

Plan B (1): Berechnung der Zahl Pi durch ein Ensemble einfacher Objekte.

Stefan G. Freundt
Deutschland
stefan.freundt@web.de

11.07.2014

Zusammenfassung

We are surrounded by round objects. Planets, suns, stones, tree trunks and many more objects are round. Likewise, s-orbitals of electrons in atoms are spherically symmetric and thereby round.

If we ascertain the surface areas, volumes, or circumferences of these objects, then we inevitably encounter the number pi. Evidently the number pi plays an important role in our environment. Accordingly, pi is included in the formulae used to describe our world.

For the calculation of pi, there are an abundance of methods that can be used. In contrast, in this article we are going to pursue the goal of giving objects the simplest possible properties, and enabling these objects to calculate pi en passant.

We introduce a system of equations, in which objects only interact with each other through algebraic operations (+-*/ and sqrt) and generate the number pi in a boundary case.

Wir sind von runden Objekten umgeben. Planeten, Sonnen, Steine, Baumstämme und vieles mehr sind rund.

Bestimmt man von diesen Objekten Oberfläche und Volumen oder Umfang und Flächeninhalt, begegnet man unweigerlich der Zahl pi. Offenbar nimmt die Zahl pi eine wichtige Rolle in unserer Umgebung ein. In die Formeln zur Beschreibung unserer Welt wird pi entsprechend hineingesteckt.

Zur Berechnung von pi gibt es eine Menge Verfahren, die alle für einen Menschen gemacht sind, um pi zu berechnen. Im Gegensatz dazu verfolgen wir in diesem Artikel das Ziel, Objekte mit möglichst einfachen Eigenschaften auszustatten und diese Objekte in die Lage zu versetzen pi „en passant“ zu berechnen.

Wir stellen ein Gleichungssystem vor, in dem Objekte nur durch algebraische Operationen (+-*/ und sqrt) mit einander wechselwirken und in einem Grenzfall die Zahl pi erzeugen.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	2
2	Die EH-Gleichungen	2
2.1	Die Start-Gleichung	2
2.2	Gruppierung der EH-Gleichungen	3
2.3	EH-Symmetrie	4
2.4	Vorzeichenwechsel vor A	4

2.4.1	Allgemeine analytische Lösung	4
2.4.2	Gleichungen mit niederfrequenter Lösung	4
2.4.3	Gleichungen mit hochfrequenter Lösung	5
2.4.4	Vorzeichen- und Amplitudenperiode	5
2.5	Vorzeichenwechsel vor B	6
3	Zusammenfassung	7
A	Beweise	7
A.1	Beweis EH-Energie-Erhaltungssatz	7
A.2	Beweis der Lösung für Vorzeichenwechsel bei A	8
A.2.1	Induktionsanfang: n=0	8
A.2.2	Induktionsanfang: n=1	8
A.2.3	Induktionsvoraussetzung	9
A.2.4	Induktionsschluss	9
A.3	Beweis der Lösung für Vorzeichenwechsel bei B	9

1 Motivation

Wendet man das Poppersche Falsifikationsprinzip auf das Doppelspaltexperiment an, passiert Folgendes:

1. Annahme: Licht ist eine Welle.

Dies widerspricht der Absorption eines einzelnen Lichtquant in einem kleinen Raumbereich auf einem Detektor. Eine Welle kann sich nicht auf einen kleinen Raumbereich zusammenziehen.

2. Annahme: Licht ist ein Teilchen.

Ein Teilchen ist in seiner Idealisierung aber punktförmig und kann nicht beide Spalte gleichzeitig ausleuchten. Das Photon weiß aber, ob beide Spalte geöffnet sind oder nur einer. Je nach dem entsteht ein anderes Interferenzmuster. Das Experiment widerspricht auch dieser Annahme.

Daraus folgt: Licht ist weder Welle noch Teilchen.

Wenn Licht weder Welle noch Teilchen ist, was ist es dann?

Was ist Licht?

2 Die EH-Gleichungen

2.1 Die Start-Gleichung

Wir starten mit einem sehr einfachen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 E(n+1) &= BE(n) + AH(n) \\
 H(n+1) &= BH(n) - AE(n)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Dies ist als Iteration für E und H bzw. wie in einer Programmiersprache als Wertezuweisung zu sehen. Links stehen die neuen Werte, rechts die alten Werte. A und B sind Konstanten, die folgender Gleichung genügen: $A^2 + B^2 = 1$. Dies lässt sich in einfacher Weise erreichen:

$$B = +\sqrt{\frac{\beta}{\alpha + \beta}} \quad A = +\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \quad (2)$$

Wie man leicht sieht, genügen E und H folgendem „Energie“-Erhaltungssatz:

$$E^2(n+1) + H^2(n+1) = E^2(n) + H^2(n) \quad (3)$$

$E^2 + H^2$ ist somit eine Iterations-Invariante. Wenn dies aber eine Invariante ist, so bleiben E und H für beliebige Iterationen n beschränkt.¹

Um Platz in den Formeln zu sparen wird (n) durch ein tiefgestelltes |n ersetzt:

$$E(n) = E_{|n}$$

Für obiges Gleichungssystem findet man folgende analytische Lösung:

$$\begin{aligned} E_{|n} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(n\omega_{AB} + \varphi_{EH}) \\ H_{|n} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(n\omega_{AB} + \varphi_{HE}) \\ \omega_{AB} &= \arctan2(A, B) \\ \varphi_{EH} &= \arctan2(E_{|0}, +H_{|0}) \\ \varphi_{HE} &= \arctan2(H_{|0}, -E_{|0}) \end{aligned} \quad (4)$$

Der $\arctan2()$ muss verwendet werden, da es in den Gleichungen (1) ein Unterschied ist, ob A,B beide positiv oder beide negativ sind. Dies kann aber nur der $\arctan2()$ unterscheiden, während es der $\arctan()$ nicht unterscheidet.

Im Allgemeinen werden wir ab jetzt die Iterationsvariable n weglassen. Links stehen immer die neuen Werte, rechts die alten. Falls es doch einmal notwendig sein sollte auf die Iterationsvariable hinzuweisen, werden wir sie so verwenden:

$$\begin{aligned} E_{|n+1} &= BE_{|n} + AH_{|n} \\ H_{|n+1} &= BH_{|n} - AE_{|n} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 Gruppierung der EH-Gleichungen

Obiger Energie-Erhaltungssatz wird erfüllt, wenn $A^2 + B^2 = 1$ und die Gleichungen genau einen Vorzeichenwechsel haben. Folglich finden wir folgende 8 Vorzeichenkombinationen:

¹Die Gleichungen (1) wurden durch Vereinfachung und Abstraktion der Maxwell-Gleichungen erhalten. Deshalb wurden die Variablen mit einer gewissen Absicht wie das elektrische und magnetische Feld bezeichnet. Ob sie etwas mit dem elektrischen und magnetischen Feld zu tun haben, muss sich noch herausstellen. Dies ist hier und auch am Ende des Artikels noch nicht zu sehen. In diesem Artikel sollen E und H nur Objekte beschreiben, die obigem Gleichungssystem (1) genügen. Der obige „Energie“-Erhaltungssatz ist ebenfalls dem klassischen elektromagnetischen Feld entlehnt. Wie viel er mit der uns bekannten Energie zu tun hat, muss sich noch herausstellen.

B mit positivem Vorzeichen und 2 Kombinationen für den Vorzeichenwechsel bei A
 B mit negativem Vorzeichen und 2 Kombinationen für den Vorzeichenwechsel bei A
 A mit positivem Vorzeichen und 2 Kombinationen für den Vorzeichenwechsel bei B
 A mit negativem Vorzeichen und 2 Kombinationen für den Vorzeichenwechsel bei B

Unter Einbeziehung der Vorzeichen schreiben wir für den Vorzeichenwechsel bei A

$$\begin{aligned} E &= +V_B BE + V_A AH \\ H &= +V_B BH - V_A AE \end{aligned} \quad (6)$$

und für den Vorzeichenwechsel bei B:

$$\begin{aligned} E &= +V_B BE + V_A AH \\ H &= -V_B BH + V_A AE \end{aligned} \quad (7)$$

V_A und V_B können die Werte ± 1 annehmen, A und B werden immer als positiv angenommen.

2.3 EH-Symmetrie

2.4 Vorzeichenwechsel vor A

2.4.1 Allgemeine analytische Lösung

Wir betrachten die Gleichungssysteme mit einem Vorzeichenwechsel vor A.

$$\begin{aligned} E &= V_B BE + V_A AH \\ H &= V_B BH - V_A AE \end{aligned} \quad (8)$$

V_B und V_A sind feste Vorzeichen und sollen für die E und die H-Gleichung gleich sein. Man erhält somit alle 4 möglichen Kombinationen aus Kap 2.2. Für diese erhält man folgende analytische Lösung:

$$\begin{aligned} E|_n &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(n\omega_{AV_B B} + \varphi_{EH}) \\ H|_n &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(n\omega_{AV_B B} + \varphi_{HE}) \\ \omega_{AV_B B} &= \arctan2(A, V_B B) \\ \varphi_{EH} &= \arctan2(E_{|0}, +V_A H_{|0}) \\ \varphi_{HE} &= \arctan2(H_{|0}, -V_A E_{|0}) \end{aligned} \quad (9)$$

2.4.2 Gleichungen mit niederfrequenter Lösung

Die obige Lösung enthält den $\arctan2$. Dieser unterscheidet genau, welche Vorzeichen beim \tan die Winkelfunktionen \sin und \cos haben. Für uns bedeutet das: Bei positivem Vorzeichen vor B sind Frequenzen von 0 bis $\pi/2$ zu erwarten. Bei einem Minus vor dem B sind Frequenzen zwischen $\pi/2$ und π zu erwarten. Wir betrachten zuerst die Gleichungen mit positivem Vorzeichen vor B.

$$\begin{aligned}
E &= +BE + AH \\
H &= +BH - AE
\end{aligned}
\tag{10}$$

$V_B B = +B$ und B immer positiv

A, B	Frequenz ω	Periode T	Bemerkungen
$A \rightarrow 0, B \rightarrow 1$	$\omega = A/B$	$T = 2\pi B/A$	Periode enthält π
$A = B = 1/\sqrt{2}$	$\omega = \pi/4$	$T = 8$	Periode enthält kein π
$A \rightarrow 1, B \rightarrow 0$	$\omega = \pi/2$	$T = 4$	Periode enthält kein π

Wie man sieht erzeugen unsere Objekte für $A \approx 0$ und $B \approx 1$ eine Periode, die π enthält. Dies ist deshalb so bemerkenswert, weil für $A = B$ und $A \approx 1$ und $B \approx 0$ die Periode T kein π enthält.

2.4.3 Gleichungen mit hochfrequenter Lösung

$$\begin{aligned}
E &= -BE + AH \\
H &= -BH - AE
\end{aligned}
\tag{11}$$

$V_B B = -B$ und B positiv

A, B	Frequenz ω	Periode T	Bemerkungen
$A \rightarrow 0, B \rightarrow 1$	$\omega = 4\pi/4$	$T = 2$	
$A = B = 1/\sqrt{2}$	$\omega = 3\pi/4$	$T = 8/3$	Im zweiten Fall teilt der Wert das Intervall $[2,4]$ in $1/3$ und $2/3$. Dies ist bemerkenswert, weil eine Drittelung in unserer Welt eher unüblich ist. Eine Drittelung fällt schwerer, als halbieren.
$A \rightarrow 1, B \rightarrow 0$	$\omega = 2\pi/4$	$T = 4$	Für $B \approx 0$ erhält man immer eine Periode $T=4$, egal, ob der B-Term positiv oder negativ ist.

Die Werte für den arctan2 folgen leicht aus den Grafiken für den tan und den Argumenten zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$.

2.4.4 Vorzeichen- und Amplitudenperiode

Im Folgenden werden zwei Simulationen für $A=0,01$ und $B=0,99995$ gezeigt. Im niederfrequenten Fall ist $\omega \approx 0$, im hochfrequenten Fall ist $\omega \approx \pi$.

Bei kleinem $\omega \approx 0$ ändern sich die E- und die H-Werte von einem Iterationsschritt zum nächsten nur wenig. Nach etwa 130 Iterationsschritten wird der H-Wert seine Nullstelle haben und dann mit positiven Werten weitergehen.

Es ist egal, ob man die Periode an Hand der Vorzeichenwechsel oder an Hand der Nulldurchgänge der Amplitude bestimmt. Man erhält immer den gleichen Wert. Die Vorzeichen-Periode ist gleich der Amplituden-Periode.

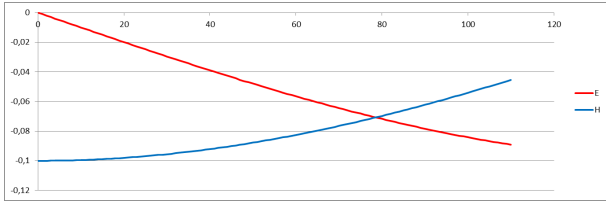


Abbildung 1: Verlauf von E und H für $E_1(0) = 0$, $H_1(0) = 0,1$ während der ersten 110 Iterationen im niederfrequenten Fall.

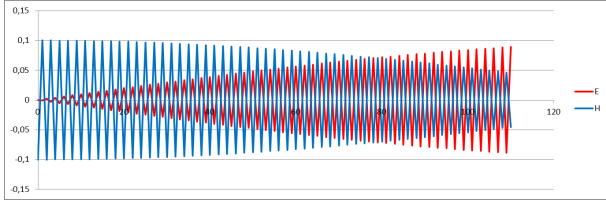


Abbildung 2: Verlauf von E und H für $E_1(0) = 0$, $H_1(0) = 1/10$ während 110 Iterationen im hochfrequenten Fall.

Da die Frequenz $\omega_{AB} \approx \pi$ sehr groß ist wechseln E und H etwa mit jedem Iterationsschritt ihr Vorzeichen. Aber die Amplitude ändert sich nur sehr langsam. Nach 100 Iterationen hat sich die H-Amplitude halbiert. Das bedeutet, der ständige Vorzeichenwechsel wird vor allem durch das Vorzeichen vor B in Gl. (10) und (11) bestimmt.

Bei großen ω_{AB} berechnet sich die Vorzeichen-Periode aus ω_{AB} . Die Amplituden-Periode berechnet sich aus $\omega_{AB} - \pi$ und verhält sich wie die Lösung des niederfrequenten Gleichungssystems.

2.5 Vorzeichenwechsel vor B

Jetzt betrachten wir die Gleichungssysteme, in denen der Vorzeichenwechsel vor B stattfindet:

$$\begin{aligned} E &= +V_B B E + V_A A H \\ H &= -V_B B H + V_A A E \end{aligned} \quad (12)$$

V_A und V_B sind Vorzeichen und können die Werte ± 1 annehmen.

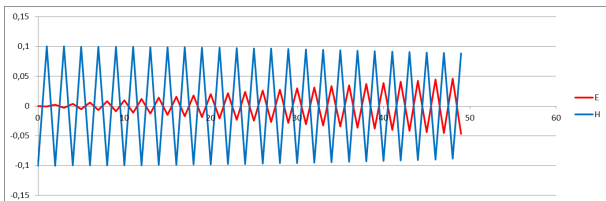


Abbildung 3: E und H für $E_1(0) = 0$, $H_1(0) = 1/10$ mit 50 Iterationen im hochfrequenten Fall.

$$\begin{aligned}
E_{offset} &= \frac{1}{2}((1 + V_B B)E_{|0} + V_A A H_{|0}) & E_{amp} &= E_{|0} - E_{offset} \\
H_{offset} &= \frac{1}{2}((1 - V_B B)H_{|0} + V_A A E_{|0}) & H_{amp} &= H_{|0} - H_{offset} \\
\omega_{AB} &= \pi & \phi_{EH} &= \pi/2 & \phi_{HE} &= \pi/2 \\
E_{|n} &= E_{offset} + E_{amp} \sin(n\omega_{AB} + \phi_{EH}) \\
H_{|n} &= H_{offset} + H_{amp} \sin(n\omega_{AB} + \phi_{HE})
\end{aligned} \tag{13}$$

In diesem Fall hat man immer eine Periode $T = 2$. Die Periode und die Frequenz sind unabhängig von A und B. Dies ist sehr langweilig.

3 Zusammenfassung

Wir sind von E- und H-Objekten ausgegangen, die dem Gleichungssystem (1) genügen. Dazu müssen sie die angegebenen algebraischen Operationen $+ - * /$ und \sqrt{x} verwirklichen. Dies setzen wir voraus.

Ist $A^2 + B^2 = 1$ erfüllt, gilt für unsere Objekte der EH-Energieerhaltungssatz. Wir haben dann ein dynamisches System in dem E und H beschränkt sind.

Die Gleichungssysteme wurden vollständig gruppiert und analytische Lösungen gegeben. Im niederfrequenten Fall (+B) erhält man für kleine A ($A \approx 0$) und große B ($B \approx 1$) eine Schwingungsperiode von $T = 2\pi B/A$. Das heißt, unsere Objekte erzeugen π im Vorübergehen. Für $A = B$ und für $A \approx 1$ und $B \approx 0$ erhält man $T = 8$ bzw. $T = 4$. Die Zahl π ist demnach nicht im Gleichungssystem versteckt.

Im hochfrequenten Fall (-B) wird zwischen Amplituden- und Vorzeichen-Periode unterschieden. Die Vorzeichen-Periode T_V hat Werte im Intervall $[2,4]$. Für den Fall $A = B = 1/\sqrt{2}$ erhält man eine Periode von $T_V = 8/3 = 2,666$. Diese Periode teilt das Intervall $[2,4]$ in $1/3$ und $2/3$ seiner Gesamtlänge. Dies ist bemerkenswert, weil Drittelung im Allgemeinen schwieriger ist, als halbieren.

A Beweise

A.1 Beweis EH-Energie-Erhaltungssatz

$$\begin{aligned}
E^2(n+1) &= B^2 E^2(n) + A^2 H^2(n) + 2ABE(n)H(n) \\
H^2(n+1) &= B^2 H^2(n) + A^2 E^2(n) - 2ABE(n)H(n)
\end{aligned} \tag{14}$$

Beide Gleichungen addieren:

$$E^2(n+1) + H^2(n+1) = (A^2 + B^2)(E^2(n) + H^2(n)) \tag{15}$$

und mit der Bedingung $A^2 + B^2 = 1$ folgt:

$$E^2(n+1) + H^2(n+1) = E^2(n) + H^2(n) \tag{16}$$

A.2 Beweis der Lösung für Vorzeichenwechsel bei A

Der Beweis der Richtigkeit der Lösung wird mit Hilfe der vollständigen Induktion geführt. Zuvor werden einige für uns hilfreiche trigonometrische Formeln aufgeführt:

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (17)$$

Diese Formeln werden jetzt auf ϕ und ω angewendet.

$$\begin{aligned} \sin(\phi) &= \sin(\arctan2(E_{|0}, H_{|0})) = \frac{E_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} \\ \cos(\phi) &= \cos(\arctan2(E_{|0}, H_{|0})) = \frac{H_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} \\ \sin(\omega) &= \sin(\arctan2(A, B)) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = A \\ \cos(\omega) &= \cos(\arctan2(A, B)) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = B \end{aligned} \quad (18)$$

A.2.1 Induktionsanfang: n=0

$$\begin{aligned} E_{|0} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(\phi) = \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \frac{E_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} = E_{|0} \\ H_{|0} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \cos(\phi) = \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \frac{H_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} = H_{|0} \end{aligned} \quad (19)$$

A.2.2 Induktionsanfang: n=1

$$\begin{aligned} E_{|1} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(\omega + \phi) \\ &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} (\sin(\omega) \cos(\phi) + \cos(\omega) \sin(\phi)) \end{aligned} \quad (20)$$

mit obigen Beziehungen und der Bedingung $A^2 + B^2 = 1$ folgt:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \left(A \frac{H_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} + B \frac{E_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} \right) \\ &= BE_{|0} + AH_{|0} \end{aligned} \quad (21)$$

und für H

$$\begin{aligned}
H_{|1} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \cos(\omega + \phi) \\
&= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} (\cos(\omega) \cos(\phi) - \sin(\omega) \sin(\phi)) \\
&= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \left(B \frac{H_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} - A \frac{E_{|0}}{\sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2}} \right) \\
&= BH_{|0} - AE_{|0}
\end{aligned} \tag{22}$$

A.2.3 Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
E_{|n} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(n\omega_{AB} + \phi) \\
H_{|n} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \cos(n\omega_{AB} + \phi)
\end{aligned} \tag{23}$$

A.2.4 Induktionsschluss

Aus der Richtigkeit für n wird die Richtigkeit für $n+1$ abgeleitet.

$$\begin{aligned}
E_{|n+1} &= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin((n+1)\omega_{AB} + \phi) \\
&= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} \sin(\omega_{AB} + (n)\omega_{AB} + \phi) \\
&= \sqrt{E_{|0}^2 + H_{|0}^2} (\sin(\omega_{AB}) \cos((n\omega_{AB} + \phi) + \cos(\omega_{AB}) \sin(n\omega_{AB} + \phi)) \\
&= BE_{|n} + AE_{|n} \\
&= E_{|n+1}
\end{aligned} \tag{24}$$

A.3 Beweis der Lösung für Vorzeichenwechsel bei B

$$E = +V_B BE + V_A AH \tag{25}$$

$$H = -V_B BH + V_A AE \tag{26}$$

V_A und V_B sind Vorzeichen und können die Werte ± 1 annehmen.

$$\begin{aligned}
E_{offset} &= \frac{1}{2}((1 + V_B B)E_{|0} + V_A AH_{|0}) & E_{amp} &= E_{|0} - E_{offset} \\
H_{offset} &= \frac{1}{2}((1 - V_B B)H_{|0} + V_A AE_{|0}) & H_{amp} &= H_{|0} - H_{offset} \\
\omega_{AB} &= \pi & \phi_{EH} &= \pi/2 & \phi_{HE} &= \pi/2 \\
E_{|n} &= E_{offset} + E_{amp} \sin(n\omega_{AB} + \phi_{EH}) \\
H_{|n} &= H_{offset} + H_{amp} \sin(n\omega_{AB} + \phi_{HE})
\end{aligned} \tag{27}$$

Zuerst soll gezeigt werden, dass die Periode $T = 2$ bzw. $\omega_{A,B} = \pi$ ist, unabhängig von A, B und den Vorzeichen:

$$\begin{aligned}
E_{|1} &= +V_B B E_{|0} + V_A A H_{|0} \\
H_{|1} &= -V_B B H_{|0} + V_A A E_{|0} \\
E_{|2} &= +V_B B E_{|1} + V_A A H_{|1} \\
E_{|2} &= +V_B B (V_B B E_{|0} + V_A A H_{|0}) + V_A A (-V_B B H_{|0} + V_A A E_{|0}) \\
E_{|2} &= +(B^2 + A^2) E_{|0} \\
E_{|2} &= +E_{|0}
\end{aligned} \tag{28}$$

und allgemein: $E_{|n+2} = E_{|n}$ und $H_{|n+2} = H_{|n}$. Wenn aber die Periode $T=2$ ist, dann sind auch nur zwei verschiedene Werte verlangt und man kann die Winkelfunktionen nutzen mit $\omega = \pi$. Mit dem Ansatz $\phi_{EH} = \phi_{HE} = \pi/2$ nimmt der sin nur die Werte ± 1 an, $+1$ für gerade n und -1 für ungerade n .

$n=0$

$$E_{|0} = +E_{offset} + E_{amp}(+1) = E_{offset} + E_{|0} - E_{offset} = E_{|0} \tag{29}$$

und aus obiger Beziehung folgt sofort die Richtigkeit für alle geraden n .

$n=1$

$$\begin{aligned}
E_{|1} &= +E_{offset} + E_{amp}(-1) = E_{offset} - (E_{|0} - E_{offset}) = E_{|0} \\
&= 2E_{offset} - E_{|0} \\
&= (1 - V_B)E_{|0} + V_A H_{|0} - E_{|0} \\
E_{|1} &= V_B E_{|0} + V_A H_{|0}
\end{aligned} \tag{30}$$

wie es sein muss. Der Beweis für H wird analog geführt.