

# Série Polinomial Infinita na Solução da Equação de Schwarzschild (Polynomial Infinite Series in the Solution of Schwarzschild Equation)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi  
[valdir.msgodoi@gmail.com](mailto:valdir.msgodoi@gmail.com)

**RESUMO** – Desenvolvemos uma solução em polinômio de grau infinito para a equação de Schwarzschild e obtivemos alguns resultados numéricos. Concluimos que sua solução parece convergir para um movimento em espiral que converge para o ponto central, e não uma elipse que precessiona.

**ABSTRACT** – We develop a solution in an infinite degree polynomial for the Schwarzschild equation and obtained some numerical results. Conclude that their solution seems to converge to a spiraling motion that converges to the center point, and not an ellipse that has precession.

**Palavras-Chave:** série polinomial infinita, equação de Schwarzschild, relatividade geral, valores numéricos.

**Key Words:** infinite power series, Schwarzschild equation, general relativity, numerical values.

## 1 – Introdução

Em [1] encontramos soluções exatas para a equação de Schwarzschild (que corresponde à equação diferencial de Binet para a Relatividade Geral),

$$u'' + u = A + Bu^2, \quad (1)$$

para 3 casos:

a) soluções constantes:

$$u = \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4AB}}{2B}, \quad (2)$$

b) binômio de grau  $n$ :

$$u = \frac{6}{B} \varphi^{-2} + \frac{1}{2B}, \quad (3)$$

para  $A = \frac{1}{4B}$  e  $n = -2$ ,

c) série polinomial infinita, na base  $(1, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \dots, \varphi^n, \dots)$ .

Vamos agora desenvolver melhor a solução para o 3º caso, além de obter alguns valores numéricos para a função  $u$ .

## 2 – Série polinomial infinita

Vamos supor para a solução de (1) uma expansão em série polinomial infinita de tal forma que  $u(\varphi)$  possa ser expressa como

$$u(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \dots + a_n\varphi^n + \dots \quad (4)$$

Assim sendo,

$$u' = a_1 + 2a_2\varphi + 3a_3\varphi^2 + 4a_4\varphi^3 + \dots + na_n\varphi^{n-1} + \dots \quad (5)$$

$$u'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3\varphi + 4 \cdot 3a_4\varphi^2 + \dots + n(n-1)a_n\varphi^{n-2} + \dots \quad (6)$$

$$u^2 = a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)\varphi + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)\varphi^2 + \dots \quad (7)$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} (\sum_{j+k=i} a_j a_k) \varphi^i$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação original, obtemos com o termo livre o valor

$$2a_2 + a_0 = A + Ba_0^2 \quad (8.1)$$

$$a_2 = \frac{A + Ba_0^2 - a_0}{2} \quad (8.2)$$

Com o termo de 1º grau,

$$3 \cdot 2a_3 + a_1 = B \cdot 2a_0a_1 \quad (9.1)$$

$$a_3 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_1}{3 \cdot 2} \quad (9.2)$$

Com o termo de 2º grau,

$$4 \cdot 3a_4 + a_2 = B(2a_0a_2 + a_1^2) \quad (10.1)$$

$$a_4 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_2 + Ba_1^2}{4 \cdot 3} \quad (10.2)$$

e continuando,

$$a_5 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_3 + 2Ba_1a_2}{5 \cdot 4} \quad (11)$$

$$a_6 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_4 + B(2a_1a_3 + a_2^2)}{6 \cdot 5} \quad (12)$$

$$a_7 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_5 + 2B(a_1a_4 + a_2a_3)}{7 \cdot 6} \quad (13)$$

$$a_8 = \frac{(2Ba_0-1)a_6+B[2(a_1a_5+a_2a_4)+a_3^2]}{8 \cdot 7} \quad (14)$$

$$a_9 = \frac{(2Ba_0-1)a_7+2B(a_1a_6+a_2a_5+a_3a_4)}{9 \cdot 8} \quad (15)$$

$$a_{10} = \frac{(2Ba_0-1)a_8+B[2(a_1a_7+a_2a_6+a_3a_5)+a_4^2]}{10 \cdot 9} \quad (16)$$

$$a_{n \geq 3} = \begin{cases} \frac{(2Ba_0-1)a_{n-2}+2B \sum_{i+j=n-2} a_i a_j}{n(n-1)}, & n \text{ ímpar} \\ \frac{(2Ba_0-1)a_{n-2}+B[2 \sum_{i+j=n-2} a_i a_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, & n \text{ par} \end{cases} \quad (17)$$

Os casos mais simples de se analisar ocorrem quando

- a)  $a_0 = u(0) = 0$ , i.e., na posição angular  $\varphi = 0$  o corpo se encontra em  $r = \frac{1}{u} = +\infty$ , infinitamente distante da origem;
- b)  $a_1 = u'(0) = 0$ , i.e., a quantidade  $du/d\varphi$  é nula em  $\varphi = 0$ , e conseqüentemente  $dr/d\varphi$ , se  $r \neq 0$ , e portanto  $\varphi = 0$  é um ponto de máximo ou mínimo da função  $r(\varphi)$ ;
- c)  $2Ba_0 - 1 = 0$ ;
- d) uma combinação dos casos anteriores.

## 2.1 – O caso $a_0 = a_1 = 0$

Combinando os casos a) e b), se  $a_0 = a_1 = 0$  então todos os termos de ordem ímpar são iguais a zero e os de ordem par têm os coeficientes

$$a_2 = \frac{A}{2} \quad (18)$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-A}{4!} \quad (19)$$

$$a_6 = \frac{-a_4 + Ba_2^2}{6 \cdot 5} = \frac{a_2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{Ba_2^2}{6 \cdot 5} = \frac{A}{6!} + \frac{A^2 B}{5!} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} a_8 &= \frac{-a_6 + 2Ba_2a_4}{8 \cdot 7} = \frac{-a_2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} - \frac{2^3 \cdot 3^2 Ba_2^2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \\ &= -\frac{A}{8!} - \frac{36 A^2 B}{8!} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{-a_8 + B(2a_2a_6 + a_4^2)}{10 \cdot 9} \\ &= \frac{A}{10!} + A^2 B \left\{ \frac{36}{10!} + \frac{1}{10 \cdot 9} \left[ \frac{1}{6!} + \frac{1}{(4!)^2} + \frac{AB}{6 \cdot 5 \cdot 4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Continuando,

$$a_{12} = \frac{-a_{10} + 2B(a_2 a_8 + a_4 a_6)}{12 \cdot 11} \quad (23)$$

$$a_{14} = \frac{-a_{12} + B[2(a_2 a_{10} + a_4 a_8) + a_6^2]}{14 \cdot 13} \quad (24)$$

$$a_{16} = \frac{-a_{14} + 2B(a_2 a_{12} + a_4 a_{10} + a_6 a_8)}{16 \cdot 15} \quad (25)$$

$$a_{18} = \frac{-a_{16} + B[2(a_2 a_{14} + a_4 a_{12} + a_6 a_{10}) + a_8^2]}{18 \cdot 17} \quad (26)$$

$$a_{2n \geq 4} = \begin{cases} \frac{-a_{2n-2} + 2B \sum_{i+j=2n-2} a_i a_j}{(2n)(2n-1)}, & n \text{ par} \\ \frac{-a_{2n-2} + B[2 \sum_{i+j=2n-2} a_i a_j + a_{n-1}^2]}{(2n)(2n-1)}, & n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (27)$$

Como se pode perceber, os coeficientes ficam cada vez mais complicados com o aumento do índice  $n$  em  $a_n \varphi^n$ , mesmo no caso mais simples de  $a_0 = a_1 = 0$ , embora numericamente, com um programa de computador, podemos calcular os coeficientes até o limite que desejarmos.

Os numeradores de cada parcela da série resultante aparecem como múltiplos de  $A$ ,  $A^2 B$ ,  $A^3 B^2$ ,  $A^4 B^3$ , etc., e os denominadores vão sendo divididos por  $n(n-1)$  a cada novo coeficiente  $a_n$ . Sendo  $AB \ll 1$  a convergência desta série não traz nenhum problema e é muito rápida, para valores de  $\varphi$  razoáveis.

Vemos que  $u$  é uma função par, apresentando simetria em torno do eixo horizontal, e para um determinado ângulo  $\varphi$  o valor de  $u$ , e por conseqüência  $1/r$ , é único. Mas sendo  $\varphi$  uma coordenada polar é importante pesquisar sobre a periodicidade  $u(\varphi) = u(\varphi + 2k\pi)$ , embora a propriedade das funções pares  $u(\varphi) = u(-\varphi)$  nos remeta a concluir precipitadamente que a órbita é fechada, sem precessão alguma.

## 2.2 – O caso $(2Ba_0 - 1) = 0$

As expressões indicadas em (17) mostram que deve haver uma considerável simplificação para a obtenção dos coeficientes da solução quando  $(2Ba_0 - 1) = 0$ . Vejamos.

De (8.2), sendo

$$a_0 = \frac{1}{2B}, \quad (28)$$

vem

$$a_2 = \frac{4AB-1}{8B}. \quad (29)$$

De (9.2),

$$a_3 = 0. \quad (30)$$

De (10.2),

$$a_4 = \frac{B}{4 \cdot 3} a_1^2 = \frac{2B}{4!} a_1^2. \quad (31)$$

De (11),

$$a_5 = \frac{2Ba_1a_2}{5 \cdot 4} = \frac{(4AB-1)}{5 \cdot 4^2} a_1 = \frac{9(4AB-1)}{6!} a_1. \quad (32)$$

E continuando,

$$a_6 = \frac{Ba_2^2}{6 \cdot 5} = \frac{(4AB-1)^2}{6 \cdot 5 \cdot 2^6 B} = \frac{21(4AB-1)^2}{8! B} \quad (33)$$

$$a_7 = \frac{2Ba_1a_4}{7 \cdot 6} = \frac{B^2}{7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2} a_1^3 = \frac{20B^2}{7!} a_1^3 \quad (34)$$

$$a_8 = \frac{2B(a_1a_5 + a_2a_4)}{8 \cdot 7} = \frac{33B(4AB-1)}{8!} a_1^2 \quad (35)$$

$$a_9 = \frac{2B(a_1a_6 + a_2a_5)}{9 \cdot 8} = \frac{(4AB-1)^2}{2^7 \cdot 3^3 \cdot 5} a_1 = \frac{21(4AB-1)^2}{9!} a_1 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{B[2(a_1a_7 + a_2a_6) + a_4^2]}{10 \cdot 9} = \frac{5B^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2^4} a_1^4 + \frac{(4AB-1)^3}{10 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2^6 B} \\ &= \frac{60B^3}{9!} a_1^4 + \frac{21(4AB-1)^3}{4 \cdot 10! B} \end{aligned} \quad (37)$$

$$a_{n \geq 3} = \begin{cases} \frac{2B \sum_{i+j=n-2} a_i a_j}{n(n-1)}, & n \text{ ímpar} \\ \frac{B[2 \sum_{i+j=n-2} a_i a_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, & n \text{ par} \end{cases} \quad (38)$$

Vemos que o coeficiente  $a_{10}$  já apresenta uma expressão mais complicada, e a dificuldade tenderia a aumentar para índices cada vez maiores. Cálculos analíticos a partir deles ficariam bastante trabalhosos, senão inviáveis.

O que aconteceria, entretanto, se terminássemos nossa série, infinita por definição, em algum valor pequeno de  $n$ ? Por exemplo, nota-se dos coeficientes (28) a

(37) que todos, a partir de  $a_2$ , têm parcelas múltiplas de  $a_1$  ou  $a_2$ , i.e., de  $(4AB - 1)$ , então são coeficientes dependentes das condições iniciais ou dos parâmetros  $A$  e  $B$ .

Se truncarmos nossa série da condição  $(2Ba_0 - 1) = 0$  em  $n = 9$ , uma aproximação de 9ª ordem, e fizermos  $a_1 = 0$ , por simplificação, ficaríamos com uma reduzida expansão para  $u$ , de grau 6:

$$u = a_0 + a_2\varphi^2 + a_6\varphi^6 = \frac{1}{2B} + \frac{4AB-1}{8B}\varphi^2 + \frac{21(4AB-1)^2}{8!B}\varphi^6, \quad (39)$$

que deveria ser solução da equação (1),

$$u'' + u = A + Bu^2. \quad (40)$$

Entretanto, substituindo estes valores, verifica-se que realmente (39) não resolve (1). O que aconteceu então?

A somatória (7) para  $u^2$  resulta em um polinômio de grau  $2n$ , enquanto a somatória (4) para  $u$  é um polinômio de grau  $n$ . Assim, poderíamos concluir que nunca haverá uma solução possível na forma de série polinomial infinita para a equação (1) válida para todo  $\varphi$ , entretanto, estamos admitindo, numa série convergente de infinitos termos, que vale o limite no infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \varphi^k = 0. \quad (41)$$

É como numa progressão geométrica de razão  $q$ , onde o termo  $a_k$  e a soma  $S_n$  valem respectivamente

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \quad (42)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (43)$$

No caso das P.G. infinitas, convergentes ( $|q| < 1$ ), temos

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1}{1 - q}, \quad (44)$$

e portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \frac{q^{2n-1}}{q-1} = \frac{1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0, \quad (45)$$

ou seja, a convergência até o termo de ordem  $n$  infinito implica que a convergência também vale até o termo de ordem infinita  $2n$ , sem alteração no valor da soma final.

### 2.3 – O caso $a_1 = 0$ , $a_0 \neq 0$

Faremos deste o último caso a calcular neste *paper*, parecendo ser o de maior importância, uma vez que remete à situação mais real de que em  $\varphi = 0$  temos um ponto extremo (por exemplo, periélio) e o corpo não está no infinito.

Partindo dos coeficientes obtidos na introdução da seção 2, e definindo, para abreviar a notação,

$$\alpha = A + Ba_0^2 - a_0, \quad (46)$$

$$\gamma = 2Ba_0 - 1, \quad (47)$$

onde  $a_0 = u(0)$ , obtemos

$$a_2 = \frac{A + Ba_0^2 - a_0}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad (48)$$

$$a_3 = a_1 = a_5 = a_7 = a_{2n+1} = 0 \quad (49)$$

$$a_4 = \frac{\gamma a_2}{4 \cdot 3} = \frac{\gamma \alpha}{4!} \quad (50)$$

$$a_6 = \frac{\gamma a_4 + Ba_2^2}{6 \cdot 5} = \frac{\gamma^2 \alpha}{6!} + \frac{B\alpha^2}{5!} = \frac{\gamma^2 \alpha + 6B\alpha^2}{6!} \quad (51)$$

$$a_8 = \frac{\gamma a_6 + 2Ba_2 a_4}{8 \cdot 7} = \frac{\gamma^3 \alpha + 36B\gamma \alpha^2}{8!} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{\gamma a_8 + B[2a_2 a_6 + a_4^2]}{10 \cdot 9} \\ &= \frac{\gamma^4 \alpha}{10!} + B\gamma^2 \alpha^2 \left[ \frac{92}{10!} + \frac{1}{(4!)^2} \right] + \frac{B^2 \alpha^3}{10 \cdot 9 \cdot 5!} \end{aligned} \quad (53)$$

$$a_n = \frac{\gamma a_{n-2} + B[2 \sum_{i+j=n-2} a_i a_j + a_{n/2-1}^2]}{n(n-1)}, \quad i, j, n \text{ par}, n \geq 4 \quad (54)$$

Novamente temos uma função par, valendo  $u(\varphi) = u(-\varphi)$ , o que por si só não nos garante que a órbita é fechada, nem permite saber se há periodicidade e qual seu valor.

Dos coeficientes dados em (48) a (54) só uma parte da série nos apresenta como facilmente reconhecível:

$$\tilde{u} = a_0 + \frac{\alpha}{2!} \varphi^2 + \frac{\gamma \alpha}{4!} \varphi^4 + \frac{\gamma^2 \alpha}{6!} \varphi^6 + \dots + \frac{\gamma^{n-1} \alpha}{(2n)!} \varphi^{2n} + \dots \quad (55)$$

semelhante, mas não igual, à expansão em série de Taylor de duas funções conhecidas:

$$\cosh \varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots + \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < \varphi < +\infty, \quad (56)$$

e

$$\sec \varphi = 1 + \frac{E_1 \varphi^2}{2!} + \frac{E_2 \varphi^4}{4!} + \dots + \frac{E_n \varphi^{2n}}{(2n)!} + \dots, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad (57)$$

onde  $E_n$  são os números de Euler (1, 5, 61, 1.385, 50.521, 2.702.765, etc.).

Na próxima seção calcularemos alguns valores numéricos para  $u$ , no intuito de acompanharmos a variação de  $u$  com o aumento do valor de  $k$  em  $u(\varphi + 2k\pi)$  e verificarmos seu sinal (lembrando que distâncias e seus recíprocos devem ser quantidades positivas).

### 3 – Valores numéricos para $u$

Conforme mencionamos, embora analiticamente seja difícil calcularmos cada coeficiente da solução da equação de Schwarzschild, numericamente, com um programa de computador, isto é realizável sem maiores dificuldades, e fornecerá o valor de  $u(\varphi)$  para o ângulo  $\varphi$  que desejarmos. É o que faremos nesta seção, especificamente para o caso descrito na seção 2.3 anterior:  $a_1 = 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , que representa a existência de periélio ou afélio em  $\varphi = 0$  e o corpo não está no infinito nesta posição inicial.

Vamos analisar duas situações:

- 1) parâmetros compatíveis com o sistema Mercúrio-Sol
- 2)  $B = A = 1,71 \times 10^{-11}$ ,  $a_0 = A(1 + e)$ .

O algoritmo principal está abaixo, e um cuidado que se deve ter é com o *overflow* da variável  $u$  na soma de  $a_n \varphi^n$  para os valores grandes de  $n$ . Para isso é conveniente realizar um cálculo intermediário com logaritmos. Nosso programa em C utilizou um polinômio de grau máximo 250, cujo respectivo coeficiente do termo de maior grau não nulo foi  $a[240] = -8.435103 \cdot 10^{-316}$  para o primeiro caso e  $a[192] = -1.541485 \cdot 10^{-321}$  no segundo caso.

```
int main()
{system("cls");
printf("Equacao de Schwarzschild\n");
printf("caso a1 = 0\n\n");
inicializacoes();
for (n=4; n<=nMax; n+=2)
    calcular_a(n);
system("pause");
k=0;
while (k<=kMax)
    {for (fi1=0; fi1<=doisPi; fi1+=Pi_4)
        {reinicializacoes();
        for (n=4; n<=nMax; n+=2)
            if (a[n] != 0)
                {if (a[n] < 0)
```



```

        {log_du = log10(-a[n]) + n*log10_fi;
        du = -pow(10, log_du);
        }
    else
        {log_du = log10(a[n]) + n*log10_fi;
        du = pow(10, log_du);
        }
    u+=du;
}
exibe_resultado();
}
printf("\n");
if (k<=4)
    k++;
else
if (k<10)
    k=10.0;
else
    k*=10.0;
}
printf("Termino de Processamento.\n");
system("pause");
return 1;

void calcular_a(int n)
{double s;
int i;
s = 0;
for (i=0; i<=n-2; i+=2)
    s+=a[i]*a[n-2-i];
a[n] = (gama*a[n-2] + B*(2.0*s + pow(a[n/2-1],2)))/(n*(n-1.0));
printf("a[%3d]=%14.6e\n", n, a[n]);
return;
}

```

Para a primeira execução, com os dados do sistema Mercúrio-Sol<sup>[2],[1]</sup> obtivemos os valores abaixo (fi1, em radianos, exibido com 2 decimais, é a primeira determinação positiva do ângulo  $\varphi = \varphi_1 + 2k\pi$ ):

```

fi1: 0.00, k: 0e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010
fi1: 0.79, k: 0e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010
fi1: 1.57, k: 0e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010
fi1: 2.36, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842761e+010
fi1: 3.14, k: 0e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361471e+010
fi1: 3.93, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010
fi1: 4.71, k: 0e+000, u: 1.710001e-011, r=1/u: 5.847951e+010
fi1: 5.50, k: 0e+000, u: 1.958606e-011, r=1/u: 5.105673e+010
fi1: 6.28, k: 0e+000, u: 2.061595e-011, r=1/u: 4.850613e+010

fi1: 0.00, k: 1e+000, u: 2.061595e-011, r=1/u: 4.850613e+010
fi1: 0.79, k: 1e+000, u: 1.958688e-011, r=1/u: 5.105458e+010
fi1: 1.57, k: 1e+000, u: 1.710389e-011, r=1/u: 5.846623e+010

```

fi1: 2.36, k: 1e+000, u: 1.463168e-011, r=1/u: 6.834483e+010  
fi1: 3.14, k: 1e+000, u: 1.366532e-011, r=1/u: 7.317797e+010  
fi1: 3.93, k: 1e+000, u: 1.498703e-011, r=1/u: 6.672434e+010  
fi1: 4.71, k: 1e+000, u: 1.882282e-011, r=1/u: 5.312700e+010  
fi1: 5.50, k: 1e+000, u: 2.756671e-011, r=1/u: 3.627563e+010  
fi1: 6.28, k: 1e+000, u: 5.768168e-011, r=1/u: 1.733653e+010

fi1: 0.00, k: 2e+000, u: 5.768168e-011, r=1/u: 1.733653e+010  
fi1: 0.79, k: 2e+000, u: 1.921205e-010, r=1/u: 5.205065e+009  
fi1: 1.57, k: 2e+000, u: 8.217248e-010, r=1/u: 1.216952e+009  
fi1: 2.36, k: 2e+000, u: 3.772815e-009, r=1/u: 2.650541e+008  
fi1: 3.14, k: 2e+000, u: 1.758882e-008, r=1/u: 5.685430e+007  
fi1: 3.93, k: 2e+000, u: 8.230822e-008, r=1/u: 1.214946e+007  
fi1: 4.71, k: 2e+000, u: 3.866503e-007, r=1/u: 2.586317e+006  
fi1: 5.50, k: 2e+000, u: 1.846979e-006, r=1/u: 5.414246e+005  
fi1: 6.28, k: 2e+000, u: 9.622639e-006, r=1/u: 1.039216e+005

fi1: 0.00, k: 3e+000, u: 9.622639e-006, r=1/u: 1.039216e+005  
fi1: 0.79, k: 3e+000, u: 7.762417e-005, r=1/u: 1.288259e+004  
fi1: 1.57, k: 3e+000, u: -8.213980e-002, r=1/u: -1.217437e+001  
fi1: 2.36, k: 3e+000, u: -8.428364e+002, r=1/u: -1.186470e-003  
fi1: 3.14, k: 3e+000, u: -5.559277e+006, r=1/u: -1.798795e-007  
fi1: 3.93, k: 3e+000, u: -2.652473e+010, r=1/u: -3.770066e-011  
fi1: 4.71, k: 3e+000, u: -9.441696e+013, r=1/u: -1.059132e-014  
fi1: 5.50, k: 3e+000, u: -2.561704e+017, r=1/u: -3.903652e-018  
fi1: 6.28, k: 3e+000, u: -5.394505e+020, r=1/u: -1.853738e-021

fi1: 0.00, k: 4e+000, u: -5.394505e+020, r=1/u: -1.853738e-021  
fi1: 0.79, k: 4e+000, u: -8.959539e+023, r=1/u: -1.116129e-024  
fi1: 1.57, k: 4e+000, u: -1.190708e+027, r=1/u: -8.398362e-028  
fi1: 2.36, k: 4e+000, u: -1.282936e+030, r=1/u: -7.794621e-031  
fi1: 3.14, k: 4e+000, u: -1.134168e+033, r=1/u: -8.817035e-034  
fi1: 3.93, k: 4e+000, u: -8.317182e+035, r=1/u: -1.202330e-036  
fi1: 4.71, k: 4e+000, u: -5.110536e+038, r=1/u: -1.956742e-039  
fi1: 5.50, k: 4e+000, u: -2.655628e+041, r=1/u: -3.765587e-042  
fi1: 6.28, k: 4e+000, u: -1.177033e+044, r=1/u: -8.495941e-045

Para a segunda execução, com  $B = A = 1,71 \times 10^{-11}$ , o resultado foi conforme a seguir:

fi1: 0.00, k: 0e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010  
fi1: 0.79, k: 0e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
fi1: 1.57, k: 0e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
fi1: 2.36, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
fi1: 3.14, k: 0e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010  
fi1: 3.93, k: 0e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
fi1: 4.71, k: 0e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
fi1: 5.50, k: 0e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
fi1: 6.28, k: 0e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 1e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010  
fi1: 0.79, k: 1e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010

fi1: 1.57, k: 1e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
 fi1: 2.36, k: 1e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
 fi1: 3.14, k: 1e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010  
 fi1: 3.93, k: 1e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
 fi1: 4.71, k: 1e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
 fi1: 5.50, k: 1e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
 fi1: 6.28, k: 1e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 2e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010  
 fi1: 0.79, k: 2e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
 fi1: 1.57, k: 2e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
 fi1: 2.36, k: 2e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
 fi1: 3.14, k: 2e+000, u: 1.358424e-011, r=1/u: 7.361472e+010  
 fi1: 3.93, k: 2e+000, u: 1.461398e-011, r=1/u: 6.842762e+010  
 fi1: 4.71, k: 2e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847953e+010  
 fi1: 5.50, k: 2e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
 fi1: 6.28, k: 2e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010

fi1: 0.00, k: 3e+000, u: 2.061576e-011, r=1/u: 4.850658e+010  
 fi1: 0.79, k: 3e+000, u: 1.958602e-011, r=1/u: 5.105683e+010  
 fi1: 1.57, k: 3e+000, u: 1.710000e-011, r=1/u: 5.847952e+010  
 fi1: 2.36, k: 3e+000, u: 1.461399e-011, r=1/u: 6.842757e+010  
 fi1: 3.14, k: 3e+000, u: 1.358427e-011, r=1/u: 7.361453e+010  
 fi1: 3.93, k: 3e+000, u: 1.461410e-011, r=1/u: 6.842707e+010  
 fi1: 4.71, k: 3e+000, u: 1.710046e-011, r=1/u: 5.847797e+010  
 fi1: 5.50, k: 3e+000, u: 1.958795e-011, r=1/u: 5.105179e+010  
 fi1: 6.28, k: 3e+000, u: 2.062439e-011, r=1/u: 4.848629e+010

fi1: 0.00, k: 4e+000, u: 2.062439e-011, r=1/u: 4.848629e+010  
 fi1: 0.79, k: 4e+000, u: 1.962572e-011, r=1/u: 5.095354e+010  
 fi1: 1.57, k: 4e+000, u: 1.728563e-011, r=1/u: 5.785154e+010  
 fi1: 2.36, k: 4e+000, u: 1.548858e-011, r=1/u: 6.456368e+010  
 fi1: 3.14, k: 4e+000, u: 1.772011e-011, r=1/u: 5.643307e+010  
 fi1: 3.93, k: 4e+000, u: 3.420852e-011, r=1/u: 2.923249e+010  
 fi1: 4.71, k: 4e+000, u: 1.100295e-010, r=1/u: 9.088469e+009  
 fi1: 5.50, k: 4e+000, u: 4.605922e-010, r=1/u: 2.171118e+009  
 fi1: 6.28, k: 4e+000, u: 2.114412e-009, r=1/u: 4.729448e+008

#### 4 – Conclusão

O método aqui utilizado para a solução da Equação de Schwarzschild pode evidentemente ser generalizado para várias outras equações não lineares, de diferentes graus de dificuldade, levando-nos a uma rica área de pesquisa. Não se trata apenas de uma aproximação da solução em 1ª ou 2ª ordem, como tanto fizeram Einstein<sup>[1]</sup> e outros, mas sim de uma solução precisa cuja ordem de aproximação é infinita, portanto aceitável para quaisquer fins numéricos, desde evidentemente que o limite (41) seja válido.

Ainda que exibidos de forma rudimentar e sem interface gráfica, é possível verificar dos dados da seção anterior que com o aumento de  $k$  o valor de  $u$  tende a

aumentar, e através de mais conjuntos de dados (não descritos aqui) foi possível inferir que deve valer o limite

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} u(\varphi) = \pm\infty, \quad (58)$$

e portanto a tendência do movimento com o aumento do tempo é diminuir sua distância ao centro de forças, convergindo para este ponto central. Conforme comentado anteriormente<sup>[3]</sup>, mais que uma precessão, o movimento parece convergir para uma espiral, indo em direção ao centro. Aliado a isso, os valores negativos que foram obtidos refletem soluções que não deveriam existir: de números positivos vão a zero (numa situação física um corpo lá permaneceria), tornam-se negativos e começam a divergir.

#### **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

1. Godoi, V.M.S., *O cálculo do movimento do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral*, disponível em <http://vixra.org/abs/1406.0050> (2014).
2. Novello, M. et al, *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1 (Teoria da Gravitação, autor Vitorio de Lorenci). Rio de Janeiro: editora Jauá (2010).
3. Godoi, V.M.S., *A commentary about the solution in 2<sup>nd</sup>. order Schwarzschild's Equation*, disponível em <http://www.vixra.org/abs/1406.0070> (2014).