Система уравнений:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 2(R^2 + W^2) \\ F^2 + G^2 + T^2 = R^2 + W^2 \end{cases}$$

Решения имеют вид:

$$X = 4(t^2 + q^2 - a^2 - v^2)a^2 + (v^2 + t^2 + q^2 - z^2)^2$$

$$Y = 4(v^2 - a^2 - t^2 - q^2)a^2 + (v^2 + t^2 + q^2 - z^2)^2$$

$$Z = 4az(v^2 + t^2 + q^2 - 2a^2 - z^2)$$

$$F = 4(a^2 + z^2 - 2t^2 - 2q^2)a^2 + (v^2 + t^2 + q^2 - z^2)^2$$

$$G = 4aq(v^2 + t^2 + q^2 - 2a^2 - z^2)$$

$$T = 4at(v^2 + t^2 + q^2 - 2a^2 - z^2)$$

$$R = 4(z^2 + a^2 - 2v^2)a^2 + (v^2 + t^2 + q^2 - z^2)^2$$

$$W = 4av(v^2 + t^2 + q^2 - 2a^2 - z^2)$$

В уравнении : $ax^2 + bxy + cxz + qy^2 + jyz + tz^2 = pu^2$

Решения можно записать если введём целочисленные параметры: n, k, d, s.

Одно решение можно записать если $R = \sqrt{(c+j)^2 - 4(a+b+q-p)t}$ целое число.

Где: $F = \left((b+j)^2 - 4q(a+c+t-p)\right)n^2 - 4p(b+2q+j)nk + 4p(a+b+c+q+j+t)k^2$

$$G = \left((c+2t)(b+2q) - j(c+b+j+2a-2p)\right)n - 2p(c+j+2t)k$$

Тогда формулы решения можно записать:

$$x = \left(2G(2pk - (b+2q+j)n) + F(c+j+2t \pm R)\right)d^2 + 2(R(2pk - (b+2q+j)n) \pm G)ds +$$
$$(-(c+j+2t) \pm R)s^2$$

$$y = \left(2G(2pk + (2a+b+2c+j+2t-2p)n) + F(c+j+2t \pm R)\right)d^2 +$$
$$+2(R(2pk + (2a+b+2c+j+2t-2p)n) \pm G)ds + (-(c+j+2t) \pm R)s^2$$

$$z = \big(2G(2pk - (b + 2q + j)n) - F(2a + 2b + c + 2q + j - 2p \mp R)\big)d^2 +$$

$$+2(R(2pk - (b + 2q + j)n) \pm G)ds + (2a + 2b + c + 2q + j - 2p \pm R)s^2$$

$$u = \big(2G(2(a + b + c + q + j + t)k - (b + 2q + j)n) + F(c + j + 2t \pm R)\big)d^2 +$$

$$+2(R(2(a + b + c + q + j + t)k - (b + 2q + j)n) \pm G)ds + (-(c + j + 2t) \pm R)s^2$$

Если же другой корень целое число: $R = \sqrt{p(a + b + c + q + t + j)}$ Представим тогда:

$$F = \big((b + j)^2 - 4q(a + c + t - p)\big)n^2 + 2\big((c + 2t)(b + 2q) - j(c + b + j + 2a - 2p)\big)nk +$$

$$((c + j)^2 - 4(a + b + q - p)t)k^2$$

$$G = p(b + 2q + j)n + p(c + j + 2t)k$$

Тогда решения имеют вид:

$$x = \Big(F(p \pm R) - 2G\big((c + j + 2t)k + (b + 2q + j)n\big)\Big)d^2 +$$

$$2\Big(-R\big((c + j + 2t)k + (b + 2q + j)n\big) \pm G\Big)ds + (-p \pm R)s^2$$

$$y = \left(F(p \pm R) + 2G\big((2a + b + 2c + j + 2t - 2p)n - (c + j + 2t)k\big)\right) d^2 +$$

$$2\big(R\big((2a + b + 2c + j + 2t - 2p)n - (c + j + 2t)k\big) \pm G\big)ds + (-p \pm R)s^2$$

$$z = \left(F(p \pm R) + 2G\big((2a + 2b + c + 2q + j - 2p)k - (b + 2q + j)n\big)\right) d^2 +$$

$$2\big(R\big((2a + 2b + c + 2q + j - 2p)k - (b + 2q + j)n\big) \pm G\big)ds + (-p \pm R)s^2$$

$$u = \left(F(a + b + c + q + j + t \pm R) - 2G\big((c + j + 2t)k + (b + 2q + j)n\big)\right) d^2 +$$

$$+2\big(-R\big((c + j + 2t)k + (b + 2q + j)n\big) \pm G\big)ds + (-(a + b + c + q + j + t) \pm R)s^2$$

Уравнение $\frac{x^2+ax+y^2+by+c}{xy} = j$ рассматривали так, хотя можно переписать в таком виде: $x^2 + ax + y^2 + by + c = jxy$

Если корень целый : $t = \sqrt{(b+a)^2 + 4c(j-2)}$

Тогда воспользуясь решениями уравнения Пелля:

$$p^2 - (j^2 - 4)s^2 = 1$$

Запишем решения:

$$x = \frac{(b+a\pm t)}{2(j-2)}p^2 + \big(t \mp (b-a)\big)ps - \frac{(b(3j-2)+a(6-j)\mp(j+2)t)}{2}s^2$$

$$y = \frac{(b+a\pm t)}{2(j-2)}p^2 + \big(-t \mp (b-a)\big)ps - \frac{(b(6-j)+a(3j-2)\mp(j+2)t)}{2}s^2$$

Уравнение:

$$zq + xy = (z + q + x - y)(z + q - x + y)$$

Имеет решения, задаются числами: a, b, p, s

$$x = (a^2 + 4ab + 7b^2)p + (a^2 + 6ab + 5b^2)s$$

$$y = (a^2 + 4ab + 7b^2)p + (2a^2 + 6ab + 4b^2)s$$

$$z = (a^2 + 2ab - 3b^2)p + (a^2 - b^2)s$$

$$q = 4(2b^2 + ab)p + (a^2 + 6ab + 5b^2)s$$

****

$$x = (a^2 + 2ab + 13b^2)p + (a^2 + 6ab - 7b^2)s$$

$$y = (a^2 + 2ab + 13b^2)p - (a^2 - 6ab + 5b^2)s$$

$$z = (a^2 + 6ab - 7b^2)p + (a^2 - 6ab + 5b^2)s$$

$$q = (-a^2 + 2ab + 15b^2)p + (a^2 + 6ab - 7b^2)s$$

$$x = (13a^2 + 2ab - 15b^2)p^2 + 2(a + b)ps + s^2$$

$$y = (13a^2 + 22ab - 3b^2)p^2 + 2(a - b)ps + s^2$$

$$z = (5a + 3b)(3a + b)p^2 + 2(a + b)ps - s^2$$

$$q = -(7a^2 + 10ab + 15b^2)p^2 + 2(3a + b)ps + s^2$$

****

$$x = (7a^2 + 4ab - 3b^2)p^2 + 2(2a + b)ps + s^2$$

$$y = (7a^2 + 14ab + 3b^2)p^2 + 4(a + b)ps + s^2$$

$$z = (8a^2 + 10ab + 6b^2)p^2 + 2(2a + b)ps$$

$$q = -(3a^2 + 2ab + 3b^2)p^2 + 2(a + b)ps + s^2$$

Уравнение: $a^2 + ac + c^2 = X^2 + XY + Y^2$

Решение имеет вид: $a = q^2 + k^2 - p^2 + kq$

$$c = q^2 + k^2 + 2p^2 + kq - 3pk - 3pq$$

$$X = q^2 - 2k^2 - p^2 + 3pk - 2qk$$

$$Y = k^2 - 2q^2 - p^2 + 3pq - 2qk$$

Ещё:

$$a = (b-k)p^2 + 2(3b-2k)ps + (5b-7k)s^2$$

$$c = b(p^2 - s^2)$$

$$X = bp^2 + 2(3b-2k)ps + (5b-8k)s^2$$

$$Y = (b-k)p^2 - 2kps - (b-3k)s^2$$

Ещё:

$$a = -(k+b)p^2 + 2(3b+k)ps + (7b-13k)s^2$$

$$c = 2b(p^2 - s^2)$$

$$X = (k-b)p^2 + 2(3b+k)ps + (7b-15k)s^2$$

$$Y = -(k+b)p^2 + 6(k-b)ps + (7k-5b)s^2$$

Уравнение:

$$XY + XZ + YZ = F = ab$$

Решения можно записать разложив на множители число F и воспользовавшись решениями уравнения $p^2 - (4k^2 + 1)s^2 = 1$

Решения имеют вид:

$$X = ap^2 + 2\big(ak + (b + a)\big)ps + \big(2(a - 2b)k + (2b + a)\big)s^2$$

$$Y = 2(ak - b)ps + 2(2ak^2 + (a + 2b)k + b)s^2$$

$$Z = bp^2 - 2(2b + a)kps + (4bk^2 - 2ak - b)s^2$$

И ещё:

$$X = -2bp^2 + 2(k(4b + a) + b)ps - 2\big((4b + 2a)k^2 + (2b - a)k\big)s^2$$

$$Y = -(2b + a)p^2 + 2(k(4b + a) - b - a)ps - (8bk^2 - \\ +2a)k + a)s^2$$

$$Z = bp^2 - 2(2b + a)kps + (4bk^2 - 2ak - b)s^2$$

Уравнение:

$$X^2 + qY^2 + qY = Z^2$$

Решения можно записать воспользовавшись решениями уравнения Пелля: $p^2 - (q+1)s^2 = 1$

$$X = (-p^2 + 2ps + (q-1)s^2)L + qs^2$$

$$Y = 2s(p-s)L + qs^2$$

$$Z = (p^2 - 2ps + (q+1)s^2)L + qps$$

И ещё:

$$X = (p^2 + 2ps - (q-1)s^2)L - p^2 - 2ps - s^2$$

$$Y = 2s(p+s)L - p^2 - 2ps - s^2$$

$$Z = (p^2 + 2ps + (q+1)s^2)L - p^2 - (q+2)ps - (q+1)s^2$$

L – любое целое число задаваемое нами.

Уравнение: $X^2+Y^2=Z^3$

Решения имеют вид, где q, t, k - какие нибудь целые числа любого знака.

$$X=2k^6+8tk^5+2(7t^2+8qt-9q^2)k^4+16(t^3+2qt^2-tq^2-2q^3)k^3+$$
$$+2(7t^4+12qt^3+6q^2t^2-28tq^3-9q^4)k^2+8(t^5+2qt^4-2q^3t^2-5tq^4)k+$$
$$+2(q^6-4tq^5-5q^4t^2-5q^2t^4+4qt^5+t^6)$$

$$Y=2k^6+4(3q+t)k^5+2(9q^2+16qt+t^2)k^4+32qt(2q+t)k^3+$$
$$+2(-9q^4+20tq^3+30q^2t^2+12qt^3-t^4)k^2+4(-3q^5-tq^4+10q^3t^2+6q^2t^3+5qt^4-t^5)k-$$
$$-2(q^6+4tq^5-5q^4t^2-5q^2t^4-4qt^5+t^6)$$

$$Z=2k^4+4(q+t)k^3+4(q+t)^2k^2+4(q^3+tq^2+qt^2+t^3)k+2(q^2+t^2)^2$$

Уравнение:

$$x^2+y^2+z^2=R^2-1$$

Решения можно записать воспользовавшись

уравнением Пелля: $p^2-qs^2=1$

Где: $q=t(3t-2k-2)-(k-1)^2$

$$x=\left(\frac{1\pm1}{2}\right)p^2-\big((t-k-1)\pm(3t-k-1)\big)ps+$$

$$+\left((t-k-1)(3t-k-1)+\left(\frac{-1\pm1}{2}\right)(t(3t-2k-2)-(k-1)^2)\right)s^2$$

$$y=\left(\frac{1\pm1}{2}\right)p^2-\big((t-k+1)\pm(3t-k-1)\big)ps+$$

$$+\left((t-k+1)(3t-k-1)+\left(\frac{-1\pm1}{2}\right)(t(3t-2k-2)-(k-1)^2)\right)s^2$$

$$z=\left(\frac{1\pm1}{2}\right)p^2-\big((t+k-1)\pm(3t-k-1)\big)ps+$$

$$+\left((t+k-1)(3t-k-1)+\left(\frac{-1\pm1}{2}\right)(t(3t-2k-2)-(k-1)^2)\right)s^2$$

$$R=\left(\frac{3\pm1}{2}\right)p^2-\big((3t-k-1)\pm(3t-k-1)\big)ps+$$

$$+\left((3t-k-1)^2-\left(\frac{3\mp1}{2}\right)(t(3t-2k-2)-(k-1)^2)\right)s^2$$

Некоторые решения уравнения: $X^2+XY+Y^2=Z^2+1$

Можно записать воспользовавшись решениями

Уравнения Пелля: $p^2-(3k^2-6k+1)s^2=\pm 1$

И они имеют вид:

$$X=p^2+2ps+(4k-7)s^2$$

$$Y=-4ps+(3k^2-8k+4)s^2$$

$$Z=-(3k-2)ps+3(k-2)s^2$$

И ещё:

$$X=\frac{1}{2}(p^2+(6k-14)ps+(9k^2-26k+17)s^2)$$

$$Y=\frac{1}{2}(3p^2+(6k-2)ps+(3k^2-2k-5)s^2)$$

$$Z=\frac{1}{2}(3p^2+(12k-14)ps+(9k^2-24k+15)s^2)$$

Уравнение: $X^2 + Y^2 = \frac{Z(3Z \pm 1)}{2}$

Решения можно записать используя уравнение Пелля:

$$p^2 - 2(6k^2 - 6k + 1)s^2 = \pm 1$$ - соответствующий

знак у уравнения Пелля должен быть таким же как у первого.

Тогда решения имеют вид:

$$X = kps + 2(k-1)s^2$$

$$Y = (k-1)ps - 2ks^2$$

$$Z = 2(2k^2 - 2k + 1)s^2$$

Ещё:

$$X = p^2 + (7k-4)ps + 2(2k-1)(3k-2)s^2$$

$$Y = p^2 + (7k-3)ps + 2(2k-1)(3k-1)s^2$$

$$Z = p^2 + 4(2k-1)ps + 4(2k-1)^2 s^2$$

Уравнение:

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$$

Имеет решение:

$$a = -(k^2 + 2(p + s)k + p^2 + ps + s^2)$$

$$b = 2k^2 + 4(p + s)k + 3p^2 + 3ps + 2s^2$$

$$c = 3k^2 + 4(p + s)k + 2p^2 + ps + 2s^2$$

$$d = 2k^2 + 4(p + s)k + 2p^2 + 3ps + 3s^2$$

Уравнение:

$$2(a^2+y^2+c^2+d^2+u^2)=(a+y+c+d+u)^2$$

Имеет решения:

$$a=-(k^2+2(q+t+b)k+b^2+q^2+t^2+bq+bt+qt)$$

$$y=k^2+2(q+t+b)k+2b^2+q^2+t^2+2bq+2bt+qt$$

$$c=k^2+2(q+t+b)k+b^2+2q^2+t^2+2bq+bt+2qt$$

$$d=k^2+2(q+t+b)k+b^2+q^2+2t^2+bq+2bt+2qt$$

$$u=2k^2+2(q+t+b)k+b^2+q^2+t^2$$

k,q,t,b - какие нибудь целые числа.

Система уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ (a+k)^2 + (b+k)^2 = q^2 \end{cases}$$

Имеет решения:

$$a = p(2s - p)$$

$$b = 2s(p - s)$$

$$k = p^2 + 2s^2$$

$$c = p^2 - 2ps + 2s^2$$

$$q = p^2 + 2ps + 2s^2$$

Числа p, s задаются нами.

Система уравнений:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 2R^2 \\ F^2 + G^2 + T^2 = R^2 \end{cases}$$

Решения имеют вид:

$$X = 4(c^2 + f^2 + k^2)k^2 - (2c^2 - 2d^2 + f^2)f^2 - (d^2 - c^2)^2$$

$$Y = 4kd(2k^2 + d^2 - c^2 - f^2)$$

$$Z = 4(f^2 + c^2 - k^2)k^2 + (f^2 + 2c^2 - 2d^2)f^2 + (d^2 - c^2)^2$$

$$F = 4kc(2k^2 + d^2 - c^2 - f^2)$$

$$G = 4kf(2k^2 + d^2 - c^2 - f^2)$$

$$T = (2k^2 + d^2)^2 + (c^2 + f^2)^2 - 2(d^2 + 4k^2)(c^2 + f^2)$$

$$R = 4(k^2 + d^2)k^2 + (2c^2 + f^2 - 2d^2)f^2 + (d^2 - c^2)^2$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = c^2 \\ (a+k)^2 + (a+k)(b+k) + (b+k)^2 = q^2 \end{cases}$$

Решения можно записать:

$$a = 2s^2 - 2p^2$$

$$b = 4ps - 2s^2$$

$$c = 2p^2 - 2ps + 2s^2$$

$$k = p^2 + 2s^2$$

$$q = p^2 + 2ps + 4s^2$$

Или же ту же формулу можно так записать, где p, s целые.

$$a = s^2 - 4p^2$$

$$b = 4ps - s^2$$

$$c = 4p^2 - 2ps + s^2$$

$$k = 2p^2 + s^2$$

$$q = 2p^2 + 2ps + 2s^2$$

Уравнение $X^2+Y^2=Z^5+Z$

Решения можно записать:

$$Z=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{2}$$

$$X=\frac{\left(\left(a^2+b^2\right)^4+4\right)a^2+2\left(\left(a^2+b^2\right)^4-4\right)ab-\left(\left(a^2+b^2\right)^4+4\right)b^2}{8}$$

$$Y=\frac{\left(\left(a^2+b^2\right)^4-4\right)a^2-2\left(\left(a^2+b^2\right)^4+4\right)ab-\left(\left(a^2+b^2\right)^4-4\right)b^2}{8}$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = cz^2 \\ a(x+k)^2 + b(y+k)^2 = cq^2 \end{cases}$$

Решения, частные, можно записать если корень целый:

$$x = (a+b)(a+b-c)\left(c \pm \sqrt{c(a+b)}\right)p^2 -$$

$$-2bps(a+b-c)\sqrt{c(a+b)} + ba\left(c \mp \sqrt{c(a+b)}\right)s^2$$

$$y = (a+b)(a+b-c)\left(c \pm \sqrt{c(a+b)}\right)p^2 +$$

$$+2aps(a+b-c)\sqrt{c(a+b)} + ba\left(c \mp \sqrt{c(a+b)}\right)s^2$$

$$z = (a+b)(a+b-c)\left(a+b \pm \sqrt{c(a+b)}\right)p^2 +$$

$$+ba\left(a+b \mp \sqrt{c(a+b)}\right)s^2$$

$$k = -2(c(a+b-c)(a+b)p^2 + cbas^2)$$

$$q = (a+b)(a+b-c)\left(-(a+b) \pm \sqrt{c(a+b)}\right)p^2 +$$

$$+ba\left(-(a+b) \mp \sqrt{c(a+b)}\right)s^2$$

Числа p, s целые и задаются нами.

Ещё раз про систему уравнений: $\begin{cases} aX^2 + bY^2 = cZ^2 \\ a(X+k)^2 + b(Y+k)^2 = c(R)^2 \end{cases}$

Если корень целый: $q = \sqrt{ab(a+b)(c-a-b)}$ Тогда решения можно записать:

$$X = \big((a+b-c)b \pm q\big)p^2 + 2cqps + c(a+b)\big((c-a-b)b \pm q\big)s^2$$

$$Y = \big((c-a-b)a \pm q\big)p^2 + 2cqps + c(a+b)\big((a+b-c)a \pm q\big)s^2$$

$$k = -4cqps$$

$$Z = \pm qp^2 + 2q(a+b)ps \pm q(a+b)s^2$$

$$R = \pm qp^2 - 2q(a+b)ps \pm q(a+b)s^2$$

Уравнение:

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 3(a + b + c + d)^2$$

Имеет решения:

$$a = -(p^2 + 4(k + s)p + 2k^2 + 2ks + 2s^2)$$

$$b = p^2 + 4(k + s)p + 6k^2 + 6ks + 2s^2$$

$$c = p^2 + 4(k + s)p + 2k^2 + 6ks + 6s^2$$

$$d = 3p^2 + 4(k + s)p + 2k^2 - 2ks + 2s^2$$

Уравнение:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = abc + 2XYZ + F$$ число F – задаётся условием задачи.

Тогда решение имеет вид:

$$a = (2pk - p^2 + p - k^2)((t-s)^2 - 1) + 2tsk + p(1 - t^2) - (2k - p + 1)s^2 + F$$

$$b = (2pk - p^2 + p - k^2)((t-s)^2 - 1) + 2tsk - pt^2 - (2k - p + 1)(s^2 - 1) + F$$

$$c = (t-s)^2 - 1$$

$$X = t$$

$$Y = s$$

$$Z = (2pk - p^2 + p - k^2)((t-s)^2 - 1) + k(2ts + 1) - pt^2 - (2k - p + 1)s^2 + F$$

Числа p, k, s, t - целые и задаются нами.

Уравнение:

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + E^2 + F^2$$

Решения можно записать:

$$A = -p^2 + 2(t + k - q - 2a)ps +$$

$$+2(4t^2 + 4k^2 - 2a^2 - 5q^2 + q(k + t) + 7a(q - t - k) - tk)s^2$$

$$B = -p^2 + 2(t + a - q - 2k)ps +$$

$$+2(4t^2 + 4a^2 - 2k^2 - 5q^2 + q(t + a) + 7k(q - a - t) - ta)s^2$$

$$C = -p^2 + 2(k + a - q - 2t)ps +$$

$$+2(4k^2 + 4a^2 - 2t^2 - 5q^2 + q(k + a) + 7t(q - a - k) - ka)s^2$$

$$D = -p^2 + 2(t + k + a - q)ps +$$

$$+2(4t^2 + 4k^2 + 4a^2 - 5q^2 + q(t + k + a) - tk - ta - ka)s^2$$

$$E = p^2 + 4(a + k + t - q)ps +$$

$$+2\big(2t^2 + 2k^2 + 2a^2 - 7q^2 + 5q(t + k + a) - 5(tk + ta + ka)\big)s^2$$

$$F = -p^2 + 2(a + k + t - 4q)ps +$$

$$+2(4t^2 + 4k^2 + 4a^2 + q^2 - 5q(t + k + a) - tk - ta - ka)s^2$$

Ещё решение:

$$A = p^2 + 2(t + k + 2a - q)ps +$$
$$+2(2a^2 + q^2 - q(t + k) + 3a(t + k - q) + tk)s^2$$

$$B = p^2 + 2(t + 2k + a - q)ps +$$
$$+2(2k^2 + q^2 - q(t + a) + 3k(t + a - q) + ta)s^2$$

$$C = p^2 + 2(2t + k + a - q)ps +$$
$$+2(2t^2 + q^2 - q(k + a) + 3t(k + a - q) + ka)s^2$$

$$D = p^2 + 2(t + k + a - q)ps + 2\left(q^2 + tk + ta + ka - q(t + k + a)\right)s^2$$

$$E = p^2 + 4(t + k + a - q)ps +$$
$$+2\left(2t^2 + 2k^2 + 2a^2 + q^2 + 3(tk + ta + ka) - 3q(t + k + a)\right)s^2$$

$$F = p^2 + 2(t + k + a)ps + 2\left(tk + ta + ka - q^2 + q(t + k + a)\right)s^2$$

p, s, t, k, a, q - целые числа задаваемые нами.

Решения уравнения :

$$x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)=q(q+1)+a$$

Если можно представить: $a=\frac{b^2-1}{2}$

И $\quad G=t(3t+2k+2)-(k-1)^2$

Тогда решения уравнения Пелля $p^2-Gs^2=1$

Определяют решения этого уравнения:

$$x=\frac{1}{2}\left((-1\pm b)p^2-2(k+1+t)bps+G(1\pm b)s^2\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\left((-1\pm b)p^2-2(k-1+t)bps+G(1\pm b)s^2\right)$$

$$z=\frac{1}{2}\left((-1\pm b)p^2-2(1-k+t)bps+G(1\pm b)s^2\right)$$

$$q=\frac{1}{2}\left((-1\pm b)p^2-2(k+1+3t)bps+G(1\pm b)s^2\right)$$

Некоторые решения уравнения:

$$x^3+y^3=qz^2$$

Можно выразить через целые числа p,s,t:

$$a=s(2p-s)$$

$$b=p^2-s^2$$

$$c = p^2 - ps + s^2$$

Тогда решения равны:

$$x = q(a+b)bt^2$$

$$y = q(a+b)at^2$$

$$z = qc(a+b)^2t^3$$

Решения уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

Можно выразить через число p.

$$x = (1 + 6p^3)(36p^6 + 18p^4 + 1)$$

$$y = (1 - 6p^3)(36p^6 + 18p^4 + 1)$$

$$z = -6p^2(36p^6 + 18p^4 + 1)$$

Некоторые решения этого уравнения

$$x^2 + xy + y^2 = z^3$$

Могут для облегчения расчёта представить так:

$$x = s(p^2 + ps + s^2)$$

$$y = p(p^2 + ps + s^2)$$

$$z = p^2 + ps + s^2$$

Ещё решения уравнения $x^2 + xy + y^2 = z^3$

Можно представить через: $b = 3p^2 + 6ps + 2s^2$

$$t = 6s^2 + 6ps$$

$$q = 3p^2 + 6ps + 4s^2$$

Тогда решения имеют вид:

$$x = q[-6bt \pm (3b^2 - t^2)]$$

$$y = q[6bt \pm (3b^2 - t^2)]$$

$$z = 3q^2$$

Если можно представить как: $t = p^2 - 3s^2$

$$b = 2ps$$

$$q = p^2 + 3s^2$$

Тогда решения имеют вид:

$$x = 3q[-6bt \pm (3b^2 - t^2)]$$

$$y = 3q[6bt \pm (3b^2 - t^2)]$$

$$z = 3q^2$$

Для получения примитивных троек, необходимо, после подстановки коэффициентов, разделить x, y на c^3, а

z на c^2. Где c какое нибудь целое число. Естественно можно и умножить на неё же.

Для уравнения $x^3 + y^3 = qz^2$ можно записать решения:

Если: $q = 3t^2 + 1$. Введём числа: b, c, a через целые p, s

$$b = 2q(q + 2 \mp 6t)p^2 + 6q(t \mp 1)ps + (q - 1 \mp 3t)s^2$$

$$c = 6q\big(q - 2(1 \pm t)\big)p^2 + 6q(t \mp 1)ps + 3(1 \mp t)s^2$$

$$a = 12q(1 \mp t)p^2 + 6(4t \mp q)ps + 3(1 \mp t)s^2$$

Если же: $q = t^2 + 3$

$$b = 3(q - 1)(1 \pm t)s^2 + 2(3 \pm (q - 1)t)sp + (1 \pm t)p^2$$

$$c = 3\big(6 - (q - 1)(q - 3 \mp t)\big)s^2 + 6(1 \pm t)sp + (q - 3 \pm t)p^2$$

$$a = 3\big(6 - (q - 1)(1 \mp t)\big)s^2 + 6(1 \pm t)sp + (1 \pm t)p^2$$

Тогда примитивные решения можно записать:

$$x = 2c(c - b)$$

$$y = (c - 3b)(c - b)$$

$$z = 3a(c - b)^2$$

$$x = 2(c - b)c$$

$$y = 2(c + b)c$$

$$z = 4ac^2$$

Если $q = t^2 + 3$

$$c = 6(q - 4)(2 \pm t)p^2 + 4(6 \pm (q - 4)t)ps + 2(2 \pm t)s^2$$

$$b = 3\big(24 - (q - 4)(q - 3 \mp 2t)\big)p^2 + 12(2 \pm t)ps + (q - 3 \pm 2t)s^2$$

$$a = 6\big(12 - (q - 4)(2 \mp t)\big)p^2 + 12(2 \pm t)ps + 2(2 \pm t)s^2$$

Если $q = 3t^2 + 4$

$$c = q\big(-q + 7(4 \mp 3t)\big)p^2 + 6q(t \mp 1)ps + (q - 4 \mp 3t)s^2$$

$$b = 3q\big(2q - 7(1 \pm t)\big)p^2 + 6q(t \mp 1)ps + 3(1 \mp t)s^2$$

$$a = 21q(1 \mp t)p^2 + 6(7t \mp q)ps + 3(1 \mp t)s^2$$

Тогда примитивные решения имеют вид:

$$x = 2c(3c - 2b)$$

$$y = 2c(3c + 2b)$$

$$z = 12ac^2$$

$$x = (2b - c)b$$

$$y = (2b + c)b$$

$$z = 2ab^2$$

Уравнение

$$zx + qy = (z + q + x - y)(z + q - x + y)$$

Имеет решения и они задаются числами: a, b, p, s.

$$x = (a + b)p + 2as$$

$$y = (a + b)p - (b - a)s$$

$$z = 2bp + (b - a)s$$

$$q = (a - b)p + 2as$$

****

$$x = (a-b)p + 2bs$$

$$y = (a+b)p + 2bs$$

$$z = 2bp + (a+b)s$$

$$q = (a-b)p - (a+b)s$$

$$x = (a+b)p + 2(b-a)s$$

$$y = (a+b)p + (3b-a)s$$

$$z = (3b-a)p + (a+b)s$$

$$q = (a-3b)p + 2(b-a)s$$

****

$$x = (a + 5b)p + 4bs$$

$$y = (a + b)p + 4bs$$

$$z = -(a + b)p + (3b - a)s$$

$$q = (a + 5b)p + (a + b)s$$

Уравнение

$$zx + qy = (z + q + x - y)(z + q - x + y)$$

Имеет решения и они задаются числами: a, b, p, s.

$$x = (a + b)p + 2as$$

$$y = (a + b)p - (b - a)s$$

$$z = 2bp + (b - a)s$$

$$q = (a - b)p + 2as$$

****

$$x = (a - b)p + 2bs$$

$$y = (a + b)p + 2bs$$

$$z = 2bp + (a + b)s$$

$$q = (a - b)p - (a + b)s$$

$$x = (a + b)p + 2(b - a)s$$

$$y = (a + b)p + (3b - a)s$$

$$z = (3b - a)p + (a + b)s$$

$$q = (a - 3b)p + 2(b - a)s$$

****

$$x = (a + 5b)p + 4bs$$

$$y = (a + b)p + 4bs$$

$$z = -(a + b)p + (3b - a)s$$

$$q = (a + 5b)p + (a + b)s$$

Формулу решения уравнения: $x^2 + ax + y^2 + by = z^2 + cz$

Можно записать воспользовавшись уравнением Пелля: $p^2 - 2k(k-1)s^2 = 1$

И решения имеют вид, одно:

$$x = (k-1)\big((a+b)k + a - c\big)s^2 - (ck - b)ps$$

$$y = k\big((a+b)k + c - a - 2b\big)s^2 - (ck + a - c)ps$$

$$z = (2ck^2 + (a - b - 2c)k + c - a)s^2 - \big((a+b)k - b\big)ps$$

И другое решение:

$$x = (c-a-b)p^2 + \big((3c-2a-2b)k + 2a + b - 2c\big)ps + (k-1)\big((2c-a-b)k + a - c\big)s^2$$

$$y = (c-a-b)p^2 + \big((3c-2a-2b)k + a - c\big)ps + k\big((2c-a-b)k + a - c\big)s^2$$

$$z = (c-a-b)p^2 + \big((4c-3a-3b)k + 2a + b - 2c\big)ps + (2k-1)\big((2c-a-b)k + a - c\big)s^2$$

Для уравнения:

$$b(x^2+y^2+z^2)=a(xy+xz+yz)$$

Для случая:

$$b=3q^2+4qt+t^2$$

$$a=3q^2+4qt+2t^2$$

Решения будут:

$$x=(q+t)p^2+qps+qs^2$$

$$y=(q+t)p^2+(2t+q)ps+(q+t)s^2$$

$$z=qp^2+qps+(q+t)s^2$$

****

$$x=(t+3q)p^2-(4t+3q)ps+(4t+3q)s^2$$

$$y=(t+3q)p^2+(2t-3q)ps+(t+3q)s^2$$

$$z=(4t+3q)p^2-(4t+3q)ps+(t+3q)s^2$$

Для случая: $a = 3p^2 + 2ps + s^2$

$b = 3p^2 + 2ps$

Решения имеют вид:

$x = (2s + 3p)q^2 + (s - 3p)qt + (3p - s)t^2$

$y = (2s + 3p)q^2 - (5s + 3p)qt + (2s + 3p)t^2$

$z = (3p - s)q^2 + (s - 3p)qt + (2s + 3p)t^2$

****

$x = pq^2 - (s + p)qt + (s + p)t^2$

$y = pq^2 + (s - p)qt + pt^2$

$z = (s + p)q^2 - (s + p)qt + pt^2$

Ещё решения уравнения:

$$b(x^2 + y^2 + z^2) = a(xy + xz + yz)$$

Когда:

$$b = 5s^2 + 6ps + p^2 \quad ; \quad a = 17s^2 + 6ps + p^2$$

$$x = (5s + p)q^2 + (s - p)qt + (p - s)t^2$$

$$y = (5s + p)q^2 - (11s + p)qt + (5s + p)t^2$$

$$z = (p - s)q^2 + (s - p)qt + (5s + p)t^2$$

****

$$x = (p + s)q^2 + (7s + p)qt + (7s + p)t^2$$

$$y = (p + s)q^2 + (p - 5s)qt + (p + s)t^2$$

$$z = (7s + p)q^2 + (7s + p)qt + (p + s)t^2$$

Для случая:

$$b = 21s^2 + 10ps + p^2 \quad ; \quad a = 22s^2 + 12ps + 2p^2$$

$$x = (3s + p)q^2 + 2sqt + 2st^2$$

$$y = (3s + p)q^2 + (4s + 2p)qt + (3s + p)t^2$$

$$z = 2sq^2 + 2sqt + (3s + p)t^2$$

$$x = (7s + p)q^2 + (10s + 4p)qt + (10s + 4p)t^2$$

$$y = (7s + p)q^2 + (4s - 2p)qt + (7s + p)t^2$$

$$z = (10s + 4p)q^2 + (10s + 4p)qt + (7s + p)t^2$$

Для случая:

$b = 8s^2 + 4ps$; $a = 9s^2 + 2ps + p^2$

$$x = 2sq^2 + (p + s)qt + (p + s)t^2$$

$$y = 2sq^2 + (3s - p)qt + 2st^2$$

$$z = (p + s)q^2 + (p + s)qt + 2st^2$$

****

$$x = 2(2s + p)q^2 + (7s - p)qt + (7s - p)t^2$$

$$y = 2(2s + p)q^2 + (s + 5p)qt + 2(2s + p)t^2$$

$$z = (7s - p)q^2 + (7s - p)qt + 2(2s + p)t^2$$

Ещё решения уравнения: $b(x^2+y^2+z^2)=a(xy+xz+yz)$

Можно получить, введём $j=a^2+ab-2b^2$; $q=\sqrt{4a^2+4ab-8b^2-3}$

$n=\pm1$; $k=\pm1$; число q должно быть рациональным.

$$x=j\big(2(a-b)(j+kq)+nj(1+kq)\big)p^2+2j\big(2(a-b)(q+k)+n(q+kj)\big)ps+$$
$$+\big(2(a-b)(j+kq)+jn(1+kq)\big)s^2$$

$$y=j\big((a-b)(3-4j-kq)+nj(1+kq)\big)p^2+2j\big(n(q+kj)-(a-b)(q+k)\big)ps+$$
$$+\big((a-b)(2j-3-kq)+jn(1+kq)\big)s^2$$

$$z=j\big((a-b)(2j-3-kq)+nj(1+kq)\big)p^2+2j\big(n(q+kj)-(a-b)(q+k)\big)ps+$$
$$+\big((a-b)(3-4j-kq)+jn(1+kq)\big)s^2$$

Другие решения имеют вид:

$$x=\big(2(a-b)(j(9-8j)-(4j-3)kq)+nj(9-8j-(4j-3)kq)\big)p^2+$$

$$+2\big(2(a-b)(3-2j-kqj)+jn(3-2j-kq)\big)ps+\big(2(a-b)(j-kq)+jn(1-kq)\big)s^2$$

$$y=\big((a-b)(8j^2-9+(4j-3)kq)+nj(9-8j-(4j-3)kq)\big)p^2+$$

$$+2\Big(jn(3-2j-kq)-(a-b)\big(3-2j+kq(2j-3)\big)\Big)ps+\big(jn(1-kq)+(a-b)(3-4j+kq)\big)s^2$$

$$z=\big((a-b)(8j^2-18j+9+(4j-3)kq)+nj(9-8j-(4j-3)kq)\big)p^2+$$

$$+2\Big(jn(3-2j-kq)-(a-b)\big(3-2j+kq(3-4j)\big)\Big)ps+\big(jn(1-kq)+(a-b)(2j-3+kq)\big)s^2$$

Рассмотрим некоторые интересные решения уравнения.

$$qx^2 + y^2 = z^2 + j$$

Будем рассматривать тот случай когда:

$a = \sqrt{\frac{j}{q}}$ целое.

Тогда воспользуемся для начала следующим уравнением Пелля.

$$p^2 - (1+q)s^2 = 1$$

Решения будут задаваться решениями уравнения Пелля и каким то любым заданным нами числом L.

$$x = 2(s^2 \pm ps)L \pm ap^2 + 2aps \pm a(q+1)s^2$$

$$y = (p^2 \pm 2ps + (1-q)s^2)L \pm ap^2 + 2aps \pm a(q+1)s^2$$

$$z = (p^2 \pm 2ps + (q+1)s^2)L \pm ap^2 + 2a(q+1)ps \pm a(q+1)s^2$$

Запишем коротко:

$$x = bL + af$$

$$y = cL + af$$

$$z = fL + at$$

Числа эти являются решениями следующих уравнений:

$$|t^2 - (1+q)f^2| = q$$

$$qb^2 + c^2 = f^2$$

Причём $b - c = 1$. То есть из решений уравнения Пелля мы можем получить решения последнего уравнения с заданной разностью в данном случае 1. И наоборот из решений этого уравнения можем найти решения уравнения Пелля. Если мы захотим найти при другой разности пользуемся решениями следующего уравнения: $p^2 - (1+q)s^2 = k$

Пользуясь этими решениями подставив числа в формулу получим решения следующих уравнений Пелля:

$$|t^2 - (1+q)f^2| = qk^2$$

И решения уравнения $qb^2 + c^2 = f^2$

С заданной разностью $c - b = k$

То есть пользуясь решениями уравнения Пелля можно найти решения последнего уравнения. Или же зная их решения, формула которых довольно элементарна, можно найти решения уравнений Пелля. Их довольно сложно искать, а тут такая элементарная связь.

Уравнение :

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2 + (y+1)^2 + (y+2)^2$$

Решения можно представить через уравнение Пелля.

$$p^2 - 12s^2 = 1$$

Тогда:

$$x = 36s^2 \pm 12ps$$

$$y = 36s^2 \pm 12ps + p^2$$

Если же представим числа q, t через p, s.

$$q = 8ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

$$t = 6ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

Тогда решения можно записать:

$$x = -12t(t \mp q)$$

$$y = -3(4t^2 \mp 4qt + q^2)$$

Более общее уравнение:

$$x^2 + (x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2 = y^2 + (y+z)^2 + (y+f)^2$$

Решение можно записать если число q рационально:

$$q = \sqrt{2\big(ab + ac + bc - zf - (z+f)(a+b+c-z-f)\big)}$$

Если воспользуемся уравнением Пелля: $p^2 - 3s^2 = 1$ Решения имеют вид:

$$x = (z + f - a - b - c \pm q)p^2 + \Big(3q \pm \big(4(z+f) - 3(a+b+c)\big)\Big)ps +$$

$$+\frac{3}{2}(2(z+f) - a - b - c \pm 2q)s^2$$

$$y = (z + f - a - b - c \pm q)p^2 + \Big(4q \pm \big(4(z+f) - 3(a+b+c)\big)\Big)ps +$$

$$+(5(z+f) - 3(a+b+c) \pm 3q)s^2$$

Уравнение :

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 = y^2 + (y+1)^2 + (y+2)^2$$

Решения можно представить через уравнение Пелля.

$$p^2 - 12s^2 = 1$$

Тогда:

$$x = 36s^2 \pm 12ps$$

$$y = 36s^2 \pm 12ps + p^2$$

Если же представим числа q, t через p, s.

$$q = 8ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

$$t = 6ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

Тогда решения можно записать:

$$x = -12t(t \mp q)$$

$$y = -3(4t^2 \mp 4qt + q^2)$$

Решения уравнения: $(x+1)^3 - x^3 = y^2$

Можно найти выразив решения через решения следующих уравнений Пелля : $p^2 - 3s^2 = 1$, тогда

$$x = \pm 2ps - p^2$$

$$y = p^2 \mp 3ps + 3s^2$$

Если воспользоваться уравнением: $p^2 - 12s^2 = 1$

$$q = 4ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

$$t = 8ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

Можно записать: $x = t(t - 2q)$

$$y = t^2 - tq + q^2$$

Если же записать: $t = 6ps \pm (p^2 + 12s^2)$

$$q = 8ps \pm (p^2 + 12s^2)$$

Тогда: $x = -4t(t+q)$

$$y = 4t^2 + 6tq + 3q^2$$

Ещё решения уравнения:

$$b(x^2 + y^2 + z^2) = a(xy + xz + yz)$$

Если числа можно выразить так:

$$b = t^2 - 2qt \qquad\qquad a = 2t^2 + q^2$$

Решения имеют вид:

$$x = (t - 2q)p^2 - (4t + q)ps + (4t + q)s^2$$

$$y = (t - 2q)p^2 + (2t + 5q)ps + (t - 2q)s^2$$

$$z = (4t + q)p^2 - (4t + q)ps + (t - 2q)s^2$$

И ещё:

$$x = -tp^2 - qps + qs^2$$

$$y = -tp^2 + (2t + q)ps - ts^2$$

$$z = qp^2 - qps - ts^2$$

Рассмотрим уравнение: $\frac{a}{A} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ число: $A = xyz$

называют Александрийским числом.

Фактически необходимо решить уравнение:

$$xy + xz + yz = a$$

Решения записываются элементарно всегда можно разложить

Где p любое число, надо учесть, что k, s могут быть и отрицат.

$$p^2 + a = ks$$

По выбранным множителям запишем решения:

$$x = p$$

$$y = -(p + s)$$

$$z = -(p + k)$$

Следующее довольно знаменитое уравнение, решить можно

зная решения уравнения Пелля: $p^2 - acs^2 = 1$

$$axy + x + y = z^2$$

Тогда запишем решения:

$$x = (c + 1)s^2$$

$$y = c(c + 1)s^2$$

$$z = ps(c + 1)$$

У системы уравнений : $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - t^2 + q^2 - u^2 = 0 \\ xy + zt - qu = 0 \end{cases}$

Решения можно записать представив: $p = a^2 - 3b^2$

$$s = 2ab - 4b^2$$

$$j = 3b^2 - 4ab + a^2$$

Где a, b, n, k —любые заданные нами целые числа, тогда решения выглядят так:

$$x = [j(p^2 - 4ps + 3s^2) - (p - s)(3p^2 - 4ps + s^2)]k^2 + 2(p - s)[j - 2(p - s)]kn +$$

$$+(j - p + s)n^2$$

$$y = (p - s)(4j(p - s) - 3p^2 + 4ps - s^2)k^2 + 2(p - s)\big(j - 2(p - s)\big)kn -$$

$$-(p - s)n^2$$

$$z = \big(j(p^2 - 4ps + 3s^2) + s(3p^2 - 4ps + s^2)\big)k^2 + 2(p - s)(2s + j)kn +$$

$$+(j + s)n^2$$

$$t = (p - s)(j(p + s) - 3p^2 + 4ps - s^2)k^2 + 2(jp - 2(p - s)^2)kn +$$

$$+(j - p + s)n^2$$

$$q = \big(j(5p^2 - 8ps + 3s^2) - (p - s)(3p^2 - 4ps + s^2)\big)k^2 +$$

$$+2(j(2p - s) - 2(p - s)^2)kn + (j - p + s)n^2$$

$$u = \big(j(p^2 - 4ps + 3s^2) + (2s - p)(3p^2 - 4ps + s^2)\big)k^2 +$$

$$+2(p - s)\big(j + 2(2s - p)\big)kn + (j + 2s - p)n^2$$

Решение системы уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + ty = z^2 \\ y^2 + tx = q^2 \end{cases}$$

Решения определяются 2-мя переменными, то t чётно.

$$x = p - s \;;\; y = p + s \;;\; t = 8p \;;\; z = 3p + s \;;\; q = 3p - s$$

Хотя при 4-х переменных может быть нечётным. Или ещё:

$$x = p - 3s \;;\; y = p + s \;;\; t = 8(p - s) \;; z = 3p - s \;; q = 3p - 5s$$

****

$$x = p^2 - 10ps - 11s^2$$

$$y = 2p^2 + 4ps + 38s^2$$

$$t = 12(2p + 5s)s$$

$$z = p^2 + 14ps + 49s^2$$

$$q = 2p^2 + 10ps - 28s^2$$

$$x = p^2 + 10ps + 21s^2$$

$$y = 2p^2 + 12ps + 22s^2$$

$$t = -4(2p + 5s)s$$

$$z = p^2 + 2ps + s^2$$

$$q = 2p^2 + 10ps + 8s^2$$

Хотя если взять 4 переменные таких проблем не появляються.

$$x = 2psb^2 - a^2p^2$$

$$y = 2abp^2 - b^2s^2$$

$$t = as(4bp - as)$$

$$z = 2psb^2 + a^2p^2 - abs^2$$

$$q = 2abp^2 + b^2s^2 - psa^2$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} x(x+t)+y(y+t)=z(z+t) \\ x(x+t)-y(y+t)=u(u+t) \end{cases}$$

Имеет решения которые задаются любыми целыми числами a, b, p, s.

$$x=a^2(p-s)s+ab(p^2+s^2)-b^2(p+s)p$$

$$y=2a^2(p-s)s$$

$$t=2b^2(p+s)p-2a^2(p-s)s$$

$$z=a^2(p-s)s+ab(p^2+2ps-s^2)-b^2(p+s)p$$

$$u=a^2(p-s)s+ab(s^2+2ps-p^2)-b^2(p+s)p$$

Если же мы захотим, чтоб t было равно какому то числу n необходимо решить диофантово уравнение $t=n$.

Это не так сложно формулы решения бинарных квадратичных форм я уже написал.

В уравнении:

$$ax^2+by^2+cz^2=qxy+dxz+tyz$$

Решение можно представить следующей формулой, но я запишу её двояко, чтоб легче было посмотреть как коэффициенты переставляются. Для облегчения расчётов представим:

$$k = (q+t)^2 - 4b(a+c-d)$$

$$j = (d+t)^2 - 4c(a+b-q)$$

$$n = t(2a-t-d-q) + (2b-q)(2c-d)$$

Тогда:

$$x = \left(2n(2c-d-t) + j\left(q+t-2b \pm \sqrt{k}\right)\right)p^2 +$$

$$+2\left((d+t-2c)\sqrt{k} \mp n\right)ps + \left(2b-q-t \pm \sqrt{k}\right)s^2$$

****

$$y = \left(2n(2c-d-t) + j\left(2(a+c-d) - q - t \pm \sqrt{k}\right)\right)p^2 +$$

$$+2\left((d+t-2c)\sqrt{k} \mp n\right)ps + \left(q+t+2(d-a-c) \pm \sqrt{k}\right)s^2$$

$$z = \left(j\left(q+t-2b \pm \sqrt{k}\right) - 2n(2(a+b-q)-d-t)\right)p^2 +$$

$$+2\left((2(a+b-q)-d-t)\sqrt{k}\mp n\right)ps+\left(2b-q-t\pm\sqrt{k}\right)s^2$$

Следующая имеет такой вид:

$$x=\left(2n(q+t-2b)+k\left(2c-d-t\pm\sqrt{j}\right)\right)p^2+$$

$$+2\left((2b-q-t)\sqrt{j}\mp n\right)ps+\left(d+t-2c\pm\sqrt{j}\right)s^2$$

****

$$y=\left(2n(2(a+c-d)-q-t)+k\left(2c-d-t\pm\sqrt{j}\right)\right)p^2+$$

$$+2\left((q+t+2(d-a-c))\sqrt{j}\mp n\right)ps+\left(d+t-2c\pm\sqrt{j}\right)s^2$$

****

$$z=\left(2n(q+t-2b)+k\left(d+t+2(q-a-b)\pm\sqrt{j}\right)\right)p^2+$$

$$+2\left((2b-q-t)\sqrt{j}\mp n\right)ps+\left(2(a+b-q)-d-t\pm\sqrt{j}\right)s^2$$

Решить уравнение можно:

$$x(x+1)+y(y+1)=z(z+1)+a$$

Если представим: $a = \frac{q^2-1}{4}$.

Тогда решения уравнения : $p^2 - 2s^2 = 1$

Определяют формулу решения, где l любое заданное нами целое число. Тогда:

$$x = (2l + 1 \pm q)s^2 + (q \pm 2l)ps - \left(\frac{1 \mp q}{2}\right)p^2$$

$$y = (1 \pm q)s^2 + (q \pm 2l)ps + \left(l - \frac{1 \mp q}{2}\right)p^2$$

$$z = (2l + 1 \pm q)s^2 + 2(q \pm l)ps + \left(l - \frac{1 \mp q}{2}\right)p^2$$

Некоторые решения уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = aq^3$$

Можно представить задав любые целые числа p, s, b.

Причём число b характеризует степень примитивности, набора решений. Для получения примитивных решений нужно будет после подстановок сократить на b.

$$x = 18(p^3 + p^2 s + ps^2 + s^3)a^2 b^3$$

$$y = 9(2p^3 - p^2 s + 2ps^2 - s^3)a^2 b^3$$

$$z = 9(p^3 - 2p^2 s + ps^2 - 2s^3)a^2 b^3$$

$$q = 9(p^2 + s^2)ab^2$$

Уравнение:

$$x^2 + y^2 = z^2 + q^2$$

Ещё имеет следующие решения:

$$x = b^2 p^2 - 2(a - 2b)bps + (2a^2 - 4ab + 3b^2)s^2$$

$$y = 2b^2 p^2 - 4(a - b)bps + (4a^2 - 6ab + 2b^2)s^2$$

$$z = 2b^2 p^2 - 2(a - 2b)bps + 2(b^2 - a^2)s^2$$

$$q = b^2 p^2 - 2(3a - 2b)bps + (4a^2 - 8ab + 3b^2)s^2$$

****

$$x = b^2p^2 + 2(a - 2b)bps + (10a^2 - 4ab - 5b^2)s^2$$

$$y = 2b^2p^2 + 4(a + b)bps + (20a^2 - 14ab + 2b^2)s^2$$

$$z = -2b^2p^2 + 2(a - 2b)bps + (22a^2 - 16ab - 2b^2)s^2$$

$$q = b^2p^2 + 2(7a - 2b)bps + (4a^2 + 8ab - 5b^2)s^2$$

$$x = 2(a + b)p^2 + 2(a + b)ps + (5a - 4b)s^2$$

$$y = 2\big((2a - b)p^2 + 2(a + b)ps + (5a - b)s^2\big)$$

$$z = 2\big((a + b)p^2 + (7a - 2b)ps + (a + b)s^2\big)$$

$$q = 2(b - 2a)p^2 + 2(a + b)ps + (11a - 4b)s^2$$

$$x = 2(b - a)p^2 + 2(a - b)ps - as^2$$

$$y = 2\big((b - 2a)p^2 + 2(a - b)ps + (b - a)s^2\big)$$

$$z = 2\left((b-a)p^2 + (3a-2b)ps - (a-b)s^2\right)$$

$$q = 2(b-2a)p^2 + 2(a-b)ps + as^2$$

Числа a, b, p, s —являются целыми и любого знака.

Формулы решения уравнения: $x^3 + y^3 + t^2 = z^4$

Можно выразить через следующие уравнения Пелля:

Если $p^2 - 3s^2 = 1$, тогда решения имеют вид:

$$z = 2p^2$$

$$x = 2p(p+s)$$

$$y = 2p(p-s)$$

$$t = 4p^2(p^2-1)$$

Если же представить числа a, b через p, s тогда:

$$a = 2ps \pm (p^2 + 3s^2)$$

$$b = 6ps \pm (p^2 + 3s^2)$$

$$z = b^2$$

$$x = -b(b + a)$$

$$y = -b(b - a)$$

$$t = b^2(b^2 + 2)$$

Если же воспользоваться другим уравнением $p^2 - 15s^2 = 1$

$$a = 6ps \pm (p^2 + 15s^2)$$

$$b = 10ps \pm (p^2 + 15s^2)$$

$$z = 9a^2$$

$$t = 9a^2(9a^2 - 6)$$

$$y = 9a(a + b)$$

$$x = 9a(a - b)$$

Если представим: $q = (k+1)^2 + 4(k^2 - k + 1)(2k^2 - 4k + 1)$

Тогда воспользовавшись решениями: $p^2 - qs^2 = 1$

Передставив $a = (4k^2 - 6k + 2)ps \pm (p^2 + qs^2)$

$$b = (8k^2 - 14k + 6)ps \pm (p^2 + qs^2)$$

Тогда решения выглядят так:

$$z = (k-1)^2(2a - (k+1)b)a$$

$$x = (k-1)^2(2a - (k+1)b)(a - b)$$

$$y = (k-1)^2(2a - (k+1)b)(a - kb)$$

$$t = (k-1)^4(2a - (k+1)b)^2(a^2 - 1)$$

Число k может быть любым целым и любого знака.

Уравнение Маркова:

$$x^2 + y^2 + z^2 = qxyz$$

Дробные решения можно записать

через числа: a, b, p, s

$$x = \frac{2(b^2 + a^2)}{q(b^2 - a^2)}$$

$$y = \frac{(p^2 + s^2)(b^2 + a^2)}{qab(p^2 - s^2)}$$

$$z = \frac{(b^2 + a^2)\left((p^2 + s^2)(b^2 + a^2) \pm 4abps\right)}{qab(b^2 - a^2)(p^2 - s^2)}$$

....

$$x = \frac{(a^2 - b^2)s^2 + 2(p^2 + s^2)b^2}{qpsb(a + b)}$$

$$y = \frac{(a^2 - b^2)s^2 + 2(p^2 + s^2)b^2}{qpsb(a - b)}$$

$$z = \frac{2\left((a^2 - b^2)s^2 + 2(p^2 + s^2)b^2\right)}{q(a^2 - b^2)s^2}$$

$$x = \frac{2p^2b^2 + (a^2 + b^2)s^2}{qspb(a - b)}$$

$$y = \frac{2p^2b^2 + (a^2 + b^2)s^2}{qspb(a + b)}$$

$$z = \frac{2(2p^2s^2 + (a^2 + b^2)s^2)}{q(a^2 - b^2)s^2}$$

Если же представим число $z = \frac{a^2+2}{q}$ тогда

воспользовавщись уравнением Пелля:

$$p^2 - (a^2 + 4)s^2 = \pm z$$

Тогда к этому числу "z" можно выписать решения

$$x = \frac{p^2 - 2aps + (a^2 + 4)s^2}{a}$$

$$y = \frac{p^2 + 2aps + (a^2 + 4)s^2}{a}$$

Решения уравнения:

$x^5 + y^5 + q^5 = z^5$

В комплексных числах можно записать элементарно:

Числа p, s задаются нами, а $j = \sqrt{-1}$ мнимая единица.

Тогда если:

$$a = p^2 - 2ps - s^2$$

$$b = p^2 + 2ps - b^2$$

$$c = p^2 + s^2$$

Решения можно записать в таком виде:

$$x = b + cj$$

$$y = -b + cj$$

$$q = a - cj$$

$$z = a + cj$$

Уравнение:

$$xyz + (x + y + z)^3 = q^3$$

Имеет решение, числа a, b задаются нами:

$$x = -45(a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3)(a + b)^2$$

$$y = 12a^4b + 90a^3b^2 + 205a^2b^3 + 135ab^4 + 27b^5$$

$$z = 27a^5 + 135a^4b + 205a^3b^2 + 90a^2b^3 + 12ab^4$$

$$q = -(18a^5 + 138a^4b + 350a^3b^2 + 350a^2b^3 + 138ab^4 + 18b^5)$$

Некоторые решения уравнения:

$$x(x + f) + y(y + f) + z(z + f) = n(n + f)$$

Можно записать через $f = acb$, разложив на множители:

Тогда:

$$x = 2cqb^2$$

$$y = 2dbc^2$$

$$z = (d^2 - b^2)c^2 + b^2q^2 + \frac{a}{2}[(d - b)c + bq]$$

$$n = (d^2 + b^2)c^2 + b^2q^2 + \frac{a}{2}[(d - b)c + bq]$$

Числа d, q задаются нами и они целые.

У другого:

$$x(x+1)+y(y+1)+z(z+1)=n(n+1)$$

Решения можно выразить через решения уравнения Пелля:

$$p^2-bs^2=1$$

Где b выражается через задаваемые нами переменные t,k

$$b=3t^2-2t(k+1)-(k-1)^2$$

Естественно число b должно быть положительным.

Решения тогда записываем:

$$x=p[(k+1-t)s-p]$$

$$y=p[(k-1-t)s-p]$$

$$z=p[(1-k-t)s-p]$$

$$n=p[(k+1-3t)s-p]$$

Другое решение:

$$x=s[(k+1-t)p+bs]$$

$$y=s[(k-1-t)p+bs]$$

$$z=s[(1-k-t)p+bs]$$

$$n = s[(k + 1 - 3t)p + bs]$$