

Quantum trajectories approach and Schrödinger's cat paradox.

J.Foukzon¹, A.A.Potapov², S.A. Podosenov³

1. Israel Institute of Technology.
2. IRE RAS,
3. All-Russian Scientific-Research Institute

Abstract: Possible solution of the Schrödinger's cat paradox is considered.

Приложение VI. Метод асимптотических квантовых траекторий в теории КМ измерений. Парадокс шредингеровской «кошки» и проблема коллапса волновой функции в теории КМ измерений.

Материал изложенный в этом разделе, не имеет прямого отношения к тематике данной монографии и поэтому не был включен в основной текст третьего тома а вынесен в отдельное приложение. Мы иллюстрируем здесь некоторые важные приложения теоремы 15.3.2 сформулированной в [187], (см.[188] глава III.5.) к методу предельных квантовых траекторий

$$\mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = \{x_1^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0), x_2^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0), \dots, x_d^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)\},$$

которые определены как покомпонентный предел при $\hbar \rightarrow 0$ вектора $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) = \{x_1(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar), \dots, x_d(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar)\}$, заданного посредством формулы (123), т.е.:

$$x_i^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} x_i(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) =$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) d^d x}{\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)|^2 d^d x}, \quad (\text{VI.1})$$

если предел в правой части равенства (VI.1) существует для любых $t, t_0 \in [0, T]$, $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ при всех значениях $i : i = 1, \dots, d$.

В общем случае, когда КМ-система описывается уравнением (127),

предельная квантовая траектория $[(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon] \triangleq [(\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon]$ определяется как элемент алгебры Коломбеау $G^d(\mathbb{R}_+)$:

$$G^d(\mathbb{R}_+) \triangleq \prod_{i=1}^d G(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+), \quad (\text{VI.2})$$

заданный формулой:

$[(\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon] = \{(x_{\varepsilon,1}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon, \dots, (x_{\varepsilon,d}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon\}$, где

$$\begin{aligned} (x_{\varepsilon,i}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon &= (x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \\ &= \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) d^d x}{\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x} \right)_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

где $(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon \approx 0$.

Здесь $(\cdot \approx \cdot)$ - отношение слабой эквивалентности в алгебре $\widehat{\mathbb{R}}$:

(i) $(x_\varepsilon)_\varepsilon \approx (y_\varepsilon)_\varepsilon \Leftrightarrow (x_\varepsilon - y_\varepsilon)_\varepsilon \approx 0$,

(ii) $(r_\varepsilon)_\varepsilon \approx 0 \Leftrightarrow \exists q (q \in \mathbb{N}) \exists \varepsilon_0 \forall \varepsilon (\varepsilon \leq \varepsilon_0) [r_\varepsilon = O(\varepsilon^q)]$.

1. Парадокс шредингеровской «кошки» и парадокс измерения.

1.1. Парадокс Шредингеровской «кошки»

На первый взгляд кажется совершенно естественным, что квантовая механика (КМ) и в частности ее главный постулат – принцип суперпозиции, применимы не только к микромиру, но в равной степени и к макромиру. Но уже вскоре после создания квантовой механики, один из главных ее создателей Э.Шредингер указал на то, что экстраполяция принципа суперпозиции на макромир может привести к парадоксам. Один из них — парадокс шредингеровской «кошки» — хорошо известен [162]. Парадокс шредингеровской «кошки» возникает в результате формального переноса микроскопического КМ описания природы, на макроскопический уровень. Известно, что при некоторых естественных и вполне разумных условиях, мы можем получить такое КМ описание макроскопического объекта, которое приводит в недоумение и представляется весьма странным или даже более того, противоречивым. Наиболее известным из иллюстрирующих эту трудность мысленных

экспериментов, как было отмечено выше, является эксперимент, первоначально сформулированный Шрёдингером в 1935 г. [162] и известный под названием парадокса шрёдингеровской «кошки» или парадокса «кота» Шрёдингера [173],[174]. В оригинальной формулировке самого Шрёдингера этот мысленный эксперимент выглядит следующим образом. Кошка помещается внутрь закрытого ящика, снабженного устройством, которое при приведении его в действие, кошку убивает.

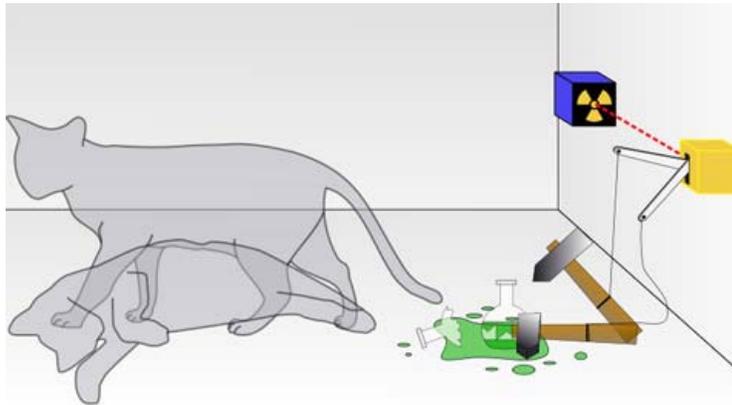


Рис. 1. Мысленный эксперимент с кошкой Шрёдингера.

Спусковой механизм представляет собой счётчик Гейгера-Мюллера — газоразрядный прибор для автоматического подсчёта числа попавших в него ионизирующих частиц. Представляет собой газонаполненный конденсатор, который пробивается при пролёте ионизирующей частицы через объём газа, срабатывающий при распаде радиоактивных ядер Рис. 1. (этот счётчик обладает

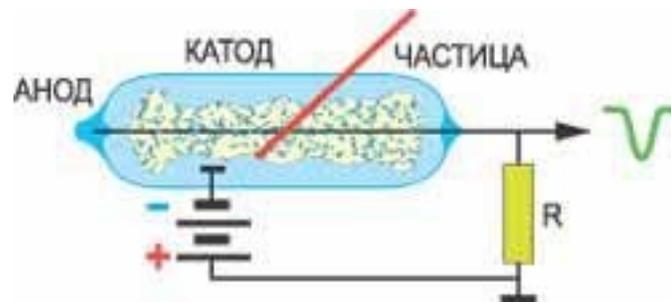


Рис. 2. Счётчик Гейгера-газонаполненный счётчик заряженных элементарных частиц, электрический сигнал с которого усилен за счёт вторичной ионизации газового объёма счётчика.

практически стопроцентной вероятностью регистрации заряженной частицы, так

как для возникновения разряда достаточно одной электрон-ионной пары). С точки зрения квантовой механики здесь возможны два состояния: $|A\rangle$ - α -частица находится в ядре, кошка жива; $|B\rangle$ - α -частица находится вне ядра, кошка мертвая. Пусть теперь время полураспада ядер равно одному часу, тогда по истечении этого срока корректное квантовомеханическое описание (подчеркнем, что общепринятая точка зрения состоит в том, что КМ описание следует применять не к индивидуальным системам даже на макроскопическом уровне, а только к ансамблям одинаково приготовленных систем и таким образом если мы говорим о кошке, то подразумеваем ансамбль одинаковым образом приготовленных кошек) гласит, что состояние, в котором находятся ядра, не является с абсолютной достоверностью ни распавшимся состоянием, ни нераспавшимся состоянием, а представляет собой их линейную суперпозицию:

$$c_1|A\rangle + c_2|B\rangle, |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad (\text{VI.4})$$

$$c_1 \neq 0, c_2 \neq 0.$$

Принципиальная особенность формализма квантовой механики состоит в том, что, насколько бы сложна ни была описываемая ею система, эта теория линейна, т. е. если исходное состояние $\Psi_1 = \Psi_1(0)$ приводит к конечному состоянию $\Psi_1(T)$, а другое исходное состояние $\Psi_2 = \Psi_2(0)$ приводит к конечному состоянию $\Psi_2(T)$, то суперпозиция состояний $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 = c_1\Psi_1(0) + c_2\Psi_2(0)$ приводит к точно такой же суперпозиции конечных состояний $c_1\Psi_1(T) + c_2\Psi_2(T)$. При этом, никакое изменение особенностей рассматриваемого взаимодействия не может изменить этого имеющего глубокие корни фундаментального свойства КМ. Таким образом, если начальное состояние ядра $|A\rangle$ индуцировало конечное состояние кошки $\Psi_1(T)$, а начальное состояние ядра $|B\rangle$ индуцировало конечное состояние кошки $\Psi_2(T)$, то из линейности формализма КМ, математически строго следует, что в случае исходного состояния ядра, описываемого формулой (VI.4), конечное состояние кошки в момент времени T записывается в виде линейной суперпозиции

$$\Phi(T) = c_1\Psi_1(T) + c_2\Psi_2(T). \quad (\text{VI.5})$$

Таким образом, кошка не находится в каком то одном макроскопическом состоянии, а описывается линейной суперпозицией макроскопически различных и более того, взаимно исключающих друг друга состояний! Следовательно, по крайней мере на первый взгляд, нельзя вполне определенно сказать применяя законы КМ, жива кошка или нет. Однако совершенно очевидно, что в результате наблюдения мы всегда придем либо к одному, либо к другому результату, третьего просто не дано !

Этим мысленным экспериментом, Шрёдингер хотел показать, что КМ

является существенно неполной без некоторых специальных правил, которые совершенно однозначно указывают при каких условиях к заданному моменту времени T , происходит либо не происходит коллапс волновой функции кошки и кошка умирает либо все еще остается живой. Шрёдингер полагал, что КМ является неполной и не до конца описывает физическую реальность.

Статья Шрёдингера [162] вышла в немецком журнале *Naturwissenschaften* и главной ее целью, было обсуждение парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена [163], опубликованного ранее в том же году. В такой же неприятной ситуации, как и шрёдингеровская «кошка», находится и само атомное ядро. Ясно что согласно нашей двузчной логике, оно должно быть либо распавшимся либо не распавшимся, а третьего просто не дано. Соответственно не очень ясно, как быть, если ядро представляет суперпозицию, заданную формулой (VI.4). Напомним, что после распада ядра на частицы α и β , эти частицы представляют собой квантовую суперпозицию различных запутанных состояний, различающихся импульсами частиц, что вносит неопределенность в предсказание места их регистрации.

1.2. Парадокс измерения.

Проблема шрёдингеровской «кошки» это очень частный случай проблемы описания коллапса волновой функции—центральной нерешенной проблемы теории КМ измерений. Напомним, что каноническая теория КМ измерений [58],[164] опирается на два основных постулата:

(I) первым постулатом канонической теории КМ измерений является уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(\mathbf{x}, t)$:

$$i\hbar\partial\Psi(\mathbf{x},t)/\partial t = \hat{\mathbf{H}}\Psi(\mathbf{x},t), \Psi(\mathbf{x},t_0) = \Psi_0(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.6})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_d), \hbar \simeq 0.$$

Замечание 1. Мы будем в дальнейшем вместо канонического уравнения (VI.6) обычно использовать более общее уравнение Коломбеау-Шредингера (127) для обобщенной волновой функции $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t))_\varepsilon$:

$$(i\hbar_\varepsilon \partial \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t) / \partial t)_\varepsilon = \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \right)_\varepsilon, (\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t_0))_\varepsilon = (\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}))_\varepsilon, \quad (\text{VI.7})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), (\hbar_\varepsilon)_\varepsilon \approx 0,$$

где в том специальном случае, когда начальное состояние $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}))_\varepsilon$ представляет собой пакет локализованный в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, мы полагаем:

$$\begin{aligned} (\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}))_\varepsilon &= (\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon = \\ &= \left(\frac{\mu(\mathbf{x}_0)}{\sqrt[4d]{2\pi\eta_\varepsilon}} \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \exp \left[\frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}{2\eta_\varepsilon} \right] \right)_\varepsilon = \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt[4d]{2\pi\eta_\varepsilon})^d} \exp \left[\frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle}{2\eta_\varepsilon} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar_\varepsilon} S(\mathbf{x}) \right] \right)_\varepsilon, \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

где

$$(\eta_\varepsilon)_\varepsilon \approx 0 \text{ и } \left(\frac{\hbar_\varepsilon}{\eta_\varepsilon} \right)_\varepsilon \approx 0,$$

Или более общее уравнение Колумбеау-Шредингера для плотности амплитуды перехода $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$:

$$(i\hbar_\varepsilon \partial \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) / \partial t)_\varepsilon = \left(\widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0), \right)_\varepsilon, \quad (\text{VI.9})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d),$$

где в том специальном случае, когда начальное состояние $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}))_\varepsilon$ представляет собой локализованный пакет, мы полагаем:

$$\left(|\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t_0, \mathbf{x}_0, t_0)|^2 \right)_\varepsilon \simeq (\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))_\varepsilon, \quad (\text{VI.10})$$

$$[(\delta_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))_\varepsilon] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Замечание 2. Условие (VI.10) очевидно предполагает, что начальное состояние не обязано быть Гауссовским.

Замечание 3. Как хорошо известно (L e g g e t t, 1984), при вполне разумных физических предположениях, Шредингеровская «кошка» описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{x}, t)$ зависящей только от макроскопических координат $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_d\}$ и которая удовлетворяет уравнению Шредингера, где значения векторного параметра $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ однозначно различают макроскопические состояния живой и мертвой кошки :

если $\varrho_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \varrho_2$, то «кошка» живая,

если $\|\mathbf{x}\|_\infty < \varrho_1 \ll 1$, то «кошка» мертвая,

где $\|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$. Таким образом начальное состояние Шредингеровской «кошки» $\Psi(\mathbf{x}, t_0)$, как состояние макроскопического объекта, всегда представляет собой хорошо локализованный пакет вида (VI.8), как в случае живой «кошки» так и в случае мертвой «кошки». Шредингеровская «кошка» это существенно квазиклассическая система и ее макроскопическая эволюция между состояниями жизни и смерти, может быть однозначно прослежена по ее предельной квантовой траектории $\mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$:

$$\mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar). \quad (\text{VI.11})$$

Здесь $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar)$ -квантовой траектория, удовлетворяющая начальному условию $\mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) = \mathbf{x}_0$ и которая определяется формулой (VI.1). Таким образом мы имеем следующий однозначный критерий живой «кошки» и мертвой «кошки»:

если $\forall t(t \in [0, T]) \{ \mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in G(\varrho_1, \varrho_2) \}$, то «кошка» живая
в момент времени T ,

(VI.12)

если $\forall t(t \in [0, T]) \{ \mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \in G(\varrho_1) \}$, то «кошка» мертвая
в момент времени T ,

где $G(\varrho_1, \varrho_2) = \{ \mathbf{x} | \varrho_1 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \varrho_2 \}$ и $G(\varrho_1) = \{ \mathbf{x} | \|\mathbf{x}\|_\infty < \varrho_1 \}$ и где $\varrho_1 \ll 1$. Ясно что,

линейная суперпозиция макроскопических состояний живой и мертвой «кошки» $\Phi(T)$, заданная равенством (VI.5), в силу критерия (VI.12) наблюдается только:

- (1) как физически живая «кошка» или
- (2) как физически мертвая «кошка».

В общем случае, для определения предельной квантовой траектории, нужно воспользоваться формулой (VI.3). Тогда критерий живой «кошки» и мертвой «кошки» имеет следующий вид:

$$\text{если } \forall t(t \in [0, T]) \left\{ [(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon] \in \widehat{G}(\varrho_1, \varrho_2) \right\}, \text{ то «кошка» живая} \\ \text{в момент времени } T, \quad (\text{VI.13})$$

$$\text{если } \forall t(t \in [0, T]) \left\{ [(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon] \in \widehat{G}(\varrho_1) \right\}, \text{ то «кошка» мертвая} \\ \text{в момент времени } T.$$

$$\text{Здесь: (i) } \|[(\mathbf{x}_\varepsilon)_\varepsilon]\|_\infty \triangleq \left[\left(\max_{1 \leq i \leq p} |x_{\varepsilon,i}| \right)_\varepsilon \right],$$

$$\text{(ii) } \widehat{G}(\varrho_1, \varrho_2) = \left\{ [(\mathbf{x}_\varepsilon)_\varepsilon] \in \widehat{\mathbb{R}} \mid \varrho_1 \leq \|[(\mathbf{x}_\varepsilon)_\varepsilon]\|_\infty \leq \varrho_2 \right\}; \varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R},$$

$$\text{(iii) } G(\varrho_1) = \{ \mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\|_\infty < \varrho_1 \} \text{ и где } \varrho_1 \ll 1.$$

(II) второй постулат канонической теории КМ измерений утверждает, что классическая условная плотность вероятности $\rho(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)$ обнаружить КМ систему (или КМ частицу) в момент времени $t > t_0$ в заданной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ фазового пространства при условии, что в момент времени t_0 она находилась в заданной точке фазового пространства $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, задается формулой:

$$\rho(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = \Psi^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) = (|\Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|^2) \quad (\text{VI.14})$$

и удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d^d x = \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|^2 d^d x = 1.$$

Соответственно обобщенная условная плотность вероятности $(\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ есть элемент алгебры Коломбеау $G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, который задается формулой

$$(\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = (\Psi_\varepsilon^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = (|\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|^2)_\varepsilon, \quad (\text{VI.15})$$

и удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon \right] = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|^2 d^d x \right)_\varepsilon \right] = 1. \quad (\text{VI.16})$$

Как хорошо известно, эти постулаты несовместимы [179]. Проблема состоит в том, что уже в простейшем случае, регистрация одной частицы, предполагает редукцию или коллапс ее волновой функции $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t))_\varepsilon$, при котором условная плотность вероятности $(\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ приближается к дельта-функции, т.е.

$$\rho(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) = |\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)|^2 \simeq \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)), \quad (\text{VI.17})$$

либо соответственно в более общем случае

$$(\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = (|\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)|^2)_\varepsilon \simeq \delta(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)), \quad (\text{VI.18})$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ -результат КМ измерения.

Замечание 4. В дальнейшем, мы иногда полагаем $t_0 = 0$ и в этом случае, будем писать для краткости $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0))_\varepsilon$ либо $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ вместо $(\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, 0))_\varepsilon$.

Редукция волнового пакета, как хорошо известно, это процесс необратимый во времени [173],[174] и следовательно энтропия в процессе КМ измерений всегда возрастает, но с другой стороны согласно теореме фон Неймана [164] это невозможно, поскольку уравнение Шредингера обратимо во времени. Далее согласно известной теореме Вигнера [165] интегральная мера начальных отклонений в КМ системах это константа, которая не зависит от времени, что и является прямым признаком обратимости. Таким образом редукция волнового пакета не может быть описана в рамках уравнения Шредингера, даже если в гамильтониан включить всю систему вместе с измерительным прибором. Эта проблема известна как "парадокс измерения".

Определение 1. Квантовая траектория $\{(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon\}_{i=1}^d$, $\{(x_{\varepsilon,i}(0, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon\}_{i=1}^d = \mathbf{x}_0$, КМ системы описываемой уравнением (VI.9), определяется формулой, которая в силу условия (VI.16)) имеет следующий вид

$$(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)|^2 d^d x \right)_\varepsilon. \quad (\text{VI.19})$$

Равенство (VI.19) в силу условия (VI.15) эквивалентно следующей формуле

$$(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon. \quad (\text{VI.20})$$

Очевидно, что в том случае, когда выполнено соотношение

$$(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon \simeq (\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon, \quad (\text{VI.21})$$

где $(\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon$ - соответствующая квантовая траектория, то редукция волновой функции может быть описана в хорошем приближении в рамках уравнения Шредингера (VI.9) посредством формулы

$$(\rho_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon = (|\Psi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)|^2)_\varepsilon \simeq (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, t_0)))_\varepsilon, \quad (\text{VI.22})$$

Пусть имеется линейная суперпозиция $(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_\varepsilon$ решений Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.9)

$$(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = c_1(\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + c_2(\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon \quad (\text{VI.23})$$

Тогда

$$\begin{aligned} (|\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2)_\varepsilon &= (\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)\Phi_\varepsilon^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \\ &= ([c_1\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) + c_2\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)])_\varepsilon \times \\ &\times ([c_1^*\Psi_{\varepsilon,1}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) + c_2^*\Psi_{\varepsilon,2}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)])_\varepsilon = \end{aligned} \quad (\text{VI.24})$$

$$\begin{aligned} |c_1|^2 (|\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2)_\varepsilon + c_1^*c_2 (\Psi_{\varepsilon,1}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + \\ |c_2|^2 (|\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2)_\varepsilon + c_1c_2^* (\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)\Psi_{\varepsilon,2}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon \end{aligned}$$

и соответственно предельная квантовая траектория линейной суперпозиции $(\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ имеет следующий вид

$$(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0))_\varepsilon = (\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \quad (\text{VI.25})$$

$$\{(x_{\varepsilon,1}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon, \dots, (x_{\varepsilon,d}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon\},$$

где

$$\begin{aligned}
(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon = \\
&= |c_1|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon + \\
&\quad |c_2|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon + \\
&\quad + c_1^* c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi_{\varepsilon,1}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) d^d x \right)_\varepsilon + \\
&\quad + c_1 c_2^* \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \Psi_{\varepsilon,2}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) d^d x \right)_\varepsilon
\end{aligned} \tag{VI.26}$$

Определение 2. Дефектом предельной квантовой траектории $(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ называется $\|\cdot\|_\infty$ - норма вектора $(\Delta_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$:

$$(\Delta_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \{(\delta_{\varepsilon,1}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon, \dots, (\delta_{\varepsilon,d}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon\}, \tag{VI.27}$$

где

$$\begin{aligned}
& (\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = (\delta[x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)])_\varepsilon = \\
& = c_1^* c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi_{\varepsilon,1}^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) d^d x \right)_\varepsilon + \\
& + c_1 c_2^* \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \Psi_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \Psi_2^*(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) d^d x \right)_\varepsilon
\end{aligned} \tag{VI.28}$$

Справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned}
& (|\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|)_\varepsilon = (|\delta[x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)]|)_\varepsilon \leq \\
& \leq |c_1 c_2| \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)| \times |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)| d^d x \right)_\varepsilon + \\
& + |c_1 c_2| \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)| \times |\Psi_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)| d^d x \right)_\varepsilon = \\
& = \\
& = 2|c_1 c_2| \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)| \times |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)| d^d x \right)_\varepsilon \leq \\
& 2|c_1 c_2| \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_\varepsilon \times \\
& \times \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{VI.29}$$

Подставив теперь уравнение (VI.28) в уравнение (VI.26) мы получим

$$\begin{aligned}
(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon = \\
&= |c_1|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon + \\
&+ |c_2|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon + (\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{VI.30}$$

откуда учитывая (VI.19) мы имеем окончательно

$$\begin{aligned}
(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon = \\
&= |c_1|^2 (x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + (\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \\
&(1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + (\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{VI.31}$$

где мы ввели следующие обозначения

$$\begin{aligned}
(x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon, \\
(x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{VI.32}$$

С учетом равенств (VI.32) неравенства (VI.29) примут следующий вид

$$\begin{aligned}
(|\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|)_\varepsilon &= (|\delta[x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)]|)_\varepsilon \leq \\
&\leq 2|c_1 c_2| \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_\varepsilon \times \\
&\times \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Psi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_\varepsilon = \\
&2|c_1 c_2| \left(\sqrt{x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)} \sqrt{x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)} \right)_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{VI.33}$$

Подставив неравенство (VI.33) в равенство (VI.31) мы получаем следующее неравенство

$$\begin{aligned}
(x_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i |\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)|^2 d^d x \right)_\varepsilon = \\
(1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &+ |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + (\delta_{\varepsilon,i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon \leq \\
(1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &+ |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon + \\
+ 2(1 - |c_2|^2) |c_2| \left(\sqrt{x_{\varepsilon,i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon)} \sqrt{x_{\varepsilon,i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)} \right)_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{VI.34}$$

Пусть теперь:

- (i) $(\mathbf{x}_\varepsilon^{(1)}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = (\mathbf{x}_\varepsilon^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ - предельная квантовая траектория чистого КМ-состояния живой «кошки»;
- (ii) $(\mathbf{x}_\varepsilon^{(2)}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = (\mathbf{x}_\varepsilon^{(2)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ - предельная квантовая траектория чистого КМ-состояния мертвой «кошки»;
- (iii) $(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0))_\varepsilon$ - предельная квантовая траектория смешанного

КМ-состояния «кошки», являющегося линейной суперпозицией чистого КМ-состояния живой «кошки» и чистого КМ-состояния мертвой «кошки», которая задана формулой (VI.5).

Пусть счетчик Гейгера срабатывает под воздействием ядра, состояние которого имеет вид (VI.4), тогда в силу критерия (VI.13), мы имеем следующий однозначный критерий либо живой «кошки» либо мертвой «кошки»:

(i) в случае чистого КМ-состояния однозначно живой в момент времени T «кошки»:

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\mathbf{x}_\varepsilon^{(1)}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\varrho_1, \varrho_2) \right\},$$

что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\varrho_1 \leq \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \left\| \mathbf{x}_\varepsilon^{(1)}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \right\|_\infty \right\} \right)_\varepsilon \leq \rho_2; \quad (\text{VI. 35})$$

(ii) в случае чистого КМ-состояния однозначно мертвой в момент времени T «кошки»: $\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\mathbf{x}_\varepsilon^{(2)}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\varrho_1) \right\}$, что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \left\| \mathbf{x}_\varepsilon^{(2)}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \right\| \right\} \right)_\varepsilon = \rho_1^\# < \rho_1; \quad (\text{VI. 36})$$

(iii) в случае смешанного КМ-состояния однозначно живой в момент времени T «кошки», являющегося линейной суперпозицией чистого КМ-состояния живой «кошки» и чистого КМ-состояния мертвой «кошки», которая задана формулой (VI.5):

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0; \hbar_\varepsilon) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\varrho_1, \varrho_2) \right\}$$

$$\left(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0) \right)_\varepsilon = \left(\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0; \hbar_\varepsilon) \right)_\varepsilon,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\varrho_1 \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0)\|_\infty \} \right)_\varepsilon \leq \rho_2; \quad (\text{VI.37})$$

(iv) в случае смешанного КМ-состояния однозначно мертвой в момент времени T «кошки», являющегося линейной суперпозицией чистого КМ-состояния живой «кошки» и чистого КМ-состояния мертвой «кошки», которая задана формулой (VI.5),

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ (\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon \in \widehat{G}(\varrho_1, \varrho_2) \right\} \quad (\text{VI.38})$$

$$(\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0))_\varepsilon = (\mathbf{x}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \{ \|\mathbf{x}_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0)\|_\infty \} \right)_\varepsilon = \rho_1^\# < \rho_1. \quad (\text{VI.39})$$

В силу неравенства (VI.34) и неравенств (VI.35)-(VI.36) мы имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{t \in [0, T]} \{ x_{\varepsilon, i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) \} \right)_\varepsilon \leq \\ & \leq (1 - |c_2|^2) \left(\sup_{t \in [0, T]} \{ x_{\varepsilon, i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \} \right)_\varepsilon + |c_2|^2 \left(\sup_{t \in [0, T]} \{ x_{\varepsilon, i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) \} \right)_\varepsilon + \\ & + 2(1 - |c_2|^2) |c_2| \left(\sqrt{\sup_{t \in [0, T]} \{ x_{\varepsilon, i}^{(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \}} \sqrt{\sup_{t \in [0, T]} \{ x_{\varepsilon, i}^{(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon) \}} \right)_\varepsilon \leq \\ & \leq (1 - |c_2|^2) \rho_2 + |c_2|^2 \rho_1^\# + 2(1 - |c_2|^2) |c_2| \sqrt{\rho_1^\# \rho_2}. \end{aligned} \quad (\text{VI.40})$$

В силу неравенства (VI.40) окончательно получаем

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \{x_{\varepsilon, i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)\} \right)_\varepsilon \leq \leq (1 - |c_2|^2)\rho_2 + |c_2|^2\rho_1^\# + 2(1 - |c_2|^2)|c_2|\sqrt{\rho_1^\#\rho_2}. \quad (\text{VI.41})$$

Таким образом, если состояние мертвой «кошки» $\Psi_2(T)$ входит в линейную суперпозиция макроскопических состояний живой и мертвой «кошки» $\Phi(T)$, заданную равенством (VI.5), с весом $c_2 \in \mathbb{C}, |c_2| \simeq 1$, то $1 - |c_2|^2 \simeq 0$, тогда неравенство (VI.41) примет вид

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \{x_{\varepsilon, i}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon)\} \right)_\varepsilon \leq \leq (1 - |c_2|^2)\rho_2 + |c_2|^2\rho_1^\# + 2(1 - |c_2|^2)|c_2|\sqrt{\rho_1^\#\rho_2} < \rho_1 \quad (\text{VI.42})$$

и в силу критерия (VI.13) такая смесь будет наблюдаться как макроскопическое состояние однозначно мертвой «кошки».

1.3. Постулаты обобщенной теории КМ измерений. Слабые решения уравнения Коломбеау-Шредингера. Определение обобщенной квантовой траектории соответствующей слабому решению уравнения Коломбеау-Шредингера.

Определение 2. (I) Пусть $[(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d)$ и пусть $[(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$. Обобщенная функция Коломбеау $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t))_\varepsilon$, удовлетворяющая равенству $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t_0))_\varepsilon = (\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}))_\varepsilon$, называется *слабым решением* Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.7) в пространстве обобщенных функций Коломбеау $G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, если выполняются следующие условия:

(i) в алгебре обобщенных чисел Коломбеау $\widehat{\mathbb{R}}$ для любого $t \in [t_0, T)$ справедливо следующее тождество

$$\left(ih_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} [\partial \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t) / \partial t] d^d x - \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t) d^d x \right)_\varepsilon \approx 0, \quad (\text{VI.43})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d),$$

$$[(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon] = 0;$$

(ii) существует вещественная бобщенная функция Коломбеау $[(S_\varepsilon(\mathbf{x}))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d)$ такая что

$$(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t))_\varepsilon \Big|_{t=t_0} = (\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t_0))_\varepsilon = \{(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon\} \exp \left[i \left(\frac{S_\varepsilon(\mathbf{x})}{\hbar_\varepsilon} \right)_\varepsilon \right], \quad (\text{VI.44})$$

где бобщенная функция Коломбеау $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon$ задана формулой (VI.8);

(iii) бобщенная функция $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t_0))_\varepsilon$ удовлетворяет следующему тождеству

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t_0) d^d x \right)_\varepsilon \approx 0, \quad (\text{VI.45})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), [(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon] = 0,$$

где $\cdot \approx \cdot$ - отношение слабой эквивалентности в алгебре обобщенных чисел Коломбеау $\widehat{\mathbb{R}}$.

(II) Пусть $[(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Обобщенная функция Коломбеау $[(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ называется *слабым решением* Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.9) в пространстве бобщенных функций Коломбеау $G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, если выполняются следующие условия:

(i) для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо следующее тождество:

$$\left(i\hbar_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} [\partial \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) / \partial t] d^d x - \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon \approx 0, \quad (\text{VI.46})$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), [(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon] = 0;$$

(ii) существует вещественная бобщенная функция Коломбеау $[(S_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon] \in G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ такая что

$$\begin{aligned} (\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon \Big|_{t=t_0} &= (\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = \\ &= \{(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon\} \exp \left[i \left(\frac{S_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\hbar_\varepsilon} \right)_\varepsilon \right], \end{aligned} \quad (\text{VI.47})$$

где бобщенная функция Коломбеау $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0))_\varepsilon$ задана формулой (VI.10);

(iii) бобщенная функция $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ удовлетворяет следующему тождеству

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathbf{H}}_\varepsilon \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon \approx 0, \quad (\text{VI.48})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), [(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon] = 0,$$

где $\cdot \approx \cdot$ - отношение слабой эквивалентности в алгебре обобщенных чисел Коломбеау $\widehat{\mathbb{R}}$.

Постулаты обобщенной теории КМ измерений:

(I) Первым постулатом является уравнение Коломбеау-Шредингера (VI.46) для обобщенной волновой функции $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t))_\varepsilon$.

(II) Второй постулат утверждает, что обобщенная условная плотность вероятности $(\tilde{\rho}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ обнаружить КМ систему (или КМ частицу) в момент времени $t > t_0$ в заданной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ фазового пространства при условии, что в

момент времени t_0 она находилась в заданной точке фазового пространства $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, задается формулой

$$\begin{aligned}
 (\rho_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon &= (\mathbf{I}_\varepsilon^2(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) (\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))^* \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon = \\
 &= \left(\left(\widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \right)^* \widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \right)_\varepsilon = \\
 &= \left(\mathbf{I}_\varepsilon^2(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) |\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0)|^2 \right)_\varepsilon = \left(\left| \widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) \right|^2 \right)_\varepsilon, \tag{VI.49}
 \end{aligned}$$

$$\widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{I}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) \Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0),$$

$$\mathbf{I}_\varepsilon^{-1}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar)|^2 d^d x},$$

где обобщенная амплитуда $(\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ есть слабое решение Коломбеау уравнения (VI.7) либо уравнения (VI.9), а обобщенная условная плотность вероятности $(\rho_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ удовлетворяет следующему условию нормировки

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\rho}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon \right] = \\
 &\left[\left(\mathbf{I}_\varepsilon^{-2}(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) \int_{\mathbb{R}^d} |\Psi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)|^2 d^d x \right)_\varepsilon \right] = \tag{VI.50} \\
 &= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \right|^2 d^d x \right)_\varepsilon \right] = 1.
 \end{aligned}$$

Теперь мы переходим к определению обобщенной квантовой траектории.

Определение 2. Предположим, что уравнение Коломбеау-Шредингера (VI.9) имеет слабое решение Коломбеау в смысле определения 1(II). Тогда квантовая траектория $(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon = \{(x_{\varepsilon,1}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon, \dots, (x_{\varepsilon,d}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon\}$, $[(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t_0, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon] = \mathbf{x}_0$ КМ системы описываемой уравнением (VI.45), определяется следующей формулой

$$(x_{\varepsilon,i}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_{\varepsilon,i} \left| \widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar) \right|^2 d^d x \right)_\varepsilon, \quad (\text{VI.51})$$

Соответствующая предельная квантовая траектория $[(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon]$, где $[(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t_0, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon] = \mathbf{x}_0$ определяется следующей формулой

$$(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \{(x_{\varepsilon,1}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon, \dots, (x_{\varepsilon,d}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon\}. \quad (\text{VI.52})$$

Формула (VI.52) в силу условия (VI.50) принимает следующий вид

$$(x_{\varepsilon,i}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_{\varepsilon,i} \widetilde{\rho}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) d^d x \right)_\varepsilon. \quad (\text{VI.53})$$

Очевидно, что в том случае, когда выполнено соотношение

$$(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon \simeq (\mathbf{x}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon, \quad (\text{VI.54})$$

где $(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar))_\varepsilon$ квантовая траектория, а $(\mathbf{x}^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0))_\varepsilon$ - соответствующая ей предельная квантовая траектория (VI.52), то редукция волновой функции, во многих важных случаях, может быть описана в хорошем приближении в рамках уравнения Коломбеау-Шредингера в форме (VI.46) посредством формулы

$$(\widetilde{\rho}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, t_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \left(\left| \widetilde{\Psi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_\varepsilon) \right|^2 \right)_\varepsilon \simeq (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, t_0)))_\varepsilon, \quad (\text{VI.55})$$

В силу Теоремы 15.3.2, как легко показать, равенство (VI.51) выполняется для широкого класса потенциалов взаимодействия если выполнено условие (I) либо условие (II) сформулированные в определении 1.

Замечание 3. Пусть имеется суперпозиция $(\Phi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon$ слабых решений Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.9):

$$(\Phi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_\varepsilon = c_1(\Psi_{\varepsilon,1}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar))_\varepsilon + c_2(\Psi_{\varepsilon,2}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar))_\varepsilon. \quad (\text{VI.56})$$

Пусть

$$\left(\tilde{\Phi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon = c_1\left(\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)\right)_\varepsilon + c_2\left(\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon. \quad (\text{VI.57})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\left|\tilde{\Phi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)\right|^2\right)_\varepsilon &= \left(\tilde{\Phi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)\left[\left(\tilde{\Phi}_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon\right]^*\right)_\varepsilon = \\ &= \left(\left[c_1\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) + c_2\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right]\right)_\varepsilon \times \\ &\quad \times \left(c_1^*\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) + c_2^*\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon = \end{aligned} \quad (\text{VI.58})$$

$$\begin{aligned} &= |c_1|^2\left(\left|\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)\right|^2\right)_\varepsilon + c_1^*c_2\left(\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon + \\ &\quad + |c_2|^2\left(\left|\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right|^2\right)_\varepsilon + c_1c_2^*\left(\tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar)\tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar)\right)_\varepsilon. \end{aligned}$$

и соответственно квантовая траектория $(x_{i,\varepsilon}^\#(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_\varepsilon, i = 1, 2, \dots, d$ суперпозиции $(\Phi_\varepsilon^\#(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_\varepsilon$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar) &= \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Phi}_{\varepsilon}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar) \right|^2 d^d x = \\
&= |c_1|^2 \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \right|^2 d^d x + |c_2|^2 \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) \right|^2 d^d x + \\
&\quad + c_1^* c_2 \int_{\mathbb{R}^d} x_i \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) d^d x + \\
&\quad + c_1 c_2^* \int_{\mathbb{R}^d} x_i \widetilde{\Psi}_{1,\varepsilon}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \widetilde{\Psi}_{2,\varepsilon}^{\#\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) d^d x
\end{aligned} \tag{VI.59}$$

Определение 3. Дефектом квантовой траектории $x_i^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar), i = 1, 2, \dots, d$ называется норма вектора $(\Delta_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_{\varepsilon}$:

$$(\Delta_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_{\varepsilon} = \{(\delta_{\varepsilon,1}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_{\varepsilon}, \dots, (\delta_{\varepsilon,d}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_{\varepsilon}\}, \tag{VI.60}$$

где

$$\begin{aligned}
(\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar))_{\varepsilon} &= (\delta[x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)])_{\varepsilon} = \\
&= c_1^* c_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) d^d x \right)_{\varepsilon} + \\
&\quad + c_1 c_2^* \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#\#*}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) d^d x \right)_{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{VI.61}$$

Справедливо следующее неравенство

$$\begin{aligned}
& (|\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)|)_{\varepsilon} = (|\delta[x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar)]|)_{\varepsilon} \leq \\
& \leq |c_1 c_2| \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \right| \times \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) \right| d^d x + \\
& + |c_1 c_2| \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \right| \times \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) \right| d^d x = \\
& = 2|c_1 c_2| \int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \right| \times \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) \right| d^d x \leq \tag{VI.62} \\
& \leq 2|c_1 c_2| \left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar) \right|^2 d^d x \right]^{1/2} \times \\
& \times \left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar) \right|^2 d^d x \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Подставив теперь уравнение (VI.61) в уравнение (VI.59) мы получим

$$\begin{aligned}
& (x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Phi}_{\varepsilon}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon} = \\
& = |c_1|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon} + \tag{VI.63} \\
& + |c_2|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon} + (\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} =
\end{aligned}$$

откуда учитывая (VI.51) мы имеем окончательно

$$\begin{aligned}
 (x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \tilde{\Phi}_{\varepsilon}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon} = \\
 &= |c_1|^2 (x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + (\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})) = \\
 &(1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + (\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})),
 \end{aligned} \tag{VI.64}$$

где мы использовали следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 (x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \tilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon}, \\
 (x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \tilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon}.
 \end{aligned} \tag{VI.65}$$

С учетом равенств (VI.65) неравенства (VI.62) примут следующий вид

$$\begin{aligned}
& (|\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})|)_{\varepsilon} = (|\delta[x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})]|)_{\varepsilon} \leq \\
& \leq 2|c_1 c_2| \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,1}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_{\varepsilon} \times \\
& \times \left(\left[\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Psi}_{\varepsilon,2}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right]^{1/2} \right)_{\varepsilon} = \\
& 2|c_1 c_2| \left(\sqrt{x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon})} \sqrt{x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})} \right)_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{VI.66}$$

Подставив неравенство (VI.66) в равенство (VI.64) мы получим следующее неравенство

$$\begin{aligned}
& (x_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} x_i \left| \widetilde{\Phi}_{\varepsilon}^{\#}(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right|^2 d^d x \right)_{\varepsilon} = \\
& (1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + (\delta_{\varepsilon,i}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} \leq \\
& (1 - |c_2|^2) (x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + |c_2|^2 (x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} + \\
& + 2|(1 - |c_2|^2)c_2| \left(\sqrt{x_{\varepsilon,i}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon})} \sqrt{x_{\varepsilon,i}^{\#(2)}(t, \mathbf{y}_0; \hbar_{\varepsilon})} \right)_{\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{VI.67}$$

Пусть теперь:

(i) $(\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_{\varepsilon} = (\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$ - предельная квантовая траектория не распавшегося атомного ядра;

(ii) $(\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#(2)}(t, \mathbf{x}_0, t_0))_{\varepsilon} = (\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#(2)}(t, \mathbf{x}_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$ - предельная квантовая траектория вылетевшей из распавшегося атомного ядра α -частицы;

(iii) $(\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0))_{\varepsilon}$ - предельная квантовая траектория состояния ядра

которое есть суперпозиция чистых состояний, заданная формулой (VI.4).

Замечание 4. В дальнейшем с целью формальных упрощений, мы будем рассматривать процесс распада атомного ядра в одномерной геометрии.

Пусть L - расстояние от источника излучения до счетчика Гейгера. Пусть счетчик Гейгера срабатывает под воздействием ядра, состояние которого имеет вид (VI.4),

Таким образом мы имеем следующий однозначный критерий срабатывания-не срабатывания счетчика Гейгера:

(i) в случае однозначно не распавшегося к моменту времени T атомного ядра: т.е. счетчик Гейгера не сработал к моменту времени T , что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} [x_{\varepsilon}^{\#(1)}(t, \mathbf{x}_0, t_0)] \right)_{\varepsilon} < L \quad (\text{VI. 68})$$

(ii) в случае однозначно распавшегося к моменту времени T атомного ядра: т.е. счетчик Гейгера сработал к моменту времени T , под воздействием вылетевшей из распавшегося атомного ядра α -частицы, что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} [x_{\varepsilon}^{\#(2)}(t, \mathbf{x}_0, t_0)] \right)_{\varepsilon} \geq L \quad (\text{VI. 69})$$

(iii) в случае состояния ядра которое есть суперпозиция состояний, заданная формулой (VI.4), когда счетчик Гейгера не сработал к моменту времени T под воздействием суперпозиции (VI.4), что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} [x_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0)] \right)_{\varepsilon} < L \quad (\text{VI. 70})$$

(iv) в случае состояния ядра которое есть суперпозиция состояний, заданная формулой (VI.4), когда счетчик Гейгера сработал к моменту времени T под воздействием суперпозиции (VI.4), что эквивалентно следующему неравенству

$$\left(\sup_{t \leq t_{cr}} [x_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0)] \right)_{\varepsilon} \geq L. \quad (\text{VI.71})$$

Таким для того чтобы получить явный количественный критерий срабатывания- несрабатывания счетчика Гейгера при воздействии на него ядра находящегося в состоянии суперпозиции заданной формулой (VI.1), нам необходимо вычислить предельную квантовую траекторию $(\mathbf{x}_{\varepsilon}^{\#}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0))_{\varepsilon}$.

1.4. Волновая функция макроскопических координат. Квантовая траектория Шрёдингеровской «кошки».

Мы не будем подробно обсуждать здесь все экзотические и неэкзотические «разрешения» парадокса Шрёдингеровской «кошки», которые появлялись в литературе после основополагающей публикации Шрёдингера [162]. Мы только перечислим наиболее известные из них: (i) это так называемая интерпретация «относительных состояний» или «многомировая интерпретация» (Everett, 1957); (ii) «психологическое» решение (Wigner, 1963), согласно которому человеческое сознание оказывает физическое воздействие на наблюдаемую систему; (iii) «статистическая» интерпретация (Ballentine, 1970), смысл которой состоит в том, что даже на макроскопическом уровне квантовая механика вообще не должна применяться к индивидуальным системам, а только к ансамблю одинаково приготовленных систем (так, что физика просто не дает никакой информации, информации, даже в принципе, о состоянии одного отдельно взятого счетчика или какой-то конкретной кошки), (iv) «Копенгагенская» интерпретация, содержание которой, по крайней мере в некоторых ее версиях (Bohr, 1963; Heisenberg, 1958), состоит просто в рецепте, предписывающем макроскопическую систему описывать на языке классической механики и целиком отрицающем проблематичность такого утверждения, (v) Вылет α -частицы — туннельный процесс, который в квантовой механике описывается суперпозицией состояний $|A\rangle$ и $|B\rangle$, что опять же подразумевает ненулевую вероятность нахождения частицы внутри и вне ядра. Получается, что в одно и то же время частица в ядре и кот жив и частица вне ядра и кот мертв. Одновременное пребывание кота в двух исключаящих друг друга макроскопических состояниях, очевидно противоречиво и мы опять получаем парадокс. Кадомцев (Кадомцев 1997) объясняет разрешение парадокса Шредингера следующим образом. Регистрация пролета α -частицы представляет собой необратимый процесс, сопровождающийся разрушением (коллапсом) суперпозиции, и уж только вслед за этим может сработать автомат по разбиванию ампулы. Суперпозиция этого состояния с неслучившимся процессом регистрации частицы просто невозможна. Другими словами, измерение

(регистрация α -частиц) разрушает суперпозицию. (vi) Американский физик Арт Хобсон (Art Hobson 2013) из университета Арканзаса (Arkansas State University) предложил своё решение данного парадокса. Хобсон говорит, что в парадоксе Шрёдингера кот играет роль макроскопического прибора, счётчика Гейгера, подсоединённого к радиоактивному ядру, для определения состояния распада или "нераспада" этого ядра. В таком случае, живой кот будет индикатором "нераспада", а мёртвый кот — показателем распада. Но согласно квантовой теории, кот, так же как и ядро, должен пребывать в двух суперпозициях жизни и смерти. Вместо этого, по словам физика, квантовое состояние кота должно быть запутанным с состоянием атома, что означает что они пребывают в "нелокальной связи" друг с другом. То есть, если состояние одного из запутанных объектов внезапно сменится на противоположное, то состояние его пары точно также поменяется, на каком бы расстоянии друг от друга они ни находились. При этом Хобсон ссылается на экспериментальные подтверждения этой квантовой теории. "Самое интересное в теории квантовой запутанности — это то, что смена состояния обеих частиц происходит мгновенно: никакой свет или электромагнитный сигнал не успел бы передать информацию от одной системы к другой. Таким образом, можно сказать, что это один объект, разделённый на две части пространством, и неважно, как велико расстояние между ними", — поясняет Хобсон. Кот Шрёдингера больше не живой и мёртвый одновременно. Он мёртв, если произойдёт распад, и жив, если распад так и не случится [177].

(vii) В литературе обсуждается еще один чрезвычайно популярный способ аргументации, которому часто приписывается способность разрешить указанный парадокс [178]. Это т.н. «ортодоксальное» решение парадокса Шрёдингерской «кошки». Аргументы, о которых идет речь, в общих чертах таковы: согласимся с тем, что технически правильное описание конечного состояния «кошки» действительно дается формулой (VI.2), т. е. представляет собой линейную суперпозицию макроскопически различных состояний. Однако об этом не следует беспокоиться, так как никаким отдельным реальным экспериментом никогда нельзя отличить состояний, описываемых формулой (VI.2), от классической «смеси» состояний $\Psi_1(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$, т. е. от такого описания, при котором, например, кошка «действительно» либо жива, либо нет, и при котором мы просто не знаем, в каком именно из состояний она находится, и, следовательно, вынуждены применять вероятностное описание [178]. Интересуясь лишь различием в изменениях макроскопической и микроскопической переменных, легко показать, что макроскопическая переменная при подходящих условиях может быть описана своей собственной волновой функцией и своим собственным уравнением Шрёдингера, т.е. если X обозначает макроскопическую координату, а x -совокупность микроскопических переменных, то собственные функции системы, отвечающие заданному

значению энергии, содержат функции вида [178]:

$$\Phi(X, \mathbf{Y}, x, t) = \Psi(X, \mathbf{Y}, t)\psi(\mathbf{x}, t), \quad (\text{VI. 72})$$

где $\Psi(X, \mathbf{Y}, t)$ - «макроскопическая волновая функция», т. е. волновая функция макроскопических координат $X, \mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(X, \mathbf{Y}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi(X, \mathbf{Y}, t) + V(X, \mathbf{Y})\Psi(X, \mathbf{Y}, t), \quad (\text{VI. 73})$$

и где переменная X однозначно соответствует либо живой либо мертвой «кошке», $V(X, \mathbf{Y})$ -консервативный потенциал. В дальнейшем, с целью упрощений, мы будем предполагать что «макроскопическая волновая функция» зависит только от одной переменной X . В качестве переменной X однозначно различающей макроскопические состояния живой и мертвой «кошки», можно выбрать температуру «кошки» $X = \Theta$, если речь идет о настоящей живой кошке.

Квантовая траектория «кошки», находящейся в квантовой суперпозиции состояний живой и мертвой «кошки» (VI.5), имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}; \hbar) &= \int_0^\infty \Theta \Phi(v, t, \Theta_0^{(1)}, \Theta v_0^{(2)}; \hbar) dv = \\ &= c_1 \Theta_1(t, \Theta_0^{(1)}; \hbar) + c_2 \Theta_2(t, \Theta_0^{(2)}; \hbar) + \delta(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}; \hbar) = \\ &= c_1 \int_0^\infty \Theta \Psi_1(\Theta, t, \Theta_0^{(1)}; \hbar) d\Theta + c_2 \int_0^\infty \Theta \Psi_2(\Theta, t, \Theta_0^{(2)}; \hbar) d\Theta + \\ &\quad + \delta(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}; \hbar) \\ &= \sqrt{1 - c_2} \int_0^\infty \Theta \Psi_1(\Theta, t, \Theta_0^{(1)}; \hbar) dv + c_2 \int_0^\infty \Theta \Psi_2(\Theta, t, \Theta_0^{(2)}; \hbar) d\Theta + \\ &\quad \delta(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}; \hbar), \end{aligned} \quad (\text{VI. 74})$$

где $\Theta_1(t, \Theta_0^{(1)}; \hbar)$ -квантовая траектория живой кошки, $\Theta_2(t, \Theta_0^{(2)}; \hbar)$ -квантовая траектория мертвой кошки, $\Theta(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}; \hbar)$ -квантовая траектория суперпозиции (VI.1) живой кошки и мертвой кошки, $\Theta_0^{(1)}$ - начальная температура тела живой кошки, $\Theta_0^{(2)}$ - начальная температура тела мертвой кошки.

Пусть счетчик Гейгера срабатывает под воздействием ядра, состояние

которого имеет вид (VI.4), тогда в силу общего критерия (VI.13), мы имеем в рассматриваемом случае, следующий однозначный критерий либо живой либо мертвой кошки:

(i) в случае чистого КМ-состояния однозначно живой в момент времени T кошки:

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\Theta_\varepsilon^{(1)}(t, \Theta_0^{(1)}, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\theta_1, \theta_2) \right\}, \quad (\text{VI. 75})$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\theta_1 \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} \left[\Theta_\varepsilon^{(1)}(t, \Theta_0^{(1)}, t_0) \right] \right)_\varepsilon \leq \theta_2; \quad (\text{VI. 76})$$

(ii) в случае чистого КМ-состояния однозначно мертвой кошки

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\Theta_\varepsilon^{(2)}(t, \Theta_0, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\theta_1) \right\}, \quad (\text{VI. 77})$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \left[\Theta_\varepsilon^{(2)}(t, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right] \right)_\varepsilon < \theta_1; \quad (\text{VI. 78})$$

(iii) в случае смешанного КМ-состояния однозначно живой кошки, являющегося линейной суперпозицией чистого КМ-состояния живой кошки и чистого КМ-состояния мертвой кошки, которая задана формулой (VI.5):

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\theta_1, \theta_2) \right\}, \quad (\text{VI. 79})$$

$$\left(\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right)_\varepsilon = \left(\Theta_\varepsilon(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0; \hbar_\varepsilon) \right)_\varepsilon,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\theta_1 \leq \left(\sup_{t \in [0, T]} \left[\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right] \right)_\varepsilon \leq \theta_2; \quad (\text{VI.80})$$

(iv) в случае смешанного КМ-состояния однозначно живой кошки, являющегося линейной суперпозицией чистого КМ-состояния живой кошки и чистого КМ-состояния мертвой кошки, которая задана формулой (VI.5):

$$\forall t(t \in [0, T]) \left\{ \left(\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right)_\varepsilon \in \widehat{G}(\theta_1, \theta_2) \right\}, \quad (\text{VI.81})$$

$$\left(\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right)_\varepsilon = \left(\Theta_\varepsilon(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0; \hbar_\varepsilon) \right)_\varepsilon,$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \left[\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right] \right)_\varepsilon \leq \theta_1^\# < \theta_1. \quad (\text{VI.82})$$

Неравенство (VI.42) в рассматриваемом частном случае, примет следующий вид

$$\left(\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right)_\varepsilon \leq \quad (\text{VI.83})$$

$$\leq (1 - |c_2|^2)\rho_2 + |c_2|^2\rho_1^\# + 2(1 - |c_2|^2)|c_2|\sqrt{\rho_1^\#\rho_2}.$$

Таким образом, если состояние мертвой «кошки» $\Psi_2(T)$ входит в линейную суперпозиция макроскопических состояний живой и мертвой «кошки» $\Phi(T)$, заданную равенством (VI.5), с весом $c_2 \in \mathbb{C}, |c_2| \simeq 1$, то $1 - |c_2|^2 \simeq 0$, тогда неравенство (VI.83) примет следующий вид

$$\left(\sup_{t \in [0, T]} \left[\Theta_\varepsilon^{\text{Lim}}(t, \Theta_0^{(1)}, \Theta_0^{(2)}, t_0) \right] \right)_\varepsilon \leq \quad (\text{VI. 84})$$

$$\leq (1 - |c_2|^2)\rho_2 + |c_2|^2\rho_1^\# + 2(1 - |c_2|^2)|c_2|\sqrt{\rho_1^\#\rho_2} < \rho_1$$

и в силу критерия (VI.13) такая смесь будет наблюдаться как макроскопическое состояние однозначно мертвой «кошки».

Наиболее полным, микроскопическим описанием квантовых систем является описание посредством обобщенного статистического оператора $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon = (\rho_\varepsilon(t))_\varepsilon$, удовлетворяющего следующему уравнению движения [180]:

$$i \left(\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} \right)_\varepsilon = ([\mathbf{H}_\varepsilon \rho_\varepsilon])_\varepsilon, (\rho_\varepsilon(0))_\varepsilon = \rho_0, \quad (\text{VI. 85})$$

где $(\mathbf{H}_\varepsilon)_\varepsilon$ -вторично квантованный Гамильтониан системы. Уравнение (VI.85) позволяет решить на принципиальном уровне основную проблему макроскопической физики, которая заключается в определении среднего значения произвольной физической величины a , т.е. если этой величине соответствует оператор \hat{a} , то ее среднее значение $(a_\varepsilon(t))_\varepsilon$ определено согласно формуле

$$(a_\varepsilon(t))_\varepsilon = (\mathbf{Sp}(\rho_\varepsilon(t)\hat{a}))_\varepsilon. \quad (\text{VI. 86})$$

В то же самое время как указано в работе [178], существуют достаточно простые системы с макроскопической переменной динамика которой описывается уравнением Шрёдингера (VI.). Простейшей из таких систем, является сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским переходом. такое кольцо представляет собой активный элемент радиочастотной сверхпроводящей аппаратуры, использующей явление квантовой интерференции (superconducting quantum interference device -SQUID) -СКВИД-кольцо. В этом случае оказывается, что подходящей макроскопической переменной является пронизывающий кольцо магнитный поток Φ , удовлетворяющий уравнению Шрёдингера (VI), в котором масса M заменена на емкость C джозефсоновского перехода, а потенциал $V(\Phi)$ имеет вид, приведенный на рис. 3.

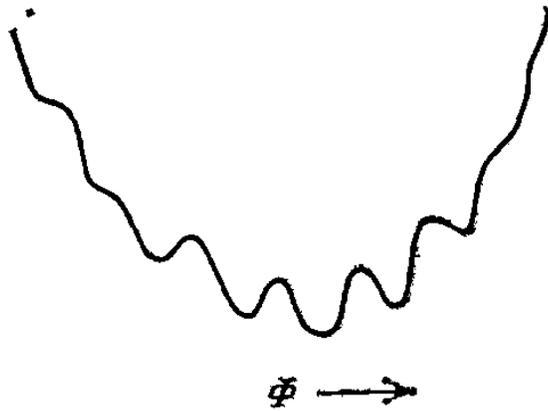


Рис. 3. Потенциальная энергия $V(\Phi)$ СКВИД-кольца как функция полного магнитного потока, пронизывающего его.

2. Применение метода обобщенных квантовых траекторий к решению парадокса кошки Шредингера.

2.1. Метод обобщенных квантовых траекторий в задаче распада атомного ядра.

Как было установлено нами ранее (см. 1.3) для того чтобы получить явный количественный критерий срабатывания-несрабатывания счетчика Гейгера при воздействии на него ядра находящегося в состоянии суперпозиции (VI.1), необходимо вычислить предельную квантовую траекторию $(\mathbf{x}_\varepsilon^\#(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t_0))_\varepsilon$ ядра находящегося в состоянии представляющем собой суперпозицию (VI.4). Очевидно, что для этого нам необходимо выбрать вполне определенную модель радиоактивного распада. Мы будем пользоваться простой моделью радиоактивного распада, предложенной в классической работе [181].

Подчеркнем, что каноническое непрерывное решение уравнения Шредингера (VI.6), в рассматриваемом нами случае, описывает распад радиоактивного атомного ядра и приводит к известному сферически симметричному решению для $\Psi(r)$ -функции вылетающей из ядра α -частицы [181]-[182].

Замечание. По существующим, прочно укоренившимся представлениям, коллапс Ψ -функции α -частицы происходит только в результате взаимодействия α -частицы с измерительным прибором. Так например если радиоактивное ядро находится в объеме заполненном газом, то уравнение Шредингера (VI.6) записанное для соответствующим образом расширенной системы, описывает рассеяние атомов газа на α -частице и их ионизацию. В результате процесса ионизации, происходит коллапс волновых функций атомов газа, который сопровождается коллапсом волновой функции α -частицы, т.е. из сферически

симметричной она превращается в свободно летящий локализованный пакет, сопровождаемый треком ионизированных атомов газа, см. например [183].

Однако такой механизм коллапса волновой функции α -частицы носит достаточно надуманный характер и фактически является дополнительным априорным предположением, поскольку, как было указано выше (см.1.2), коллапс волновой не может быть описан в рамках уравнения Шредингера, даже если в гамильтониан включить всю систему включая атомы газа, которые в данном случае являются измерительным прибором.

В дальнейшем мы откажемся от каких либо вышеуказанных предположений и для описания коллапса будем пользоваться постулатами обобщенной теории КМ измерений (см.1.3). Как будет показано ниже (см.2.3) стационарное уравнение Коломбеау-Шредингера

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mathbf{H}} \Psi_\varepsilon(\mathbf{x}) d^d x \right)_\varepsilon \approx 0, \quad (\text{VI.87})$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d),$$

(соответствующее нестационарному уравнению (VI.9)) в случае простых потенциалов взаимодействия, которые применяются в классической теории α -распада [181], имеет локализованные стационарные слабые решения Коломбеау в пространстве обобщенных функций Коломбеау $G(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ (см.Определение 2). В частности при $d = 1$ существуют слабые решения Коломбеау следующего вида

$$\begin{aligned} (\Psi(x, \eta_\varepsilon))_\varepsilon &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \Psi_\varepsilon(x) \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] \right)_\varepsilon = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar_\varepsilon} S(x)\right] \right)_\varepsilon, \\ &\left(\frac{\hbar_\varepsilon}{\eta_\varepsilon} \right)_\varepsilon \approx 0, \end{aligned} \quad (\text{VI.88})$$

где l -ширина потенциального барьера

2.2. Каноническая теория туннелирования α -частицы сквозь потенциальный барьер.

Простейшая модель α -распада была предложена Гамовым в 1930 году в работе [181]. Для того чтобы рассмотреть процесс вылета α -частицы из атомного ядра окруженного некоторым потенциальным барьером, необходимо задать конкретную форму этого барьера. Как и в [181] мы возьмем одномерную модель и разобьем числовую ось на три непересекающихся множества:

$\mathbf{I} = \{x|x < 0\}$, $\mathbf{II} = \{x|0 \leq x \leq l\}$ и $\mathbf{III} = \{x|x > l\}$. Простейший потенциал в этом случае имеет следующий вид (см.Рис.4) [183],[184]:

$$U(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x < 0 \\ U_0, \text{ при } 0 \leq x \leq l \\ 0, \text{ при } x > l \end{cases} \quad (\text{VI.89})$$

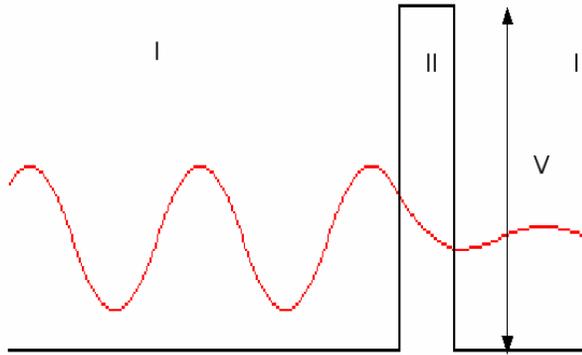


Рис. 4.

Следовательно α -распад описывается уравнением Коломбеау-Шредингера следующего вида:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi_\varepsilon(t,x)}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar_\varepsilon} \frac{\partial \psi_\varepsilon(t,x)}{\partial t} + \frac{2m}{\hbar_\varepsilon^2} U(x) \psi_\varepsilon(t,x) \right)_\varepsilon = 0 \quad (\text{VI.90})$$

Положим теперь

$$(\psi_\varepsilon(t,x))_\varepsilon = \left(\Psi_\varepsilon(x) \exp\left(\frac{2\pi i}{\hbar_\varepsilon} Et\right) \right)_\varepsilon, \quad (\text{VI.91})$$

где E произвольная постоянная, задающая энергию системы. Тогда для стационарной волновой функции $(\Psi_\varepsilon(x))_\varepsilon$ получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar_\varepsilon^2} [E - U(x)] \Psi_\varepsilon(x) \right)_\varepsilon = 0, \quad (\text{VI.92})$$

где $E \ll U_0$. Пусть имеется движущаяся частица, на пути которой встречается потенциальный барьер высотой $U_0 \gg E$ (Рис. 4). Пусть также начало барьера совпадает с началом координат, а его «ширина» равна l . Решения Коломбеау

уравнения (VI.92) в областях I (до прохождения потенциального барьера), II (во время прохождения внутри потенциального барьера) и III (после прохождения потенциального барьера) будут иметь соответственно следующий вид [181]-[184]:

$$\begin{aligned}(\Psi_{\varepsilon, \text{I}}(x))_{\varepsilon} &= (C_{\varepsilon,+} \exp(ik_{\varepsilon}x))_{\varepsilon} + (C_{\varepsilon,-} \exp(-ik_{\varepsilon}x))_{\varepsilon} \\(\Psi_{\varepsilon, \text{II}}(x))_{\varepsilon} &= (B_{\varepsilon,+} \exp(k'_{\varepsilon}x))_{\varepsilon} + (B_{\varepsilon,-} \exp(-k'_{\varepsilon}x))_{\varepsilon}\end{aligned}\tag{VI.93}$$

$$(\Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x))_{\varepsilon} = (A_{\varepsilon} \exp(ik_{\varepsilon}x))_{\varepsilon},$$

где

$$(k_{\varepsilon})_{\varepsilon} = \frac{2\pi}{(\hbar_{\varepsilon})_{\varepsilon}} \sqrt{2mE},\tag{VI.94}$$

$$(k'_{\varepsilon})_{\varepsilon} = \frac{2\pi}{(\hbar_{\varepsilon})_{\varepsilon}} \sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

Пусть на границах потенциального барьера $x = 0$ и $x = l$ выполняются стандартные условия непрерывности решения $(\Psi_{\varepsilon}(x))_{\varepsilon}$ и его первой производной. Из условий непрерывности следуют хорошо известные соотношения [181],[184]:

$$\begin{aligned}(C_{\varepsilon,+})_{\varepsilon} &= (A_{\varepsilon}[\mathbf{ch}(k'_{\varepsilon}l) + iD_{\varepsilon}\mathbf{sh}(k'_{\varepsilon}l)])_{\varepsilon}, (C_{\varepsilon,-})_{\varepsilon} = i(A_{\varepsilon}S_{\varepsilon}\mathbf{sh}(k'_{\varepsilon}l) \exp(ik_{\varepsilon}l))_{\varepsilon}, \\(D_{\varepsilon})_{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{k_{\varepsilon}}{k'} - \frac{k'}{k} \right) \right)_{\varepsilon}, (S_{\varepsilon})_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{k_{\varepsilon}}{k'} + \frac{k'}{k} \right) \right)_{\varepsilon},\end{aligned}\tag{VI.95}$$

из которых немедленно вытекает закон сохранения потока α -частиц

$$(|A_{\varepsilon}|^2)_{\varepsilon} = (|C_{\varepsilon,+}|^2)_{\varepsilon} - (|C_{\varepsilon,-}|^2)_{\varepsilon}.\tag{VI.96}$$

Коэффициент прозрачности χ для рассмотренного барьера (χ - отношение квадратов амплитуд прошедшей и падающей волны), дается хорошо известной формулой [181],[184]:

$$(\chi_\varepsilon)_\varepsilon = \frac{(|A_\varepsilon|^2)_\varepsilon}{(|C_{\varepsilon,+}|^2)_\varepsilon} = \frac{1}{(\mathbf{ch}^2(k'_\varepsilon l) + D_\varepsilon^2 \mathbf{ch}^2(k'_\varepsilon l))_\varepsilon}. \quad (\text{VI.97})$$

Примечание 4. В дальнейшем мы будем предполагать, что для всех $\varepsilon \in (0, 1]$ справедливо следующее неравенство

$$k'_\varepsilon l \gg 1. \quad (\text{VI.98})$$

Подчеркнем, что неравенство (VI.98) играет важную техническую роль. В то же время, условие $k'_\varepsilon l \gg 1$ всегда выполняется для потенциальных барьеров, встречающихся при α -распаде [181]. В случае $k'_\varepsilon l \gg 1$, мы имеем для коэффициента прозрачности потенциального барьера простое выражение:

$$(\chi_\varepsilon)_\varepsilon = \frac{4}{(1 + (D_\varepsilon^2)_\varepsilon)} \exp\left[-\frac{l}{(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon} \left(4\pi \sqrt{2m(U_0 - E)}\right)\right]. \quad (\text{VI.99})$$

Замечание 5. Подчеркнем что коэффициент $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ не фиксируется граничными условиями.

В случае более общего потенциального барьера (Рис. 5) для расчета α -распада как туннельного эффекта, обычно применяется ВКБ-приближение [184], либо метод канонического оператора [4].

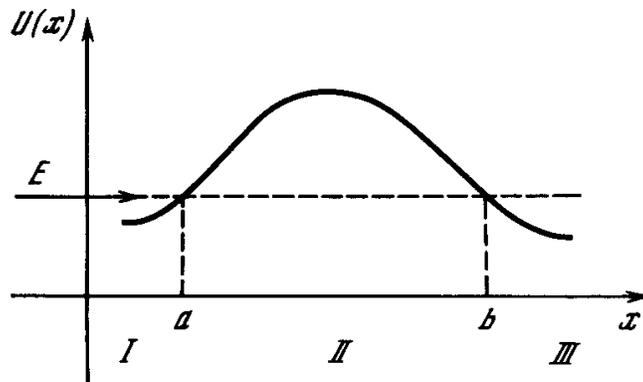


Рис. 5.

Если выполнено условие квазиклассичности

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\hbar_\varepsilon}{\sqrt{2m(E - U(x))}} \ll 1, \quad (\text{VI. 100})$$

то слева от точки $x = a$ (см. Рис. 5) имеем два линейно независимых ВКБ-решения

$$\begin{aligned} (\Psi_{\varepsilon, \text{I}}(x))_\varepsilon &= \left(\frac{2C_\varepsilon}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar_\varepsilon} \int_x^a p(u) du - \frac{\pi}{4} \right) \right)_\varepsilon, \\ (\Psi'_{\varepsilon, \text{I}}(x))_\varepsilon &= \left(\frac{C'_\varepsilon}{\sqrt{p}} \cos \left(\frac{1}{\hbar_\varepsilon} \int_x^a p(u) du + \frac{\pi}{4} \right) \right)_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{VI. 101})$$

Справа от точки $x = a$ (см. Рис. 5) имеем два линейно независимых ВКБ-решения

$$\begin{aligned} (\Psi_{\varepsilon, \text{II}}(x))_\varepsilon &= \left(\frac{C_\varepsilon}{\sqrt{|p|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar_\varepsilon} \int_a^x p(u) du \right) \right)_\varepsilon, \\ (\Psi'_{\varepsilon, \text{II}}(x))_\varepsilon &= \left(\frac{C'_\varepsilon}{\sqrt{|p|}} \exp \left(\frac{1}{\hbar_\varepsilon} \int_a^x p(u) du \right) \right)_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{VI. 102})$$

Слева от точки $x = b$ (см. Рис. 5) имеем два линейно независимых ВКБ-решения

$$\Psi_{\text{II}}(x) = \frac{D}{\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^b p(u) du\right),$$

(VI.103)

$$\Psi'_{\text{II}}(x) = \frac{D'}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b p(u) du\right).$$

Справа от точки $x = b$ (см. Рис. 5) имеем два линейно независимых ВКБ-решения

$$\Psi_{\text{III}}(x) = \frac{2D}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du - \frac{\pi}{4}\right),$$

(VI.104)

$$\Psi'_{\text{III}}(x) = \frac{D'}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du + \frac{\pi}{4}\right).$$

В формулах (VI.101)-(VI.104) $p(x) = \sqrt{2m(E - U(x))}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что α -частица движется в положительном направлении оси x . Линейная суперпозиция функций вида (VI.48) представляет распространяющуюся в положительном направлении оси x волну только если выполнено равенство

$$D' = -2iD. \tag{VI.105}$$

В силу равенства (VI.105) справа от точки $x = b$ решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{III}}(x) &= \frac{2D}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du - \frac{\pi}{4}\right) - \\
&\quad - \frac{2iD}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du + \frac{\pi}{4}\right) = \\
&\quad \frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) + \frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{|p|}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) - \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}iD}{\sqrt{|p|}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) + \frac{\sqrt{2}iD}{\sqrt{|p|}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) = \quad (\text{VI. 106}) \\
&\quad \frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) - \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}iD}{\sqrt{|p|}} \left\{ \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) - \frac{1}{i} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right) \right\} = \\
&\quad = \frac{(1-i)\sqrt{2}D}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_b^x p(u) du\right).
\end{aligned}$$

А слева от точки $x = b$ решение имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\Phi_{\varepsilon, \text{II}}(x))_{\varepsilon} = \\
&= \frac{(D_{\varepsilon})_{\varepsilon}}{\sqrt{|p|}} \left\{ \left(\exp\left(-\frac{1}{\hbar_{\varepsilon}} \int_x^b p(u) du\right) + \frac{2}{i} \exp\left(\frac{1}{\hbar_{\varepsilon}} \int_x^b p(u) du\right) \right) \right\}_{\varepsilon}. \quad (\text{VI. 107})
\end{aligned}$$

Константы $(C_\varepsilon)_\varepsilon$ и $(C'_\varepsilon)_\varepsilon$ в силу граничных условий, выражаются через константу $(D_\varepsilon)_\varepsilon$ следующим образом

$$(C_\varepsilon)_\varepsilon = -2i(D_\varepsilon \exp(S_{\varepsilon,0}))_\varepsilon,$$

$$(C'_\varepsilon)_\varepsilon = \exp(-S_{\varepsilon,0}),$$

(VI.108)

$$(S_{\varepsilon,0})_\varepsilon = (\hbar_\varepsilon^{-1})_\varepsilon \int_a^b p(u) du.$$

2.3. Модифицированная теория туннелирования α -частицы сквозь потенциальный барьер. Случай кусочно постоянного потенциала.

В данном параграфе мы приведем модифицированную теорию туннелирования α -частицы сквозь потенциальный барьер в случае простейшего потенциала (VI.89). Введем для удобства следующие обобщенные функции:

$$(\Psi_{\varepsilon, I}(x))_\varepsilon = \begin{cases} (C_{\varepsilon,+} \exp(ik_\varepsilon x))_\varepsilon + (C_{\varepsilon,-} \exp(-ik_\varepsilon x))_\varepsilon, & \text{при } x < 0 \\ 0, & \text{при } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{VI.109})$$

$$(\Psi_{\varepsilon, II}(x))_\varepsilon = \begin{cases} (B_{\varepsilon,+} \exp(k'_\varepsilon x))_\varepsilon + (B_{\varepsilon,-} \exp(-k'_\varepsilon x))_\varepsilon, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ 0, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus [0, l] \end{cases} \quad (\text{VI.110})$$

$$(\Psi_{\varepsilon, III}(x))_\varepsilon = \begin{cases} (A_\varepsilon \exp(ik_\varepsilon x))_\varepsilon, & \text{при } x > l \\ 0, & \text{при } x \leq l \end{cases} \quad (\text{VI.111})$$

где

$$(k_\varepsilon)_\varepsilon = \frac{2\pi}{(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon} \sqrt{2mE},$$

$$(k'_\varepsilon)_\varepsilon = \frac{2\pi}{(\hbar_\varepsilon)_\varepsilon} \sqrt{2m(U_0 - E)}.$$

Теорема 1. Слабое решение Коломбеау стационарного уравнения Коломбеау- Шредингера (VI.87) для случая потенциала (VI.89) имеет следующий вид:

$$(\Psi_\varepsilon^\#(x))_\varepsilon = (\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_\varepsilon + (\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_\varepsilon, \quad (\text{VI.112})$$

где

(i) стационарная волновая функция α -частицы не вылетевшей из ядра $(\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_\varepsilon$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_\varepsilon = (\Psi_{\varepsilon,(\text{I}+\text{II})}^\#(x))_\varepsilon = (\phi_\varepsilon(x)[\Psi_{\varepsilon,\text{I}}(x) + \Psi_{\varepsilon,\text{II}}(x)])_\varepsilon, \quad (\text{VI.113})$$

(ii) стационарная волновая функция α -частицы вылетевшей из ядра $(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_\varepsilon$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_\varepsilon = (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^\#(x))_\varepsilon = (\phi_\varepsilon(x)\Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x))_\varepsilon \quad (\text{VI.114})$$

и где обобщенная функция $(\phi_\varepsilon(x))_\varepsilon \in G(\mathbb{R}_+)$ задана следующей формулой

$$(\phi_\varepsilon(x))_\varepsilon = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon} \right] \right)_\varepsilon, \quad (\text{VI.115})$$

$$\left(\frac{\hbar_\varepsilon}{\eta_\varepsilon} \right)_\varepsilon \approx 0.$$

Замечание 6 Константа $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ в отличие классической теории, приведенной в параграфе 2.2, теперь не является свободным параметром, а фиксируется условием нормировки

$$\left(\int_{l-\delta}^{+\infty} |\Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)|^2 dx \right)_\varepsilon = 1.$$

где $\delta \ll b$. Очевидно, что в данном случае $(A_\varepsilon)_\varepsilon = 1$.

Доказательство. Утверждение теоремы проверяется прямым вычислением. Мы приведем подробное вычисление только для утверждения (ii). Стационарное уравнение Коломбеау-Шредингера (VI.87) в рассматриваемом случае имеет следующий вид

$$\left(\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial^2 \Psi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx + 2Em \int_l^\infty \Psi_\varepsilon(x) dx \right)_\varepsilon = 0. \quad (\text{VI.116})$$

Подставив в левую часть уравнения (VI.116) обобщенную функцию $(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_\varepsilon = (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^\#(x))_\varepsilon = (\phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x))_\varepsilon$ заданную формулой (VI.114), с учетом тождества

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [\phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)]}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} + \phi_\varepsilon(x) \frac{\partial \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x} \right] = \\ &= 2 \frac{\partial \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} + \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} + \phi_\varepsilon(x) \frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (\text{VI.117})$$

мы получим следующее выражение

$$\begin{aligned} &\left(\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x^2} dx + 2Em \int_l^\infty \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) dx \right)_\varepsilon = \\ &\left(2\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx + \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx \right)_\varepsilon + \\ &+ \left(\int_l^\infty \phi_\varepsilon(x) \left\{ \hbar_\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x^2} + 2Em \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) \right\} dx \right)_\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{VI.118})$$

В силу тождества

$$\left(\int_l^\infty \phi_\varepsilon(x) \left\{ \hbar_\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)}{\partial x^2} + 2Em \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x) \right\} dx \right)_\varepsilon = 0 \quad (\text{VI.119})$$

равенство (VI.118) примет следующий вид

$$\begin{aligned}
& \left(\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x^2} dx + 2Em \int_l^\infty \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x) dx \right)_\varepsilon = \\
& = \left(2\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx + \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx \right)_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{VI.120}$$

В силу формулы (VI.115) мы получим следующие выражения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x} \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] = \\
&= -\frac{1}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} (x-l) \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right], \\
\frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] + \\
&+ \frac{1}{\eta_\varepsilon^2 \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} (x-l)^2 \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right].
\end{aligned} \tag{VI.121}$$

В силу формул (VI.111) и (VI.121) мы имеем

$$\begin{aligned}
& \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx = \\
& - \frac{\hbar_\varepsilon^2}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \frac{\partial \exp(ik_\varepsilon x)}{\partial x} (x-l) \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx = \\
& - \frac{2\pi \sqrt{2mE} \hbar_\varepsilon}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \exp\left(i \frac{2\pi \sqrt{2mE}}{\hbar_\varepsilon} x\right) \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx, \\
& k_\varepsilon = \frac{2\pi}{\hbar_\varepsilon} \sqrt{2mE}
\end{aligned} \tag{VI.122}$$

и

$$\begin{aligned}
& \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \Psi_{\text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx = \\
& - \frac{A\mu(l)\hbar_\varepsilon^2}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \exp(ik_\varepsilon x) \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx + \\
& + \frac{A\mu(l)\hbar_\varepsilon^2}{\eta_\varepsilon^2 \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \exp(ik_\varepsilon x) (x-l)^2 \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx.
\end{aligned} \tag{VI.123}$$

В силу формул (VI.122) и (VI.123) мы имеем следующие оценки

$$\left| \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx \right| \leq \frac{2\pi \sqrt{2mE} \hbar_\varepsilon}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx \tag{VI.124}$$

и

$$\begin{aligned}
 & \left| \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \Psi_{\text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx \right| \leq \\
 & \leq \frac{\hbar_\varepsilon^2}{\eta_\varepsilon \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx + \\
 & + \frac{\hbar_\varepsilon^2}{\eta_\varepsilon^2 \sqrt[4]{2\pi\eta_\varepsilon}} \int_l^\infty (x-l)^2 \exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] dx.
 \end{aligned} \tag{VI.125}$$

В силу формул (VI.124) и (VI.125) мы имеем очевидным образом следующие оценки

$$\begin{aligned}
 & \left(\hbar_\varepsilon^2 \left| \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx \right| \right)_\varepsilon \approx 0, \\
 & \left(\hbar_\varepsilon^2 \left| \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx \right| \right)_\varepsilon \approx 0.
 \end{aligned} \tag{VI.126}$$

В силу оценок (VI.126) и тождества (VI.120) мы имеем следующую оценку

$$\begin{aligned}
 & \left(\left| \hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x^2} dx + 2Em \int_l^\infty \phi_\varepsilon(x) \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x) dx \right| \right)_\varepsilon \leq \\
 & \leq \left(\left| 2\hbar_\varepsilon^2 \int_l^\infty \frac{\partial \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_\varepsilon(x)}{\partial x} dx \right| + \hbar_\varepsilon^2 \left| \int_l^\infty \Psi_{\varepsilon, \text{III}}(x) \frac{\partial^2 \phi_\varepsilon(x)}{\partial x^2} dx \right| \right)_\varepsilon \approx 0,
 \end{aligned} \tag{VI.127}$$

что и завершает доказательство теоремы.

В силу теоремы 1, стационарная волновая функция α -частицы, находящейся

в состоянии являющемся линейной суперпозицией состояний $\Psi_{\text{int.}}(x)$ и $\Psi_{\text{ext.}}(x)$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon}^{\#}(x))_{\varepsilon} = c_1(\Psi_{\varepsilon,\text{II}}^{\#}(x))_{\varepsilon} + c_2(\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^{\#}(x))_{\varepsilon}. \quad (\text{VI. 128})$$

В случае простого кусочно-линейного потенциала (VI.89) квантовую траекторию суперпозиции (VI.4) можно вычислить непосредственно, используя явный вид соответствующего Фейнмановского пропагатора [46],[186]. Фейнмановский пропагатор α -частицы вылетевшей из распавшегося ядра $(\Psi_2(x, t, x_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$, очевидно совпадает с пропагатором свободной α -частицы [46],[186]:

$$\left(\Psi_2(x, t, \tilde{x}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right)_{\varepsilon} = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar_{\varepsilon} t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} \right] \right\}. \quad (\text{VI. 129})$$

Слабое решение Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.90) для обобщенной волновой функции $(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x, t, x_0 = l; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$ α -частицы вылетевшей из распавшегося ядра, в силу уравнений (VI.114) и (VI.129) имеет следующий вид

$$\begin{aligned} (\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x, t, x_0 = l; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} &= (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^{\#}(x, t, x_0 = l; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon} = \\ &\left(\left(\frac{m}{2\pi i \hbar_{\varepsilon} t} \right)^{1/2} \times \int_l^{\infty} \exp \left[-\frac{(\tilde{x}_0 - x_0)^2}{2\eta_{\varepsilon}} \right] \exp \left(i \frac{2\pi}{\hbar_{\varepsilon}} \sqrt{2mE} \tilde{x}_0 \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} \right] \right\} d\tilde{x}_0 \right)_{\varepsilon} = \quad (\text{VI. 130}) \\ &\left(\left(\frac{m}{2\pi i \hbar_{\varepsilon} t} \right)^{1/2} \times \int_l^{\infty} \exp \left[-\frac{(\tilde{x}_0 - x_0)^2}{\eta_{\varepsilon}} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} + 2\pi \sqrt{2mE} \tilde{x}_0 \right] \right\} d\tilde{x}_0 \right)_{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Стационарная точка мнимой экспоненты в интеграле в правой части формулы (VI.130) определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial S(x, \tilde{x}_0)}{\partial \tilde{x}_0} = 0, S(x, \tilde{x}_0) = \frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} + \pi\sqrt{2mE} \tilde{x}_0, \quad (\text{VI. 131})$$

откуда мы получаем

$$-\frac{m(x - \tilde{x}_0)}{t} + \pi\sqrt{2mE} = 0, \quad (\text{VI. 132})$$

$$-(x - \tilde{x}_0) + 2\pi t\sqrt{\frac{2E}{m}} = 0.$$

В результате мы очевидно имеем

$$\tilde{x}_0(t, x) = -2\pi t\sqrt{\frac{2E}{m}} + x. \quad (\text{VI. 133})$$

Применив к интегралу в правой части формулы (VI.130) метод стационарной фазы, с учетом (VI.133) мы окончательно получим

$$\begin{aligned} & (\Psi_{\varepsilon, \text{ext.}}(x, t, x_0 = l; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \\ & \left(\exp\left[-\frac{(\tilde{x}_0(t, x) - x_0)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar_\varepsilon} S(x, \tilde{x}_0(t, x))\right\} \right)_\varepsilon = \\ & \left(\exp\left[-\frac{\left(-2\pi t\sqrt{\frac{2E}{m}} + x - l\right)^2}{2\eta_\varepsilon}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar_\varepsilon} S(x, \tilde{x}_0(t, x))\right\} \right)_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{VI. 134})$$

Для квантовой траектории $x(t, x_0; \hbar_\varepsilon)$ α -частицы в силу (VI.134) мы имеем явное выражение

$$(x_\varepsilon(t, x_0 = l))_\varepsilon = \left(\int_l^\infty x \exp\left[-\frac{\left(-2\pi t\sqrt{2E/m} + x - l\right)^2}{\eta_\varepsilon}\right] dx \right)_\varepsilon. \quad (\text{VI. 135})$$

Откуда мы окончательно получаем

$$(x_\varepsilon(t, x_0 = l))_\varepsilon = \frac{l}{2} + \pi t \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (\text{VI.136})$$

Таким образом в силу неравенства (VI.71) в том случае когда состояния ядра есть суперпозиция чистых состояний, заданная формулой (VI.4), счетчик Гейгера сработает к моменту времени T под воздействием суперпозиции (VI.4), если выполнено следующее неравенство

$$\frac{l}{2} + \pi T \sqrt{\frac{2E}{m}} \geq \frac{L}{|c_2|^2}. \quad (\text{VI.137})$$

Продолжительность жизни Шредингеровской кошки \mathbf{T}_{cat} , представляющей собой макроскопическую линейную суперпозицию (VI.5), в силу (VI.137) составляет

$$\mathbf{T}_{\text{cat}} \simeq \frac{\pi^{-1}L}{|c_2|^2 \sqrt{\frac{2E}{m}}}. \quad (\text{VI.138})$$

Таким образом:

- (i) до момента времени порядка \mathbf{T}_{cat} Шредингеровская «кошка» представляющая собой суперпозицию (VI.4) макроскопических состояний живой и мертвой «кошки», будет наблюдаться как живая «кошка»,
 - (ii) после момента времени порядка \mathbf{T}_{cat} Шредингеровская «кошка» представляющая собой суперпозицию (VI.4) макроскопических состояний живой и мертвой «кошки», будет наблюдаться как мертвая «кошка»
- Соответственно парадокс Шредингеровской «кошки» исчезает.
- Напомним, что скорость вылета альфа-частицы составляет от 9400 км/с (изотоп неодима ^{144}Nd) до 23700 км/с у изотопа полония ^{212m}Po .

Таким образом:

- (i) если $c_2 \in \mathbb{C}, |c_2| \simeq 1$, то счетчик Гейгера по воздействию суперпозиции (VI.4)

сработает практически также быстро как и под воздействием чистого состояния

α -частицы вылетевшей из ядра и кошка умрет по воздействием суперпозиции (VI.4) практически мгновенно,

(ii) если $c_2 \in \mathbb{C}, |c_2| \simeq 0$, то счетчик Гейгера по воздействием суперпозиции (VI.4)

сработает только по истечении очень большого промежутка времени.

Приведенные выше выводы полностью согласуются с выводами полученными на основе критерия (VI.84).

2.4. Модифицированная теория туннелирования α -частицы сквозь потенциальный барьер. Случай гладкого потенциала, удовлетворяющего условию квазиклассичности.

В данном параграфе приведена модифицированная теория туннелирования α -частицы сквозь потенциальный барьер для случая гладкого потенциала, удовлетворяющего условию квазиклассичности (VI.100). Введем для удобства следующие функции

$$(\Phi_{\varepsilon, \text{II}}(x))_{\varepsilon} = \begin{cases} \left(\frac{D_{\varepsilon}}{\sqrt{|p|}} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{\hbar_{\varepsilon}} \int_x^b p(u) du\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{i} \exp\left(\frac{1}{\hbar_{\varepsilon}} \int_x^b p(u) du\right) \right\} \right)_{\varepsilon}, \text{ при } 0 \leq x \leq b \\ 0, \text{ при } x \in \mathbb{R} \setminus [0, b] \end{cases} \quad (\text{VI. 139})$$

$$(\Phi_{\varepsilon, \text{III}}(x))_{\varepsilon} = \begin{cases} \left(\frac{(1-i)\sqrt{2}D_{\varepsilon}}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \int_b^x p(u) du\right) \right)_{\varepsilon}, \text{ при } b < x \\ 0, \text{ при } x \leq b \end{cases} \quad (\text{VI. 140})$$

Теорема 2. Слабое решение Коломбеау стационарного уравнения Коломбеау- Шредингера (VI.92) имеет следующий вид:

$$(\Psi_{\varepsilon}^{\#}(x))_{\varepsilon} = (\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_{\varepsilon} + (\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_{\varepsilon}, \quad (\text{VI. 141})$$

где

(i) стационарная волновая функция α -частицы не вылетевшей из ядра $(\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_{\varepsilon}$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon,\text{int.}}(x))_{\varepsilon} = (\Psi_{\varepsilon,\text{II}}^{\#}(x))_{\varepsilon} = (\phi_{\varepsilon}(x)\Phi_{\text{II}}(x))_{\varepsilon}, \quad (\text{VI. 142})$$

(ii) стационарная волновая функция α -частицы вылетевшей из ядра $(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_{\varepsilon}$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_{\varepsilon} = (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^{\#}(x))_{\varepsilon} = (\phi_{\varepsilon}(x)\Phi_{\text{III}}(x))_{\varepsilon} \quad (\text{VI. 143})$$

и где обобщенная функция $(\phi_{\varepsilon}(x))_{\varepsilon} \in G(\mathbb{R}_+)$ задана следующей формулой

$$\begin{aligned} (\phi_{\varepsilon}(x))_{\varepsilon} &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta_{\varepsilon}}} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2\eta_{\varepsilon}}\right], \\ \left(\frac{\hbar_{\varepsilon}}{\eta_{\varepsilon}}\right)_{\varepsilon} &\approx 0. \end{aligned} \quad (\text{VI. 144})$$

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 1 из предыдущего параграфа.

Замечание 7. Константа $(D_{\varepsilon})_{\varepsilon}$ в отличие классической теории, приведенной в параграфе 2.2, теперь не является свободным параметром, а однозначно фиксируется условием нормировки

$$\left(\int_{b-\delta}^{+\infty} |\Psi_{\varepsilon,\text{III}}(x)|^2 dx\right)_{\varepsilon} = 1, \quad (\text{VI. 145})$$

где $\delta \ll b$. Обобщенная функция $(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x))_{\varepsilon} = (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^{\#}(x))_{\varepsilon}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} &(\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^{\#}(x))_{\varepsilon} = \\ &\left(\frac{\sqrt{2}(1-i)D_{\varepsilon}}{\sqrt[4]{2\pi\eta_{\varepsilon}}} \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{2\eta_{\varepsilon}}\right] \exp\left(\frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \int_b^x p(u) du\right)\right)_{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 146})$$

Откуда в силу условия нормировки (VI.145) мы имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{b-\delta}^{\infty} |\Psi_{\varepsilon, \text{III}}^{\#}(x)|^2 dx \right)_{\varepsilon} = \\
& \left(\frac{2|1-i|^2 |D_{\varepsilon}|^2}{\sqrt{2\pi\eta_{\varepsilon}}} \int_{b-\delta}^{\infty} \frac{1}{|p(x)|} \exp\left[-\frac{(x-b)^2}{\eta_{\varepsilon}}\right] dx \right)_{\varepsilon} = \quad (\text{VI. 147}) \\
& = \frac{4(D_{\varepsilon}|^2)_{\varepsilon}}{|p(b)|} = 1.
\end{aligned}$$

Откуда мы имеем:

$$(D_{\varepsilon}|^2)_{\varepsilon} = |p(b)|/4. \quad (\text{VI. 148})$$

В силу теоремы 2, стационарная волновая функция α -частицы, находящейся в состоянии являющемся линейной суперпозицией состояний $\Psi_{\text{int.}}(x)$ и $\Psi_{\text{ext.}}(x)$ имеет вид

$$(\Psi_{\varepsilon}^{\#}(x))_{\varepsilon} = c_1(\Psi_{\varepsilon, \text{II}}^{\#}(x))_{\varepsilon} + c_2(\Psi_{\varepsilon, \text{III}}^{\#}(x))_{\varepsilon}. \quad (\text{VI. 145})$$

Для случая гладкого потенциала, удовлетворяющего условию квазиклассичности (VI.100) квантовую траекторию суперпозиции (VI.4) можно вычислить непосредственно, используя явный вид соответствующего Фейнмановского пропагатора [46],[186]. Фейнмановский пропагатор α -частицы вылетевшей из распавшегося ядра $(\Psi_2(x, t, x_0; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$, в хорошем приближении совпадает с пропагатором свободной α -частицы [46],[186]:

$$\left(\Psi_2(x, t, \tilde{x}_0; \hbar_{\varepsilon}) \right)_{\varepsilon} = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar_{\varepsilon} t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_{\varepsilon}} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} \right] \right\}. \quad (\text{VI. 146})$$

Слабое решение Коломбеау уравнения Коломбеау-Шредингера (VI.90) для обобщенной волновой функции $(\Psi_{\varepsilon, \text{ext.}}(x, t, x_0 = l; \hbar_{\varepsilon}))_{\varepsilon}$ α -частицы вылетевшей из распавшегося ядра, в силу уравнений (VI.143) и (VI.146) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
(\Psi_{\varepsilon,\text{ext.}}(x, t, x_0 = l; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon &= (\Psi_{\varepsilon,\text{III}}^\#(x, t, x_0 = l; \hbar_\varepsilon))_\varepsilon = \\
&\left(\left(\frac{m}{2\pi i \hbar_\varepsilon t} \right)^{1/2} \times \int_l^\infty \exp \left[-\frac{(\tilde{x}_0 - x_0)^2}{2\eta_\varepsilon} \right] \exp \left(i \frac{2\pi}{\hbar_\varepsilon} \sqrt{2mE} \tilde{x}_0 \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_\varepsilon} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} \right] \right\} d\tilde{x}_0 \right)_\varepsilon = \tag{VI. 130} \\
&\left(\left(\frac{m}{2\pi i \hbar_\varepsilon t} \right)^{1/2} \times \int_l^\infty \exp \left[-\frac{(\tilde{x}_0 - x_0)^2}{\eta_\varepsilon} \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar_\varepsilon} \left[\frac{m(x - \tilde{x}_0)^2}{2t} + \pi \sqrt{4mE} \tilde{x}_0 \right] \right\} d\tilde{x}_0 \right)_\varepsilon .
\end{aligned}$$

- [162] E. S c h r o e d i n g e r 1935, Naturwissenschaften, Bd. 23, S. 844.
- [163] A.Einstein, B.Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47 777 (1935)
- [164] Д.С.Чернавский, Синергетика и информация. Динамическая теория хаоса, М.: Наука, 2001. - 105 с.
- [164] J.Von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (Berlin: J. Springer, 1932) [Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1955
- [165] E.P. Wigner, Symmetries and Reflections, Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1970.
- [166] R. E. Wyatt, J. Corey Trahan (2005). Quantum dynamics with trajectories. Springer. ISBN 978-0-387-22964-5.
- [167] R. E. Wyatt, E. R. Bittner: Quantum wave packet dynamics with trajectories: Implementation with adaptive Lagrangian grids of the amplitude of the wave function, Journal of Chemical Physics, vol. 113, no. 20, 22 November 2000, X. Oriols, J. Mompert, "Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology", ISBN: 978-981-4316-39-2.
- [168] T. A. Brun, A simple model of quantum trajectories, Am. J. Phys. 70, 719-737 (2002). DOI: 10.1119/1.1475328

- [169] H. M. Wiseman, Quantum Trajectories and Quantum Measurement Theory, Quantum Semiclass. Opt. 8, 205-222 (1996)
- [170] D. Bouwmeester and G. Nienhuis, Measuring a single quantum trajectory. Quantum Semiclass. Opt. 8 (1996) 277–282. Printed in the UK.
- [171] H. J. Carmichael, Quantum jumps revisited: An overview of quantum trajectory theory. Lecture Notes in Physics Volume 517, 1999, pp 15-36.
- [172] H. Everett, III - 1957, Revs Mod. Phys., v. 29, p. 454.
- [173] E. P. Wigner - 1963, Am. J. Phys. v. 31, p. 6.
- [174] L. E. Ballentine - 1970, Rev. Mod. Phys., v. 42, p. 358.
- [175] W. Heisenberg The Revolution in Modern Science, 1958, Physics and Philosophy: N.Y.: Harper.
- [176] N. Bohr - 1963, Essays 1958-1962 on Atomic Physics and Human Knowledge- N.Y.: Interscience.
- [177] A. Hobson, Two-photon interferometry and quantum state collapse, Phys. Rev. A 88, 022105 – Published 8 August 2013
- [178] A. J. Leggett, Schrodinger's Cat and Her Laboratory Cousins, Contemp. Phys., 1984, v.25, No.6, pp. 583-598.
- [179] Г. Р. Иваницкий, XXI век: что такое жизнь с точки зрения физики, УФН, 2010, том 180, номер 4, страницы 337–369 (Mifn905)
- [180] А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, "Методы статистической физики", Издательство "Наука" Физматлит Москва 1977г. стр.367
- [181] Г.А. Гамов. Очерк развития учения о строении атомного ядра. Теория радиоактивного распада. УФН, т. X, вып. 4, с. 531-544 (1930).
- [182] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика (нерелятивистская теория). — Издание 6-е, исправленное. — М.: Физматлит, 2004. — 800 с. «Теоретическая физика», том III. — ISBN 5-9221-0530-2
- [183] Б.Б.Кадомцев, Динамика и информация. М., 1997.
- [184] J. Greensite, Lecture Notes on Quantum Mechanics. San Francisco State University. Fall 2003
<http://www.physics.sfsu.edu/~greensit/book.pdf>
- [185] В.И. Гольданский, Л.И. Трахтенберг, В.Н. Флёрв, "Туннельные явления в химической физике". — М.: Наука, 1986. — 296 с.
- [186] R. Feynman, A. Hibbs, (2005), Quantum Mechanics and Path Integrals, Dover (Emended Edition).
- [187] Подосенов С. А., Потапов А. А., Фоукзон Дж., Менькова Е. Р. Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии: Монография в 3-х томах / под ред. А. А. Потапова. М.: Физматлит. 2014–2015. В печати.
- [188] J. Foukzon, A. A. Potapov, S. A. Podosenov, Exact quasiclassical asymptotics beyond Maslov canonical operator,

<http://arxiv.org/abs/1110.0098>