

Kritische Analyse der Quantenfeldtheorie und Rekonstruktion im Rahmen der klassischen Feldtheorie

Manfred Buth

Bataverweg 35, D22455 Hamburg
e-mail: manfred-buth@t-online.de

Abstract

A critical inspection of quantum field theory will reveal that quantum field theory can be reconstructed only by means of classical field theory. In detail the following six assertions are claimed and proved: (1) Perturbation theory can be achieved by means of classical field theory. (2) Particles that are independent of one another are not correlated. This is especially true for the ingoing particles of scattering processes. (3) Outgoing particles in scattering processes are correlated. But the usual justification of quantum statistics is faulty. (4) In quantum field theory there is an amazing multitude of particle concepts. But a concise description of real existing elementary particles is lacking. (5) The path integral representation is not clearly defined in the particle picture of quantum mechanics. In the wave picture it is only another description of the expansion of a quantum state. (6) Functional representation is nothing else than a comprehensive version of perturbation theory.

Bei einer kritischen Analyse der Quantenfeldtheorie zeigt sich, dass man die Quantenfeldtheorie allein mit den Mitteln der klassischen Feldtheorie rekonstruieren kann. Im Einzelnen werden folgende Thesen behauptet und bewiesen: (1) Die Störungsrechnung kann allein mit den Hilfsmitteln der klassischen Feldtheorie durchgeführt werden. (2) Voneinander unabhängige Teilchen sind nicht korreliert. (3) Auslaufende Teilchen von Streuprozessen sind korreliert. Aber die übliche Herleitung der Quantenstatistik ist fehlerhaft. (4) In der Quantenfeldtheorie gibt es eine verwirrende Fülle von Teilchenbegriffen. Aber eine präzise Beschreibung der real existierenden Elementarteilchen fehlt. (5) Die Pfadintegraldarstellung ist im Teilchenbild der Quantentheorie nicht klar definiert. Im Wellenbild ist sie nur eine andere Darstellung für die Ausbreitung von Quantenzuständen. (6) Die Funktionaldarstellung ist nichts anderes als eine gedrängte Fassung der Störungsrechnung.

Das vorliegende Manuskript besteht aus einem Hauptteil und einem längeren Anhang. Im Hauptteil werden sechs Thesen formuliert und anschließend in sechs Abschnitten erläutert. Für die Begründung der Thesen wird im Anhang umfangreiches Material bereit gestellt.

Insgesamt wird behauptet, dass sich die Quantenfeldtheorie bis auf zwei Einschränkungen allein mithilfe der klassischen Feldtheorie rekonstruieren lässt. Die erste Einschränkung betrifft jene real existierenden Elementarteilchen, mit denen die Experimentalphysiker arbeiten. Ihre Existenz muss auch weiterhin vorausgesetzt werden. Die zweite Einschränkung besteht darin, dass die Notwendigkeit für den Austauschterm, der bei der Wechselwirkung identischer Teilchen erforderlich ist, nicht begründet werden kann. Dazu muss aber angemerkt werden, dass auch in den üblichen Darstellungen der Quantenfeldtheorie eine korrekte Herleitung fehlt. Sieht man von diesen beiden Einschränkungen ab, dann reichen die Mittel, welche die klassische Feldtheorie zu bieten hat, aus, um die Quantenfeldtheorie in ihrem Rahmen zu rekonstruieren.

Im Einzelnen:

Sechs Thesen

These 1: In der Quantenfeldtheorie lässt sich die störungstheoretische Beschreibung von Streuprozessen allein mit Hilfe der klassischen Feldtheorie durchführen.

These 2: Teilchen, die voneinander unabhängig sind, stehen in keiner Beziehung zueinander. Das gilt insbesondere für die einlaufenden Teilchen von Streuprozessen.

These 3: Die auslaufenden Teilchen bei Streuprozessen sind korreliert. Aber die Herleitung der Quantenstatistik für identische Teilchen ist, so weit sie in der Literatur zu finden ist, nicht korrekt.

These 4: In der Quantenfeldtheorie gibt es Vielzahl von Teilchenbegriffen. Aber es fehlt eine präzise Formulierung für jene real existierenden Elementarteilchen, mit denen die Experimentalphysiker arbeiten.

These 5: Die Pfadintegraldarstellung ist im Teilchenbild der Quantenmechanik nicht klar definiert und im Wellenbild nur eine andere Schreibweise für die zeitliche Entwicklung eines Quantenzustandes.

These 6: Die Funktionaldarstellung ist nur eine gedrängte Fassung der Störungsrechnung.

Zu These 1: Störungsrechnung

Näherungslösung für die Feldgleichung

In der Feldtheorie wird die Dynamik eines Vorgangs durch ein System von Feldgleichungen beschrieben, etwa in der Elektrodynamik durch das System

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) &= e\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \\ -i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu - m\bar{\psi}(x) &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu A_\mu(x) \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x) &= e\bar{\psi}(x)\gamma^\nu \psi(x) \end{aligned}$$

der Dirac-Maxwellsche Gleichungen für die drei Feldern ψ , $\bar{\psi}$ und A_μ . Besteht das System nur aus einer Gleichung, dann hat diese die Form

$$D\varphi = gj(\varphi) \tag{1}$$

mit einem Differenzialoperator D , einer Kopplungskonstanten g und einem Wechselwirkungsglied $j(\varphi)$. Dabei soll nur der Fall erörtert werden, dass D ein Polynom in den partiellen Ableitungen nach den vier Koordinaten x^μ ist und j ein Polynom in φ . In der Literatur werden solche Gleichungen immer zweimal diskutiert, zunächst im Rahmen von klassischen Theorien und dann in quantisierter Form mit φ in der Bedeutung eines Feldoperators. Hier geht es nur um die erste der beiden Möglichkeiten. Die Variable φ soll deshalb für ein klassisches Feld stehen. Die homogene Gleichung

$$D\varphi = 0 \quad (2)$$

ist im Allgemeinen lösbar und liefert Lösungen φ_0 . Die inhomogene Gleichung (1) ist meistens nicht lösbar. Aber die Störungsrechnung liefert beliebig gute Annäherungen. Das geschieht dadurch, dass man für das Feld φ eine Entwicklung

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \varphi_n(x) \quad (3)$$

nach Potenzen von g ansetzt. Mit Hilfe einer Greenschen Funktion G für die homogene Gleichung (2) lässt sich (1) formal integrieren

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + g \int dx G(x, x') j(\varphi(x')) \quad (4)$$

Weil das Wechselwirkungsglied j ein Polynom ist, dann entsteht durch Einsetzen von (3) in (4) und Ordnen nach Potenzen von g eine Rekursionsformel für die Koeffizienten φ_n . Mit dessen Hilfe lässt sich φ_n schrittweise auf nullte Näherungen φ_0 zurückführen.

Für das Beispiel der Klein-Gordon-Gleichung mit quadratischer Selbstwechselwirkung lautet die Feldgleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\varphi(x) = j(x) \quad j(x) = g\varphi(x)^2 \quad (5)$$

Sie lässt sich mit Hilfe der Propagatorfunktion Δ_F formal integrieren. Das ergibt

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + g \int dx' \Delta_F(x - x') j(x') \quad (6)$$

Wenn man für $\varphi(x)$ und $j(x)$ die Reihenentwicklungen

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \varphi_n(x) \quad j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n j_n(x) \quad (7)$$

ansetzt, dann geht (3) in die Rekursionsformel

$$\varphi_n(x) = \int dx' \Delta_F(x - x') j_{n-1}(x') \quad j_{n-1}(x') = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x') \varphi_{n-1-i}(x') \quad n > 0 \quad (8)$$

über mit den Koeffizienten φ_n und j_n der Ordnung n für die störungstheoretische Näherung von φ .

Die schrittweise Durchführung der Rekursion nach der Rekursionsformel (8) erzeugt eine Summe von Beiträgen, die sich durch Baumgraphen darstellen lassen. Die Rekursion zieht sich von φ_n herunter bis zu den nullten Näherungen. Die Integrale über die n Vertices bei x_1 bis x_n sind Produkte aus den Propagatoren für die inneren Linien der Graphen und von Lösungen der homogenen Feldgleichung für die äußeren Linien.

Analyse von Streuprozessen

Gleichung (8) ist auch das geeignete Mittel, um Streuprozesse zu analysieren. Gegeben seien r einlaufende und s auslaufende Teilchen. Wenn man bei einem der auslaufenden Teilchen fragt, wo es herkommt, und sich dabei auf eine graphische Darstellung bezieht, dann stößt man auf einen Vertex, an dem noch zwei weitere Linien hängen. Zu jeder dieser Linien gehört entweder ein einlaufendes Teilchen oder ein auslaufendes Teilchen oder eine Streuwelle, die an dem Vertex ein- oder ausläuft. Fragt man weiter, wo die Streuwelle herkommt oder wo sie bleibt, dann gelangt man zu einem weiteren Vertex und so fort. Das gleiche Verfahren wird mit den anderen auslaufenden Teilchen wiederholt. Dabei stellt sich die Frage:

Werden auf diesem Wege alle möglichen Graphen erzeugt?

Um zu begründen, dass man die gleichen analytischen Ausdrücke erhält wie bei dem üblichen Vorgehen, wird das Verfahren systematisch aufgezogen. Dafür dient die bekannte Formel

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|0\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\dots\phi_I(x_n)\exp[-i\int d^4x\mathcal{H}_I]\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp[-i\int d^4x\mathcal{H}_I]\}|0\rangle} \quad (9)$$

(vgl. etwa Maggiore [5], S. 119)

zur Orientierung. Wenn man auf der rechten Seite des Zählers die Exponentialfunktion in eine Taylorreihe entwickelt, einen Summanden auswählt, Zahlfaktoren weglässt und für den Spezialfall der Klein-Gordon-Gleichung mit quadratischer Selbstwechselwirkung den Ansatz

$$\mathcal{H}_I(x) = \phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(x) \quad (10)$$

macht, dann erhält man

$$Z = \underbrace{\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}}_{r+s} \underbrace{\left(-i\int d^4x\phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(x)\right)\dots\left(-i\int d^4x\phi_I(x)\phi_I(x)\phi_I(x)\right)}_i \quad (11)$$

Beim üblichen Verfahren werden nun alle Kontraktionen gebildet. Das dient hier als Vorlage, um alle Feynmangraphen systematisch zu erzeugen.

Zu diesem Zweck werden die $r + s + i$ Faktoren durch Punkte ersetzt und alle Kontraktionen durch Paare von zwei Punkten. Wenn dabei Punkte übrig bleiben, so soll der Beitrag gleich 0 sein. Anderenfalls wird jedes Paar mit einem Propagator belegt. Die Propagatorfunktion steckt bereits in der homogenen Feldgleichung. Deshalb ist ihre Existenz durch die Bedingung gesichert, dass der Differenzialoperator D in (2) ein Polynom ist. Schließlich wird noch über alle Vertices integriert, mit g^i multipliziert und über die Glieder der Taylorreihe summiert.

Als Ergebnis erhält man alle nicht zusammenhängenden Feynmanintegrale, die im Zähler von (9) enthalten sind - nicht mehr und nicht weniger. Mehr kann man nicht erwarten. Denn der Ort der Wechselwirkung geht weder in das übliche Verfahren noch in den hier verfolgten Ansatz ein. Zwei gleichzeitig in Hamburg und in Genf ablaufende Streuexperiment und ein sich in der Gegend des Planeten Jupiter frei bewegendes Teilchen werden deshalb gemeinsam beschrieben. Vakuumbblasen treten nicht auf.

Zu These 2: Quantenstatistik für unabhängige Teilchen

Die Annahme, zwei voneinander unabhängige Teilchen könnten korreliert sein, bildet einen Widerspruch in sich und bedarf daher eigentlich keines weiteren Kommentars. Trotzdem sollen einige Argumente genannt werden.

Der erste und wohl wichtigste Einwand hängt mit These 3 zusammen. Denn es wird sich zeigen, dass die Fermionen bei der LSZ-Umwandlung der Erwartungswerte in Vakuum Erwartungswerte den falschen Propagator und das falsche Vorzeichen der Quantenstatistik erhalten. Dieser Mangel lässt sich nur dadurch beheben, dass man für die Elemente des Fockraums Bedingungen der Symmetrie und Antisymmetrie fordert. Da diese Elemente aber die Zustände von Mehrteilchensystemen mit freien Teilchen sind, zeigt sich erneut der obige Widerspruch. Folglich wird eine nicht korrekte Herleitung durch eine unsinnige Annahme gerettet.

Zwischen den einlaufenden und den auslaufenden Teilchen gibt es zwei Gemeinsamkeiten und einen wesentlichen Unterschied. Beide Teilchenarten sind frei in dem Sinne, dass sie eine homogene Differenzialgleichung erfüllen, und auch insofern, als sie wechselwirkungsfrei sind. Aber im Gegensatz zu den auslaufenden Teilchen haben die einlaufenden Teilchen an keiner gemeinsamen Wechselwirkung teilgenommen. Deshalb gibt es - anders als bei den auslaufenden Teilchen - auch keinen Grund, warum sie korreliert sein sollten.

Die einlaufenden Teilchen werden in verschiedenen Quellen erzeugt, mit vorgegebenen Parametern präpariert und dann auf ein Gebiet gelenkt, in dem sie miteinander wechselwirken. Da die Quellen voneinander unabhängig sind, gilt das Gleiche auch für die von ihnen erzeugten Teilchen.

Zu These 3: Quantenstatistik für die auslaufenden Teilchen

Im LSZ-Formalismus wird der Erwartungswert

$$\langle p_1^{aus}, p_2^{aus}, \dots, p_m^{aus} | p_1^{ein}, p_2^{ein}, \dots, p_n^{ein} \rangle$$

zwischen zwei Mehrteilchensystemen in einen Vakuum Erwartungswert umgewandelt.

Die im Anhang durchgeführte Rechnung enthält eine Stelle, die durch das Zeichen (***) besonders hervorgehoben wird. An dieser Stelle erscheint die Zeitordnung der Feldoperatoren $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_2)$. Sie kommt durch die Reihung der Operatoren herein und gilt gleichermaßen für Fermionen und Bosonen mit der Folge, dass auch den Fermionen ein Bosonpropagator und das Vorzeichen der Bosestatistik zugeordnet wird. Um diesen Mangel zu beheben, wird (a) die Symmetrie bzw.

Antisymmetrie auch auf die Zustände von Mehrteilchensystemen freier Teilchen übertragen und (b) das zeitgeordnete Produkt unter Verwendung eines Vorzeichens zum T-Produkt umdefiniert. Durch die Maßnahme (b) erhalten die Fermionen wenigstens den richtigen Propagator. Aber dabei wird das Vorzeichen absorbiert. Die richtige Statistik wird nur durch die Maßnahme (a) erzwungen. Aber sie wurde bereits als unsinnig zurück gewiesen.

Das genannte Bündel von Maßnahmen liefert im Ergebnis höchstens eine Beschreibung der empirischen Fakten. Als eine systematische Herleitung kann sie keinesfalls gelten. Um die empirischen Fakten zu beschreiben, sollte man anders vorgehen und den Feynmanregeln einfach die Vorschrift für die Bildung des Austauschterms bei identischen Teilchen hinzufügen.

Zu These 4: Die verschiedenen Teilchenbegriffe der Quantenfeldtheorie

In diesem Abschnitt werden zunächst die verschiedenen Teilchenbegriffe beschrieben, die in der Quantenfeldtheorie vorhanden sind, und danach derjenige, der darin nicht vorkommt. Bei dem zuletzt genannten Begriff handelt es sich um die real existierenden Elementarteilchen, mit denen die Experimentalphysiker arbeiten.

(a) Teilchen im Rahmen der Kopenhagener Deutung

Auch die Quantenfeldtheorie ist noch immer vom Dualismus Welle - Korpuskel der Kopenhagener Deutung der Quantentheorie geprägt. Danach ist die Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Eintreffen eines bestimmten Messergebnisses, während die Teilchen – und das ist hier der wesentliche Punkt – bis in die neuesten Ergebnisse die Quantenfeldtheorie hinein immer noch die Massenpunkte der klassischen Mechanik sind.

(b) Freie Teilchen

Das Wort 'frei' hat in der Quantenfeldtheorie zwei verschiedene Bedeutungen. Ein Teilchen heißt einerseits frei, wenn es keiner Wechselwirkung unterliegt und andererseits, wenn es einer homogenen Feldgleichung genügt. Diese beiden Bedeutungen des Wortes 'frei' scheinen gleichbedeutend zu sein. Sie werden in der Literatur auch so behandelt. Aber es gibt einen feinen Unterschied. Während die einlaufenden Teilchen bei Streuprozessen unabhängig voneinander sind, haben die auslaufenden Teilchen eine gemeinsame Wechselwirkung hinter sich und sind deshalb korreliert. Wie die Erläuterungen zu These 2 und These 3 gezeigt haben, ist das ein wesentlicher Unterschied.

(c) Virtuelle Teilchen

Die Bezeichnung 'virtuelles Teilchen' tritt nur im Zusammenhang mit der Störungsrechnung auf und steht dort als vornehm klingender, aber missverständlicher, Ausdruck für eine Streuwelle, die emittiert wird, sich gemäß einer Propagatorfunktion ausbreitet und anschließend durch Absorption verschwindet.

(d) Real existierende Elementarteilchen

Der entscheidende Teilchenbegriff jedoch fehlt. Er betrifft jene Vorstellungen, die sich aus der experimentellen Erfahrung ergeben. Dafür soll die Bezeichnung 'real existierendes Elementarteilchen' verwendet werden. Ein solches Teilchen ist frei in dem Sinne, dass es nicht mit anderen Teilchen in Wechselwirkung steht. Aber es genügt keiner homogenen Feldgleichung. Man

sollte ein solches Teilchen nicht als punktförmig ansehen, sondern ihm eine endliche Ausdehnung zuzuordnen. Für dessen Größe gibt es auch schon einen Kandidaten: die Comptonwellenlänge. Nach einer Bemerkung von Thirring [7] wird dadurch der Bereich abgesteckt, innerhalb dessen eine Ortsmessung nicht mehr möglich ist. Wollte man etwa ein Elektron weiter eingrenzen, dann müsste man dafür eine so hohe Energie aufwenden, dass dadurch das Teilchen zerstört würde. "... die Compton-Wellenlänge des Elektrons ... bestimmt ... wie weit sich das Wellenpaket eines Elektrons zusammendrücken lässt".

Im Anhang wird der Versuch unternommen, diese nur qualitativen Bemerkungen etwas weiter zu präzisieren.

Zu These 5: Pfadintegrale in der Quantenmechanik

Das Pfadintegral war ursprünglich als ein didaktisches Mittel gedacht, um damit den Unterschied zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik zu demonstrieren:

Wenn sich ein Teilchen der klassischen Mechanik in der Zeit zwischen a und b unter dem Einfluss eines Potentials bewegt, dann ist seine Bahn eindeutig bestimmt. In der Quantenmechanik gibt es für den Weg des Teilchens noch viele Möglichkeiten. Diese werden mit einer Wahrscheinlichkeitsamplitude gewichtet, die in der Nähe der klassischen Bahn am größten ist. Bei der mathematischen Beschreibung dieses Sachverhalts wird das Zeitintervall zwischen A und B in endlich viele Teilintervalle zerlegt und jeder Weg des Teilchens durch einen Streckenzug angenähert. Wenn man auch noch die räumlichen Koordinaten durch ein Gitter ersetzt, dann gibt es nur endlich viele solcher Streckenzüge. In diesem Gitter hätte die Summe über alle Wege noch einen Sinn. Aber beim Grenzübergang der Intervalle gegen Null gehen die Streckenzüge in reelle Funktionen über. Was dann ein Integral über alle derartigen Funktionen sein soll, bleibt unklar, zumal kein Funktionenraum festgelegt wird, aus dem die Funktionen gewählt werden dürfen.

Geht man vom Teilchenbild der Quantenmechanik zum Wellenbild über, dann ist das Pfadintegral nichts anderes als die zeitliche Ausbreitung eines Quantenzustandes unter dem Einfluss eines Potentials. Deren Bestimmung lässt sich jedoch viel einfacher erreichen, wenn man die Schrödingergleichung

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(t,x) = \psi(t,x)V(t,x) \quad (12)$$

zugrunde legt und die Gleichung

$$\psi(t,x) = \int dx G(t,x;t',x')\psi(t',x')(t',x') \quad (13)$$

mit der Greensfunktion $G(t,x;t',x')$ der Schrödingergleichung iteriert.

Zu These 6: Die Funktionaldarstellung in der Quantenfeldtheorie

In der Analysis haben erzeugende Funktionen die Aufgabe, das Bildungsgesetz von Zahlenfolgen in geschlossener Form darzustellen. Auf einer höheren Ebene kann man Funktionale

$$F(j) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dy_1 \dots dy_N f_N(y_1 \dots y_N) j(y_1) \cdot \dots \cdot j(y_N) \quad (14)$$

bilden und dazu verwenden, Folgen von symmetrischen Funktionen in geschlossener Form zusammenzufassen. Mit der Definition

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} j(y) = \delta(x - y) \quad \frac{\delta}{\delta j(x)} (F(j) \cdot G(j)) = \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} (F(j)) \right) \cdot G(j) + F(j) \frac{\delta}{\delta j(x)} G(j) \quad (15)$$

der Funktionalableitung erhält man

$$f_N(x_1 \dots x_N) = \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta j(x_N)} F(j) |_{j=0} \quad (16)$$

für die Funktionswerte der Funktion f_N . Die wesentlichen Ergebnisse der Störungsrechnung für die Feldgleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi(x) = g \varphi^2(x) \quad (17)$$

mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) + \frac{g}{3} \varphi^3 \quad (18)$$

und der Propagatorfunktion Δ_F lassen sich in geschlossener Form als

$$F(j) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dy_1 \dots dy_N \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta j(x_N)} \exp\left(\left(\frac{\delta}{\delta j(t)}\right)^3\right) \exp \int \int dz dz' j(z) \Delta_F(z - z') j(y_1) \cdot \dots \cdot j(y_N) \quad (19)$$

darstellen. Dabei wurden Zahlfaktoren weggelassen. Die Begründung erfolgt im Anhang. Sie lässt sich auf andere Beispiel übertragen.

Zusammenfassung

Bei einer kritischen Analyse der Quantenfeldtheorie zeigt sich, dass man die Quantenfeldtheorie allein mit den Mitteln der klassischen Feldtheorie rekonstruieren kann. Im Einzelnen werden folgende Thesen behauptet und bewiesen: (1) Die Störungsrechnung kann allein mit den Hilfsmitteln der klassischen Feldtheorie durchgeführt werden. (2) Voneinander unabhängige Teilchen sind nicht korreliert. (3) Auslaufende Teilchen von Streuprozessen sind korreliert. Aber die übliche Herleitung der Quantenstatistik ist fehlerhaft. (4) In der Quantenfeldtheorie gibt es eine

verwirrende Fülle von Teilchenbegriffen. Aber eine präzise Beschreibung der real existierenden Elementarteilchen fehlt. (5) Die Pfadintegraldarstellung ist im Teilchenbild der Quantentheorie nicht klar definiert. Im Wellenbild ist sie nur eine andere Darstellung für die Ausbreitung von Quantenzuständen. (6) Die Funktionaldarstellung ist nichts anderes als eine gedrängte Fassung der Störungsrechnung.

Literatur

- [1] J.D. Bjorken/S.D. Drell: Relativistische Quantenmechanik, Mannheim (Bibl. Inst.), 1990
- [2] J.D. Bjorken/S.D. Drell: Relativistische Quantenfeldtheorie, Mannheim (Bibl. Inst.), 1993
- [3] M. E. Peskin/D. V. Schroeder: An Introduction to Quantum Field Theory, Reading (Mass.), 1995
- [4] S. Weinberg: The Quantum Theory of Fields Bd. 1, Cambridge, 1995, Bd. 2, Cambridge, 1996
- [5] M. Maggiore: A Modern Introduction to Quantum Field Theory, Oxford University Press, 2005
- [6] M. Srednicki: Quantum Field Theory, Cambridge, 2007
- [7] W. Thirring: Einführung in die Quantenelektrodynamik, Wien, 1955
- [8] H. Lehmann/K. Symanzik/W. Zimmermann: Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien, II Nuovo Cimento, 1, 1954, 205
- [9] E. Schrödinger: Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makrophysik, Die Naturwissenschaften, 28, 1926, 664
- [10] W. Heisenberg: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Z.f.Phys., 43, 1927, 172
- [11] F. Steiner: Schrödinger's Discovery of Coherent States, Physica B, 151 1988, 323

Anhang 1: Analyse der LSZ-Reduktion

Die Aufgabe besteht darin, Übergangswahrscheinlichkeiten auf die Vakuum Erwartungswerte eines trunkierten und zeitgeordneten Produkts zurückzuführen. In der Originalarbeit [8] wird diese Aufgabe für ein Klein-Gordon-Feld gelöst. Man kann die Idee aber auch genau so gut an der Schrödinger-Gleichung für eine räumliche Dimension demonstrieren. Die Übertragung auf die Klein-Gordon-Gleichung und auf die Dirac-Gleichung erfolgt später. Um die folgende Rechnung nicht zu unterbrechen, seien zwei Dinge vorweg genannt.

Erstens: Der Operator $a_{ein}(p)$ erzeugt den Zustand $|p_{ein}\rangle$ eines einlaufenden freien Teilchens mit dem Impuls p_{ein} aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$. Er kann in der Form

$$a_{ein}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^p(t, x) \varphi_{ein}(t, x)$$

mit dem Operator φ_{ein} für das einlaufende Feld und einer Lösung f^p der homogenen Schrödinger-
gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x)$$

geschrieben werden.

Zweitens: Die Asymptotenbedingung garantiert die Existenz der beiden Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \langle \phi | \varphi(t, x) | \psi \rangle = \langle \phi | \varphi_{ein}(t, x) | \psi \rangle$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle \phi | \varphi(t, x) | \psi \rangle = \langle \phi | \varphi_{aus}(t, x) | \psi \rangle$$

für beliebige Zustände ϕ und ψ und den Operator φ unter Weglassen von Normierungsfaktoren.

Erstes Beispiel

Reduktion von p'_{ein} in $\langle k | p'_{ein} \rangle$ durch eine Abfolge von einzelnen Schritten.

Zunächst wird der Zustand $|p'_{ein}\rangle$ aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ erzeugt.

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = \langle k | a_{ein}(p') | 0 \rangle$$

Durch Erweiterung nach dem Schema $a = b - (b - a)$ folgt daraus

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = \langle k | a_{aus}(p') | 0 \rangle - (\langle k | a_{aus}(p') - a_{ein}(p') | 0 \rangle)$$

Dabei verschwindet der erste Summand und es bleibt

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = -(\langle k | a_{aus}(p') - a_{ein}(p') | 0 \rangle)$$

Beide Operatoren werden mit einer Testfunktion verschmiert.

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = - \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (\varphi'_{aus}(t', x') - \varphi_{ein}(t', x')) f^{p'}(t', x') | 0 \rangle$$

Durch Anwendung der Asymptotenbedingung folgt

$$\begin{aligned} \langle k | p'_{ein} \rangle = & - \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t', x') f^{p'}(t, x) | 0 \rangle \\ & + \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi'(t', x') f^{p'}(t', x') | 0 \rangle \end{aligned}$$

Das wird zusammengefasst zu

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = - \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' (\lim_{t' \rightarrow +\infty} - \lim_{t' \rightarrow -\infty}) \varphi'(t', x') f^{p'}(t', x') | 0 \rangle$$

Durch Umformung nach dem Schema $f(b) - f(a) = \int_a^b dt' \frac{\partial}{\partial t'} f(t', x')$ folgt

daraus das Zwischenergebnis

$$\langle k | p'_{ein} \rangle = - \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial t'} (\varphi'(t', x') f^{p'}(t', x')) | 0 \rangle$$

Die Ableitung des Produkts lautet

$$\frac{\partial}{\partial t'} (\varphi'(t', x') f^{p'}(t', x')) = \left(\frac{\partial}{\partial t'} \varphi'(t', x') \right) f^{p'}(t', x') + \varphi'(t', x') \left(\frac{\partial}{\partial t'} f^{p'}(t', x') \right)$$

Weil $f^{p'}$ eine Lösung der homogenen Schrödingergleichung ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t'} f^{p'}(t', x') = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} f^{p'}(t', x')$$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial t'} (\varphi'(t', x') f^{p'}(t', x')) = \left(\frac{\partial}{\partial t'} \varphi'(t', x') \right) f^{p'}(t', x') + \frac{i\hbar}{2m} \varphi'(t', x') \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} f^{p'}(t', x') \right)$$

Wenn man nach dieser Gleichung oben einsetzt und zweimal nach x partiell integriert, wobei die Randterme verschwinden, dann folgt daraus das Ergebnis

$$\langle k | p' e_{in} \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f^{p'}(t', x') \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \langle k | \varphi'(t', x') | 0 \rangle$$

Zweites Beispiel

Umwandlung von $\langle k | p'_{ein} p_{ein} \rangle$ in einen Vakuum Erwartungswert. Dabei soll p_{ein} zu φ gehören und p'_{ein} zu φ' .

Nach dem gleichen Verfahren wie im ersten Beispiel kann man p'_{ein} eliminieren. Der Anfang der Umformung lautet

$$\langle k | p'_{ein} p_{ein} \rangle = \langle k | a_{ein}(p') | p_{ein} \rangle$$

Nach einer Anzahl von Schritten, die denen von Beispiel 1 entsprechen, erhält man

$$\langle k | p'_{ein} p_{ein} \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f^{p'}(t', x') \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \langle k | \varphi'(t', x') | p_{ein} \rangle$$

Auch bei der Reduktion von $\langle k | \varphi(t', x') | p_{ein} \rangle$ kann man wie im ersten Beispiel vorgehen. Zuerst wird der Zustand $| p_{ein} \rangle$ aus dem Vakuumzustand $| 0 \rangle$ erzeugt. Das ergibt

$$\langle k | \varphi(t', x') | p_{ein} \rangle = \langle k | \varphi(t', x') a_{ein}(p) | 0 \rangle$$

Durch Erweiterung nach dem Schema $a = b - (b - a)$ folgt

$$\langle k | \varphi(t', x') | p_{ein} \rangle = \langle k | a_{aus}(p) \varphi(t', x') | 0 \rangle - \langle k | (a_{aus}(p) \varphi(t', x') - \varphi(t, x) a_{ein}(p)) | 0 \rangle$$

Nach einigen weiteren Schritten erhält man

$$\begin{aligned} \langle k | \varphi(t', x') | p_{ein} \rangle = & - \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) \varphi'(t', x') f^p(t, x) | 0 \rangle \\ & + \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi'(t', x') \varphi(t, x) f^{p'}(t, x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

An dieser Stelle kommt das zeitgeordnete Produkt herein. Mit der Definition

$$Z(\varphi, \varphi') = \theta(t - t') \varphi(t, x) \varphi'(t', x') - \theta(t' - t) \varphi'(t', x') \varphi(t, x) \quad (***)$$

bei der im Hinblick auf die spätere Diskussion absichtlich $Z(x, y)$ anstatt, wie üblich,

$T(x, y)$ geschrieben wird, erhält man nach einigen Zwischenschritten das Ergebnis

$$\langle k | \varphi(t', x') | p_{ein} \rangle = \langle k | \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left(\frac{\partial}{\partial t} (Z(\varphi(t, x) \varphi'(t', x'))) f^p(t, x) \right) | 0 \rangle$$

und dann das Endergebnis

$$\langle 0|p_{ein}p'_{ein} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \\ f^p(t, x) f^{p'}(t', x') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \right) \langle k|Z(\varphi(t, x)\varphi'(t', x'))|0 \rangle$$

Damit ist der Erwartungswert $\langle k|p'_{ein}p_{ein} \rangle$ auf den Erwartungswert eines trunkierten und zeitgeordneten Produkts zurückgeführt.

Drittes Beispiel

Umwandlung von $\langle p'_{aus}|p_{ein} \rangle$ in einen Vakuum Erwartungswert

In diesem Fall wird zunächst der Zustand $\langle p'_{aus}|$ erzeugt. Das ergibt

$$\langle p'_{aus}|p_{ein} \rangle = \langle 0|a_{aus}(p')|p_{ein} \rangle$$

Die Erweiterung erfolgt diesmal nach dem Schema $a = b + (a - b)$ und somit

$$\langle p'_{aus}|p_{ein} \rangle = \langle 0|a_{ein}(p')|p_{ein} \rangle + \langle 0|a_{aus}(p') - a_{ein}(p')|p_{ein} \rangle$$

Nach Wegfall des ersten Summanden bleibt

$$\langle p'_{aus}|p_{ein} \rangle = \langle 0|a_{aus}(p') - a_{ein}(p')|p_{ein} \rangle$$

Wie im ersten Beispiel ergibt der Operator zwischen den beiden Zuständen nach einigen Zwischenschritten ein Ergebnis mit dem Operator $\varphi'(t', x')$. Die Auswertung von $\langle 0|\varphi'(t', x')|p_{ein} \rangle$ ergibt dann wie im zweiten Beispiel wieder das zeitgeordnete Produkt.

Übertragung auf andere Feldgleichungen

Beim Übergang zu einem neutralen skalaren Feld tritt zunächst nur eine Änderung im Zusammenhang mit der Klein-Gordon-Gleichung auf. Das Verschmieren mit einer Testfunktion f erfolgt jetzt durch den Übergang von $\varphi(t, x)$ zu $\varphi^f(t, x)$, definiert durch

$$\varphi^f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (f(t, x) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) - \varphi(t, x) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x))$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f) &= f \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \varphi \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \\ &= f \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \varphi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) f \\ &= f \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - f \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \varphi + d \\ &= f \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \varphi + d \\ \frac{\partial}{\partial t} (f \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi - \varphi \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f) &= f \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \varphi + d \end{aligned}$$

gilt in diesem Fall

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty}\right) \varphi^f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx f \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 \right) \varphi$$

Das Ergebnis entspricht dem für die Schrödingergleichung, jedoch mit anderen Differenzialoperatoren.

Bei drei Raumdimensionen wählt man eine Testfunktion, die der Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + m^2 \right) f(t, x_1, x_2, x_3) = 0$$

genügt, und dehnt die partielle Integration auf alle drei räumlichen Ableitungen aus. Um Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Mehrteilchenzuständen zu berechnen, muss man die Reduktion für jedes Teilchen einzeln durchführen. Für das skalare Feld lautet das Ergebnis

$$\begin{aligned} \langle q_1 \dots q_m | p_1 \dots p_n \rangle &= (-1)^{m-n} \int \prod_{i=1}^m d^4 x_i \prod_{j=1}^n d^4 y_j f_{p_i}(x_i) f_{q_j}^*(y_j) \\ &\times (\square_{x_i} + m^2)(\square_{y_j} + m^2) \langle 0 | T \{ \varphi^*(x_1) \dots \varphi(y_m)^* \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) \} | 0 \rangle \end{aligned}$$

für alle $p_i \neq q_j$. Dabei wurden wieder Normierungskonstanten weggelassen.

Wenn man die homogene Diracgleichung

$$\left(i\gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \partial_i - m \right) \psi = 0$$

mit $\frac{c}{i} \gamma^0$ multipliziert und dann koordinatenweise aufschreibt, erhält man ein System

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a^j \frac{\partial}{\partial x^j} + b \right) \psi_i = 0$$

von vier linearen Gleichungen. Daher kann man für jede einzelne Gleichung wie im Beispiel 1 des vorigen Abschnitts vorgehen.

Anhang 2: Zum Teilchenbegriff in der Quantenfeldtheorie

Der Anhang enthält drei Teile:

- (1) einen kurzen Bericht über den Versuch Schrödingers, Teilchen als Wellenpakete zu interpretieren, und über die Zerstörung dieser Illusion durch Heisenberg
- (2) einen Versuch, den Gedanken Schrödingers wieder aufzugreifen und mit den Mittel, die heute zur Verfügung stehen, wenigstens als Ansatz zu formulieren.
- (3) eine kritische Wertung der Kopenhagener Deutung.

Im Einzelnen:

(1) Eine historische Bemerkung

Nachdem Einstein 1905 aus experimentellen Ergebnissen und theoretischen Überlegungen gefolgert hatte, dass es zum elektromagnetischen Feld auch ein Teilchen geben müsse, das seitdem allgemein Photon genannt wird, hatte de Broglie 1924 die Idee, diese Zuordnung umzukehren und allen materiellen Objekten ein Feld zuzuordnen. Das war der Beginn der Wellenmechanik. Sie wurde von Schrödinger durch die nach ihm benannte Gleichung weiter ausgebaut. Der harmonische Oszillator gilt seitdem als Paradebeispiel für den Übergang von der klassischen Mechanik zur Wellenmechanik.

Ein nächster Schritt bestand in dem Ansatz von Schrödinger [9] Elementarteilchen als Wellenpakete zu beschreiben. Zu diesem Zweck entwickelte er ein Modell, bei dem das Wellenpaket durch Überlagerung von Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators aufgebaut wird. Der entscheidende Punkt dabei war, dass ein solches Wellenpaket stabil ist. Aber die Hoffnung, man könne in ähnlicher Weise auch die Elektronen auf den Umlaufbahnen der Atome durch Pakete von Materiewellen beschreiben, zerschlug sich. Denn Heisenberg [10] wies in der gleichen Arbeit, in der er die Unschärferelationen veröffentlichte, nach, dass Schrödingers Modell ein äquidistantes Energiespektrum besitzt und deshalb das einzige Beispiel ist, bei dem das Wellenpaket stabil bleibt. Damit war der Ansatz Schrödingers erledigt. Das heute übliche Argument gegen derartige Versuche besteht in dem Hinweis auf das Zerfließen der Wellenpakete, vergleichbar mit der Ausbreitung eines Wärmepols auf wärmeleitendem Material.

(2) Ein erneuter Versuch

Nun soll der Versuch unternommen werden, den ursprünglichen Ansatz Schrödingers mit den Mitteln, die heute zur Verfügung stehen, wieder aufzugreifen.

Zu diesem Zweck muss man den Rahmen der Quantenmechanik einschließlich der lineare Algebra des Hilbertraums als dem dazu gehörigen mathematischen Werkzeug verlassen und zur Quantenfeldtheorie übergehen. Denn darin wird die Wechselwirkung zwischen den Teilchen angemessen respektiert. Die theoretische und experimentelle Analyse von Streuexperimenten ist geradezu ein Hauptthema dieser Theorie. Deshalb soll jetzt versucht werden, auf dieser Basis ein Modell für ein Elektron anzugeben.

Angenommen, ein Wellenpaket liege vor, das zu einem freien Elektron gehört. Dann ist diese Annahme nur eine Fiktion. In Wirklichkeit ist das Elektron an ein elektromagnetisches Feld gekoppelt. Also findet Wechselwirkung statt, die auch als Selbstwechselwirkung des Gesamtsystems verstanden werden kann. Der Ansatz der Störungsrechnung führt dazu, dass sich das Elektron mit einer Wolke aus virtuellen Photonen, Elektronen und Positronen umgibt. In einem weiteren Schritt kann man das ursprünglich gegebene Elektron selbst als eines der virtuellen Teilchen ansehen. Unter der Annahme, dass dieses Gebilde sich auch über die Störungsrechnung hinaus als stabil erweist, hat man ein Modell für ein real existierendes Elektron. Es ist frei in dem Sinne, dass es nicht in Wechselwirkung mit anderen Teilchen steht, aber unfrei insofern, als es keiner homogenen Feldgleichung genügt.

Das skizzierte Modell wird sich kaum mit den heute vorhandenen Mitteln berechnen lassen. Trotzdem dürfte es immer noch besser sein als das punktförmige Teilchen oder die unendlich ausgedehnte Welle.

(3) Kritische Würdigung der Kopenhagener Deutung

Wie ging es in der Physik nach dem missglückten Versuch von Schrödinger weiter?

Nach einer Phase der Ratlosigkeit entschloss man sich, die Teilchen weiterhin als punktförmig zu behandeln und das Wellenpaket als die Amplitude für eine Wahrscheinlichkeit anzusehen. Um diesen Dualismus der Kopenhagener Deutung zu verstehen, ist es gut zu wissen, dass durch Heisenberg und v. Weizsäcker die Transzendentalphilosophie Kants in die Kopenhagener Diskussion eingebracht wurde. Nach Kant können wir nichts über das Ding ‚an sich‘ wissen, außer, wie es uns in den Formen unserer Anschauung und unseres Denkens erscheint, eine Auffassung, die sich unmittelbar in die Physik übersetzen lässt. Was ein Teilchen ist, das können wir nicht wissen, sondern nur so, wie es sich in einem Experiment zeigt, entweder als Welle oder als Korpuskel.

Eine andere philosophische Richtung, welche die Kopenhagener Deutung geprägt hat, ist eine ausgesprochen positivistische Haltung, zu der insbesondere Heisenberg neigte. Sie zeigt sich in dem Satz, dass der Wert einer physikalischen Größe erst dann existiert, wenn diese Größe gemessen wird. Diese Auffassung lässt sich aber nicht widerspruchsfrei durchhalten. Denn in der Physik das Experiment der letzte Prüfstein für eine Behauptung. Also müsste man mit einer Messung prüfen, ob ein Messwert bereits vor einer Messung existiert. Das aber ist ein Widerspruch in sich.

Um bei dieser Gelegenheit auch andere Teile an der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik zu würdigen, seien noch zwei Punkte angeführt.

Die Unschärferelation ist keine Besonderheit der Quantentheorie – hier verstanden als Bereich unterhalb der Planckschen Konstante \hbar - sondern erscheint bereits in der klassischen Feldtheorie als Unschärfe zwischen der mittleren Ausdehnung eines Wellenpakets im Ortsraum und der Bandbreite im Frequenzraum.

Die Einsicht, dass in der Quantentheorie der Einfluss des Messgeräts auf das zu messende Objekt nicht zu vernachlässigen ist, dürfte wohl die wichtigste Erkenntnis der Kopenhagener Deutung sein.

Anhang 3: Die Funktionaldarstellung in der Quantenfeldtheorie

Um die Gleichung

$$F(j) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dy_1 \dots dy_N \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta j(x_N)} \exp\left(\left(\frac{\delta}{\delta j(t)}\right)^3\right) \quad (20)$$

$$\exp \int \int dz dz' j(z) \Delta_F(z - z') j(y_1) \cdot \dots \cdot j(y_N)$$

weiter umzuformen, werden die beiden Exponentialausdrücke in Taylorreihen entwickelt mit dem Ergebnis

$$E = \sum_{V=0}^{\infty} \sum_{I=0}^{\infty} \left(\left(\frac{\delta}{\delta j(t)} \right)^3 \right)^V \cdot \left(\int \int dz dz' j(z) \Delta_F(z-z') j(z') \right)^I \quad (21)$$

Auch hier werden numerische Faktoren wegelassen, um die Beweisidee hervorzuheben.

Als nächstes muss die Algebra, die in $F(j)$ enthalten ist, in eine klare Anordnung gebracht werden. Zu diesem Zweck werden sowohl die Differenzialoperatoren als auch die verschiedenen Faktoren j durch ihre entsprechenden Koordinaten bezeichnet. Dann kann man die Folge der Differenzialoperatoren durch

$$(u_1, \dots, u_r) = (x_1, \dots, x_N; t_1 t_1 t_1, \dots, t_V t_V t_V) \quad (22)$$

wiedergeben und die Folge der Faktoren durch

$$(v_1, \dots, v_s) = (z_1 z'_1, \dots, z_I z'_I; y_1, \dots, y_n) \quad (23)$$

Für die Funktionen f_N erhält man dann

$$f_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{N,V,I} \int \dots \int dz_1 dz'_1 \dots dz_I dz'_I a(z_1 z'_1, \dots, z_I z'_I) (u_1, \dots, u_r) (v_1, \dots, v_s) |_{j=0} \quad (24)$$

Hierin muss r gleich s sein. Denn, falls $r > s$ sein sollte, gäbe es zu wenige Faktoren j und dann wäre der Integrand gleich Null. Wenn aber $r < s$ wäre, dann gäbe es zu viele Faktoren j und der Integrand wäre wegen des abschließenden $j = 0$ ebenfalls gleich Null. Nach Ausführung aller Ableitungen in dem Term

$$D = (u_1, \dots, u_r) (v_1, \dots, v_r) = \frac{\delta}{\delta j(u_1)} \cdot \dots \cdot \frac{\delta}{\delta j(u_r)} j(v_1) \dots j(v_r) \quad (25)$$

entsprechend den Ableitungsregeln für die Multiplikation erhält man als Zwischenergebnis

$$D = \sum_P \prod_{i=1}^r \frac{\delta}{\delta j(u_i)} j(v_{p_i}) = \sum_P \prod_{i=1}^r \delta(u_i - v_{p_i}) \quad (26)$$

Darin erstreckt sich die Summe über alle Permutationen

$$P : (1, \dots, r) \rightarrow (p_1, \dots, p_r)$$

Wenn man D in die Gleichung für $f_N(x_1, \dots, x_N)$ einsetzt, dann ist das Ergebnis ein Produkt von Propagatoren und δ -Funktionen, summiert über die vier Variablen N, V, I und P . Für jede Permutation P bewirkt die δ -Funktion $\delta(u_i - v_{p_i})$, dass dem Argument u_i in dem Propagator $\Delta_F(u_i - v_{p_i})$ ein anderes Argument v_{p_i} zugeordnet wird. Dann kann man das Ergebnis als

$$f_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{N,V,I,P} \int du_1 \dots \int du_r a(u_1 v_{p_1}, \dots, u_I v_{p_I}) \quad (27)$$

mit einem Produkt a von Propagatoren schreiben.

Um das Ergebnis mit Hilfe von Diagrammen darzustellen, werden die Variablen wie folgt interpretiert:

N = Anzahl der äußeren Linien

V = Anzahl der inneren Linien

I = Anzahl der Vertizes.

Die Permutation P legt die Symmetrie der Graphen fest.

Für eine feste Ordnung V der störungstheoretischen Näherung ist die Zahl der Linien endlich. Denn

$$3V = N + 2I \tag{28}$$

Dann gibt es auch nur endlich viele Produkte der Propagatoren in f_N . Die graphische Darstellung für festes V besteht aus einer Menge von unzusammenhängenden Graphen einschließlich solcher ohne äußere Linien. Die Ausdrücke für zusammenhängenden Graphen werden zu Feynmanintegralen, nachdem man alle numerischen und kombinatorischen Faktoren mit einbezogen hat.