Le postulat de Bertrand

par Arnaud Dhallewyn

En 1845 Joseph Bertrand énonce la conjecture suivante :

$$\exists p \in \mathbb{P} | \, n < p < 2n$$

La conjecture fut complètement démontrée en 1850 par Pafnouti Tchebychev. Une autre démonstration de Landau qui est sensiblement la même que celle de Tchebychev fut aussi donnée. En revanche une démonstration plus simple fut présentée par Srinivasa Ramanujan, et enfin Paul Erdös donna une preuve encore plus simple en 1932.

Démonstration de Ramanujan.

Soit $\theta(x)$ représentant la somme des logarithmes de tous les nombres premiers n'excédant pas x et soit :

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\log\,[x]! = \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) + \ldots\ldots\ldots(2)$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

De (1) nous avons :

$$\psi(x) - 2\,\psi(\sqrt{x}) = \theta(x) - \pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2}x\right)\theta\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \theta\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \ldots\ldots\ldots(3)$$

et de (2) :

$$\log\,[x]! - 2\log\left[\frac{1}{2}x\right]! = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) - \ldots\ldots\ldots(4)$$

Maintenant rappellons que $\theta(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions en constante croissance, nous trouvons de (3) et (4) que

$$\psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqslant \theta(x) \leqslant \psi(x); \ldots\ldots\ldots(5)$$

et

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) \leqslant \log\,[x]! - 2\log\left[\frac{1}{2}x\right]! \leqslant \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right)\ldots\ldots\ldots(6)$$

Mais il est simple de voir que

$$\log\Gamma(x) - 2\log\Gamma\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) \leqslant \log\,[x]! - 2\log\left[\frac{1}{2}x\right]! \leqslant \log\Gamma(x+1) - 2\log\Gamma\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\ldots(7)$$

Maintenant en utilisant les approximations de Stirling, nous déduisons de (7) que

$$\log\,[x]! - 2\log\left[\frac{1}{2}x\right]! < \frac{3}{4}x,\ \text{ if } x > 0, \ldots\ldots\ldots(8)$$

et

$$\log{[x]!} - 2\log\left[\frac{1}{2}x\right]! > \frac{3}{4}x, \text{ if } x > 300, ...(9)$$

Il suit de (6), (8) et (9) que

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) < \frac{3}{4}x, \text{ if } x > 0, ...(10)$$

et

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) > \frac{3}{2}x, \text{ if } x > 300, ...(11)$$

Maintenant changeons x en $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{4}x$, $\frac{1}{8}x$,...dans (10) et en additionnant tous les résultats, nous obtenons

$$\psi(x) < \frac{3}{2}x, \text{ if } x > 0, ...(12)$$

Nous avons encore :

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) \leqslant \theta(x) + 2\psi(\sqrt{x}) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right) + \psi\left(\frac{1}{3}x\right) < \theta(x) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}x + 3\sqrt{x}...(13)$$

en vertu de (5) et (13) :

$$\theta(x) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right) > \frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}, \text{ if } x > 300, ...(14)$$

Mais il est évident que

$$\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x} \geqslant 0, \text{ if } x \geqslant 324$$

D'où :

$$\theta(2x) - \theta(x) > 0, \text{ if } x \geqslant 162, ...(15)$$

En d'autres mots, il y a au moins un nombre premier entre x et $2x$ si $x \geqslant 162$. Ainsi le postulat de Bertrand est vérifié pour tout $x \geqslant 162$. Une vérification pour $x < 162$ montre montre que le postulat est toujours valable.

Soit $\pi(x)$ désignant le nombre de nombres premiers inférieures ou égales à x. Alors puisque

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2}x\right)$$

est le nombre de nombres premiers entre x et $\frac{1}{2}x$, et $\theta(x) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right)$ est la somme des logarithmes de nombres premiers entre x et $\frac{1}{2}x$, il est évident que

$$\theta(x) - \theta\left(\frac{1}{2}x\right) \leqslant \left\{\pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2}x\right)\right\}\log x.........(16)$$

pour tout x. Il suit de (14) et de (16) que

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{1}{2}x\right) > \frac{1}{\log x}\left(\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}\right), \text{ if } x > 300, ...(17)$$

De ceci, nous déduisons facilement que

$$\pi(x)-\pi\left(\frac{1}{2}x\right)\geqslant 1,2,3,4,5,\ldots,\text{ if } x\geqslant 2,11,17,20,41,\ldots\ldots\ldots(18)$$

Démonstration de Erdös.

Déterminons tout d'abord $\forall x\in\mathbb{R}\geqslant 2$:

$$\prod_{p\leqslant x} p\leqslant 4^{x-1} \qquad (1)$$

qui se montre par récurrence si $q\leqslant x$ alors :

$$\prod_{p\leqslant x} p=\prod_{p\leqslant q} p \quad \text{et} \quad 4^{q-1}\leqslant 4^{x-1}$$

il suffit de vérifier (1) quand $x=q\in\mathbb{P}$.

Pour $q=2$ on a $2\leqslant 4$

pour $q=2m+1$

$$\prod_{p\leqslant 2m+1} p=\prod_{p\leqslant m+1} p\cdot\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\leqslant 4^m\binom{2m+1}{m}\leqslant 4^m 2^{2m}=4^{2m}$$

car

$$\prod_{p<m+1} p\leqslant 4^m$$

On a l'inégalité

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p\leqslant\binom{2m+1}{m}$$

car

$$\binom{2m+1}{m}=\frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}$$

et

$$\binom{2m+1}{m}\leqslant 2^{2m}$$

en effet :

$$4^m=\frac{(1+1)^{2m+1}}{2}=\frac{x+\binom{2n+1}{m}+\binom{2m+1}{m+1}}{2}\geqslant\binom{2m+1}{m}$$

et puisque

$$\binom{2m+1}{m}=\binom{2m+1}{m+1}$$

Du théorème de Legendre, il vient :

$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ contient le facteur premier p exactement :

$$\sum_{k\geqslant 1}\left(\left\lfloor\frac{2n}{p^k}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \qquad \text{fois}$$

Ici chaque terme de la somme est au plus égal à 1, puisqu'il vérifie

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2\left(\frac{n}{p^k} - 1\right) = 2$$

les termes de la somme disparaissent dès que $p^k > 2n$, ainsi $\binom{2n}{n}$ contient p exactement :

$$\sum_{k \geqslant 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leqslant \max\{r \colon p^k \leqslant 2n\} \text{ fois}$$

Par conséquent la plus grande puissance de p qui divise $\binom{2n}{n}$ n'est pas supérieur à $2n$. En particulier, les $p > \sqrt{2n}$ apparaissent au plus une fois dans la factorisation de $\binom{2n}{n}$. En outre les nombres premiers p qui vérifient $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ ($p \leqslant n$ si $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ alors $2p \leqslant 2n < 3p$ soit $p^2 > \frac{4}{9}n^2 > 2n$ d'où $\frac{2}{3}n$) ne divisent pas $\binom{2n}{n}$. En effet $3p > 2n$ implique que p et $2p$ sont les seuls multiples de p qui apparaissent comme facteur du numérateur de $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Estimons $\binom{2n}{n}$ si $n \geqslant 3$

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \prod_{p \leqslant \sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leqslant 2n} p$$

ainsi, puisqu'il n'y a pas plus de $\sqrt{2n}$ nombres premiers :

$$p \leqslant \sqrt{2n}$$

$$4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \cdot \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n < p \leqslant 2n} p \qquad n \geqslant 3 \qquad (2)$$

Supposons qu'il n'y a pas de $p \in \mathbb{P}$ tels que $n < p \leqslant 2n$. Le deuxième produit dans (2) vaut alors 1. En substituant (1) dans (2), on obtient :

$$4^n \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} 4^{\frac{2}{3}n} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{3}n} \leqslant (2n)^{1+\sqrt{2n}} \qquad (3)$$

ce qui est faux dès que n suffisamment grand, en utilisant $a + 1 < 2^a$, on a :

$$2n = \left(\sqrt[6]{2n}\right)^6 < \left(\left\lfloor \sqrt[6]{2n} \right\rfloor + 1\right)^6 < 2^{6\left\lfloor \sqrt[6]{2n} \right\rfloor} \leqslant 2^{6\sqrt[6]{2n}} \qquad (4)$$

Ainsi si $n \geqslant 50$ (et par conséquent $18 < 2\sqrt{2n}$) on déduit de (3) et (4) que :

$$2^{2n} \leqslant (2n)^{3\left(1+\sqrt{2n}\right)} < 2^{6\sqrt{2n}\left(18+18\sqrt{2n}\right)} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2n}} = 2^{20(2n)^{2/3}}$$

cela implique $(2n)^{1/3} < 20$ et donc $n < 4000$.

Et pour $n < 4000$, on vérifie aisément que la propriété est toujours valable.

De (2) on déduit que

$$\prod_{n < p \leqslant 2n} p \geqslant 2^{\frac{1}{30}n} \qquad \text{si } n \geqslant 4000$$

et donc qu'il y a au moins

$$\prod_{p\leqslant[\sqrt{2n}]} p^{\left[\frac{\log(2n)}{\log p}\right]}\log_{2n}\left(2^{\frac{1}{30}n}\right)=\frac{1}{30}\frac{n}{\log_2 n+1}$$

nombres premiers dans $[n;2n]$.

Autre démonstration.

Soit :

$$d_n=\prod_{p\leqslant n} p^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]}$$

pour $n\geqslant 2$, on a :

$$d_{2n}=\left(\prod_{p\leqslant[\sqrt{2n}]} p^{\left[\frac{\log(2n)}{\log p}\right]}\right)\left(\prod_{[\sqrt{2n}]<p\leqslant n} p^{\left[\frac{\log(2n)}{\log p}\right]}\right)\left(\prod_{n<p\leqslant 2n} p^{\left[\frac{\log(2n)}{\log p}\right]}\right)$$

$$\leqslant\left(\prod_{p\leqslant[\sqrt{2n}]} p^{\left[\frac{\log(2n)}{\log p}\right]}\right)\left(\prod_{[\sqrt{2n}]<p\leqslant n} p\right)\left(\prod_{n<p\leqslant 2n} p\right)\leqslant(2n)^{\pi([\sqrt{2n}])}d_n\left(\prod_{n<p\leqslant 2n} p\right)$$

Or $\forall n\geqslant 8$, $\pi(n)\leqslant\frac{n}{2}$. En effet la suite 9;10;...,n contient au plus $\frac{n-8}{2}$ nombres premiers (car $9\notin\mathbb{P}$ et $2q\notin\mathbb{P}$) et il existe seulement 4 nombres premiers $\leqslant 7$. Donc :

$$4^n\leqslant d_{2n}\leqslant e^{\frac{1}{2}\sqrt{2n}\log(2n)}d_n\left(\prod_{n<p<2n} p\right)\leqslant e^{n\log 3+\frac{1}{2}\sqrt{2n}\log(2n)}\left(\prod_{n<p<2n} p\right)$$

ainsi :

$$\left(\prod_{n<p<2n}\right)\geqslant e^{(\log 4-\log 3)n-\frac{1}{2}\sqrt{2n}\log(2n)}>1$$

Dès lors que $n\geqslant 226$, il existe alors un nombre premier p tel que $n<p<2n$. On peut aussi vérifier le résultat qui est aussi vrai pour $n<226$.

Bibliographie.

- S.Ramanujan. *A proof of Bertrand's postulate*. Journal of the Indian Mathematical Society, 11, 1919, 181-182.
- M.Aigner/M.Ziegler. *Proof from the books* (2000).
- Hardy/wright. *An introduction to the theory of numbers* (1979). 343-345 et 373.
- D.Duverney. *Théorie des nombres* (2007).
- P.Erdös. *Beweis eines Satzes von Tschebyschef*. Acta.Litt.Sci.Szeged 5,194-198 (1932).