\mathbf{V}.4)$$

Подставив в правую часть уравнения (**V**.4) Тейлоровское разложение

$$\sqrt{1+\frac{1}{p^2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{16}\frac{1}{p^6}+\ldots \qquad (\mathbf{V}.5)$$

и

выполнив почленное интегрирование, мы получим

$$\widetilde{\rho}_V(D_-,m,p_*) = K\Delta(|D_-|)f(m)m^{4-|D_-|}\int\limits_{mp_*}^{\infty}\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\,p^{3-|D_-|}dp =$$

$$K\Delta(|D_-|)f(m)m^{4-|D_-|}\left(\int\limits_{mp_*}^{\infty}p^{3-|D_-|}dp+\frac{1}{2}\int\limits_{mp_*}^{\infty}p^{1-|D_-|}dp+\ldots\right) = \qquad (\mathbf{V}.6)$$

$$K\frac{\Delta(|D_-|)}{|D_-|-4}f(m)m^{8-2|D_-|}p_*^{4-|D_-|}+O\left(p_*^{2-|D_-|}\right).$$

Плотность энергии вакуума $\rho_V(D_-,m_{\mathbf{eff}}p_*)$ для пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ (с учетом только нулевых колебаний),в силу (V.6) имеет следующий вид

$$\widetilde{\rho}_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) = K\frac{\Delta(|D_-|)}{|D_-|-4}p_*^{4-|D_-|}\int\limits_0^\infty f(m)m^{8-2|D_-|}dm + O\Big(p_*^{2-|D_-|}\Big). \qquad (\mathbf{V}.7)$$

Здесь мы предполагаем, что $4-|D_-| \leq -2$, а функция $f(m)$ удовлетворяет следующим условиям: (**i**)

$$\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(m)m^{8-2|D_-|}dm = 0 \qquad (\mathbf{V}.8)$$

и

(**ii**) $f(m) = \eta, |\eta| \ll 1$ при $m \geq m_{\mathbf{eff}}$ В силу вышеуказанных условий (i)-(ii), мы получаем

$$\widetilde{\rho}_V(D_-, m_{\mathbf{eff}} p_*) = K\frac{\Delta(|D_-|)}{|D_-|-4}p_*^{4-|D_-|}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^\infty f(m)m^{8-2|D_-|}dm + O\Big(p_*^{2-|D_-|}\Big) =$$

$$(\mathbf{V}.9)$$

$$K\eta\frac{\Delta(|D_-|)}{(|D_-|-4)(2|D_-|-9)}p_*^{4-|D_-|}m_{\mathbf{eff}}^{9-2|D_-|} + O\Big(p_*^{2-|D_-|}\Big).$$

Таким образом, плотность энергии вакуума $\rho_V(D_-, m_{\mathbf{eff}} p_*)$ для случая пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| \quad < 0$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний),в силу (V.3) имеет следующий вид

$$\rho_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) = \rho_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) + \widetilde{\rho}_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} \rho_V(m, p_*) f(m) dm + \widetilde{\rho}_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) = \qquad (\mathbf{V}.10)$$

$$\rho_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) + 2K\eta \frac{\sqrt{\pi^3}\, m_{\mathbf{eff}}^{9-2|D_-|}}{(|D_-|-4)(2|D_-|-9)} \frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} p_*^{4-|D_-|}.$$

Где

$$\rho_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\frac{1}{4} p_*^4 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) d\mu + \frac{1}{4} p_*^2 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^2 d\mu + \left(C_1 - \frac{1}{8} \ln p_*\right) \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^4 d\mu + \qquad (\mathbf{V}.11)$$

$$+\frac{1}{8} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^4 (\ln \mu) d\mu - \left(\frac{1}{p_*^2}\right) \frac{1}{32} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3})$$

Замечание V.1. Здесь мы использовали формулу (3.18) в которой положили $p_0 = p_*$. Окончательно для полной плотности энергии вакуума $\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*)$ мы получаем следующее выражение

$$\rho_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}},p_*) =$$

$$\frac{1}{4}p_*^4\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \frac{1}{4}p_*^2\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_1 - \frac{1}{8}\ln p_*\right)\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu +$$

$$+\frac{1}{8}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu - \left(\frac{1}{p_*^2}\right)\frac{1}{32}\int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_0^{-3}) + \qquad (\mathbf{V}.12)$$

$$+2K\eta\sqrt{\pi^3}\sum_{r=1}^{N}\frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm + O(p_*^{-3}).$$

Давление вакуума $p_V(D_-,m,p_*)$ для случая пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0,$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний) имеет следующий вид

$$p_V(D_-,m,p_*) = p_V(m,p_*) + p_V(D_-,m,p_*) =$$

$$K\int\limits_{\|\mathbf{k}\|\le p_*} f(m)\left(\overline{u_x k_x}\right)d^{3,D_-}\mathbf{k} + K\int\limits_{\|\mathbf{k}\|>\mathbf{p}_*} f(m)\left(\overline{\mathbf{u_x k_x}}\right)\mathbf{d}^{\mathbf{3,D_-}}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{k^2+m^2}} \text{ если } \|\mathbf{k}\| \ll p_*, \qquad (\mathbf{V}.13)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{m}\left(1+\frac{m}{E_p}\right), m = \gamma m_0 \text{ если } \|\mathbf{k}\| \ge p_*,$$

$$\overline{u_x k_x} = \frac{1}{3}(\mathbf{uk}).$$

Замечание V.2. Для $\|\mathbf{k}\| \ge p_*$ строго говоря, необходимо использовать связь между переменными $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$ в соответствии с выбранным в параграфе 3 способом нарушения Лоренц-инвариантности см. [68] формула (14). Тем не менее, ниже мы используем обычную связь между переменными $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$, поскольку это практически не влияет на окончательный результат.

В силу (V.13) мы имеем

$$p_V(D_-,m,p_*) = \frac{K}{3}\int\limits_{\|\mathbf{k}\|\leq p_*}\frac{f(m)\mathbf{k}^2 d^3\mathbf{k}}{\sqrt{k^2+m^2}} + \frac{K}{3}\int\limits_{\|\mathbf{k}\|>p_*}\frac{f(m)\mathbf{k}^2}{\sqrt{k^2+m^2}}d^{3,D_-}\mathbf{k} = \qquad (\mathbf{V}.14)$$

$$p_V(m,p_*)+\widetilde{p}_V(D_-,m,,p_*),$$

Функция $p_V(m,p_*)$ уже была вычислена нами впараграфе 3, поэтому здесь мы рассмотрим только функцию

$$\widetilde{p}_V(D_-,m,p_*) = \frac{K}{3}\left(\int\limits_{\|\mathbf{k}\|>p_*}\frac{f(m)\mathbf{k}^2}{\sqrt{k^2+m^2}}d^{3,D_-}\mathbf{k}\right). \qquad (\mathbf{V}.15)$$

В полярных координатах (k,φ,θ), где $k=\sqrt{\mathbf{k}^2}$ мы получим

$$\widetilde{p}_V(D_-,m,p_*) = \frac{K}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}(\sin\theta)^{1-|D_-|}d\theta\int\limits_{p_*}^{\infty}\frac{f(m)k^{4-|D_-|}}{\sqrt{k^2+m^2}}dk = \qquad (\mathbf{V}.16)$$

$$\frac{K}{3}\Delta(|D_-|)\int\limits_{p_*}^{\infty}\frac{f(m)k^{4-|D_-|}}{\sqrt{k^2+m^2}}dk.$$

Замена переменной $k=mp$ в интеграле, входящем в правую часть уравнения (V.16) дает

$$\widetilde{p}_V(D_-,m,p_*) = \frac{K}{3}\Delta(|D_-|)\int\limits_{p_*}^{\infty}\frac{f(m)k^{4-|D_-|}}{\sqrt{k^2+m^2}}dk =$$

$$\frac{Kf(m)m^{4-|D_-|}}{3}\Delta(|D_-|)\int\limits_{mp_*}^{\infty}\frac{dpp^{4-|D_-|}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{Kf(m)m^{4-|D_-|}}{3}\Delta(|D_-|)\int\limits_{mp_*}^{\infty}\frac{dpp^{3-|D_-|}}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}. \qquad (\mathbf{V}.17)$$

Подставив Тейлоровское разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}+\frac{3}{8}\frac{1}{p^4}-\frac{5}{16}\frac{1}{p^6}+\ldots, \qquad (\mathbf{V}.18)$$

в

правую часть уравнения (**V**.17) мы получим

$$\widetilde{p}_V(D_-,m,p_*) = \frac{Kf(m)m^{4-|D_-|}}{3}\Delta(|D_-|)\int\limits_{mp_*}^{\infty}\frac{dpp^{3-|D_-|}}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}$$

$$\frac{Kf(m)m^{4-|D_-|}}{3}\Delta(|D_-|)\left(\int\limits_{mp_*}^{\infty}dpp^{3-|D_-|}+\int\limits_{mp_*}^{\infty}dpp^{1-|D_-|}+\ldots\right) = \qquad (\mathbf{V}.19)$$

$$\frac{Kf(m)m^{8-2|D_-|}}{3(|D_-|-4)}\Delta(|D_-|)p_*^{4-|D_-|}+O\left(p_*^{2-|D_-|}\right).$$

Таким образом, давление вакуума $p_V(D_-,m_{\mathbf{eff}}p_*)$ для случая пространства-времени отрицательной размерности $d_{CH} = 3-|D_-| < 0$ обладающего зернистой микроструктурой (с учетом только нулевых колебаний),в силу (V.14) имеет следующий вид

$$p_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) = p_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) + \widetilde{p}_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\int_0^{m_{\mathbf{eff}}} p_V(m, p_*) f(m) dm + \int_0^{\infty} f(m) \widetilde{p}_V(D_-, m, p_*) dm =$$

$$p_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) + \frac{K}{3} \frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-| - 4)} \frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} p_*^{4-|D_-|} \int_0^{\infty} f(m) m^{8-2|D_-|} dm = \qquad (\mathbf{V}.20)$$

$$p_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) + \frac{K\eta}{3} \frac{2\sqrt{\pi^3}\, m^{9-2|D_-|}}{(|D_-| - 4)(2|D_-| - 9)} \frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)} p_*^{4-|D_-|}.$$

Где

$$p_V(m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\frac{1}{12} p_*^4 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) d\mu - \frac{1}{12} p_*^2 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8} \ln p_*\right) \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^4 d\mu - \qquad (3.21)$$

$$-\frac{1}{8} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^4 (\ln \mu) d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right) \frac{1}{32} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu) \mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}).$$

Замечание V.3. Здесь мы использовали формулу (3.19) в которой положили $p_0 = p_*$. Для давления вакуума $p_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*)$ мы получаем следующее выражение

$$p_V(D_-, m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\frac{1}{12}p_*^4 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu - \frac{1}{12}p_*^2 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right) \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu -$$

$$-\frac{1}{8} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 (\ln\mu) d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (\mathbf{V}.22)$$

$$+\frac{K\eta}{3}\frac{2\sqrt{\pi^3}\, m^{9-2|D_-|}}{(|D_-|-4)(2|D_-|-9)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}p_*^{4-|D_-|}.$$

С учетом равенства (V.22) для полного давления вакуума $p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*)$ мы получаем следующее окончательное выражение

$$p_V^{\mathbf{tot}}(m_{\mathbf{eff}}, p_*) =$$

$$\frac{1}{12}p_*^4 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu - \frac{1}{12}p_*^2 \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^2 d\mu + \left(C_2 + \frac{1}{8}\ln p_*\right) \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu -$$

$$-\frac{1}{8} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 (\ln\mu) d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{32} \int\limits_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (\mathbf{V}.23)$$

$$+\frac{K}{3}\sum_{r=1}^{N}\frac{2\sqrt{\pi^3}}{(|D_-|-4)}\frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-|}{2}\right)}p_*^{4-|D_-|}\int\limits_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm.$$

Выражение для эффективной гравитирующей плотности вакуума $\rho_{\mathbf{eff}}$ имеет следующий вид

$$\rho_{\mathbf{eff}} = \rho_V^{\mathbf{tot}} + 3p_V^{\mathbf{tot}} =$$

$$\frac{1}{2}p_*^4 \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)d\mu + \left(3C_2 + C_1 + \frac{1}{4}\ln p_*\right) \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4 d\mu$$

$$-\frac{1}{4} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^4(\ln\mu)d\mu + \left(\frac{5}{p_*^2}\right)\frac{1}{16} \int_0^{m_{\mathbf{eff}}} f(\mu)\mu^6 d\mu + O(\mu^7 p_*^{-3}) + \qquad (\mathbf{V}.24)$$

$$+4K\sqrt{\pi^3} \sum_{r=1}^{N} \frac{p_*^{4-|D_-^{(r)}|}}{(|D_-^{(r)}|-4)} \frac{\Gamma\left(\frac{2-|D_-^{(r)}|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-|D_-^{(r)}|}{2}\right)} \int_{m_{\mathbf{eff}}}^{\infty} f(m)m^{8-2|D_-^{(r)}|}dm.$$

Согласно уравнениям Фридмана необходимым условием для наличия фазы ускоренного расширения космологической среды, является условие $\rho_{\mathbf{eff}} < 0$.

Литература

[1] C.S.Weinberg, The cosmological constant problem, Rev. Mod. Phys. 1989. V.61. P.1-23. УФН Выпуск 5, 2012 Перевод М. Б. Волошина.

[2] (1) Я.Б.Зельдович,Письма в ЖЭТФ,Т6 стр.883 (1967).

(2) Я.Б.Зельдович,Космологическая постоянная и теория элементарных частиц,УФН 95 209--230 (1968).

(3) Я.Б.Зельдович,Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии УФН 133 479 (1981) [Y.B.Zel'dovich, Sov.Phys.Usp. 24 216(1981)].

[3] А.Д.Чернин,Темная энергия и всемирное антитяготение, УФН, том 178, номер 3, стр. 267--300 (2008).

[4] Э.Б.Глинер, ЖЭТФ 49 542 (1965) [E. B. Gliner, Sov. Phys. JETP 22 378 (1966)], ДАН СССР 192 771 (1970) [Sov.Phys. Dokl. 15 559 (1970)]

[5] Э.Б.Глинер,Раздувающаяся вселенная и вакуумоподобное

состояние физической среды,УФН, том 172 номер 2, стр.221-228 (2002).
[6] M.Bender and T.T.Wu,Phys. Rev. Lett.21,406 (1968), Phys. Rev. 184, 1231 (1968).
[7] C.M.Bender,H.J.Happ, and B.Svetitsky, Phys. Rev. D 9,2324 (1974).
[8] G.V.Dunne and I.G.Halliday, Nucl. Phys. B308, 589 (1988).
[9] G.V.Dunne, J. Phys. A 22,1719 (1989).
[10] S.J.Rabello, A.N.Vaidya, L.C.M.de Albuquerque,The negative dimensional oscillator at finite temperature,Physics Letters B 324 (1994) 32-35.
[11] M.Bender, S.Boettcher, and L.Lipatov,Almost zero-dimensional quantum field theories,Phys. Rev.D,V.46,12.
[12] K.Svozil, Quantum field theory on fractal spacetime: a new regularisation method,J. Phys. A: Math. Gen.20 (1987) 3861-3875.
[13] B.McClain, A.Niemi, C.Taylor, and L.C.R.Wijewardhana,Superspace, Negative Dimensions, and Quantum Field Theories,Phys. Rev. Lett. Vol.49,N.4,26 (1982).
[14] I.G.Halliday,R.M.Ricotta,Negative dimensional integrals.**I.**Feynman graphs,Phys. Lett.B Volume 193, Issues 2--3, 16 July 1987, Pages 241--246.
[15] G.V.Dunne,I.G.Halliday, Negative dimensional integration.**II.** Path integrals and fermionic equivalence,Phys. Lett.B Volume 193, Issues 2--3, 16 July 1987, Pages 247--252.
[16] A.T.Suzuki and A.G.M.Schmidt,Negative-dimensional integration revisited, 1998 J. Phys. A: Math. Gen.31 8023.
[17] A.T.Suzuki, and A. G. M. Schmidt, Easy way to solve two-loop vertex integrals, Phys. Rev. D58 (1998) 047701
[18] A.T.Suzuki, and A. G. M. Schmidt,Two-loop self-energy diagrams worked out with NDIM, Eur. Phys. Journal C5 (1998) 175
[19] A.T. Suzuki, and A. G. M. Schmidt, Negative dimensional integration: Lab-testing' at two loops, JHEP09 (1997) 002.
[20] A.T.Suzuki and A.G.M. Schmidt, Feynman integrals with tensorial structure in the negative dimensional integration scheme, The European Physical Journal C-Particles and Fields, Volume 10, Number 2 (1999), 357-362,
[21] A.T.Suzuki,Evaluating one-loop light-cone integrals by covariantizing the gauge-dependent pole,Modern Phys. Lett. A8, 2365 (1993).
[22] C.Anastasiou, E.W.N. Glover, C.Oleari, Scalar one-loop integrals using the negative-dimension approach,Nuclear Physics B 572 2000. 307-360.
[23] G.Eyink,Quantum field-theory models on fractal spacetime.**I.** Introduction and overview.Commun. Math. Phys. 125, 613-636 (1989).
[24] G.Eyink,Quantum field-theory models on fractal spacetime.**II.** Hierarchical propagators.Commun. Math. Phys. 126, 85-101 (1989)
[25] G.Calcagni, Quantum field theory, gravity and cosmology in a fractal universe. http://arxiv.org/abs/1001.0571
[26] G.Calcagni,Fractal universe and quantum gravity,Phys. Rev. Lett. 104, 251301 (2010) http://arxiv.org/abs/0912.3142
[27] G.Calcagni,Gravity on a multifractal, Phys. Lett. B 697 (2011) 251-253, [arXiv:1012.1244]

[28] O.A.Lemets D. A.Yerokhin, Interacting dark energy models in fractal cosmology, http://arxiv.org/abs/1202.3457v2
[29] B.B.Mandelbrot, Physica A 163 (1990) 306-315.
[30] B.B.Mandelbrot, Journal of Fourier Analysis and Applications p.410. Kahane Special Issue,1995.
B.B.Mandelbrot,Multifractal power law distributions: negative and critical dimensions and other anomalies, explained by a simple example, Journal of Statistical Physics, vol. 110, no. 3--6, pp. 739-774,2003.
[31] M.Visser,Sakharov's induced gravity: a modern perspective Modern, Physics Letters A, Vol.17,Nos.15-17 (2002) 977-991 http://arxiv.org/abs/grqc/0204062
[32] A.D.Sakharov Vacuum Quantum Fluctuations In Curved Space And The Theory Of Gravitation, Sov. Phys. Dokl.12 (1968) 1040 [Dokl. Akad. Nauk Ser. Fiz. 177 (1968) 70]. Reprinted in Gen. Rel. Grav. 32 (2000) 365-367.
[33] J.S.Dowker and R. Critchley, Effective Lagrangian And Energy Momentum Tensor In De Sitter Space, Phys. Rev. D 13 (1976) 3224.S. W. Hawking, Zeta Function Regularization Of Path Integrals In Curved Space-Time, Commun. Math. Phys. 55 (1977) 133.
[34] S.Blau, M. Visser and A. Wipf, Zeta Functions And The Casimir Energy, Nucl. Phys. B 310 (1988) 163.
[35] N.D.Birrell and P.C.Davies, Quantum Fields In Curved Space, Cambridge University Press, (1982).
[36] W.Pauli, Pauli Lectures on Physics: Vol 6, Selected Topics in Field Quantization,MIT Press,1971 (editor C.P. Enz).
[37] J.Foukzon, A.A.Potapov, S.A.Podosenov,Hausdorff-Colombeau measure and axiomatic quantum field theory in spacetime with negative B.Mandelbrot dimensions.[http://arxiv.org/abs/1004.0451]
[38] J.Mureika and D.Stojkovic,Detecting Vanishing Dimensions via Primordial Gravitational Wave Astronomy,Phys. Rev. Lett.106,101101 (2011).
[39] R.Loll, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 94, 96 (2001).
[40] J.Ambjrn, J.Jurkiewicz, and R. Loll, Phys. Rev. D 72, 064014 (2005).
[41] L.Modesto and P.Nicolini, Spectral dimension of a quantum universe, Phys. Rev. D 81,104040 (2010).
[42] R.Mirzaie,On the fundamental group of Riemannian manifolds with omitted fractal subsets,Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, Vol. 63, No. 6, pp. 854--858,June, 2011.
[43] H.I.Choi,D.S.Lee, and J-H.Yoon,Cut locus of a separating fractal set in a Riemannian manifold,Tohoku Math.J.(2) Volume 50,Number 4,1998,455-467.
[44] J.F.Colombeau,Elementary Introduction to New Generalized Functions. Amsterdam: North Holland, 1985.
[45] V.P.Frolov, D.V.Fursaev, A.I.Zelnikov,Statistical Origin of Black Hole Entropy in Induced Gravity,Nucl.Phys.B486 (1997) 339-352 [http://lanl.arxiv.org/abs/hep-th/9607104v1]
[46] V.Frolov,D.Fursaev, J.Gegenberg and G.Kunstatter,Thermodynamics and statistical mechanics of induced Liouville gravity, Phys. Rev. D 60 (1999) 024016.
[47] V.P.Frolov and D.V.Fursaev,Statistical mechanics on axially-symmetric spacetimes with the Killing horizon and entropy of rotating black holes in

induced gravity,Phys.Rev.D 61 (2000) 024007 [arXiv:gr-qc/9907046].
[48] V.P.Frolov and D.V.Fursaev,Statistical Mechanics of Charged Black Holes in Induced Einstein-Maxwell Gravity,Phys.Rev.D 61 (2000) 064010 [http://arxiv.org/abs/hep-th/9910006v1].
[49] D.V.Fursaev, Can one understand black hole entropy without knowing much about quantum gravity? Phys. Part. Nucl. 36: 81-99 (2005). e-Print Archive: gr-qc/0404038
[50] R.J.Adler,The Geometry of Random Fields.Wiley,New York,(1981).
[51] J.T.Kent and A.T.A.Wood,Estimating the fractal dimension of a locally self-similar Gaussian process by using increments, Journal of the Royal Statistical Society. Series B, vol.59, no.3, pp.679-699,1997.
[52] R.J.Adler,The Geometry of Random Fields, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics,John Wiley&Sons,Chichester,UK,1981.
[53] L.Ming,A Class of Negatively Fractal Dimensional Gaussian Random Functions,Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Volume 2011, Article ID 291028, 18 pages.
[54] B.Duplantier,Harmonic Measure Exponents for Two-Dimensional Percolation,Phys. Rev. Let. Vol.82,No. 20, (1999).
[55] R.H.Riedi,Introduction to Multifractals. [http://www.itsec.gov.cn/docs/20090507164047604667.pdf]
[56] C.Bandt,S.Graf,Siegfried; Zähle,Martina (Eds.),Fractal Geometry and Stochastics II,Birkhäuser,Basel 2000.ISBN 978-3-7643-6215-7.
[57] V.E.Tarasov,Magnetohydrodynamics of Fractal Media,Physics of Plasmas 13 (2006) 052107.[http://arxiv.org/abs/0711.0305v1]
[58] V.E.Tarasov,Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles,Fields and Media (Nonlinear Physical Science) | ISBN-10:3642140025|ISBN-13:978-3642140020|Edition:2010.
V.E.Tarasov,Continuous medium model for fractal media, Phys. Lett. A 336, 167 (2005).
V.E.Tarasov,Fractional hydrodynamic equations for fractal media, Ann. Phys. 318, 286 (2005).
V.E.Tarasov,Fractional Fokker-Planck equation for fractal media, Chaos 15, 023102 (2005).
[59] К. Надь,Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля, Издательство "Мир", Москва 1969.
[60] P.Hořava,Quantum gravity at a Lifshitz point. Phys. Rev.D 79 (8).
[61] C. Charmousis, G.Niz, A.Padilla, P.Saffin,Strong coupling in Horava gravity. Journal of High Energy Physics 2009 (08): 070.
[62] D.Blas, O.Pujolas, S.Sibiryakov,On the extra mode and inconsistency of Hořava gravity. Journal of High Energy Physics 2009 (10): 029.
[63] K.Koyama,F.Arroja,Pathological behaviour of the scalar graviton in Hořava--Lifshitz gravity. Journal of High Energy Physics 2010 (3):1--11.
[64] F.Hinterleitner,Remarks on doubly special relativity theories and gravity, Class. Quantum Grav. 25 075018.
[65] S.N.Manida,Fock-Lorentz transformations and time-varying speed of light. [arXiv:gr-qc/9905046].
[66] J. Magueijo,Covariant and locally Lorentz-invariant varying speed of light theories,Phys.Rev. D62 (2000) 103521.
[67] C. Leiva,Conformal Generators and Doubly Special Relativity Theories,

Mod.Phys.Lett. A20 (2005) 861-867.
[68] J.Magueijo,L.Smolin,Lorentz invariance with an invariant energy scale, Physical Review Letters 88 (19): 190403. [arXiv:hep-th/0112090].
[69] K.G.Wilson,Quantum Field Theory Models in Less Than 4 Dimensions, Phys. Rev. D7 2911.1973.