

Sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos y circunferencia de Feuerbach para cuadriláteros en planos de Minkowski

Tobías de Jesús Rosas Soto
(tjrosas@gmail.com; trosas@demat-fecluz.org)

Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Venezuela

28 de agosto de 2014

Resumen

Se presenta el estudio de propiedades geométricas de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, en un plano de Minkowski. Se estudian las relaciones entre los cuatro triángulos formados por los vértices del cuadrilátero, sus antitriángulos y puntos de simetría, sus baricentros y otros puntos asociados con dichos triángulos, respectivamente. Se introduce la noción de anticuadrilátero y se extiende la noción de circunferencia de Feuerbach de un cuadriláteros, inscritos en una circunferencia, a planos de Minkowski en general.

Palabras claves: \mathcal{C} -ortocentro, sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, planos de Minkowski, cuadriláteros, baricentros, ortogonalidad isósceles.

Abstract

The study of geometric properties of a inscribed quadrangle in a circle, in a Minkowski plane is presented. We study the relations between the four triangles formed by the vertices of the quadrangle, its anti-triangles and points of symmetry, its barycenters and other points associated with such triangles, respectively. The notion of anti-quadrangle is introduced and extends the notion of Feuerbach circle for quadrangles, inscribed in a circle, to Minkowski planes in general.

Key words: \mathcal{C} -orthocenter, \mathcal{C} -orthocentric systems, Minkowski plane, quadrangles, barycenters, isosceles orthogonality.

1 Introducción

En 2007, la matemática **M. Spirova** y el matemático **H. Martini** introdujeron la noción de circunferencia de Feuerbach de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y muestran algunas propiedades de esta en planos de Minkowski estrictamente convexos (ver [5]). En el presente artículo, usando las nociones de \mathcal{C} -ortocentro y sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos introducida por **T. Rosas** y **W. Pacheco** en [11], se extiende dicha noción a planos de Minkowski en general y se estudian algunas propiedades de la circunferencia de Feuerbach de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, relacionadas con las nociones de baricentro, ortogonalidad isósceles y otras circunferencias asociadas con los triángulos formados con los vértices del cuadrilátero.

Denotemos por $(\mathbb{R}^2, \|\circ\|) = M$ a un *plano de Minkowski* cualquiera con origen O , *circunferencia unitaria* \mathcal{C} y norma $\|\circ\|$. Para cualquier punto $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$, llamemos al conjunto $\mathcal{C}(x, \lambda) := x + \lambda\mathcal{C}$ la *circunferencia de centro en x y radio λ* . Para $x \neq y$, denotemos por $\langle x, y \rangle$ a la *línea* que pasa por x y y , y por $[x, y]$ el *segmento* entre x y y (ver [3, 11, 13]).

Para puntos $x, y \in M$, se dice que x es *ortogonal isósceles* a y si $\|x + y\| = \|x - y\|$, y lo denotaremos por $x \perp_I y$. Una propiedad de esta ortogonalidad que nos será de utilidad es la siguiente: para $x, y \in M$ tales que $x \perp_I y$, entonces $y \perp_I x$, es decir, la ortogonalidad isósceles es simétrica (ver [1, 6, 7]).

Para $p \in M$, denotemos por S_p a la *simetría* con respecto al punto p , dada por la expresión $S_p(w) = 2p - w$ para $w \in M$. $H_{p,k}$ denotará la *homotecia* con centro p y razón k ($k \in \mathbb{R}$), y está dada por $H_{p,k}(w) = (1 - k)p + kw$ para $w \in M$. Recordemos que las simetrías son *isometrías* en planos de Minkowski, es decir, $\|S_p(w) - S_p(v)\| = \|w - v\|$ para todo $w, v \in M$ (ver [8, 11, 13]). Para $x, z \in M$, sean e un punto en el segmento $[x, z]$, w uno sobre la prolongación del $[x, z]$ y $z_0 = S_w(z)$. Diremos que los puntos e y w son *conjugados armónicos* de x y z , si $H_{e,-k}(z) = x$ y $H_{w,-k}(z_0) = x$, con $k \in \mathbb{Z}$ (ver [13]).

Para puntos $x_1, x_2, x_3 \in M$ denotemos por $\Delta x_1 x_2 x_3$ al *triángulo* de vértices x_1, x_2, x_3 . Si $p_4 \in M$, diremos que el $\Delta p_1 p_2 p_3$ es el p_4 -*antitriángulo* del $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $p_i = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1, 2, 3$, con m_i los puntos medios de los lados del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Al $\Delta m_1 m_2 m_3$ lo llamaremos *triángulo medial* del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Diremos que p_4 es un *circuncentro* del $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $\|p_4 - x_1\| = \|p_4 - x_2\| = \|p_4 - x_3\|$. Si tal p_4 existe, es el centro de una circunferencia que pasa por los vértices del $\Delta x_1 x_2 x_3$ que llamaremos *circunferencia circunscrita* y a su radio el *circunradio* (ver [11, 13]). Denotemos por $\mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$ el conjunto de los circuncentros del $\Delta x_1 x_2 x_3$.

Diremos que el punto x_4 es el \mathcal{C} -*ortocentro* del $\Delta x_1 x_2 x_3$, asociado a p_4 , si $p_4 \in \mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$ y se cumple que $S_q(p_4) = x_4$, donde q es el punto de simetría del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4 -antitriángulo. Además, al conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ lo llamaremos *sistema \mathcal{C} -ortocéntrico* si existe $p_4 \in \mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$ tal que cumple con lo anterior. Denotemos por $\mathcal{H}(\Delta x_1 x_2 x_3)$ el conjunto de \mathcal{C} -ortocentros del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Llamaremos

circunferencia de Feuerbach del $\Delta x_1 x_2 x_3$ a la circunferencia que pasa por los puntos medios del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y los puntos medios de los segmentos formados por el \mathcal{C} -ortocentro del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y los vértices del mismo (ver [5, 11, 13]).

Denotaremos por $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ al cuadrilátero de vértices p_1, p_2, p_3 y p_4 . Diremos que este es un paralelogramo si sus lados son paralelos dos a dos. Diremos que una $\mathcal{C}(x, \lambda)$ es circunscrita del $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ si $\|x - p_i\| = \lambda$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (ver [8]). Denominaremos *circunferencia de Feuerbach de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia*, a la circunferencia que pasa por los centros de las circunferencias de Feuerbach de los triángulos que se pueden formar con los vértices del cuadrilátero (ver [5, 13]).

2 Preliminares

Los siguientes resultados son necesarios para la investigación.

Lema 2.1. (ver [5]) Sea M un plano de Minkowski. Si para $x, y \in M$ se tiene que $\|x\| = \|y\|$, entonces $(x + y) \perp_I (x - y)$.

Teorema 2.1. (ver [11, 13]) Sea M un plano de Minkowski. Sean x_1, x_2, x_3 y p_4 puntos en M . Sean m_1, m_2 y m_3 los puntos medios de los segmentos $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$ y $[x_1, x_2]$, respectivamente. Definamos los puntos $p_i = S_{m_i}(p_4)$, para $i = 1, 2, 3$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos $[x_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q , para $i = 1, 2, 3$. Además, $2(q - m_i) = x_i - p_4$ para $i = 1, 2, 3$, es decir, $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2}$.
2. Si $x_4 = S_q(p_4)$, entonces $x_i - x_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $x_i - p_j = p_k - x_l$, donde $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Si $g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, entonces $H_{g, -2}(p_4) = x_4$.

Teorema 2.2. (ver [12]) Sean $p_4 \in \mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$, $\Delta p_1 p_2 p_3$ el p_4 -antitriángulo del $\Delta x_1 x_2 x_3$, q el punto de simetría de dichos triángulos y $x_4 = S_q(p_4)$, entonces se cumple:

1. Los puntos p_i y x_i son circuncentros de los triángulos $\Delta x_j x_k x_l$ y $\Delta p_j p_k p_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, respectivamente. Los circunradios de dichos triángulos son iguales entre sí.
2. Los puntos medios de los lados del $\Delta x_i x_j x_k$ y su p_l -antitriángulo, están en la circunferencia de centro q y radio $\|q - m_1\|$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $\mathcal{C}(q, \|q - m_1\|) = H_{x_4, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(p_4, \|p_4 - x_1\|))$. En particular, $q = H_{x_4, \frac{1}{2}}(p_4)$

Corolario 2.1. (ver [12]) Con las hipótesis del teorema anterior se cumple lo siguiente:

1. La circunferencia de los seis puntos (circunferencia de Feuerbach) de los triángulos $\Delta p_j p_k p_l$ y $\Delta x_j x_k x_l$ coinciden, y su centro es q .

2. $q = \frac{x_i + x_j + x_k - p_l}{2}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $x_i = x_j + x_k + x_l - 2p_i$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

3 Resultados y pruebas

En esta sección se presentan los resultados principales del trabajo. El siguiente teorema estudia propiedades de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Presenta una expresión analítica para el centro de la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero, en función de sus vértices y el centro de la circunferencia que lo contiene.

Teorema 3.1. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la $\mathcal{C}(x, \lambda)$. Sea q_i el punto de simetría del $\Delta p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo, y $h_i = S_{q_i}(x)$ el \mathcal{C} -ortocentro del $\Delta p_j p_k p_l$, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

1. Los segmentos $[h_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q . Además,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}$$

2. $h_i - h_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. Los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[q_i, q_j]$ son paralelos para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Si $w = S_q(x)$, entonces $h_i \in \mathcal{C}(w, \lambda)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
5. $q_i \in \mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
6. $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, \lambda))$.
7. Si $m_{ij} = \frac{p_i + p_j}{2}$ y $x_{ij} = S_{m_{ij}}(x)$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces x_{ij} es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos p_i, p_j, h_k y h_l para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Proof. Por el ítem 1 del Teorema 2.2, se tiene que $q_i = \frac{p_j + p_k + p_l - x}{2}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Luego,

$$p_i + h_i = p_i + 2q_i - x = p_i + p_j + p_k + p_l - 2x = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x$$

y por tanto,

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}.$$

Como

$$\frac{p_i + h_i}{2} = \frac{p_j + h_j}{2}$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $h_i - h_j = p_j - p_i$ (ver Figura 1).

Por otro lado,

$$h_i - h_j = S_{q_i}(x) - S_{q_j}(x) = 2q_i - x - 2q_j + x = 2(q_i - q_j),$$

entonces los segmentos $[h_i, h_j]$ y $[q_i, q_j]$ son paralelos para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Como $w = S_q(x)$, se tiene que $w = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 3x$. Así,

$$\|w - h_i\| = \|p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 3x - (p_j + p_k + p_l - 2x)\| = \|p_i - x\| = \lambda$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ y por tanto, $h_i \in \mathcal{C}(w, \lambda)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

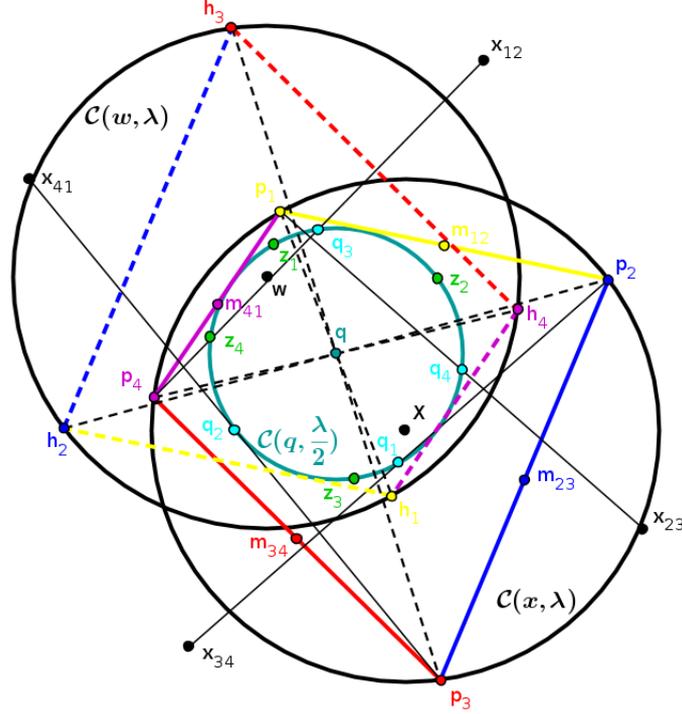


Figure 1: *Circunferencia de Feuerbach $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$ del cuadrilátero*

Luego,

$$\|q - q_i\| = \left\| \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2} - \frac{p_j + p_k + p_l - x}{2} \right\| = \left\| \frac{p_i - x}{2} \right\| = \frac{\lambda}{2}$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ y por tanto, $q_i \in \mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Notemos que

$$H_{w, \frac{1}{2}}(x) = (1 - \frac{1}{2})w + \frac{1}{2}x = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2} = q,$$

lo que implica que $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2}) = H_{w, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(x, \lambda))$. Por último, observemos que

$$\begin{aligned}\|x_{ij} - p_i\| &= \|2m_{ij} - x - p_i\| = \|p_j - x\| = \lambda \\ \|x_{ij} - p_j\| &= \|2m_{ij} - x - p_j\| = \|p_i - x\| = \lambda \\ \|x_{ij} - h_k\| &= \|2m_{ij} - x - (p_i + p_j + p_l - 2x)\| = \|x - p_l\| = \lambda \\ \|x_{ij} - h_l\| &= \|2m_{ij} - x - (p_i + p_j + p_k - 2x)\| = \|x - p_k\| = \lambda\end{aligned}$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ y por tanto, $p_i, p_j, h_k, h_l \in \mathcal{C}(x_{ij}, \lambda)$, es decir, el punto x_{ij} es circuncentro de los triángulos que se forman a partir de los puntos p_i, p_j, h_k y h_l para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. \square

Tomando en cuenta la construcción presentada en el Teorema 3.1, llamaremos al cuadrilátero $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ el x -anticuadrilátero del cuadrilátero $\square p_1 p_2 p_3 p_4$, y al punto q el punto de simetría del cuadrilátero $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ y su x -anticuadrilátero, es decir,

Definición 3.1. Dados cuatro puntos p_1, p_2, p_3 y p_4 del plano, pertenecientes a la $\mathcal{C}(x, \lambda)$, diremos que el $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ es el x -anticuadrilátero del $\square p_1 p_2 p_3 p_4$, si $h_i = S_{q_i}(x)$, donde q_i es el punto de simetría del $\triangle p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

El siguiente teorema relaciona los vértices de un cuadrilátero y su anticuadrilátero, con la noción de sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos y la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero.

Teorema 3.2. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro puntos distintos, en un plano de Minkowski, pertenecientes a la $\mathcal{C}(x, \lambda)$. Sea q_i el punto de simetría del $\triangle p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo, $h_i = S_{q_i}(x)$ el \mathcal{C} -ortocentro del $\triangle p_j p_k p_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, y $z_i = S_q(q_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces se tiene que:

1. w es circuncentro del $\triangle h_i h_j h_k$ para $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
2. $H_{w, \frac{1}{2}}(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
3. El punto z_i es el punto de simetría del $\triangle h_j h_k h_l$ y su w -antitriángulo, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
4. $q \in \mathcal{C}(q_i, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
5. El punto z_i está en la circunferencia $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
6. Los puntos h_i, h_j, h_k y p_l forman un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Proof. Por el ítem 4 del Teorema 3.1, el punto w es circuncentro de los triángulos $\triangle h_i h_j h_k$ para $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Los ítem 5 y 6 del Teorema 3.1 dicen que $H_{w, \frac{1}{2}}(p_i) = q_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Por el ítem 1 del Teorema 3.1, q es el punto de simetría

de los cuadriláteros $\square p_1p_2p_3p_4$ y $\square h_1h_2h_3h_4$. Por tanto, $S_q(q_i) = z_i$ es el punto de simetría del $\triangle h_ih_jh_k$ y su w -antitriángulo para $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$. Luego,

$$\|q - q_i\| = \left\| \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2} - \left(\frac{p_j + p_k + p_l - x}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{p_i - x}{2} \right\| = \frac{\lambda}{2}$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. De manera que $q \in \mathcal{C}(q_i, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$ (ver *Figura 2*).

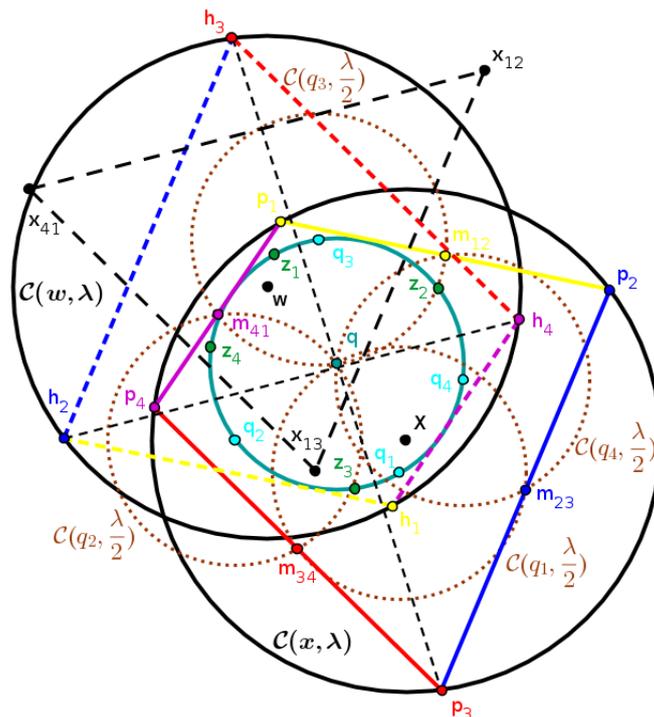


Figure 2: *Intersección de circunferencias de Feuerbach*

De manera similar, usando el ítem 5 del Teorema 3.1 y el hecho de que $z_i = S_q(q_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, se tiene que el punto z_i está en la $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Por último, dado que w es circuncentro de los triángulos $\triangle h_ih_jh_k$ para $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, basta ver $S_{z_i}(w) = p_i$ con $i = 1, 2, 3, 4$, para tener que $\{h_i, h_j, h_k, p_l\}$ es un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} S_{z_i}(w) &= 2z_i - w = 2(S_q(q_i)) - w = 2(2q - q_i) - w = 4q - w - 2q_i = \\ &= 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x) - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 3x) - 2q_i = \\ &= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - x - (p_j + p_k + p_l - x) = p_i \end{aligned}$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. □

Un resultado que se deduce fácilmente del Teorema 3.1 y el Teorema 3.2 es el siguiente:

Corolario 3.1. *Con las mismas hipótesis del corolario anterior, se tiene que:*

1. Los segmentos $[p_i, p_j]$ y $[z_i, z_j]$ son paralelos, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Los segmentos $[q_i, q_j]$ y $[z_i, z_j]$ son paralelos, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $\mathcal{C}(q, \frac{1}{2}) = H_{x, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(w, \lambda))$.

Tomando en cuenta el Teorema 3.1, el Corolario 3.2 y que $\mathcal{C}(q, \frac{1}{2})$ es la *circunferencia de Feuerbach* del cuadrilátero inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}(x, \lambda)$, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.2. *Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro puntos en un plano de Minkowski, pertenecientes a la circunferencia $\mathcal{C}(x, \lambda)$. Sea h_i el \mathcal{C} -ortocentro del $\triangle p_j p_k p_l$ asociado a x , para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces las circunferencias de Feuerbach de los cuadriláteros $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ y $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ coinciden.*

Proof. Del ítem 5 del Teorema 3.1 y los ítem 3 y 5 del Teorema 3.2, se obtiene que las circunferencias de Feuerbach de los cuadriláteros $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ y $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ coinciden (ver Figuras 2 y 1). \square

El siguiente teorema relaciona los vértices de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los puntos medios de sus lados y el centro de su circunferencia de Feuerbach, con la noción de ortogonalidad isósceles, tal y como sigue:

Teorema 3.3. *Sea $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ un cuadrilátero inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$ y sea q el centro de la circunferencia de Feuerbach del $\square p_1 p_2 p_3 p_4$. Si m_{ij} es el punto medio del segmento $[p_i, p_j]$, entonces*

$$(q - m_{ij}) \perp_I \frac{1}{2}(p_k - p_l)$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Proof. Por el ítem 1 del Teorema 2.1, se tiene que

$$q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{2}$$

Así,

$$q - m_{ij} = \frac{1}{2}(p_k + p_l - 2x)$$

Dado que $\|p_k - x\| = \|p_l - x\|$, entonces

$$\left(\frac{p_k + p_l}{2} - x \right) \perp_I \left(\frac{p_k - p_l}{2} \right)$$

por el Lema 2.1, pues

$$\left\| \frac{p_k - x}{2} + \frac{p_l - x}{2} \right\| = \left\| \frac{p_k + p_l}{2} - x \right\|$$

y

$$\left\| \frac{p_k - x}{2} - \left(\frac{p_l - x}{2} \right) \right\| = \left\| \frac{p_k - p_l}{2} \right\|$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$ y por tanto, $q - m_{ij} \perp_I \frac{1}{2}(p_k - p_l)$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. \square

Tomando en cuenta el Teorema 3.3 y que las simetrías son isometrías en los planos normados, se tiene el siguiente corolario

Corolario 3.3. Sea $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ un cuadrilátero inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$ y sea $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ su x -anticuadrilátero. Sea q el centro de la circunferencia de Feuerbach de dichos cuadriláteros. Si k_{ij} es el punto medio del segmento $[h_i, h_j]$, entonces

$$(q - k_{ij}) \perp_I \frac{1}{2}(h_k - h_l)$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

El siguiente teorema relaciona: los puntos de simetría de los triángulos formados con los vértices de un cuadrilátero dado y sus antitriángulos; los puntos de simetría de los triángulos formados con los vértices del anticuadrilátero del cuadrilátero dado y sus antitriángulos; y la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero.

Teorema 3.4. Sean el $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$ y $\square h_1 h_2 h_3 h_4$ su x -anticuadrilátero, con punto de simetría q . Sea q_i el punto de simetría del $\triangle p_j p_k p_l$ y su x -antitriángulo, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea g_i el baricentro del $\triangle p_j p_k p_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Sea $w = S_q(x)$, entonces se tiene que:

1. Los puntos medios de los segmentos $[w, p_i]$ y $[x, h_i]$ están en la circunferencia de Feuerbach del $\square p_1 p_2 p_3 p_4$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
2. Si $r \in \mathcal{C}(x, \lambda)$, entonces el punto medio del segmento $[w, r]$ está en la $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$.
3. El punto de intersección de los segmentos $[p_i, g_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$, es el punto medio del segmento $[x, q]$, es decir, es el punto $H_{q, \frac{1}{2}}(x)$.
4. Los puntos $H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ y x son conjugados armónicos de los puntos $H_{q, \frac{1}{2}}(x)$ y q .

Proof. 1. Dado que la circunferencia de Feuerbach del cuadrilátero dado es $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$, basta ver que para $i = 1, 2, 3, 4$ se cumple

$$\left\| q - \left(\frac{w + p_i}{2} \right) \right\| = \left\| q - \left(\frac{2q - x + p_i}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|x - p_i\| = \frac{\lambda}{2}$$

y

$$\left\| q - \left(\frac{x + h_i}{2} \right) \right\| = \left\| q - \left(\frac{x + 2q - p_i}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|x - p_i\| = \frac{\lambda}{2}.$$

2. Dado que $r \in \mathcal{C}(x, \lambda)$, se tiene que $\|x - w\| = \lambda$. Luego,

$$\left\| q - \left(\frac{w + r}{2} \right) \right\| = \left\| q - \left(\frac{2q - x + r}{2} \right) \right\| = \frac{1}{2} \|x - w\| = \frac{\lambda}{2}.$$

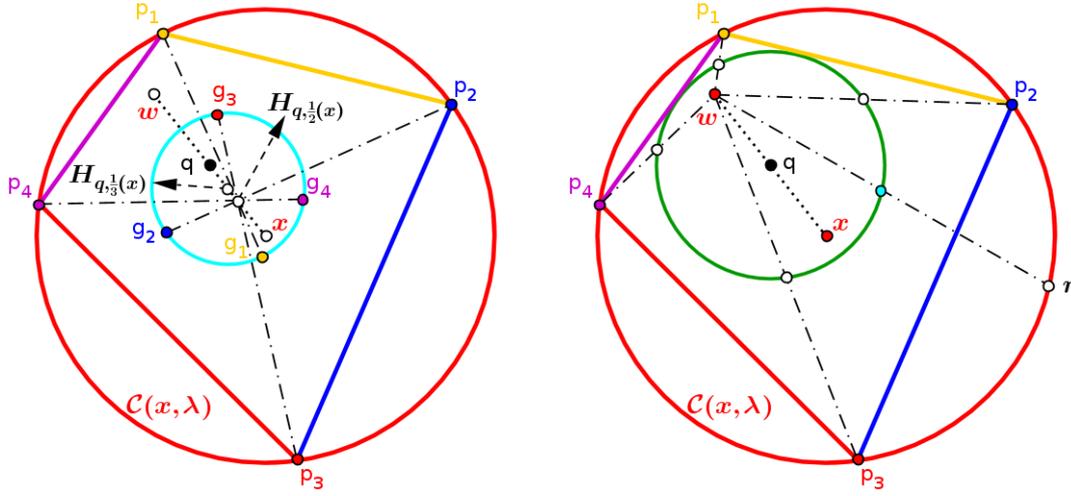


Figure 3: *Circunferencias de Feuerbach y puntos conjugados armónicos*

3. Tomemos las parametrizaciones de los segmentos $[p_i, g_i]$, para $i = 1, 2, 3, 4$, dadas por $(1 - t)p_i + tg_i$ con $t \in \mathbb{R}$. Como $g_i = \frac{p_j + p_k + p_l}{3}$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces

$$(1 - t)p_i + t \left(\frac{p_j + p_k + p_l}{3} \right)$$

Haciendo $t = \frac{3}{4}$ se obtiene que el punto de intersección es

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4} = \frac{q - x}{2}$$

4. Sean $d = H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ y $f = S_d(x)$. Observemos que $H_{f, -2}(x) = w$ y $H_{q, -2}(d) = w$, con lo que se tiene que los puntos $H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ y x son conjugados armónicos de los puntos $H_{q, \frac{1}{2}}(x)$ y q , de razón 2. \square

Tomando en cuenta el teorema anterior y el hecho de que q es el punto de simetría de los cuadriláteros $\square p_1 p_2 p_3 p_4$ y $\square h_1 h_2 h_3 h_4$, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3.4. Con la hipótesis del teorema anterior, si $z_i = S_q(q_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, se tiene que:

1. $z_i = \frac{p_i+w}{2}$ y $z_i = \frac{h_i+x}{2}$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
2. Si $r \in \mathcal{C}(w, \lambda)$, entonces el punto medio del segmento $[x, r]$ está en la $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$.
3. El punto de intersección de los segmentos $[p_i, S_q(g_i)]$, para $i = 1, 2, 3, 4$, es el punto medio del segmento $[w, q]$, es decir, es el punto $H_{q, \frac{1}{2}}(w)$.
4. Los puntos $H_{q, \frac{1}{3}}(w)$ y w son conjugados armónicos de los puntos $H_{q, \frac{1}{2}}(w)$ y q .

El siguiente lema muestra relaciones existentes entre la circunferencia circunscrita de un cuadrilátero dado y el cuadrilátero formado por los baricentros de los triángulos formados por los vértices del cuadrilátero original.

Lema 3.1. Sea el $\square p_1p_2p_3p_4$ inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$, en un plano de Minkowski, y q el punto de simetría con su x -anticuadrilátero. Sean g_i el baricentro del $\triangle p_jp_kp_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces se cumple:

1. $g_i \in H_{q, \frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, \lambda))$, es decir, $g_i \in \mathcal{C}(H_{q, \frac{1}{3}}(x), \frac{\lambda}{3})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.
2. $g_i - g_j = \frac{1}{3}(p_i - p_j)$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $H_{q, \frac{2}{3}}(x)$ es el punto de simetría del $\square g_1g_2g_3g_4$ y su $H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ -anticuadrilátero.
4. x es el centro de la circunferencia circunscrita del $H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ -anticuadrilátero del $\square g_1g_2g_3g_4$.

Proof. 1. Sea $w \in \mathcal{C}(x, \lambda)$. Veamos que $\mathcal{C}(H_{q, \frac{1}{3}}(x), \frac{\lambda}{3}) = H_{q, \frac{1}{3}}(\mathcal{C}(x, \lambda))$ (ver Figura 4)

$$\left\| H_{q, \frac{1}{3}}(w) - H_{q, \frac{1}{3}}(x) \right\| = \frac{1}{3} \|w - x\| = \frac{\lambda}{3}.$$

Como g_i es el baricentro del $\triangle p_jp_kp_l$ para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, se tiene que $g_i = \frac{p_j+p_k+p_l}{3}$. Así, por el ítem 1 del Teorema 3.1 tenemos que

$$\left\| g_i - H_{q, \frac{1}{3}}(x) \right\| = \left\| \frac{p_j + p_k + p_l}{3} - \left(\frac{2q + x}{3} \right) \right\| = \frac{1}{3} \|p_i - x\| = \frac{\lambda}{3}.$$

2. Teniendo en cuenta que $g_i = \frac{p_j+p_k+p_l}{3}$ y $g_j = \frac{p_i+p_k+p_l}{3}$ es claro que

$$g_i - g_j = \frac{1}{3}(p_i - p_j).$$

3. Aplicando el ítem 1 del Teorema 3.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 - 2H_{q, \frac{1}{3}}(x)}{2} &= \frac{3(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) - 4q - 2x}{6} = \\ &= \frac{3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 2x}{6} = \\ &= \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x + 4x}{6} = \frac{1}{3}q + \frac{2}{3}x = H_{q, \frac{2}{3}}(x) \end{aligned}$$

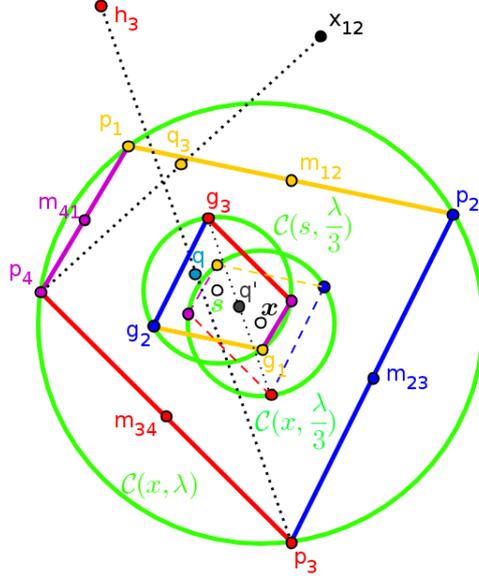


Figure 4: Circunferencia $\mathcal{C}(s, \frac{\lambda}{3})$ de los baricentros.

4. Como $H_{q, \frac{2}{3}}(x)$ es el punto de simetría entre el $\square p_1p_2p_3p_4$ y su $H_{q, \frac{1}{3}}(x)$ -anticuadrilátero, basta ver que $S_{H_{q, \frac{2}{3}}(x)}(H_{q, \frac{1}{3}}(x)) = x$ (ver Figura 4).

$$S_{H_{q, \frac{2}{3}}(x)}(H_{q, \frac{1}{3}}(x)) = 2H_{q, \frac{2}{3}}(x) - H_{q, \frac{1}{3}}(x) = \frac{2q + 4x}{3} - \left(\frac{2q + x}{3}\right) = x.$$

□

El siguiente lema nos muestra la relación de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con los puntos medios de los segmentos formados por el punto de simetría del mismo con su anticuadrilátero, y los vértices del cuadrilátero dado.

Lema 3.2. *Sea el cuadrilátero $\square p_1p_2p_3p_4$ inscrito en la circunferencia $\mathcal{C}(x, \lambda)$, en un plano de Minkowski, y q el punto de simetría con su x -anticuadrilátero. Sea e_i el punto medio del segmento $[q, p_i]$ para $i = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces se cumple:*

1. Si $w \in \mathcal{C}(x, \lambda)$ y $t_w = \frac{q+w}{2}$, entonces $t_w \in \mathcal{C}(H_{q, \frac{1}{2}}(x), \frac{\lambda}{2})$. En particular, $e_i \in \mathcal{C}(H_{q, \frac{1}{2}}(x), \frac{\lambda}{2})$.
2. $e_i - e_j = \frac{1}{2}(p_i - p_j)$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. q es el punto de simetría del $\square e_1e_2e_3e_4$ y su $H_{q, \frac{1}{2}}(x)$ -anticuadrilátero.
4. $\square e_1e_2e_3e_4 = H_{q, \frac{1}{2}}(\square p_1p_2p_3p_4)$, es decir, $e_i = H_{q, \frac{1}{2}}(p_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Proof. 1. Como $w \in \mathcal{C}(x, \lambda)$, entonces $\|w - x\| = \frac{\lambda}{2}$. Basta ver que $\|t_w - H_{q, \frac{1}{2}}(x)\| = \frac{\lambda}{2}$.

$$\|t_w - H_{q, \frac{1}{2}}(x)\| = \left\| \frac{w + q}{2} - \left(\frac{q + x}{2} \right) \right\| = \frac{\|w - x\|}{2} = \frac{\lambda}{2}.$$

Si hacemos $w = p_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ obtenemos el caso particular.

2. Dado que $e_i = \frac{q+p_i}{2}$ y $e_j = \frac{q+p_j}{2}$, es claro que

$$e_i - e_j = \frac{1}{2}(p_i - p_j).$$

para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

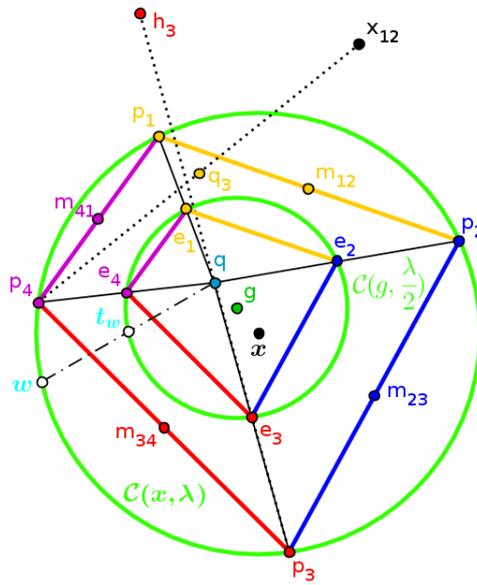


Figure 5: *Demostración Teorema 3.2.*

3. Por el Teorema 3.1 se tiene que

$$\frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - 2H_{q, \frac{1}{2}}(x)}{2} = \frac{2q + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 2x}{4} = q.$$

4. Veamos que $H_{q, \frac{1}{2}}(p_i) = e_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

$$H_{q, \frac{1}{2}}(p_i) = \frac{p_i + q}{2} = e_i.$$

□

Tomando en cuenta la definición de los puntos e_i presentada en el teorema anterior, se puede deducir fácilmente el siguiente corolario.

Corolario 3.5. Sean el $\square p_1p_2p_3p_4$ inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$, en un plano de Minkowski, y q el punto de simetría con su x -anticuadrilátero. Sean $\mathcal{C}(w, \lambda)$, $\mathcal{C}(g, \frac{\lambda}{2})$, $\mathcal{C}(g', \frac{\lambda}{2})$ las circunferencias circuncritas de: el x -anticuadrilátero del $\square p_1p_2p_3p_4$, el $\square p_1p_2p_3p_4$, el g -anticuadrilátero del $\square p_1p_2p_3p_4$, asociadas a q respectivamente. Sean $m_{ij} = \frac{p_i+p_j}{2}$ y $n_{ij} = \frac{e_i+e_j}{2}$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$, entonces se cumple:

1. El $\square m_{12}m_{32}m_{34}m_{41}$ es un paralelogramo.
2. El $\square n_{12}n_{23}n_{34}n_{41}$ es un paralelogramo.

Proof. 1. Dado que $m_{ij} = \frac{p_i+p_j}{2}$ para $\{i, j\} = \{1, 2, 3, 4\}$, notemos que $m_{12} - m_{23} = m_{34} - m_{41}$ y $m_{41} - m_{12} = m_{23} - m_{34}$, por tanto el $\square m_{12}m_{23}m_{34}m_{41}$ es un paralelogramo.

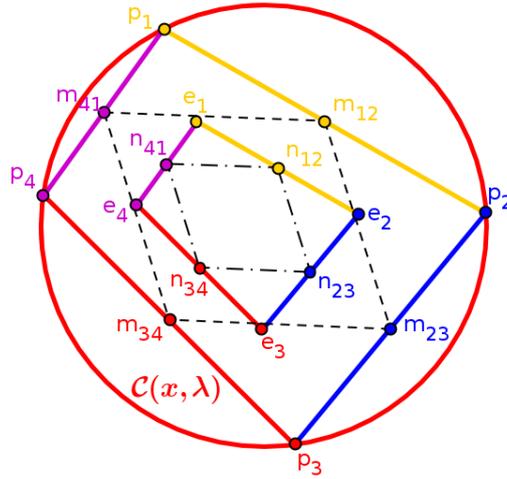


Figure 6: Demostración Lema 3.5.

2. Dado que $n_{ij} = \frac{e_i+e_j}{2}$ para $\{i, j\} = \{1, 2, 3, 4\}$, notemos que $n_{12} - n_{23} = n_{34} - n_{41}$ y $n_{41} - n_{12} = n_{23} - n_{34}$, por tanto el $\square n_{12}n_{23}n_{34}n_{41}$ es un paralelogramo. \square

El siguiente lema muestra relaciones entre los puntos de simetría de los triángulos que se forman con los vértices de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, y los puntos de simetría de los triángulos formados con los vértices del cuadrilátero formado por los puntos medios de los segmentos comprendidos entre los vértices del cuadrilátero dado y el punto de simetría con su anticuadrilátero.

Lema 3.3. Sea el $\square p_1p_2p_3p_4$ inscrito en la $\mathcal{C}(x, \lambda)$, en un plano de Minkowski, y q el punto de simetría con su x -anticuadrilátero. Sean q_i el punto de simetría del $\triangle p_jp_kp_l$ y su x -antitriángulo, y b_i el punto de simetría del $\triangle e_j e_k e_l$ y su $H_{q, \frac{1}{2}(x)}$ -antitriángulo, para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$, con $e_i = \frac{q+p_i}{2}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, entonces

1. $q_i = S_{b_i}(q)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

2. $\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{4}) = H_{q, \frac{1}{2}}(\mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2}))$. En particular, $b_i \in \mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{4})$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Proof. 1. Tomando en cuenta el ítem 2 del Teorema 2.1, el ítem 1 del Teorema 3.1, obtenemos que

$$S_{b_i}(q) = 2b_i - q = e_j + e_k + e_l - H_{q, \frac{1}{2}}(x) - q = \frac{p_j + p_k + p_l}{2} - \frac{x}{2} = q_i.$$

para $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$

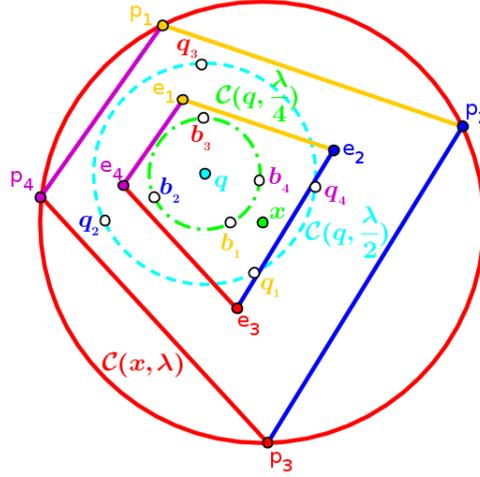


Figure 7: Demostración Lema 3.3.

2. Sea $w \in \mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{2})$, por tanto $\|w - q\| = \frac{\lambda}{2}$. Así,

$$\left\| H_{q, \frac{1}{2}}(w) - q \right\| = \left\| \frac{q + w}{2} - q \right\| = \frac{1}{2} \|w - q\| = \frac{\lambda}{4}.$$

Por último, tomando $w = p_i$, se tiene que $b_i = H_{q, \frac{1}{2}}(p_i) \in \mathcal{C}(q, \frac{\lambda}{4})$, para $i = 1, 2, 3, 4$. \square

References

- [1] A. C. Thompson (1996). *Minkowski geometry*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **63**. Cambridge University Press. Cambridge. ISBN 0-521-40472-X.
- [2] E. Asplund and B. Grünbaum (1960). On the geometry of Minkowski planes. *Enseign. Math.* **6**, 299-306.
- [3] H. Martini, K. J. Swanepoel and G. Weiß (2001). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part I. *Expositiones Math.* **19**, 97-142.
- [4] H. Martini and K. J. Swanepoel (2004). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part II. *Expositiones Math.* **22**, 93-144.

- [5] H. Martini and M. Spirova (2007). The Feuerbach circle and orthocentricity in normed planes. *L'Enseignement Mathématique*. **53**(2), 237-258.
- [6] J. Alonso, H. Martini and S. Wu (2012). On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Aequationes Math.* **83**, 153-189.
- [7] J. Alonso (1994). Uniqueness properties of isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Ann. Sci. Math. Québec*. **18**(1), 25-38.
- [8] R. A. Johnson (2007). *Advanced euclidean geometry*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. ISBN-10: 0-486-46237-4.
- [9] R. C. James (1945). Orthogonality in normed linear spaces. *Duke Math. J.* **12**, 291-302.
- [10] S. Wu (2009). *Geometry of Minkowski planes and spaces - Selected topics*. Ph. D. Thesis. Chemnitz University of Technology.
- [11] Rosas T. y Pacheco W. (2014). Orthocentric systems in Minkowski planes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG)*. DOI 10.1007/s13366-014-0214-6. ISSN 0138-4821.
- [12] Rosas T. (2014). \mathcal{C} -ortocentros y sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos en planos de Minkowski. Pre-print.
- [13] Rosas T. (2014). Sistemas Ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Linsandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela.