

Sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, bisectrices y euclidianidad en planos de Minkowski

Tobías de Jesús Rosas Soto
(tjrosas@gmail.com; trosas@demat-fecluz.org)

Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Venezuela

22 de agosto de 2014

Resumen

Mediante el estudio de ciertas propiedades geométricas de los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, relacionadas con las nociones de ortogonalidad (Birkhoff, isósceles, cordal), bisectriz (Busemann, Glogovskij) y línea soporte a una circunferencia, se muestran nueve caracterizaciones de euclidianidad para planos de Minkowski arbitrarios. Tres de estas generalizan caracterizaciones dadas para planos de Minkowski estrictamente convexos en [8, 9], y las otras seis son nuevos aportes sobre el tema.

Palabras claves: Sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, planos de Minkowski, ortogonalidad, bisectriz, líneas soporte, euclidianidad.

Abstract

By studying certain geometric properties of \mathcal{C} -orthocentric systems related to the notions of orthogonality (Birkhoff, isosceles, chordal), angular bisectors (Busemann, Glogovskij) and support line to a circumference, shows nine characterizations of the Euclidean plane for arbitrary Minkowski planes. Three of these generalized characterizations given for strictly convex Minkowski planes in [8, 9], and the other six are new contributions on subject.

Key words: \mathcal{C} -orthocentric systems, Minkowski planes, orthogonality, angular bisectors, support line, euclidianity.

1 Introducción

En el 2010, los matemáticos S. Wu y H. Martini lograron establecer una serie de caracterizaciones de euclidianidad para planos de Minkowski estrictamente convexos,

mediante el estudio de ciertas propiedades geométricas de los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos en dichos planos (ver [9]). Ellos demostraron que al tomar dos elementos en el plano, ortogonales isósceles, podían construir un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico que cumplía ciertas propiedades geométricas relacionadas con las nociones de ortogonalidad Birkhoff e isósceles, bisectriz de Busemann, líneas soporte, triángulos isósceles y medianas. En estos resultados se basaron para mostrar ciertas caracterizaciones de euclidianidad. Además, usaron fuertemente la condición de convexidad estricta del plano, pues ésta garantizaba algunas condiciones tales como la unicidad en las nociones de ortogonalidad isósceles y Birkhoff.

En el presente año (2014), los matemáticos T. Rosas y W. Pacheco mostraron en [15] una nueva forma de definir la noción de \mathcal{C} -ortocentro para planos de Minkowski en general, logrando prescindir de la condición de convexidad estricta del plano. Esto les permitió demostrar que teniendo dos elementos en un plano de Minkowski arbitrario, ortogonales isósceles, también se podía construir un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico que cumpliera ciertas propiedades geométricas relacionadas con las nociones de ortogonalidad Birkhoff e isósceles, bisectriz de Busemann, triángulos isósceles y medianas.

Continuando con estas ideas, en el presente artículo se estudian algunas propiedades geométricas de los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos relacionadas con las nociones de ortogonalidad Birkhoff e isósceles, bisectriz de Busemann y Glogovskij, líneas soporte, triángulos isósceles y medianas. A través de estas se presentan ocho caracterizaciones de euclidianidad para planos de Minkowski en general: tres generalizan resultados equivalentes en planos de Minkowski estrictamente convexos (ver [8, 9]), y las seis restantes son nuevos aportes sobre el tema de caracterizaciones. Para estudiar la geometría en planos de Minkowski y las propiedades básicas de las ortogonalidades isósceles, Birkhoff y cordal véanse las referencias [6, 7, 8, 10, 11, 14, 15] y la monografía [1].

Denotemos por $(\mathbb{R}^2, \|\circ\|) = M$ a un *plano de Minkowski* cualquiera con origen O , *circunferencia unitaria* \mathcal{C} y norma $\|\circ\|$, y M^* su espacio dual. Para cualquier punto $x \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$, llamemos al conjunto $\mathcal{C}(x, \lambda) := x + \lambda\mathcal{C}$ la *circunferencia de centro en x y radio λ* . Para $x \neq y$, denotemos por $\langle x, y \rangle$ a la *línea* que pasa por x y y , por $[x, y]$ el *segmento* entre x y y , y por $[x, y)$ el *rayo* que inicia en x y pasa a través de y (ver [9, 14, 15, 16]).

Dado un punto x y la $\mathcal{C}(x, \beta)$ en M , si tomamos dos puntos diferentes $v, w \in \mathcal{C}(x, \beta)$, entonces la línea $\langle v, w \rangle$ divide el plano en dos semiplanos, L_+ y L_- . Si el segmento $[v, w]$ no está contenido en $\mathcal{C}(x, \beta)$, entonces la línea $\langle v, w \rangle$ divide a $\mathcal{C}(x, \beta)$ en los *arcos* $\mathcal{C}(x, \beta) \cap L_+$ y $\mathcal{C}(x, \beta) \cap L_-$, entre los puntos v y w , los cuales denotaremos por $Arc_{\mathcal{C}(x, \beta)}^+(v, w)$ y $Arc_{\mathcal{C}(x, \beta)}^-(v, w)$, respectivamente. Luego, si $[v, w]$ está contenido en $\mathcal{C}(x, \beta)$, entonces $Arc_{\mathcal{C}(x, \beta)}^+(v, w)$ es exactamente el segmento $[v, w]$ y $Arc_{\mathcal{C}(x, \beta)}^-(v, w)$ es el conjunto $\{v, w\} \cup \{s \in \mathcal{C}(x, \beta) : s \notin [v, w]\}$ (ver [16]).

Para puntos $x, y \in M$, se dice que x es *ortogonal isósceles* a y si $\|x + y\| = \|x - y\|$, y lo denotaremos por $x \perp_I y$. De igual forma, x se dice *ortogonal Birkhoff* a y si

$\|x + ty\| \geq \|x\|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y lo denotaremos por $x \perp_B y$ (ver [10, 11]). Por otra parte, sean $L_1 = [p_1, q_1]$ y $L_2 = [p_2, q_2]$ cuerdas de una circunferencia G en M , entonces L_1 y L_2 se dicen *ortogonales cordales* si la línea que pasa a través de q_2 y p'_2 (el opuesto de p_2 en G) es paralela a la línea $\langle p_1, q_1 \rangle$. En caso de que $p'_2 = q_2$, se dirá que L_1 es *ortogonal cordal* a L_2 si existe una línea soporte de G que pase por q_2 y sea paralela a la línea $\langle p_1, q_1 \rangle$. Si q'_2 es el opuesto de q_2 en G , entonces $p'_2 q_2 p_2 q'_2$ es un paralelogramo (ver [8]). Consideraremos la ortogonalidad cordal de forma natural solo con respecto a la circunferencia unitaria \mathcal{C} , usando el símbolo $\perp_{\mathcal{C}}$ para esto, es decir, escribir $[p_1, q_1] \perp_{\mathcal{C}} [p_2, q_2]$ automáticamente presupone que $[p_1, q_1]$ y $[p_2, q_2]$ son cuerdas de \mathcal{C} .

Algunas propiedades de estas ortogonalidades que serán de utilidad son las siguientes (ver [8, 10, 11]):

1. Para todo $x \in \mathcal{C}$ existe un $y \in \mathcal{C}$ tal que $x \perp_I y$.
2. Para $x, y \in M$ tales que $x \perp_I y$, entonces $y \perp_I x$, es decir, la ortogonalidad isósceles es simétrica.
3. Para todo $x \in \mathcal{C}$ existe un $y \in \mathcal{C}$ tal que $x \perp_B y$.
4. Para $x, y \in M$ tales que $x \perp_B y$, entonces $kx \perp_B my$ para todo $k, m \in \mathbb{R}$, es decir, la ortogonalidad Birkhoff es homogénea.
5. Para toda cuerda $[x, y] \in \mathcal{C}$ existe una cuerda $[z, w] \in \mathcal{C}$ tal que $[x, y] \perp_{\mathcal{C}} [z, w]$.

Para rayos no colineales $[p, a]$ y $[p, b]$, llamaremos *ángulo* $\angle apb$ a la cápsula convexa formada por los rayos $[p, a]$ y $[p, b]$ (ver [14]). El rayo

$$\left\langle p, \frac{1}{2} \left(\frac{a - p}{\|a - p\|} + \frac{b - p}{\|b - p\|} \right) + p \right\rangle$$

es llamado la *bisectriz de Busemann* del ángulo $\angle apb$, y se denota por $A_B([p, a], [p, b])$ (ver [3]). Notemos que cuando $\|a - p\| = \|b - p\|$, entonces $A_B([p, a], [p, b]) = [p, \frac{a+b}{2}]$. La *bisectriz de Glogovskij* del ángulo $\angle apb$, se define como el conjunto de puntos que equidistan de los rayos $[p, a]$ y $[p, b]$, y se denota por $A_G([p, a], [p, b])$ (ver [17]).

Dado que los espacios M y M^* los podemos identificar vía isomorfismos con \mathbb{R}^2 , entonces podemos ver a M^* como $(M, \|\circ\|^*)$, con $\|\circ\|^*$ la norma dual. Como para $x \in M$ y una recta L en M tal que $x \notin L$, existe un funcional f en M^* tal que f anula a L y $d(x, L) = \frac{|f(x)|}{\|f\|^*}$ (Teorema de Hanh-Banach), entonces la bisectriz de Glogovskij del ángulo $\angle abc$ se puede expresar como $A_G([b, a], [b, c]) = \{x \in M : d(x, [b, a]) = d(x, [b, c])\}$, con

$$d(x, [b, a]) = d(x, f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|^*},$$

donde f es el funcional asociado a la recta $\langle b, a \rangle$. Además, denotaremos por $A_G^*([b, a], [b, c])$ a la bisectriz de Glogovskij del $\angle abc$ en $M^* = (M, \|\circ\|^*)$ (ver [15, 16]).

Si M fuera un plano euclídeo con $w \in M$ y $\mathcal{C}(x, \lambda)$ una circunferencia en M , la potencia de w con respecto a la circunferencia $\mathcal{C}(x, \lambda)$ es $\|x - w\|^2 - \lambda^2$. Si $\mathcal{C}(y, \alpha)$ es otra circunferencia en M no concéntricas con $\mathcal{C}(x, \lambda)$, se llama *eje radical* al lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia con respecto de las circunferencias $\mathcal{C}(x, \lambda)$ y $\mathcal{C}(y, \alpha)$, es decir, $\{a \in M : \|x - a\|^2 - \lambda^2 = \|y - a\|^2 - \alpha^2\}$ (ver [12]).

Para $p \in M$, denotemos por S_p a la *simetría* con respecto al punto p , dada por la expresión $S_p(w) = 2p - w$ para $w \in M$. $H_{p,k}$ denotará la *homotecia* con centro p y razón k ($k \in \mathbb{R}$), y está dada por $H_{p,k}(w) = (1 - k)p + kw$ para $w \in M$. Recordemos que las simetrías son *isometrías* en planos de Minkowski, es decir, $\|S_p(w) - S_p(v)\| = \|w - v\|$ para todo $w, v \in M$ (ver [15, 16]).

Diremos que una recta L en M es la *línea soporte* de la circunferencia $\mathcal{C}(x, \beta)$, si para todo $e \in L$ y todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\|(x - e) + tv\| \geq \beta$, es decir, una recta L se dirá *línea soporte* de la circunferencia $\mathcal{C}(x, \lambda)$ en el punto e , si $e \in L \cap \mathcal{C}(x, \lambda)$ y $d(x, L) = \lambda$ (ver [14, 15, 16]).

Para puntos $x_1, x_2, x_3 \in M$ denotemos por $\Delta x_1 x_2 x_3$ al triángulo de vértices x_1, x_2, x_3 . Diremos que p es un *circuncentro* del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $\|p - x_1\| = \|p - x_2\| = \|p - x_3\|$. Denotemos por $\mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$ el conjunto de los circuncentros del triángulo $\Delta x_1 x_2 x_3$. Dado un punto p_4 y un $\Delta x_1 x_2 x_3$ en M , diremos que el $\Delta p_1 p_2 p_3$ es el p_4 -*antitriángulo* del $\Delta x_1 x_2 x_3$, si $p_i = S_{m_i}(p_4)$ para $i = 1, 2, 3$, con m_i los puntos medios de los lados del $\Delta x_1 x_2 x_3$. Si $p_4 \in \mathcal{C}(\Delta x_1 x_2 x_3)$, diremos que x_4 es el \mathcal{C} -*ortocentro* del $\Delta x_1 x_2 x_3$ asociado a p_4 si $S_q(p_4) = x_4$, donde q es el punto de simetría del $\Delta x_1 x_2 x_3$ y su p_4 -antitriángulo. Además, el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ se dice un *sistema \mathcal{C} -ortocéntrico* (ver [15, 16]).

2 Preliminares

Los siguientes resultados son necesarios para la investigación.

Lema 2.1. *Las siguientes proposiciones son válidas:*

1. Si para cualquier $x, y \in M$, con $x \perp_I y$, existe un número $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tal que $x \perp_{It} y$, entonces M es euclidiano (ver [2, 9]).
2. Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para todo $x, y \in M$ se cumple que si $x \perp_I y$, entonces $x \perp_B y$ (ver [2]).
3. Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para todo $x, y \in M$ se cumple que si $x \perp_B y$, entonces $x \perp_I y$ (ver [2]).
4. Un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si los puntos medios de cualquier familia de cuerdas paralelas están en una misma recta (ver [2]).

Teorema 2.1. (ver [15, 16]) Sea M un plano de Minkowski. Sean x_1, x_2, x_3 y p_4 puntos en M . Sean m_1, m_2 y m_3 los puntos medios de los segmentos $[x_2, x_3]$, $[x_1, x_3]$ y $[x_1, x_2]$, respectivamente. Definamos los puntos $p_i = S_{m_i}(p_4)$, para $i = 1, 2, 3$, entonces se cumple lo siguiente:

1. Los segmentos $[x_i, p_i]$ tienen el mismo punto medio q , para $i = 1, 2, 3$. Además, $2(q - m_i) = x_i - p_4$ para $i = 1, 2, 3$, es decir, $q = \frac{x_1 + x_2 + x_3 - p_4}{2}$.
2. Si $x_4 = S_q(p_4)$, entonces $x_i - x_j = p_j - p_i$ para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
3. $x_i - p_j = p_k - x_l$, donde $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Si $g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, entonces $H_{g, -2}(p_4) = x_4$.

Lema 2.2. (ver [15, 16]) Sea M un plano de Minkowski con origen O . Para cualesquiera $x, z \in M$ con $x \perp_I z$, sea $p_3 = -z$, $p_4 = z$, $x_1 = x$, $x_2 = -x$ y $\lambda = \|x + z\|$. Entonces existen puntos $x_3 \in \mathcal{C}(p_4, \lambda)$ y $q \in \mathcal{C}(O, \lambda/2)$ tales que, los conjuntos $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ son sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, donde $p_1 = S_q(x_1)$, $p_2 = S_q(x_2)$ y $x_4 = S_q(p_4)$. Además, se cumple uno de los siguientes enunciados:

1. $p_1 \in \mathcal{C}(x_2, \lambda)$, $p_2 \in \mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $x_4 \in \mathcal{C}(p_3, \lambda)$.
2. Existen p_1 y p_2 tales que $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$.
3. $p_1 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$ si y solo si $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1 + p_2}{2} \rangle$. En particular, $p_1 = \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$ si y solo si $p_4 \in [p_3, \frac{p_1 + p_2}{2}]$.
4. Si $\|z\| < \lambda$ y $q \in \text{Arc}_{\mathcal{C}(O, \frac{\lambda}{2})}^+(\frac{p_4 + x_2}{2}, \frac{p_4 + x_1}{2})$, con $p_1 \neq p_4$, $S_{x_2}(p_3)$, entonces p_3 y la línea $\langle p_1, p_2 \rangle$ están separados por L_1 .
5. Existen puntos p_1 y p_2 tal que p_3 y la línea $\langle p_1, p_2 \rangle$ están separados por L_1 , o $\langle p_1, p_2 \rangle = L_1$. Además, $p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$.

donde $L_1 = \langle S_{x_1}(p_3), S_{x_2}(p_3) \rangle$.

3 Resultados y pruebas

El siguiente lema nos da las herramientas para probar la mayoría de los resultados sobre caracterización de euclidianidad mencionadas, mediante el estudio de propiedades geométricas en los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos en planos normados.

Lema 3.1. Sea M un plano de Minkowski, con origen O . Para cualesquiera $x, z \in M$ con $x \perp_I z$. Sean $p_3 = -z$, $p_4 = z$, $x_1 = x$, $x_2 = -x$, $\lambda = \|x + z\|$, $x_3 \in \mathcal{C}(p_4, \lambda)$ y $q \in \mathcal{C}(O, \lambda/2)$, entonces existen puntos p_1 y p_2 tales que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ son sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, donde $p_1 = S_q(x_1)$, $p_2 = S_q(x_2)$ y $x_4 = S_q(p_4)$. Además, haciendo $L_1 = \langle S_{x_1}(p_3), S_{x_2}(p_3) \rangle$, se cumple uno de los siguientes enunciados:

1. Si $p_1 = \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$, entonces p_3 y la línea $\langle p_1, p_2 \rangle$ están separados por la recta L_1 o $\langle p_1, p_2 \rangle = L_1$.
2. $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ si y solo si $q \perp_B x$.
3. Existen puntos p_1 y p_2 tal que p_3 y la línea $\langle p_1, p_2 \rangle$ están separados por L_1 , o $\langle p_1, p_2 \rangle = L_1$. Además, $p_4 \in A_G([p_3, p_1], [p_3, p_2])$.
4. Existen puntos p_1 y p_2 tales que $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$.

Demostración. Por el Lema 2.2 se tiene que existen puntos p_1 y p_2 tales que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ son sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos. Probemos que existen puntos p_1 y p_2 que cumplen uno de los otros enunciados mencionados.

1. Tomemos los puntos $S_{x_i}(p_3) = d_i$ y $S_q(x_i) = p_i$ para $i = 1, 2$. Sean las rectas $L_2 = \langle p_1, p_2 \rangle$, $L_1 = \langle d_2, d_1 \rangle$ y $L_0 = \langle x_2, x_1 \rangle$, con vectores directores $p_2 - p_1$, $d_1 - d_2$ y $x_1 - x_2$, respectivamente. Como $d_1 - d_2 = 4x$, $p_2 - p_1 = 2x$ y $x_1 - x_2 = 2x$, se tiene que L_0 , L_1 y L_2 son rectas paralelas, siendo L_0 exactamente el eje de las abscisas (ver *Figura 1*). También se cumple que $p_4 = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $2q = \frac{p_1 + p_2}{2}$ y $O = \frac{x_1 + x_2}{2}$, de manera que $p_4 \in L_1$, $2q \in L_2$ y $O \in L_0$. Tomando $q = \frac{\lambda z}{2\|z\|}$ y la base $\{x, z\}$ de M , con $x, z \neq O$, se calculan las coordenadas de p_3 , p_4 , x_1 , x_2 , q , p_1 , p_2 , d_1 y d_2 , teniendo que $L_2 = (2t - 1, \frac{\lambda}{\|z\|})$ y $L_1 = (4s - 2, 1)$, de manera que los puntos p_4 y $2q$ están montados en el eje de las ordenadas. Por tanto, las rectas L_1 y L_2 pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(0, \frac{\lambda}{\|z\|})$, respectivamente. Por otro lado,

$$\frac{2}{3} \|z\| = \frac{\|2z\|}{3} \leq \frac{\|z - x\| + \|z + x\|}{3},$$

pero como $\|z - x\| = \|z + x\|$, entonces $\|z\| \leq \lambda$. Así, en el caso donde $\frac{\lambda}{\|z\|} > 1$ se tiene que L_1 separa a las rectas L_2 del punto p_3 y si $\frac{\lambda}{\|z\|} = 1$, entonces $L_1 = L_2$.

2. Sea $q \in \mathcal{C}(O, \frac{\lambda}{2})$ tal que $q \perp_B x$, entonces la recta Q que pasa por q , paralela a la línea $\langle x_1, x_2 \rangle$ (ver *Figura 2*), es la línea soporte de la circunferencia $\mathcal{C}(O, \frac{\lambda}{2})$. Aplicando las homotecias $H_{x_1, 2}$ y $H_{x_2, 2}$ a la recta Q se obtienen las rectas $H_{x_1, 2}(Q)$ y $H_{x_2, 2}(Q)$, que pasan por $p_1 = 2q - x_1$ y $p_2 = 2q - x_2$, y son las líneas soporte de las circunferencias $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$, respectivamente. Por otro lado, $\langle p_1, p_2 \rangle$ es paralela a $\langle x_1, x_2 \rangle$ por el ítem 2 del Teorema 2.1. Como por un punto pasa una sola recta paralela a otra recta dada, se tiene que $H_{x_1, 2}(Q) = \langle p_1, p_2 \rangle = H_{x_2, 2}(Q)$ y por tanto, $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea soporte común de las circunferencias $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$.

Recíprocamente, como $p_i = S_q(x_i)$ para $i = 1, 2$, por el ítem 2 del Teorema 2.1 se tiene que $x_1 - p_2 = x_2 - p_1$. Como $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea soporte común de las circunferencias $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$, entonces $x_1 - p_2 \perp_B x$ y $x_2 - p_1 \perp_B x$, de manera que $q \perp_B x$ por la homogeneidad de la ortogonalidad Birkhoff (ver *Figura 2*).

3. Para cualquier $t \in [0, 1]$, definamos las funciones continuas

$$x_3(t) : [0, 1] \longrightarrow Arc_{\mathcal{C}(p_4, \lambda)}^+(S_{p_4}(x_1), S_{p_4}(x_2))$$

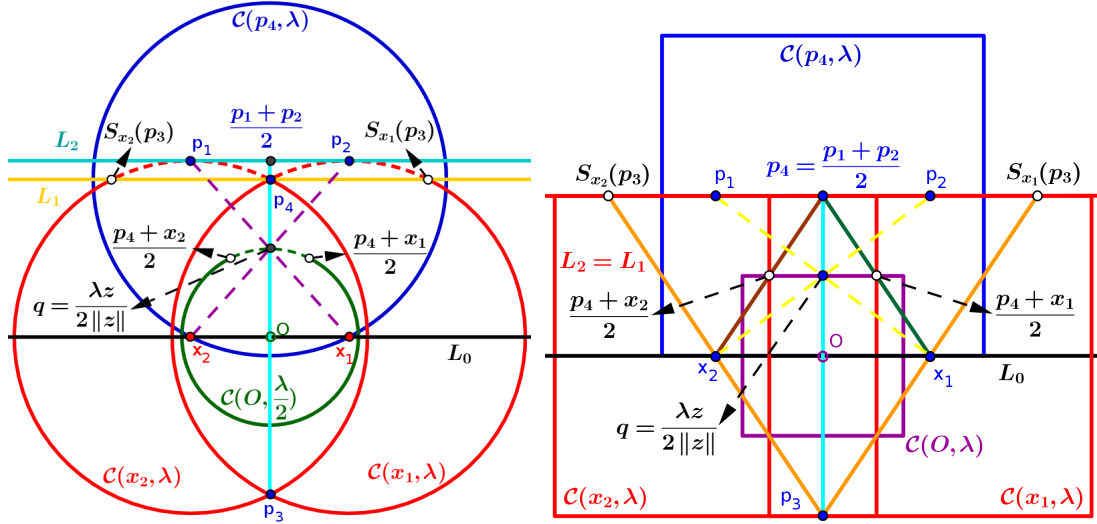


Figura 1: Demostración ítem 1 del Lema 3.1

$q(t) = \frac{p_3 + x_3(t)}{2}$ y $p_i(t) = 2q(t) - x_i$ para $i = 1, 2$. Cuando t se mueve continuamente de 0 a 1, el rayo $A_G([p_3, p_1(t)], [p_3, p_2(t)])$ se transforma continuamente de $A_G([p_3, d_1], [p_3, p_4])$ a $A_G([p_3, p_4], [p_3, d_2])$ (ver Figura 1). Así, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$A_G([p_3, p_1(t_0)], [p_3, p_2(t_0)]) = [p_3, p_4]$$

Sean $p_1 = p_1(t_0)$ y $p_2 = p_2(t_0)$, entonces p_1 y p_2 son puntos que tienen la propiedad deseada y, por el ítem 4 del Lema 2.2, p_3 y la línea $\langle p_1, p_2 \rangle$ están separados por la línea L_1 , que pasa por p_4 y es paralela a $\langle p_1, p_2 \rangle$, o $L_1 = \langle p_1, p_2 \rangle$ (ver Figura 1).

4. Definamos las funciones continuas $x_3(t)$, $q(t)$, $p_1(t)$ y $p_2(t)$ de igual forma que en el ítem 3 del presente lema. Tomemos la base del plano dada por $\Theta = \left\{ \frac{x}{\|x\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\}$ y sea $(a_3(t), b_3(t))$ el vector coordenado de $x_3(t)$ en dicha base para $t \in [0, 1]$. Tomando en cuenta las coordenadas de los puntos p_3 , p_4 , x_1 y x_2 en la base Θ , se tiene que las correspondientes a $q(t)$, $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son: $\left(\frac{a_3(t)}{2}, \frac{b_3(t) - \|z\|}{2} \right)$, $(a_3(t) - \|x\|, b_3(t) - \|z\|)$ y $(a_3(t) + \|x\|, b_3(t) - \|z\|)$, respectivamente. Como las rectas $\langle p_3, p_1(t) \rangle$ y $\langle p_3, p_2(t) \rangle$ están dadas por $kp_3 + (1-k)p_1(t)$ y $kp_3 + (1-k)p_2(t)$ con $k \in \mathbb{R}$, respectivamente, entonces estas se pueden expresar de la siguiente manera:

$$((1-k)(a_3(t) - \|x\|), -kb_3(t) + b_3(t) - \|z\|)$$

y

$$((1-k)(a_3(t) + \|x\|), -kb_3(t) + b_3(t) - \|z\|),$$

respectivamente. De esto se puede deducir que las ecuaciones de las rectas $\langle p_3, p_1(t) \rangle$ y $\langle p_3, p_2(t) \rangle$ en la base Θ , están dadas por:

$$-b_3(t)x - (\|x\| - a_3(t))y + \|z\|(a_3(t) - \|x\|)$$

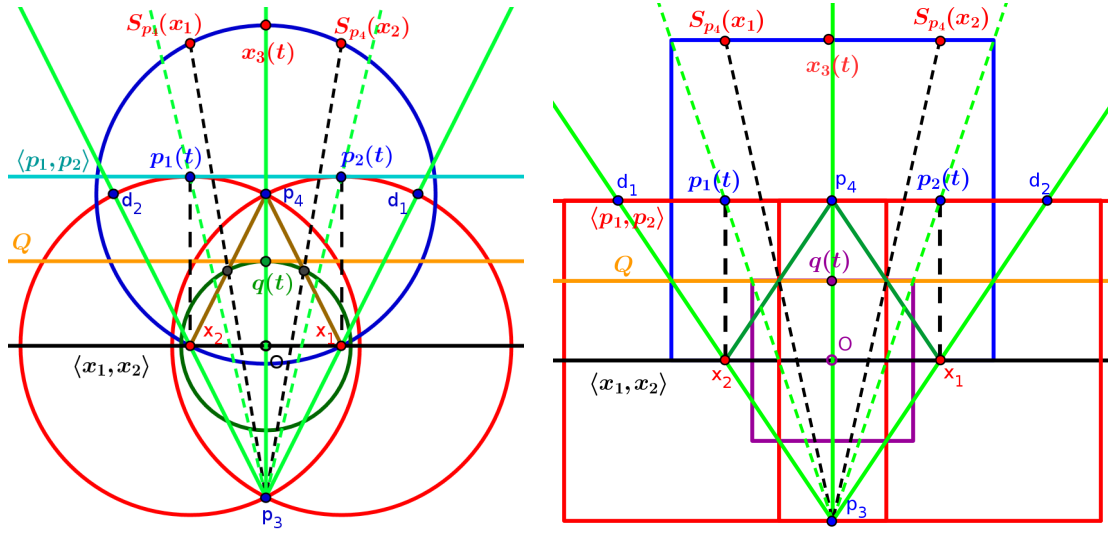


Figura 2: Demostración ítem 2 del Lema 3.1

y

$$-b_3(t)x + (\|x\| + a_3(t))y + \|z\| (a_3(t) + \|x\|),$$

respectivamente. Por tanto, los elementos

$$f_{p_1(t)} = (-b_3(t), a_3(t) - \|x\|) \quad \text{y} \quad f_{p_2(t)} = (-b_3(t), -\|x\| - a_3(t)),$$

son funcionales asociados a las rectas $\langle p_3, p_1(t) \rangle$ y $\langle p_3, p_2(t) \rangle$, respectivamente. Como $A_G^*([p_3, p_1(t)], [p_3, p_2(t)])$ es un rayo que consta de los elementos $z = (w, e)$, tales que:

$$\frac{|f_{p_1(t)}(z)|}{\|f_{p_1(t)}\|} = \frac{|f_{p_2(t)}(z)|}{\|f_{p_2(t)}\|},$$

entonces los puntos z anulan a la función continua definida por:

$$\phi_z(t) = \|f_{p_2(t)}\| |-wb_3(t) + e(a_3(t) - \|x\|)| - \|f_{p_1(t)}\| |-wb_3(t) - e(\|x\| + a_3(t))|,$$

es decir,

$$A_G^*([p_3, p_1(t)], [p_3, p_2(t)]) = \{z \in M : \phi_z(t) = 0\}.$$

Fijando p_4 , tenemos que

$$\phi_{p_4}(t) = \|f_{p_2(t)}\| \|z\| |\|x\| - a_3(t)| - \|f_{p_1(t)}\| \|z\| |\|x\| + a_3(t)|.$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_3(t) = S_{p_4}(x_1) = 2z - x \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1} x_3(t) = S_{p_4}(x_2) = 2z + x,$$

se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (a_3(t), b_3(t)) = (-\|x\|, 2\|z\|) \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1} (a_3(t), b_3(t)) = (\|x\|, 2\|z\|).$$

Por tanto,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi_{p_4}(t) = 2 \|f_{p_3-p_2}(t)\| \|z\| \|x\| > 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \phi_{p_4}(t) = -2 \|f_{p_3-p_1}(t)\| \|z\| \|x\| < 0,$$

de manera que existe un t_0 tal que $\phi_{p_4}(t_0) = 0$, es decir, existe t_0 tal que $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1(t_0)], [p_3, p_2(t_0)])$. Así, los valores $p_1(t_0)$ y $p_2(t_0)$ son los puntos que cumplen la propiedad deseada. \square

Teniendo las propiedades de los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos, que se mostraron en el lema precedente, se probarán los resultados referentes a caracterización de euclidianidad en planos de Minkowski. El siguiente teorema dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$\langle p_1, p_2 \rangle \text{ es la línea de soporte común de las } \\ \text{circunferencias que contienen los puntos } \{p_1, p_3, p_4\} \text{ y } \{p_2, p_3, p_4\}, \text{ respectivamente.} \\ \implies \|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$$

Teorema 3.1. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, la igualdad $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$ se cumple, siempre y cuando $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente.*

Demostración. Supóngase M euclídeo. Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico y $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ la circunferencia circunscrita del $\triangle p_2 p_3 p_4$. Definamos $q = \frac{x_1 + p_1}{2}$ y $x_i = S_q(p_i)$ para $i = 2, 3, 4$, entonces $\langle p_3, p_4 \rangle$ es el eje radical de $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$. Si $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea soporte común de $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$, entonces $\langle p_3, p_4 \rangle$ sería la bisectriz perpendicular de $[p_1, p_2]$ y por tanto $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$.

Recíprocamente, por el Lema 2.1 basta ver que para cualesquiera $x, z \in \mathcal{C}$ con $x \perp_B z$ se cumple que $x \perp_I z$. Sea $x \in \mathcal{C}$ y, sin pérdida de generalidad, tomemos el arco $Arc_{\mathcal{C}}^+(-x, x)$ y definamos la parametrización continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow Arc_{\mathcal{C}}^+(-x, x)$ tal que $\alpha(0) = -x$ y $\alpha(1) = x$. Luego, por las propiedades de la ortogonalidad Birkhoff, existe $z \in Arc_{\mathcal{C}}^+(-x, x)$ tal que $z \perp_B x$ y por tanto, hay $k_1 \in [0, 1]$ tal que $\alpha(k_1) = z$.

Sea $J = \{h \in [0, 1] : x \perp_I \alpha(h)\}$ y tomemos $h_1 \in J$ tal que:

$$|h_1 - k_1| = \min_{h \in J} \{|h - k_1|\}.$$

Para cualquier $t > 0$, tx y $-tx$ son los puntos de intersección de la circunferencia $t\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, t)$ y la recta $\langle -x, x \rangle$. Sea la parametrización continua $\alpha_t : [0, 1] \rightarrow Arc_{t\mathcal{C}}^+(-tx, tx)$, con $\alpha_t(0) = -tx$ y $\alpha_t(1) = tx$. Sea $z_t \in Arc_{t\mathcal{C}}^+(-tx, tx)$ tal que $x \perp_I z_t$, por tanto existe $k_t \in [0, 1]$ tal que $\alpha_t(k_t) = z_t$. Sea

$J_t = \{h \in [0, 1] : x \perp_I \alpha_t(h)\}$ y definamos la función continua $y(t) = \alpha_t(h_t)$ con $h_t \in J_t$ tal que $|h_t - k_t| = \min_{h \in J_t} \{|h - k_t|\}$.

Hagamos $p_4(t) = y(t)$, $p_3(t) = -y(t)$, $x_1 = x$ y $x_2 = -x$. Tomemos $q = \frac{\|x+y(t)\|}{2}z$ y definamos los puntos $p_1(t) = S_{q(t)}(x_1)$ y $p_2(t) = S_{q(t)}(x_2)$. Por el ítem 2 del Lema 3.1, $\langle p_1(t), p_2(t) \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos $\{p_1(t), p_3(t), p_4(t)\}$ y $\{p_2(t), p_3(t), p_4(t)\}$, respectivamente. Por el ítem 2 del Teorema 2.1 se tiene que $p_1(t) - p_2(t) = x_2 - x_1$. Así, $p_1(t) - x_2 \perp_B x$ y $p_2(t) - x_1 \perp_B x$, de manera que:

$$p_1(t) - x_2 = p_2(t) - x_1 = 2q(t) = \|x + y(t)\|z.$$

Sea $z(t) = \|x + y(t)\|z$, entonces

$$\|p_3(t) - p_1(t)\| = \|p_3(t) - x_2 + x_2 - p_1(t)\| = \|p_3(t) - x_2 - z(t)\|$$

y

$$\|p_3(t) - p_2(t)\| = \|p_3(t) - x_1 + x_1 - p_2(t)\| = \|p_3(t) - x_1 - z(t)\|.$$

Por hipótesis, $\|p_3(t) - p_1(t)\| = \|p_3(t) - p_2(t)\|$ y por tanto,

$$\|p_3(t) - x_2 - z(t)\| = \|p_3(t) - x_1 - z(t)\|,$$

es decir, $\|(y(t) - z(t)) + x\| = \|(y(t) - z(t)) - x\|$. Es claro que $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = O$ y por tanto, $\lim_{t \rightarrow 0} \|x + y(t)\| = \|x\| = 1$. De esto se sigue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} (y(t) - z(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} (y(t) - \|x + y(t)\|z) = -z,$$

y entonces

$$\|x - z\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} (x + y(t) - z(t)) \right\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} (y(t) - z(t) - x) \right\| = \|x + z\|,$$

de manera que $z \perp_I x$. □

El siguiente resultado dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\| \implies \langle p_1, p_2 \rangle \text{ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos } \{p_1, p_3, p_4\} \text{ y } \{p_2, p_3, p_4\}, \text{ respectivamente.}$$

Teorema 3.2. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente, siempre y cuando $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$.*

Demostración. La primera implicación se deduce empleando un argumento similar al usado en el Teorema 3.1.

Recíprocamente, para cualquier $x, z \in \mathcal{C}$ con $z \perp_B x$ y cualquier $t > 0$, definamos $y(t)$, x_1 , x_2 , $p_3(t)$ y $p_4(t)$ como en la prueba del Teorema 3.1. Entonces, por el ítem 2 del Lema 2.2, existen puntos $p_1(t)$ y $p_2(t)$ tales que el conjunto $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\}$ es un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico con $\|p_3 - p_1\| = \|p_3 - p_2\|$. Por el ítem 1 del Lema 3.1, $p_3(t)$ y la línea $\langle p_1(t), p_2(t) \rangle$ están separados por la recta que pasa por $p_4(t)$, paralela a $\langle p_1(t), p_2(t) \rangle$, o $\langle p_1, p_2 \rangle = L_1$. Por hipótesis, $\langle p_1(t), p_2(t) \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias $\mathcal{C}(x_1, \|x + y(t)\|)$ y $\mathcal{C}(x_2, \|x + y(t)\|)$. Luego, como en la prueba del Teorema 3.1, se puede demostrar que $z \perp_I x$. \square

El siguiente enunciado dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle \implies \langle p_1, p_2 \rangle \text{ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos } \{p_1, p_3, p_4\} \text{ y } \{p_2, p_3, p_4\}, \text{ respectivamente.}$$

Teorema 3.3. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen a los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente, siempre y cuando $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$.*

Demostración. Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico tal que $p_3 \neq p_4$, y sea $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ la circunferencia circunscrita del $\triangle p_2 p_3 p_4$. Definamos $q = \frac{x_1+p_1}{2}$ y $x_i = S_q(p_i)$ para $i = 2, 3, 4$. Por el ítem 3 del Teorema 2.1 se tiene que el cuadrilátero formado por los puntos x_1, p_3, x_2, p_4 es un rombo y, como el plano es euclídeo, entonces $\langle p_3, p_4 \rangle$ y $\langle x_1, x_2 \rangle$ son perpendiculares y se cortan en el punto $\frac{x_1+x_2}{2}$. Como $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$ se tiene que el segmento $[\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}]$ es perpendicular a la recta $\langle x_1, x_2 \rangle$ en el mismo punto $\frac{x_1+x_2}{2}$.

Por el ítem 2 del Teorema 2.1, el segmento $[\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}]$ es paralelo a los segmentos $[p_1, x_2]$ y $[p_2, x_1]$. Además, estos últimos son perpendiculares a $\langle x_1, x_2 \rangle$ en los puntos x_2 y x_1 , respectivamente. Así, la recta L_1 paralela a $\langle x_1, x_2 \rangle$, que pasa por p_1 , es de soporte de $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$. De igual forma, la recta L_2 paralela a $\langle x_1, x_2 \rangle$, que pasa por p_2 , es de soporte de $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$, pero como $\langle p_1, p_2 \rangle$ es paralela a $\langle x_1, x_2 \rangle$ entonces $L_1 = L_2 = \langle p_1, p_2 \rangle$.

Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tal que $x \perp_I z$. Hagamos $p_4 = z$, $p_3 = -z$, $x_1 = x$ y $x_2 = -x$. Por el ítem 3 del Lema 2.2, se tiene que existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_4 \neq p_3$, tal que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$ y por tanto, se tiene que $p_1 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$.

Por hipótesis, $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen a los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente. Como las rectas $\langle p_1, p_2 \rangle$ y $\langle x_1, x_2 \rangle$ son paralelas, entonces $(p_2 - x_1) \perp_B x$ y $(p_1 - x_2) \perp_B x$. Por lo tanto $\pm \frac{\lambda z}{\|z\|} \perp_B x$ y, por la homogeneidad de la ortogonalidad Birkhoff, se tiene que $z \perp_B x$. Luego, por el Lema 2.1 M es euclídeo. \square

El siguiente teorema dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente. $\implies p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$

Teorema 3.4. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, siempre y cuando $\langle p_1, p_2 \rangle$ sea la línea de soporte común de las circunferencias que contienen a los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente.*

Demostración. Sea un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Usando el mismo argumento del Teorema 3.3 se tiene que $[p_4, \frac{x_1+x_2}{2}]$ es perpendicular a $[x_1, x_2]$ en el punto $\frac{x_1+x_2}{2}$. Como $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias $\mathcal{C}(x_1, \lambda)$ y $\mathcal{C}(x_2, \lambda)$, se tiene que los segmentos $[x_1, p_2]$ y $[x_2, p_1]$ son perpendiculares a la recta $\langle x_1, x_2 \rangle$. Por el ítem 2 del Teorema 2.1 se tiene que el cuadrilátero formado por los puntos x_1, x_2, p_1, p_2 es un paralelogramo y por tanto el segmento $[\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}]$, paralelo a $[x_1, p_2]$, es perpendicular a $[x_1, x_2]$ en el punto $\frac{x_1+x_2}{2}$, y por la unicidad de la perpendicularidad (salvo el opuesto) se tiene:

$$\left\langle \frac{p_1+p_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2} \right\rangle \subset \langle p_3, p_4 \rangle,$$

de manera que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$.

Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tal que $x \perp_I z$. Hagamos $p_4 = z$, $p_3 = -z$, $x_1 = x$ y $x_2 = -x$. Por el ítem 2 del Lema 3.1 existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_4 \neq p_3$, tal que $\langle p_1, p_2 \rangle$ es la línea de soporte común de las circunferencias que contienen a los puntos $\{p_1, p_3, p_4\}$ y $\{p_2, p_3, p_4\}$, respectivamente. Como las rectas $\langle p_1, p_2 \rangle$ y $\langle x_1, x_2 \rangle$ son paralelas, entonces $(p_2 - x_1) \perp_{Bx}$ y $(p_1 - x_2) \perp_{Bx}$. Como $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, entonces por el ítem 3 del Lema 2.2 se tiene que $p_1 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$. Así, $\pm \frac{\lambda z}{\|z\|} \perp_{Bx}$ de manera que $z \perp_{Bx}$ y por tanto, M es euclídeo. \square

El siguiente resultado dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle \implies p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$$

Teorema 3.5. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, siempre y cuando $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$.*

Demostración. Sea M un plano euclidiano y $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico con $p_3 \neq p_4$. Así, la bisectriz de Busemann coincide con la bisectriz euclidiana, entonces $A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2]) = [p_3, \frac{p_1+p_2}{2}]$ y como $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, se tiene lo deseado.

Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tal que $x \perp_I z$. Hagamos $p_4 = z$, $p_3 = -z$, $x_1 = x$ y $x_2 = -x$. Por el ítem 3 del Lema 2.2 existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, con $p_4 \neq p_3$, tal que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, entonces $p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, por hipótesis. Luego, por el ítem 3 del Lema 2.2 se tiene que $p_1 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \pm \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$. Tomando los valores $p_1 = \frac{\lambda z}{\|z\|} - x$ y $p_2 = \frac{\lambda z}{\|z\|} + x$, entonces $\frac{p_1+p_2}{2} = \frac{\lambda z}{\|z\|}$.

Por otra parte, existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in [1, +\infty)$ tales que

$$p_4 = \alpha p_3 + (1 - \alpha) \frac{p_1 + p_2}{2} \quad \text{y} \quad p_4 = \beta p_3 + (1 - \beta) \left(p_3 + \frac{p_3 - p_1}{\|p_3 - p_1\|} + \frac{p_3 - p_2}{\|p_3 - p_2\|} \right),$$

y sustituyendo los valores de los puntos p_1 , p_2 y p_3 se tiene que

$$p_4 = \left(\frac{\lambda - \alpha(\|z\| + \lambda)}{\|z\|} \right) z \quad \text{y} \quad p_4 = rz + (1 - \beta) \left(\frac{1}{\left\| x - \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} z \right\|} - \frac{1}{\left\| x + \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} z \right\|} \right) x,$$

respectivamente, donde $r = (\beta - 1) \left(1 + \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\| \left\| x - \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} z \right\|} + \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\| \left\| x + \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} z \right\|} \right) - 1$. Por tanto,

$$\left\| x - \left(\frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} \right) z \right\| = \left\| x + \left(\frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|} \right) z \right\|.$$

Haciendo $t = \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|}$ se tiene que $x \perp_I tz$ y así M es euclidiano. \square

El siguiente enunciado dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2]) \implies p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$$

Teorema 3.6. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, siempre y cuando $p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$.*

Demostración. Si M es euclídeo el enunciado del teorema es claramente cierto. Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tal que $x \perp_I z$. Hagamos $p_4 = z$, $p_3 = -z$, $x_1 = x$ y $x_2 = -x$. Por el ítem 5 del Lema 2.2 existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_4 \neq p_3$, tal que $p_4 \in A_B([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, entonces por hipótesis, $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$. Empleando el mismo argumento presentado en el Teorema 3.5, se tiene que $x \perp_I tz$ para $t = \frac{\|z\| + \lambda}{\|z\|}$ y por tanto, M es euclidiano. \square

El siguiente teorema dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle \implies p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$$

Teorema 3.7. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, siempre y cuando $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$.*

Demostración. Si el plano M es euclídeo, todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, satisface que p_4 está en la bisectriz euclidiana, siempre y cuando $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, y por tanto,

$$d(p_4, L_{p_1}) = d(p_4, L_{p_2}),$$

donde L_{p_1} y L_{p_2} son las parametrizaciones de las rectas $\langle p_3, p_1 \rangle$ y $\langle p_3, p_2 \rangle$, con $p_3 - p_1$ y $p_3 - p_2$ sus vectores directores, respectivamente. Por tanto,

$$\frac{|L_{p_1}(p_4)|}{\|p_3 - p_1\|^*} = \frac{|L_{p_2}(p_4)|}{\|p_3 - p_2\|^*},$$

pero como en un plano euclídeo $\|\circ\|^* = \|\circ\|$, entonces

$$\frac{|L_{p_1}(p_4)|}{\|p_3 - p_1\|} = \frac{|L_{p_2}(p_4)|}{\|p_3 - p_2\|},$$

de manera que $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, teniendo así lo deseado.

Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tales que $x \perp_I z$. Por el Lema 2.1 basta ver que existe un $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tal que $z \perp_I tx$. Por el ítem 3 del Lema 2.2 existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ tal que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1+p_2}{2} \rangle$, por tanto se pueden tomar $p_1 = \frac{\lambda}{\|z\|}z + x$ y $p_2 = \frac{\lambda}{\|z\|}z - x$.

Por otro lado, el conjunto $\Theta = \left\{ \frac{x}{\|x\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\}$ es una base de M , pues $x \perp_I z$. De manera que: $x_1 = (\|x\|, 0)$, $x_2 = (-\|x\|, 0)$, $p_3 = (0, -\|z\|)$, $p_4 = (0, \|z\|)$, $p_1 = (-\|x\|, \lambda)$ y $p_2 = (\|x\|, \lambda)$. Luego, aplicando la misma idea usada en el ítem 4 del Lema 3.1, se tiene que las ecuaciones de las rectas $\langle p_3, p_1 \rangle$ y $\langle p_3, p_2 \rangle$, en la base Θ , estan dadas por:

$$-(\|z\| + \lambda)x - \|x\|z - \|x\|\|z\| \quad \text{y} \quad -(\|z\| + \lambda)x + \|x\|z + \|x\|\|z\|,$$

respectivamente. Así, los elementos

$$f_{p_1} = (\lambda + \|z\|, \|x\|) \quad \text{y} \quad f_{p_2} = (\lambda + \|z\|, -\|x\|)$$

son funcionales asociados a dichas rectas, respectivamente. Como por hipótesis $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$, entonces

$$d(p_4, f_{p_1}) = d(p_4, f_{p_2}),$$

por tanto

$$\frac{|f_{p_1}(p_4)|}{\|f_{p_1}\|} = \frac{|f_{p_2}(p_4)|}{\|f_{p_2}\|},$$

de manera que

$$\frac{\|x\| \|z\|}{\left\| \frac{(\lambda + \|z\|)x}{\|x\|} + \frac{\|x\|z}{\|z\|} \right\|} = \frac{\|x\| \|z\|}{\left\| \frac{(\lambda + \|z\|)x}{\|x\|} - \frac{\|x\|z}{\|z\|} \right\|},$$

de donde

$$\left\| (\lambda + \|z\|) \|z\| x - \|x\|^2 z \right\| = \left\| (\lambda + \|z\|) \|z\| x + \|x\|^2 z \right\|,$$

teniendo que

$$\left\| \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\| x}{\|x\|^2} - z \right\| = \left\| \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\| x}{\|x\|^2} + z \right\|.$$

Tomando $t = \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\|}{\|x\|^2} > 0$ se obtiene que $z \perp_I t x$. \square

El siguiente resultado dice que un plano de Minkowski es euclidiano si y solo si todo sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, cumple la siguiente implicación:

$$p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2]) \implies p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1 + p_2}{2} \rangle$$

Teorema 3.8. *Un plano de Minkowski M es euclidiano si y solo si para cualquier sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ con $p_3 \neq p_4$, se cumple que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1 + p_2}{2} \rangle$, siempre y cuando $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$.*

Demostración. Sea $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico en un plano euclídeo, con $p_3 \neq p_4$, donde $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$. Usando el razonamiento expuesto en el Teorema 3.7 se tiene que $p_4 \in A_G([p_3, p_1], [p_3, p_2])$ y por tanto, p_4 está en la bisectriz euclidiana, de manera que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1 + p_2}{2} \rangle$.

Recíprocamente, sean $x, z \in M$ tales que $x \perp_I z$. Por el Lema 2.1 basta ver que existe un $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ tal que $z \perp_I t x$. Por el ítem 4 del Lema 3.1 existe un sistema \mathcal{C} -ortocéntrico $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ tal que $p_4 \in A_G^*([p_3, p_1], [p_3, p_2])$. Por hipótesis se tiene que $p_4 \in \langle p_3, \frac{p_1 + p_2}{2} \rangle$ y, por el ítem 3 del Lema 2.2, se puede tomar $p_1 = \frac{\lambda}{\|z\|} z + x$ y $p_2 = \frac{\lambda}{\|z\|} z - x$. Usando la misma idea expuesta en el Teorema 3.7 se tiene que

$$\left\| \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\| x}{\|x\|^2} - z \right\| = \left\| \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\| x}{\|x\|^2} + z \right\|.$$

Tomando $t = \frac{(\lambda + \|z\|) \|z\|}{\|x\|^2} > 0$, se obtiene que $z \perp_I t x$. \square

El siguiente teorema relaciona la euclidianidad de un plano de Minkowski con la noción de ortogonalidad cordal y los sistemas \mathcal{C} -ortocéntricos.

Teorema 3.9. *Sean M un plano de Minkowski y $[p_1, q_1], [p_2, q_2] \in \mathcal{C}$, tales que $[p_1, q_1] \perp_{\mathcal{C}} [p_2, q_2]$. Sea h el \mathcal{C} -ortocentro del $\triangle p_1 q_1 p_2$ asociado al origen. Si $\langle p_2, h \rangle \cap \mathcal{C} = \{q_2\}$, entonces M es euclidiano.*

Demostración. Sean $[p_1, q_1]$ y $[p_2, q_2]$ dos cuerdas de \mathcal{C} tales $[p_1, q_1] \perp_{\mathcal{C}} [p_2, q_2]$, entonces los segmentos $[p_1, q_1]$ y $[p_2, -q_2]$ son cuerdas paralelas en \mathcal{C} . Como por hipótesis h es el \mathcal{C} -ortocentro del $\triangle p_1 q_1 p_2$ y $\langle p_2, h \rangle \cap \mathcal{C} = \{q_2\}$, entonces p_2, h y q_2 son colineales, de manera que $h = \alpha p_2 + (1 - \alpha)q_2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Como el $\triangle p_1 q_1 p_2$ está inscrito en \mathcal{C} , se tiene que $h = p_1 + q_1 + p_2$. Así,

$$\alpha p_2 + (1 - \alpha)q_2 = p_1 + q_1 + p_2,$$

por tanto

$$(\alpha - 1)p_2 + (\alpha - 1)(-q_2) = p_1 + q_1,$$

de donde $(\alpha - 1)\frac{(p_2 - q_2)}{2} = \frac{p_1 + q_1}{2}$. De esta forma, los puntos medios de los segmentos $[p_1, q_1]$ y $[p_2, -q_2]$ están alineados con O y por el Lema 2.1 se tiene que M es euclidiano. \square

Referencias

- [1] A. C. Thompson (1996). *Minkowski geometry*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **63**. Cambridge University Press. Cambridge. ISBN 0-521-40472-X.
- [2] D. Amir (1986). *Characterizations of inner product spaces*. Birkhäuser. Basel. ISBN 3-7643-1774-4.
- [3] H. Busemann (1975). Planes with analogues to euclidean angular bisectors. *Math. Scand.* **36**, 5-11.
- [4] G. Birkhoff (1935). Orthogonality in linear metric spaces. *Duke Math. J.* **1**(2), 169-172.
- [5] H. Martini and K. J. Swanepoel (2006). Antinorms and radon curves. *Aequationes Math.* **72**, 110-138.
- [6] H. Martini, K. J. Swanepoel and G. Weiß (2001). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part I. *Expositiones Math.* **19**, 97-142.
- [7] H. Martini and K. J. Swanepoel (2004). The geometry of Minkowski spaces - A survey. Part II. *Expositiones Math.* **22**, 93-144.
- [8] H. Martini and M. Spirova (2010). A new type of orthogonality for normed planes. *Czechoslovak Mathematical Journal.* **60**(2), 339-349.
- [9] H. Martini and S. Wu (2009). On orthocentric systems in strictly convex normed planes. *Extracta Mathematicae.* **24**(1), 31-45.
- [10] J. Alonso, H. Martini and S. Wu (2012). On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Aequationes Math.* **83**, 153-189.
- [11] J. Alonso (1994). Uniqueness properties of isosceles orthogonality in normed linear spaces. *Ann. Sci. Math. Québec.* **18**(1), 25-38.

- [12] R. A. Johnson (2007). *Advanced euclidean geometry*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York. ISBN-10: 0-486-46237-4.
- [13] R. C. James (1945). Orthogonality in normed linear spaces. *Duke Math. J.* **12**, 291-302.
- [14] S. Wu (2009). *Geometry of Minkowski planes and spaces - Selected topics*. Ph. D. Thesis. Chemnitz University of Technology.
- [15] Rosas T. y Pacheco W. (2014). Orthocentric systems in Minkowski planes. *Beiträge zur Algebra und Geometrie (BZAG)*. DOI 10.1007/s13366-014-0214-6. ISSN 0138-4821.
- [16] Rosas T. (2014). Sistemas Ortocéntricos en planos de Minkowski y euclidianidad. Tesis Doctoral. Universidad Centroccidental Linsandro Alvarado, Barquisimeto, Venezuela.
- [17] V. V. Glogovskij (1970). Bisectors on the Minkowski plane with norm $(x_p + y_p)^{\frac{1}{p}}$. *Visnik L'viv. Politehn. Inst.* **218**, 192-198.