Las geometrías de Weyl y la ecuación de movimiento

The geometries of Weyl and the motion equation

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. Definimos la geometría de Weyl y establecemos las dos tipos que existen: las integrables y las no integrables. Obtenemos la ecuacion de movimiento para una partícula libre aplicable en la geometría integrable de Weyl. Analizamos las dos formas que existen de abordar las ecuaciones de campo: suponer como únicos potenciales las componentes del tensor métrico o bien tomar tanto las componentes del tensor métrico como las componentes de la conexión métrica como potenciales del campo. Se analiza cómo se impone la calibración en cada una de estas dos opciones. Terminamos la investigación aplicando los anteriores resultados a las ecuaciones derivadas de algunas densidades lagrangianas.

Abstract. We define the Weyl geometry and we establish two types: integrable and nonintegrable. We obtain the equation of motion for a free particle in Weyl integrable geometry. We analyze the ways to obtain the field equations: take the components of the metric tensor as the only potentials or take the components of the metric tensor and the components of the metric connexion as the potentials of the field. We analyze how the calibration is imposed on each of these two options. We finished applying the results to the equations derived from some Lagrangian densities.

1. Introducción

En el año 1918 Hermann Weyl diseñó la primera teoría de campo unificado [1], [2], con la que pretendía explicar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético a partir de una base geométrica. En esencia la teoría de Weyl supone una variedad espacio-temporal tetradimensional de tensor métrico simétrico, sin torsión (es decir de conexión afín simétrica) y con un tensor de no-metricidad no nulo dado por la expresión

$$Q_{ikr} = D_r g_{ik} = -2 g_{ik} \phi_r \tag{1}$$

donde

$$d\phi = \phi_r dx^r$$

es una forma diferencial no necesariamente exacta, es decir que no queda garantizada la igualdad $\phi_r = \partial \phi / \partial x^r$. A la función ϕ_r (que es un tetravector) se le llama conexión métrica y en la teoría de campo unificado de Weyl es proporcional al potencial electromagnético. Si la conexión métrica es idénticamente nula, entonces el espacio de Weyl coincide con el de Riemann.

En la teoría de Weyl g_{ik} cumple el mismo papel que en la teoría general de la relatividad, a saber, es el tensor que nos informa de las propiedades métricas de la variedad y también son las componentes del potencial gravitatorio. El tetravector ϕ_r representa en la teoría de campo unificado de Weyl las componentes del tetrapotencial electromagnético, o para ser más precisos, ambos tetravectores son proporcionales entre sí.

La variedad de Weyl admite cambios en la calibración. Es decir, se pueden obtener nuevas componentes del tensor métrico a partir de la relación

$$g'_{ik} = \psi\left(x^r\right) g_{ik}$$

donde ψ es una función cualquiera de la posición espacio-temporal. La teoría de Weyl exige que las ecuaciones de campo y todas las restantes ecuaciones físicas, sean invariantes no sólo frente a transformaciones de coordenadas genéricas, sino también ante cambios de calibración. Consideremos dos calibraciones diferentes ψ y ψ', que dan lugar a dos nuevos tensores métricos

$$g'_{ik} = \psi g_{ik} \qquad g''_{ik} = \psi' g_{ik}$$

entonces al pasar de la calibración ψ a la ψ' el tensor métrico se transforma por

$$g''_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} \psi g_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} g'_{ik} = \lambda^2 g'_{ik} \tag{2}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2 por ser éste el exponente de la función λ en la ecuación de transformación. Fácilmente se encuentra que el tensor métrico en forma contravariante tiene de peso -2 y que el determinante del tensor métrico es de peso 8. De aquí se deduce que el peso de la conexión es 0 e igual propiedad tienen el tensor de curvatura $R^i{}_{kpq}$ y su contracción el tensor de Ricci R_{ik}; no obstante la curvatura escalar tiene de peso -2, mientras que las coordenadas espacio-temporales no tienen peso, ya que son independientes de la calibración.

La forma diferencia $d\phi$ también queda alterada en un cambio de calibración. Hallando la derivada covariante en ambos miembros de (2) se tiene

$$Dg''_{ik} = 2\lambda\, d\lambda g'_{ik} - 2\lambda^2 g'_{ik} d\phi,$$

que nos dice que después del cambio de calibración el espacio sigue siendo de Weyl, o sea deberá cumplirse (2)

$$Dg''_{ik} = -2g''_{ik}\, d\phi' = -2\lambda^2 g'_{ik}\, d\phi$$

e igualando los dos últimos resultdos se obtiene

$$d\phi' = d\phi - \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \phi'_k = \phi_k - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \tag{3}$$

que es la ley de transformación de la forma diferencial $d\phi$.

Las coordenadas de un punto del espacio no cambian en una transformación de calibración, pues solo son números que identifican al punto. El elemento de línea del espacio de Weyl queda modificado por la ley

$$ds' = \lambda\, ds$$

es decir, tiene de peso 1, por tanto la tetravelocidad $u^k = dx^k / d\tau$ ($d\tau$ es el tiempo propio de la partícula en movimiento) tendrá de peso -1.

Sea un vector de componentes A^k que con la calibración ψ tiene el módulo

$$A^2 = \psi g_{ik} A^i A^k$$

al hacer un cambio de calibración el módulo pasa a tomar un valor diferente

$$A'^2 = \psi' g_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2 .$$

Cuando hay un transporte paralelo DA^i es nula por definición, lo que implica que

$$dA^i = -A^j \Gamma_{jk}^{\ i}\, dx^k ,$$

mientras que la variación de las componentes covariantes será

$$DA_i = A^i D g_{ik} = -2A^i g_{ik} d\phi \quad \Rightarrow \quad dA_i = \Gamma_{ik}^{\ j} A_j dx^k - 2g_{ik} A^k d\phi. \tag{4}$$

Entonces cuando se traslada paralelamente un vector su módulo queda modificado

$$dA^2 = A_i\, dA^i + A^i dA_i ,$$

de donde se encuentra

$$dA = -A\,d\phi = -A\phi_k dx^k \,, \tag{5}$$

Las ecuaciones de campo se obtienen al aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$I = \int \sqrt{g}\,\mathfrak{L}\,d\Omega$$

donde debemos cuidar que el integrando sea invariante tanto frente a cambios de coordenadas como de calibración, lo que nos asegurará las correctas propiedades de invariancia de las ecuaciones de campo.

2 Geometrías integrables y no integrables de Weyl

El carácter de $d\phi$ permite hacer una clasificación de las geometrías de Weyl. Si $d\phi$ es una diferencial exacta entonces tenemos la geometría integrable de Weyl [3]. En caso contrario hablamos de geometría no integrable de Weyl. Las razones de estas denominaciones serán vistas más adelante.

Debemos notar que en las geometrías integrables de Weyl la conexión métrica no tiene que ser nula. No obstante, siempre es posible encontrar una calibración tal que con respecto a ella la conexión métrica sea idénticamente nula. En efecto, supongamos que la conexión métrica sea ϕ_k entonces si elegimos una calibración caracterizada por λ tal que

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} = \phi_k$$

y la nueva conexión métrica es nula por (3). Lo que significa que la nueva geometría que se obtiene de la anterior calibración es riemanniana, o sea, caracterizada porque la derivada covariante del tensor métrico es idénticamente nula. No obstante, aunque siempre es posible mediante un cambio de escala pasar de un espacio integral de Weyl a un espacio de Riemann, ambos tipos de espacios son diferentes y no son equivalentes.

Cuando un vector es trasladado paralelamente de un punto a otro su módulo varía como (5) y en general esta variación dependerá del camino seguido en la traslación, ya que

$$\delta A = -\int_\Gamma A\phi_k dx^k \tag{6}$$

es una integral de línea, siendo Γ la curva descrita por el vector en su desplazamiento. Pero en el caso de ser una geometría integrable de Weyl, (6) es integrable, en el sentido que sólo dependerá del punto de partida y de llegada del vector y no del camino seguido en su transporte paralelo; además, si el vector hace un recorrido cerrado no se registrará variación del módulo del vector.

En la teoría de campo unificado de Weyl el tensor

$$F_{ik} = \frac{\partial\phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}$$

se hace proporcional al tensor de campo electromagnético y en general será distinto de cero. Pero en la geometría integrable de Weyl F_{ik} es idénticamente nulo, lo que nos viene a decir que en esta geometría no se contempla el campo electromagnético.

Debemos notar que si hacemos un cambio local de escala en una variedad de Riemann, la convertiremos en una variedad de Weyl integrable. En efecto, sea g_{ik} el tensor métrico de una variedad de Riemann, entonces su derivada covariante es nula. Si hacemos la transformación de escala

$$g'_{ik} = \lambda^2 g_{ik}$$

obtendremos un nuevo tensor métrico. Al hallar su derivda covariante se obtiene

$$Dg'_{ik} = 2\lambda g_{ik}d\lambda + \lambda^2 Dg_{ik} = -2\left(-\frac{1}{\lambda}d\lambda\right)g'_{ik} = -2g'_{ik}d\phi$$

donde

$$d\phi = -d\lambda/\lambda$$

y es distinto de cero, lo que nos viene a decir que la variedad de Riemann se ha convertido en una variedad integrable de Weyl.

Nótese que si en vez de un cambio local de escala, lo que hacemos es un cambio global (es decir el mismo para todo punto de la variedad), entonces no será modificada la geometría riemanniana.

En la geometría no integrable de Weyl siempre es posible elegir (para cada punto de la variedad) una calibración tal que en ese punto sea nula la conexión métrica. En efecto, sea punto P_0 podemos elegir una nueva calibración definida por

$$\lambda = \exp\left[\phi_i\left(x^i - x_0^i\right)\right]$$

donde ϕ_i es la anterior conexión métrica y x_0^i las coordenadas de punto P_0. Entonces por (3) la nueva conexión métrica será nula en el punto P_0. No obstante, no es posible conseguir, mediante un cambio de calibración, anular la conexión métrica en todo punto de una variedad no integrable de Weyl.

En la geometría no integrable de Weyl la expresión (6) no es integrable, en el sentido de que el resultado de la integración dependerá del camino que siga el vector en su traslación paralela y no solamente de los puntos de partida y de llegada.

3 Ecuación de movimiento

En la teoría general de la Relatividad una partícula libre sigue una geodésica, de ecuación dada por

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + L_{ij}{}^k \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = 0 \tag{6}$$

donde $d\tau$ es el tiempo propio de la partícula y $L_{ij}{}^k$ son los símbolos de Christoffel, definidos por

$$L_{ij}{}^k = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij}\right).$$

Esta ley de movimiento no puede ser extendida a una variedad de Weyl ya que no es invariante frente a una transformación de escala; ni los símbolos de Christoffel, ni la tetravelocidad son invariantes frente a transformación de escala, en efecto sus leyes de transformación son

$$L'_{ij}{}^k = L_{ij}{}^k + \delta_i^k\left(\frac{1}{\lambda}\partial_j\lambda\right) + \delta_j^k\left(\frac{1}{\lambda}\partial_i\lambda\right) - g^{kt}g_{ij}\left(\frac{1}{\lambda}\partial_t\lambda\right) \tag{7}$$

y

$$u'^k = \frac{dx'^k}{d\tau'} = \lambda^{-1}\frac{dx^k}{d\tau}. \tag{8}$$

Es por lo tanto necesario obtener una ecuación de movimiento válida para geometrías de Weyl que debe tener la característica de ser invariante frente a transformaciones de escala.

El razonamiento que seguimos es válido para geometrías de Weyl integrables [4], [5], [6], [7], [8]. Obtenidas las ecuaciones de campo hacemos un cambio de escala geodésico, de tal forma que se anulará la conexión métrica en todo punto, o sea, las ecuaciones de campo estarán definidas en un espacio de Riemann; entonces la ecuación de movimiento será la línea geodésica (6). Ahora hacemos un nuevo cambio de calibración, caracterizado por la función λ, por lo que los símbolos de Christoffel y la tetravelocidad cambian por (7) y (8). Debemos advertir en este punto que en la ecuación geodésica aparecen los símbolos de Christoffel y no la conexión afín de la variedad.

En la nueva escala

$$\frac{du^k}{d\tau} = \lambda\frac{d}{d\tau'}\left(\lambda u'^k\right) = \lambda\partial_t\lambda u'^t + \lambda^2\frac{du'^k}{d\tau'}$$

y usando (7) la ecuación (6) queda

$$\frac{du'^k}{d\tau'}+L'^{\ k}_{ij}u'^i u'^j-\frac{1}{\lambda}\partial_t\lambda u'^t u'^k+\frac{1}{\lambda}\partial^k\lambda u'^t u'_t=0.$$

Como la conexión métrica en el espacio de Riemann es nula, entonces por (3) la nueva conexión métrica es

$$\phi'_k=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k}$$

entonces la ecuación de movimiento de una partícula libre en una variedad integrable de Weyl es

$$\frac{du^k}{d\tau'}+L^{\ k}_{ij}u^i u^j+\phi_t u^t u^k-\phi^k u^t u_t=0 \qquad (9)$$

para simplificar hemos quitado las primas. Nótese que, como era de esperar, si la conexión métrica es nula reencontramos la ecuación de la geodésica en una variedad de Riemann.

Teniendo en cuenta (7) y (8) se comprueba que en una trasnformación de calibración la ecuación (9) queda invariable, lo que está en consonancia con la exigencia de que las ecuaciones físicas sean invariantes frente a transformaciones de escala.

Los dos últimos sumandos de (9) no caben entenderlos como pequeñas perturbaciones, sino que pueden tener valores del mismo orden que los términos clásicos, esto dependerá de la calibración que se haya elegido.

4 Ecuaciones de campo

Elegida una densidad lagrangiana podemos proceder de dos maneras para obtener las ecuaciones de campo gravitatorio en las teorías que utilizan la geometría integrable de Weyl. Una de ellas, usada por la gravedad conforme, consiste en aplicar a la acción del campo el principio variacional de Hamilton, variando exclusivamente las componentes del tensor métrico. Se obtendrán diez ecuaciones de campo, tantas como componentes diferentes del tensor métrico. En las ecuaciones de campo que se obtengan, además del tensor métrico y sus derivadas, aparecerán las componentes de la conexión métrica, que quedarán indeterminadas.

Las ecuaciones de campo así halladas son invariantes tanto frente a cambios de coordenadas como a cambios de calibración. Por lo tanto su solución no va a depender de la calibración elegida. Por esta razón se elige la calibración geodésica que, en las geometrías integrables de Weyl, consigue anular las componentes de la conexión métrica. Entonces las nuevas ecuaciones de campo sólo contendrán al tensor métrico y sus derivadas. Ahora se estará en una variedad de Riemann (ya que la derivada covariante del tensor métrico es nula, por serlo la conexión métrica) y la ecuación de la línea geodésica representará la ecuación de movimiento de una partícula libre.

Nótese que si a continuación hacemos un nuevo cambio de calibración, entonces aparecerá una conexión métrica distinta de cero y ya no será válida la ecuación de la geodésica como ecuación de movimiento, sino que tendremos que emplear la ecuación (9); no obstante, los resultados obtenidos serán indiferentes de la calibración que se tome y su elección sólo dependerá de la simplificación matemática que con ella se consiga.

La otra forma de obtener conjuntamente las ecuaciones de campo gravitatorio consiste en considerar desde un principio que tanto las componentes del tensor métrico como las componentes de la conexión métrica son variables de campo, es decir, tendremos en total 14 potenciales: 10 correspondiente al tensor métrico y 4 a la conexión métrica. De nuevo aplicamos el principio de Hamilton, pero ahora obtendremos dos conjuntos de ecuaciones, uno que resultará de la variación del tensor métrico y el otro el que resulte de la variación de la conexión métrica.

Entonces podremos resolver conjuntamente las dos ecuaciones de campo y obtener una solución tanto para el tensor métrico como para la conexión métrica. Los dos conjuntos de ecuaciones de campo obtenidas serán invariantes frente a cambios de coordenadas y ante cambios de calibración. No importa qué calibración se elija, ya que los resultados serán los mismos.

Ahora podemos fijar la calibración,de forma arbitraria, pero persiguiendo la simplificación de las ecuaciones de campo resultantes. Se podría imponer la calibración geodésica, haciendo que las componentes de la conexión se anulen, o bien fijaríamos otra calibración diferente.

Nótese que si elegimos la calibración geodésica entonces la ecuación de movimiento coincide con la ecuación geodésica, porque de hecho nos encontraríamos en una variedad de Riemann. Naturalmente habría que usar (9) si se fijara otra calibración diferente.

Cabe preguntarse si cualquier calibración es capaz de representar el mundo físico, o si bien la naturaleza exige una definida calibración, postura que fue defendida por Eddington y el mismo Weyl en su defensa ante las críticas que sufrió la teoría por parte de Einstein y Pauli.

5 Aplicación a la densidad lagrangiana de Weyl

Como ejemplo vamos a elegir la densidad lagrangiana de la teoría de campo unificado de Weyl, cuya acción es

$$I = \int \sqrt{g} R^2 \, d\Omega,$$

donde R es la curvatura escalar y suponemos que no hay campo electromagnético, es decir que el tensor de campo electromagnético es nulo, lo que significa que nos encontramos con una geometría integrable de Weyl, ya que al ser $F_{ik} = 0$ la conexión métrica ϕ_k se puede poner como una divergencia.

Ahora aplicamos el principio variacional de Hamilton a la acción I para lo cual hacemos variar arbitrariamente el tensor métrico, con la única condición de que tanto esta variación como sus primeras derivadas sean nulas en los limites de la integración.

Tras un largo cálculo se obtienen las siguientes ecuaciones de campo gravitatorio [9]

$$\begin{aligned} &RR_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R^2 - g_{ik} D_l^* R^{,l} + D_i^* R_{,k} + 3 g_{ik} \phi^l R_{,l} + 2 g_{ik} R D_l^* \phi^l - \\ &-3\phi_i R_{,k} - 3\phi_k R_{,i} - R D_i^* \phi_k - R D_k^* \phi_i + 8 R \phi_i \phi_k - 2 g_{ik} R \phi^l \phi_l = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

donde D^* es la derivada covariante calculada a partir de los símbolos de Christoffel y no a partir de la conexión afín de la variedad. La ecuación (10) es simétrica respecto a los índices *i, k*. R_{ik} y R representa el tensor de Ricci y la curvatura escalar calculados en la geometría de Weyl, es decir

$$R_{ik} = R_{ik}^* + F_{ik} - 2 D_k^* \phi_i - g_{ik} D_l^* \phi^l + 2\phi_i \phi_k - 2 g_{ik} \phi_l \phi^l$$
$$R = R^* - 6 D_l^* \phi^l - 6 \phi_l \phi^l$$

donde R_{ik}^* y R^* es el tensor de Ricci y la curvatura escalar pero calculadas a partir de los símbolos de Christoffel y no a partir de la conexión afín. Nótese que R_{ik} no es simétrico por la presencia del tensor F_{ik}, pero como en nuestro caso este tensor es nulo, entonces el tensor de Ricci es simétrico.

Ahora volvemos a la acción de campo I y aplicamos el principio variacional de Hamilton pero haciendo una variación arbitraria de las componentes de la conexión métrica, con la única condición de que se anule en los límites de integración. Las ecuaciones que se obtienen son

$$\phi_i = \frac{1}{2R} \frac{\partial R}{\partial x^i} \tag{11}$$

que representa las ecuaciones del campo de la conexión métrica. Notemos que (10) y (11) son ecuaciones tensoriales invariantes frente a transformaciones de calibración. *

* Es fácil comprobar que si usamos, por ejemplo, la acción

$$I = \int \sqrt{g} R^{ik} R_{ik} \, d\Omega,$$

que también es invariante de escala, entonces la ecuación de campo de la conexión métrica es

A continuación habría que resolver conjuntamente el sistema de ecuaciones diferenciales (10) y (11) y obtener el tensor métrico y la conexión métrica. Pero como los dos conjuntos de ecuaciones no dependen de la calibración, elegimos una calibración que nos simplifique sensiblemente la matemática implicada. Como nos encontramos en una geometría integrable de Weyl es siempre posible elegir una calibración tal que la nueva conexión métrica ϕ'_k sea nula. La calibración que buscamos es

$$\lambda = \sqrt{R}$$

entonces por (3) encontramos $\phi'_k = 0$ y la ecuación (10) queda después de la recalibración

$$R' R'_{ik} - \frac{1}{4} g'_{ik} R'^2 - g'_{ik} D'^*_l R'^{,l} + D'^*_i R'_{,k} = 0 \tag{12}$$

que admite aún una nueva simplificación. Si contraemos (12) se encuentra

$$D'^*_l R'^{,l} = 0,$$

además como (11) es invariable ante cambios de calibración, seguirá siendo válida aún cuando se haya elegido la calibración geodésica, pero entonces la curvatura escalar que se obtiene tras la recalibración tiene que ser constante y por tanto nula su derivada. Entonces la ecuación (12) nos queda finalmente

$$R R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R^2 = 0 \tag{13}$$

donde para simplificar hemos eliminado las primas. Si ponemos la curvatura escalar como

$$R = -4\Lambda$$

entonces (13) queda

$$R_{ik} + \Lambda g_{ik} = 0, \tag{14}$$

que es la misma ecuación que surge de la teoría general de la Relatividad en ausencia de materia y con término cosmológico Λ.

Démonos cuenta que la constante cosmológica surge en nuestra derivación como una consecuencia de la teoría y no es impuesta *ad hoc* como ocurre en la Relatividad General. Notemos también que en ausencia de campo electromagnético no podemos recuperar la ecuación de campo gravitatorio de Einstein en presencia de materia, lo que sí se puede hacer suponiendo no nulo el tensor de campo electromagnético; es decir, en la teoría de campo unificado de Weyl la materia debe tener un origen electromagnético.

La ecuación (14) tiene la misma solución estática con simetría esférica que en la teoría general de la Relatividad, es decir

$$ds^2 = b(r) c^2 dt^2 - a(r) dr^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - r^2 d\theta^2,$$

con

$$b = \frac{1}{a} = 1 + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{R}{12} r^2,$$

la correspondiente ecuación de movimiento de una partícua libre es la ecuación geodésica (6).

6 La gravedad conforme como una geometria integrable de Weyl

Desde hace unos años se ha renovado el interés por las ecuaciones de la gravitación que se obtienen de densidades lagrangianas invariantes frente a calibración, es decir que son invariantes

---

$$2D^*_k R^k_l + D^*_l R + 4R^k_l \phi_k - 4R\phi_l = 0$$

si ahora fijamos la calibración por $\phi_l = 0$ estas ecuaciones se reducen a

$$2D_k R^k_l + D_l R = 0.$$

conformes [10], [11], [12], [13]. Una posibilidad que ha sido especialmente estudiada, son las ecuaciones de campo derivadas de la densidad lagrangiana

$$\sqrt{g}\,\mathfrak{L} = \sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq} \tag{15}$$

donde $C^{i}{}_{kpq}$ es el tensor de Weyl que tiene como características ser un tensor de cuarto orden con las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y ser invariante ante cambios de calibración; es definido por

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right)R. \tag{16}$$

Es fácil comprobar que (14) es un invariante de escala, por esta razón podemos elegir una calibración determinada, en la seguridad que las ecuaciones de campo gravitatorio resultantes mantendrán la misma forma. Hay que tener presente que en esta teoría no se derivan las ecuaciones de campo de la conexión métrica. Entonces podemos elegir una calibración antes de proceder a aplicar el teorema de Hamilton. Como ocurre en otras ocasiones, la calibración más adecuada es la geodésica. Como suponemos que el tensor de campo electromagnético es nulo, entonces obtenemos que la nueva conexión métrica es nula y nos encontraremos en una variedad de Riemann.

Un cálculo directo combinando (15) y (16) nos lleva a

$$\sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq} = \sqrt{g}\left(R_{ikpq}R^{ikpq} - 2R_{ik}R^{ik} + \frac{1}{3}R^{2}\right),$$

no obstante, la variación de la acción basada en la anterior expresión admite una nueva simplificación, de tal forma que se reduce a

$$\delta\int\sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq}d\Omega = \delta\int\sqrt{g}\left(R_{ik}R^{ik} - \frac{1}{3}R^{2}\right)d\Omega. \tag{17}$$

Debemos observar que estas ecuaciones de la teoría de la gravitación conforme son válidas en el espacio de Riemann y no en el de Weyl, es decir estamos suponiendo que la conexión métrica es nula. Entonces si se hace un cambio de calibración dejará de ser nula la conexión métrica y la variedad tendrá una geometría integrable de Weyl.

Al aplicar el principio de mínima acción a (17) haciendo variar el tensor métrico, se encuentran las ecuaciones de campo de la teoría conforme

$$\begin{gathered}-D^{*}_{m}D^{*m}R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}D^{*}_{m}D^{*m}R + D^{*}_{m}D^{*}_{i}R^{m}_{k} + D^{*}_{m}D^{*}_{k}R^{m}_{i} + \\ +2R_{mi}R^{m}_{k} - \frac{1}{2}g_{ik}R_{ml}R^{ml} - \frac{1}{3}\left(2RR_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R^{2} - 2g_{ik}D^{*}_{l}R^{,l} + 2D^{*}_{i}R_{,k}\right) = 0\end{gathered} \tag{18}$$

que como hemos dicho es válida cuando $\phi_k = 0$, lo que significa que las derivadas covariantes D^{*} son las definidas a partir de los símbolos de Christoffel.

La ecuación (18) tiene como solución el tensor métrico g_{ik} a partir del cual obtenemos los símbolos de Christoffel, con lo que podemos aplicar la ecuación (6) y obtener las correspondientes ecuaciones de movimiento.

Debemos advertir que la ecuación (18) no es invariante de escala, pues es una ecuación que resulta de fijar la calibración. Dicho de otra forma, que si sometemos (18) a un cambio de calibración obtendremos otras ecuaciones de campo diferentes a (18), en el sentido de que en esa ecuación aparecerá la conexión métrica. Realizada esta recalibración la ecuación de movimiento dejará de ser la geodésica y habrá que utilizar la ecuación (9).

7 Conclusión

Hemos definido la geometríca de Weyl, caracterizada por un tensor métrico simétrico, estar carente de torsión y tener un tensor de no metricidad diferente de cero y que es dado en función de una forma diferencial. Si esta forma es una diferencial exacta hablamos de geometría integrable de Weyl y no integrable en el caso contrario.

Hemos mostrado que existen dos procedimientos para obtener las ecuaciones de campo gravitatorio en la geometría de Weyl integrable, según consideremos o no la conexión métrica como un campo físico.

En estas teorías la ecuación de movimiento no es la línea geodésica, sino la expresión (9), derivable de la geodésica al hacer un cambio de calibración.

Finalmente hemos mostrado, en ejemplos concretos, como se fija la calibración con el propósito de simplificar la matemática de las ecuaciones de campo.

8 Bibliografía

[1] WEYL, H.: «Gravitation und Elektrizität», Sitzungsbericte der Preussischen Akad. d.Wissenschaften, 465-480 (1918), traducción al inglés en: WEYL, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216. En años sucesivos Weyl hizo modificaciones en su teoría, ver GOENNER, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* **7** (2004) 1-153.
[2] WEYL, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.
[3] DIRAC, P. A. M.: «Long range forces and broken symmetries», *Proceedings of the Royal Society of London A* **333** (1973) 403-418.
[4] MAEDER, A.: «Metrical Connection in Space-time, Newton's and Hubble's Laws», *Astronomy and Astrophysics* **65** (1978) 337-343.
[5] BOUVIER, P.; MAEDER, A.: «Consistency of Weyl's Geometry as a framework for Gravitation», *Astrophysics and Space Science* **54** (1978) 497-508.
[6] MAEDER, A.; BOUVIER, P.: «Scale Invariance, Metrical Connection and the Motions of Astronomical Bodies», *Astronomy and Astrophysics* **73** (1979) 82-89.
[7] BOUVIER, R.; MAEDER, A.: «Scale-covariant Stellar Dynamics», *Astronomy and Astrophysics* **79** (1979) 158-163.
[8] BOUVIER, P.: «Post-Newtonian approximations in scale covariant gravitation», *Astrophysics and Space Science* **87** (1982) 105-116.
[9] SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: «Ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría unificada de Weyl», vixra.org/abs/1405.0262, 2014.
[10] SCHIMMING, Rainer; SCHMIDT, Hans Jürgen: «On the history of fourth order metric theories of gravitation», arXiv:gr-qc/0412038v1, 2004.
[11] MANNHEIM, Philip D.; KAZANAS, Demosthenes: «Exact vacuum to conformal Weyl gravity and galactic and galactic rotation curves», *The Astrophysical Journal* **342** (1989) 635-638.
[12] MANNHEIM, Philip D.: «Making the Case for Conformal Gravity», arXiv:1101.2186v2, 2011.
[13] PAYANDEH, Farrin; MOHSEN, Fathi: «R^2 theory gravity», *Journal of Physics: Conference Series* **442** (2013) 012053.