Ниже приведены формулы решения некоторых неопределенных алгебраических уравнений. Чтобы попытаться подробнее написать, я выбрал один тип уравнения. Ввиду того, что в своей специфике, решения диофантовых уравнений имеют довольно громоздкий вид, и чтобы моё письмо прочитали, начну с наиболее простых решений.

Числа которые задаются в уравнениях a, в, с целые. Нами определяются числа p, s – которые тоже являются целыми, причем любого знака.

Уравнение $y^2 + ax^2 = a \cdot z^2$ имеет решение.

$$y = 2 \cdot a \cdot p \cdot s$$
$$x = a \cdot p^2 - s^2$$
$$z = a \cdot p^2 + s^2$$

Уравнение $y^2 + a \cdot x \cdot y + x^2 = z^2$ имеет решения:

$$x = a \cdot s^2 - 2 \cdot p \cdot s$$
$$y = p^2 - s^2$$
$$z = p^2 - a \cdot p \cdot s + s^2$$

$$x = (4a + 3 \cdot a^2) s^2 - 2 \cdot (2 + a) \cdot p \cdot s - p^2$$
$$y = (a^3 - 8a - 8) s^2 + 2(a^2 - 2) p \cdot s + a \cdot p^2$$
$$z = (2 \cdot a^3 + a^2 - 8a - 8) s^2 + 2(a^2 - 2) ps - p^2$$

$$x = (a + 4) p^2 - 2 \cdot p \cdot s$$
$$y = 3 \cdot p^2 - 4ps + s^2$$
$$z = (2 \cdot a + 5) p^2 - (a + 4) ps + s^2$$

$$x = 8\cdot s^2 - 4p\cdot s$$
$$y = p^2 - (4-2a)\cdot p\cdot s + a(a-4)s^2$$
$$z = -p^2 + 4\cdot p\cdot s + (a^2-8)\cdot s^2$$

Для частного случая $a=1$; $y^2+xy+x^2=z^2$, можно указать ещё два решения

$$x = 3\cdot s^2 + 2\cdot p\cdot s$$
$$y = p^2 + 2\cdot p\cdot s$$
$$z = p^2 + 3\cdot p\cdot s + 3\cdot s^2$$

$$x = 3\cdot s^2 + 2\cdot p\cdot s - p^2$$
$$y = p^2 + 2\cdot p\cdot s - 3\cdot s^2$$
$$z = p^2 + 3\cdot s^2$$

Уравнение $x^2 + a\cdot x\cdot y + b\cdot y^2 = z^2$, всегда имеет решение и одно из его решений, выглядит довольно компактно

$$x = s^2 - b\cdot p^2$$
$$y = a\cdot p^2 + 2\cdot p\cdot s$$
$$z = b\cdot p^2 + a\cdot p\cdot s + s^2,$$ но уже

довольно простое уравнение $x^2+y^2 = a\cdot z^2$ не всегда имеет решения.
Если $\sqrt{a-1}$ и $\sqrt{2a}$ является целым, вообще говоря рациональным, числом, решения написаны ниже. Верхний знак в формулах соответствует одной формуле, нижний другой. Нужно ещё учесть, что числа

$$x = -p^2\left(1 \pm \sqrt{a-1}\right) + 2\cdot p\cdot s\left((a-1)\sqrt{a-1} \pm 1\right) + \left(1 - a \mp (a-1)\sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$y = p^2\left(1 - a \mp \sqrt{a-1}\right) + 2\cdot p\cdot s\left(\sqrt{a-1} \pm 1\right) + \left(a^2 - 2a - 1 \mp (a-1)\sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$z = -p^2\left(1 \pm \sqrt{a-1}\right) + 2\cdot p\cdot s\cdot\left(\sqrt{a-1} \pm 1\right) + \left(a - 3 \mp (a-1)\sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$x = p^2\left(a - 1 \mp \sqrt{a-1}\right) - 2\cdot a\cdot p\cdot s\cdot\left(\sqrt{a-1} \mp 1\right) + 2\cdot a\cdot\left(1 \mp \sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$y = p^2\left(1 \mp \sqrt{a-1}\right) - 2\cdot a\cdot p\cdot s\left(\sqrt{a-1} \mp 1\right) + \left(2a^2 - 2a \mp 2a\sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$z = p^2\left(1 \mp \sqrt{a-1}\right) - 2\cdot p\cdot s\cdot\left(2\sqrt{a-1} \mp a\right) + 2\cdot a\cdot\left(1 \mp \sqrt{a-1}\right)\cdot s^2$$

$$x = \left(a \pm \sqrt{2a}\right)\cdot p^2 - 2\left(\sqrt{2a} \pm a\right)p\cdot s + \left(3a - a^2 \pm (a-1)\sqrt{2a}\right)\cdot s^2$$

$$y = \left(a \pm \sqrt{2a}\right)\cdot p^2 - 2\left((a-1)\cdot\sqrt{2a} \pm a\right)\cdot p\cdot s + \left(a^2 - a \pm (a-1)\sqrt{2a}\right)\cdot s^2$$

$$z = \left(2 \pm \sqrt{2a}\right)\cdot p^2 - 2\left(\sqrt{2a} \pm a\right)\cdot p\cdot s + \left(2 \pm (a-1)\sqrt{2a}\right)\cdot s^2$$

p, s – могут быть разных знаков.
Далее записано решение уравнения
$a\cdot x^2 + c\cdot y^2 = b\cdot z^2$, когда a, c, b – не являются квадратами. Решение может быть, когда $\sqrt{c(b-a)}$, $\sqrt{b(a+c)}$ – являются целыми числами.
И ещё одна деталь, на которую необходимо обратить внимание. Специфика написания этих формул для Вас в таком виде, требует

$$x=\left(2\cdot b\cdot c^2-c\cdot(b-a)\left(b\mp\sqrt{b(a+c)}\right)\right)\cdot s^2\mp 2\cdot c\cdot\left(b\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot p\cdot s+\left(b\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot p^2$$

$$y=c\cdot(b-a)\cdot\left(b\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot s^2+2\left((a-b)\sqrt{b(a+c)}\mp b\cdot c\right)\cdot p\cdot s+\left(b\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot p^2$$

$$z=\left(2\cdot b\cdot c^2-c(b-a)\left(a+c\mp\sqrt{b(a+c)}\right)\right)\cdot s^2\mp 2\cdot c\cdot\left(b\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot p\cdot s+\left(a+c\pm\sqrt{b(a+c)}\right)\cdot p^2$$

$$x=a(b-c)\left(c\mp\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot s^2+2\cdot\left(a\cdot c\mp(b-c)\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p\cdot s+\left(c\mp\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p^2$$

$$y=\left(2\cdot a^2\cdot c-a(b-c)\left(b-a\pm\sqrt{c(b-a)}\right)\right)\cdot s^2+2\cdot\left(a\cdot c\mp a\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p\cdot s+\left(b-a\mp\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p^2$$

$$z=\left(2\cdot a^2\cdot c-a\cdot(b-c)\left(c\pm\sqrt{c(b-a)}\right)\right)\cdot s^2+2\left(a\cdot c\mp a\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p\cdot s+\left(c\mp\sqrt{c(b-a)}\right)\cdot p^2$$

чтобы после подстановки чисел a, b, c — а затем если необходимо чисел p и s, числа x, y, z делились на наибольший общий делитель. Это необходимо если мы хотим получить примитивное решение. Думаю сильно критиковать меня за этот недостаток не будут, тем более со временем я покажу как легко от него можно избавиться.

Чтобы зря пустой лист не гнать, ниже задача незабвенного Герона.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= z + d \\ x \cdot y &= a \cdot z \cdot d \end{aligned}\right\}, \quad a \text{ — любое целое число.}$$

Решения имеют следующий вид:

$x = a \cdot s^2 - a \cdot p \cdot s$	$x = a \cdot p^2 + a \cdot p \cdot s$
$y = a \cdot p \cdot s - p^2$	$y = a \cdot p \cdot s + (a-1) \cdot s^2$
$z = p \cdot s - p^2$	$z = a \cdot p^2 + (2 \cdot a - 1) \cdot p \cdot s + (a-1) \cdot s^2$
$d = a \cdot s^2 - p \cdot s$	$d = p \cdot s$

Кстати отрицательное решение - это тоже решение.

P.S. Чуть не забыл. В уравнении $a x^2 + c \cdot y^2 = b \cdot z^2$, другие наборы решений получаются заменой "a" на "c".

Как в каком нибудь уравнении может быть несколько корней, так и в диофантовых уравнениях несколько решений. Правда может и не быть решений.

Так с этим уравнением пора заканчивать.

Мавр сделал своё дело, мавр должен уйти.

Уравнение $a \times x^2 + b \times x \times y + c \times y^2 = j \times z^2$

Будет иметь решений, если следующие корни являютъся рациональным числом.

$$\sqrt{j \times (a + b + c)} \qquad \sqrt{b^2 + 4 \times a \times (j - c)}$$

$$\sqrt{b^2 + 4 \times c \times (j - a)}$$

Ниже записаны формулы описывающие эти решения.

Здесь не рассмотрен случай когда одновременно

$\{\sqrt{j}|\sqrt{c}\}$ или $\{\sqrt{j}|\sqrt{a}\}$ являються рациональными числами. Необходимо подчеркнуть, что ещё наборы решений получаютъся заменой $a \leftrightarrow c$. Естественно

Числа p,s должны быть целыми и любого знака.

$$x = \left[2j(b+2c)^2 - \left(b^2 + 4c(j-a)\right)\left(j \pm \sqrt{j(a+b+c)}\right)\right]s^2 +$$

$$+2(b+2c)\left(\sqrt{j(a+b+c)} \mp j\right)sp + \left(j \mp \sqrt{j(a+b+c)}\right)p^2$$

$$y = \left[2j(2j-b-2a)(b+2c) - \left(b^2 + 4c(j-a)\right)\left(j \pm \sqrt{j(a+b+c)}\right)\right]s^2 +$$

$$+2\left[(2j-2a-b)\sqrt{j(a+b+c)} \mp j(b+2c)\right]sp + \left(j \mp \sqrt{j(a+b+c)}\right)p^2$$

$$z = \left[2j(b+2c)^2 - \left(b^2 + 4c(j-a)\right)\left(a+b+c \pm \sqrt{j(a+b+c)}\right)\right]s^2 +$$

$$+2(b+2c)\left(\sqrt{j(a+b+c)} \mp j\right)sp + \left(a+b+c \mp \sqrt{j(a+b+c)}\right)p^2$$

$$x = \left[(2j-b-2c)\left(8ac+2b(2j-b)\right) - \left(b^2+4a(j-c)\right)\left(b+2c \mp \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right)\right] s^2 +$$

$$+2\left[4ac+b(2j-b) \pm (2j-b-2c)\sqrt{b^2+4c(j-a)}\right] sp + \left(b+2c \pm \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right) p^2$$

$$y = \left[(b+2a)\left(8ac+2b(2j-b)\right) - \left(b^2+4a(j-c)\right)\left(2j-b-2a \mp \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right)\right] s^2 +$$

$$+2\left[4ac+b(2j-b) \pm (b+2a)\sqrt{b^2+4c(j-a)}\right] sp + \left(2j-b-2a \pm \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right) p^2$$

$$\mathrm{z} = \left[(b+2a)\left(8ac+2b(2j-b)\right) - \left(b^2+4a(j-c)\right)\left(b+2c \mp \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right)\right] s^2 +$$

$$+2\left[4ac+b(2j-b) \pm (b+2a)\sqrt{b^2+4c(j-a)}\right] sp + \left(b+2c \pm \sqrt{b^2+4c(j-a)}\right) p^2$$

$$x = \left[2j^2(b+2a) - j(a+b+c)\left(2j - 2c - b \pm \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right)\right] p^2 +$$

$$+2j\left(\sqrt{b^2 + 4a(j-c)} \mp (b+2a)\right) ps + \left(2j - 2c - b \mp \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right) s^2$$

$$y = \left[2j^2(b+2a) - j(a+b+c)\left(b + 2a \pm \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right)\right] p^2 +$$

$$+2j\left(\sqrt{b^2 + 4a(j-c)} \mp (b+2a)\right) ps + \left(b + 2a \mp \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right) s^2$$

$$z = j(a+b+c)\left(b + 2a \mp \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right) p^2 +$$

$$+2\left[(a+b+c)\sqrt{b^2 + 4a(j-c)} \mp j(b+2a)\right] ps + \left(b + 2a \mp \sqrt{b^2 + 4a(j-c)}\right) s^2$$

Решения которые приведены ниже показывают довольно отчётливо общность методов расчёта довольно разных, по внешнему виду уравнений.

Следующее Диофантовое уравнение

$$b\times[x^2+y^2+z^2]=a\times[x\times y+x\times z+y\times z]$$

будет иметь примитивное решение если есть возможность выразить числа a,b через целые числа t,q следующим образом

$$b=t^2-q^2$$

$$a=t^2+2\times q^2$$

и решения находятъся по формулам

$$x=(-q\pm t)\times p^2+(2\times q\pm t)\times p\times s+(2\times q\pm t)\times s^2$$

$$y=(2\times q\pm t)\times p^2+(2\times q\pm t)\times p\times s+(-q\pm t)\times s^2$$

$$z=(-q\pm t)\times p^2+(-4\times q\pm t)\times p\times s+(-q\pm t)\times s^2$$

Где числа p,s–являються целыми.

При этом они могут быть любого знака.

Решения уравнения $x^2+y^2=z^2+1$

Разбиваються на 3 группы решений.

1 группа решений получаютъся если задавать будем

нечетные числа t.

$$x=1\pm t$$

$$y=\frac{(t^2-1\pm2\times t)}{2}$$

$$z=\frac{(t^2+1\pm2\times t)}{2}$$

2 группа решений похожа на первую

Числа t могут быть любыми

$$x=2t\pm1$$

$$y=t^2\pm t-1$$

$$z=t^2\pm t+1$$

3 группа решений получаетъся с помощью уравнения Пелля. Если числа p,s– являються решениями следующего Уравнения Пелля. $p^2-2\times s^2=\pm1$

тогда решения уравнения можно записать

$$x=2\times s\times(p+s)\times k+p^2+2\times p\times s+2\times s^2$$

$$y=(p^2+2\times p\times s)\times k+p^2+2\times p\times s+2\times s^2$$

$$z=(p^2+2\times p\times s+2\times s^2)\times k+p^2+4\times p\times s+2\times s^2$$

Числа p,s— могут быть любого знака. Число же k—может быть любым целым. Естественно любого знака.

И самое интересное. Числа при коэффициенте k,

являються Пифагоровыми тройками (a,b,c) разница между a и b равен 1. Числа не при k являютъся решениями уравнения Пелля. $x^2 - 2 \times y^2 = \pm 1$

Удивительно! Решения уравнения Пелля связано

С Пифагоровыми тройками. Как известно возможно найти все решения уравнения Пелля, если будем знать

первое решение. Оказываеться есть возможность его найти не разлагая $\sqrt{q}$ на цепные дроби. Для меня так

искать решения проще. Правда находяться своеобразным глупым перебором, но он позволяет для довольно большой группы уравнений найти решения.

Уравнение Пелля замечательно тем, что это как бы самая маленькая единица измерений в целочисленном мире. Фактически зная определенное заданное для решаемого уравнения величины, мы всегда придём к определённому уравнению Пелля. И уже само это уравнение нам скажет какие решения мы получим.

Причём как, это ни странно число неизвестных не играет никакой роли.

Ниже записаны формулы решения двух систем уравнений решал которую ещё Диофант. Естественно в формулах числа p,s,a,b—являються целыми и любого знака.

Первая $\begin{cases} x^2 + y^2 = \mathrm{z}^2 \\ (x+t)^2 + y^2 = u^2 \end{cases}$

Формула решений выглядит так:

$$x = 2\mathrm{ps}(a^2 - b^2)$$

$$y = (a^2 - b^2)(p^2 - s^2)$$

$$t = 2\mathrm{ab}(p^2 + s^2) - 4\mathrm{psa}^2$$

$$\mathrm{z} = (a^2 - b^2)(p^2 + s^2)$$

$$u = (a^2 + b^2)(p^2 + s^2) - 4\mathrm{abps}$$

У второй

$$\begin{cases} x^2 + yq = z^2 \\ y^2 + xq = u^2 \end{cases}$$

Формула решений выглядит так:

$$q = \mathrm{as}(4bp - as)$$

$$x = 2\mathrm{psb}^2 - \mathrm{a}^2p^2$$

$$y = 2\mathrm{abp}^2 - \mathrm{b}^2\mathrm{s}^2$$

$$\mathrm{z} = 2\mathrm{psb}^2 + \mathrm{a}^2\mathrm{p}^2 - \mathrm{abs}^2$$

$$u = 2\mathrm{abp}^2 + \mathrm{b}^2\mathrm{s}^2 - \mathrm{psa}^2$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (qx - ct)y + y^2 = z^2 \\ x^2 - (qx - ct)y + y^2 = u^2 \end{cases}$$

При заданных постоянных q, c. И при переменных которые нам надо найти x, t, y, z, u. Будет иметь показанные ниже решения. Причём они будут задаваться целочисленными переменными a, p, b, s. Которые мы сами задаём.

$$x = \mathrm{c}(a^2s^2 + p^2b^2 - 2s^2b^2)(p^2 - s^2)\mathrm{b}$$

$$t = (p^2 - s^2)[a^2(qs^2 - 2ps) + 2ab(p^2 - s^2) + b^2(qp^2 + 2ps - 2qs^2)]\mathrm{b}$$

$$y = \mathrm{c}(a^2s^2 + p^2b^2 - 2s^2b^2)(qs^2 - 2ps)\mathrm{b} -$$

$$-c[a^2(qs^2 - 2ps) + 2ab(p^2 - s^2) + b^2(qp^2 + 2ps - 2qs^2)]bs^2$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{c}(s^2 - qps + p^2)(a^2s^2 + p^2b^2 - 2s^2b^2)\mathrm{b} +$$

$$+\mathrm{c}[a^2(qs^2 - 2ps) + 2ab(p^2 - s^2) + b^2(qp^2 + 2ps - 2qs^2)]\mathrm{psb}$$

$$u = \mathrm{c}[(p^2 - s^2)b + a(qs^2 - 2ps)](a^2s^2 + p^2b^2 - 2s^2b^2) -$$

$$-\mathrm{c}[a^2(qs^2 - 2ps) + 2ab(p^2 - s^2) + b^2(qp^2 + 2ps - 2qs^2)]\mathrm{as}^2$$

В этом уравнение :

$$x(x + a) + y(y + a) = \mathrm{z}(\mathrm{z} + a)$$

Такие-же стандартные решение: Оно разбиваются на

2 группы решений.

Первая выглядит просто: Числа p,s- любые целые

$$x = \mathrm{ps}$$

$$y = \frac{(p^2-1)s}{2} + \frac{(p-1)a}{2}$$

$$\mathrm{z} = \frac{(p^2+1)s}{2} + \frac{(p-1)a}{2}$$

Вторую группу решений можно получить зная решения следующего уравнения Пелля: $p^2 - 2s^2 = 1$

Тогда;

$$x = 2(s + p)sj + (2s + p)as$$

$$y = (2s + p)pj + (2s + p)as$$

$$z = (2s^2 + 2ps + p^2)j + 2(s + p)as$$

$$x = 2(s - p)sj + (s - p)ap$$

$$y = (p - 2s)pj + (s - p)ap$$

$$z = (2s^2 - 2ps + p^2)j + (2s - p)ap$$

Числа которые записаны целые и любого знака.

Число j –вообще может быть любым.

Диофантово уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$ имеет следующее не симметричное решение

$$x = (aj - bt)^2 sp^6 - 3t^2 j^2 p^2 s^5 + 3(aj + bt) jtps^6 - (a^2 j^2 + abtj + b^2 t^2) s^7$$

$$y = 2(aj - bt)^2 sp^6 - 6(aj - bt) jtp^4 s^3 + 3(a^2 j^2 - b^2 t^2) p^3 s^4 + 3t^2 j^2 p^2 s^5 -$$

$$-3(aj + bt) tjps^6 + (a^2 j^2 + abtj + b^2 t^2) s^7$$

$$Z = (aj - bt)^2 p^7 - 3(aj - bt) tjs^2 p^5 + 3(aj - bt) bts^3 p^4 + 3t^2 j^2 s^4 p^3 -$$

$$-6bjt^2 p^2 s^5 - (a^2 j^2 - 2abtj - 2b^2 t^2) ps^6$$

$$u = (aj - bt)^2 p^7 - 3(aj - bt) tjs^2 p^5 + 3(aj - bt) ajs^3 p^4 + 3t^2 j^2 p^3 s^4 -$$

$$-6atj^2 p^2 s^5 - (b^2 t^2 - 2abtj - 2a^2 j^2) ps^6$$

Уравнение $x^3 + y^3 + z^3 = u^3$

Будет иметь следующие решения, причём они задаются целыми числами a, p, b, s. Которые разбиваются на две группы решений.

Первая:

$$x = 3(b^6 - 7a^6)as^2 - 9a^4ps - ap^2$$

$$y = (6ab^6 + 21a^7 - 27b^3a^4)s^2 - 3(2b^3a - 3a^4)ps + ap^2$$

$$z = (3b^7 + 33ba^6 - 18a^3b^4)s^2 + 3(4ba^3 - b^4)ps + bp^2$$

$$u = (3b^7 + 6ba^6 - 9a^3b^4)s^2 + 3(2ba^3 - b^4)ps + bp^2$$

Вторая:

$$x = (b^6 - 7a^6)ap^2 + 9a^4ps - 3as^2$$

$$y = (2ab^6 + 9b^3a^4 + 7a^7)p^2 - 3(2ab^3 + 3a^4)ps + 3as^2$$

$$z = (3b^4a^3 + 2ba^6 + b^7)p^2 - 3(2ba^3 + b^4)ps + 3bs^2$$

$$u = (6b^4a^3 + 11ba^6 + b^7)p^2 - 3(4ba^3 + b^4)ps + 3bs^2$$

Как не трудно заметить:

$$\left|\frac{x+y}{u-z}\right| = \frac{b^2}{a^2}$$

Уравнение имеет симметричное решение:

$$x^3 + y^3 + z^3 = q^3$$

$$x = b(a^6 - b^6)p^3 + 3ba^6p^2s + 3ba^6ps^2 + b(a^6 - b^6)s^3$$

$$y = (a^7 - ab^6)p^3 + 3(a^7 - a^4b^3 - ab^6)p^2s + 3(a^7 - 2a^4b^3)ps^2 +$$

$$+(a^7 - 3a^4b^3 + 2ab^6)s^3$$

$$z = (2ba^6 + 3a^3b^4 + b^7)p^3 + 3(2ba^6 + a^3b^4)p^2s + 3(2ba^6 - a^3b^4)ps^2 +$$

$$+(2ba^6 - 3a^3b^4 + b^7)s^3$$

$$q = (a^7 + 3a^4b^3 + 2ab^6)p^3 + 3(a^7 + 2a^4b^3)p^2s + 3(a^7 + a^4b^3 - ab^6)ps^2 +$$

$$+(a^7 - ab^6)s^3$$

Решение уравнения

$$x^3 + y^3 = z^2$$

Записывается элементарно, если будем задавать целые числа a, b, c – причём число "c" характеризует степень примитивности тройки.

$$x = (3a^2 + 4ab + b^2)(3a^2 + b^2)c^2$$

$$y = 2(a + b)b(3a^2 + b^2)c^2$$

$$z = 3(a + b)^2(3a^2 + b^2)^2c^3$$

$$x = 2(b - a)b(3a^2 + b^2)c^2$$

$$y = 2(b + a)b(3a^2 + b^2)c^2$$

$$z = 4b^2(3a^2 + b^2)^2c^3$$

Но я бы обратил внимание на уравнение:

$$x^3 \pm y^3 = qz^2$$

Замечательное тем, что показывает возможность решения как-бы различных уравнений общим методом. Подтверждает прозорливость Ферма, требовавший изучения уравнения Пелля. Я ещё раз повторяю, что это уравнение как-бы своеобразный ключик в целочисленном мире позволяющий решить очень большой класс уравнений. Записанное ниже уравнение:

$$p^2 - 3a^2s^2 = 1$$

Определяет наборы всех возможных решений. При этом, число a — может быть как вместе с корнем уравнения Пелля, так и может быть связана с коэффициентом. Естественно число c — характеризует степень примитивности тройки этих решений.

$$x = q(\pm 2a^3ps - 3a^4s^2)c^2$$

$$y = q(\pm a^2p^2 - 2a^3ps)c^2$$

$$z = q(3a^5s^2 + a^3p^2 \mp 3a^4ps)c^3$$

Уравнение: $x^3 + y^2 = z^2$

Имеет следующие решения:

$$x = 2(b \pm a)bc^2$$

$$y = (a^2 - b^2)bc^3$$

$$z = (a^2 + 3b^2 \pm 4ab)bc^3$$

В данный момент, передо мной, не стоит задача найти абсолютно все решения какого-нибудь уравнения. Мне надо показать другое. Возможность одним методом решать абсолютно разные уравнения. Надеюсь Вы сами догадаетесь, в каких уравнениях существуют ещё решения?

Будем решать различные бинарные квадратичные формы. Передо мной не стоит задача найти все решения, мне необходимо показать возможность их решения.

Решения уравнения $x^2 + (x + 1)^2 = y^2$ можно получить, зная решения уравнения Пелля: $p^2 - 2s^2 = 1$ Тогда

$$x = 2(s \pm p)s$$

$$y = 2(s \pm p)s + p^2$$

Если $z = p^2 + 2ps + 2s^2$; $t = 2ps$

$$x = t^2 - z^2$$

$$y = t^2 + z^2$$

$$x = 2zt$$

$$y = z^2 + t^2$$

Уравнение $y^2 = ax^2 + bx + 1$ можно решить воспользовавшись решениями следующего уравнения Пелля $p^2 - as^2 = 1$

$$x = bs^2 + 2ps$$

$$y = p^2 + bps + as^2$$

Уравнение $ax^2 - qy^2 = f$, если имеет рациональный корень $\sqrt{\frac{f}{a-q}}$ тогда воспользовавшись решениями уравнения Пелля $p^2 - aqs^2 = 1$ запишем решения:

$$x = [2qps \pm (p^2 + aqs^2)]\sqrt{\frac{f}{a-q}}$$

$$y = [2aps \pm (p^2 + aqs^2)]\sqrt{\frac{f}{a-q}}$$

По полученным решениям ищем его двойник:

$$x_2 = x + 2(qys - xp)p$$

$$y_2 = y + 2(qys - xp)as$$

Уравнение $ax^2 + bxy + cy^2 = f$ Если имеет $\sqrt{\frac{f}{a+b+c}}$ рациональным числом, тогда воспользуемся уравнением Пелля $p^2 - (b^2 - 4ac)s^2 = 1$ запишим решения:

$$y = [(4a + 2b)ps \pm (p^2 + (b^2 - 4ac)s^2)]\sqrt{\frac{f}{a+b+c}}$$

$$x = [-(4c + 2b)ps \pm (p^2 + (b^2 - 4ac)s^2)]\sqrt{\frac{f}{a+b+c}}$$

Если же корень $\sqrt{\frac{f}{a}}$ рациональное число тогда:

$$y = 4ps\sqrt{fa}$$

$$x = [-2bps \pm (p^2 + (b^2 - 4ac)s^2)]\sqrt{\frac{f}{a}}$$

Система Диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + qy^2 = z^2 \\ x^2 - qy^2 = u^2 \end{cases}$$

Имеет примитивные решения и они разбиваются на две группы. В первой, если существует такая Пифагоровая тройка, $a^2 + b^2 = c^2$, чтобы $\sqrt{\frac{bc}{q}}$ был рациональным числом.

$$x = c^2 + b^2$$

$$y = 2a\sqrt{\frac{bc}{q}}$$

$$z = c^2 + 2cb - b^2$$

$$u = c^2 - 2cb - b^2$$

Вторая, если существует такое $c^2 = a(a \pm b)$, чтобы $\sqrt{\frac{b(a\mp b)}{q}}$ был рациональным числом. Тогда решения выглядят так:

$$x = a^2 + b^2$$

$$y = 2c\sqrt{\frac{b(a\mp b)}{q}}$$

$$z = a^2 + 2ab - b^2$$

$$u = a^2 - 2ab - b^2$$

Решения этого уравнения:

$$x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 = z^3$$

довольно своеобразны. Если число:

$$q = b^2 - 6b + 4a(1 - c) + 3(4c - 1)$$ является

таким, что $\sqrt{q}$ рациональное число. Тогда решения можно записать и примитивных решений будет максимум два.

Выглядят так:

$$x = \left(3 - b \pm \sqrt{q}\right)p - 2(c - 1)s$$

$$y = 2(a - 3)p + \left(b - 3 \pm \sqrt{q}\right)s$$

$$z = \left(2a - 3 - b \pm \sqrt{q}\right)p + \left(b - 1 - 2c \pm \sqrt{q}\right)s$$

Числа p, s являются любыми целыми.

Симметричные решения уравнения:

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 = n_5^3$$

Можно записать довольно просто:

первое

$$n_1 = 36p^2 - 6ps$$

$$n_2 = 9ps - 15p^2 - s^2$$

$$n_3 = 51p^2 - 15ps + s^2$$

$$n_4 = 21p^2 - 9ps + s^2$$

$$n_5 = 57p^2 - 15ps + s^2$$

И второе решение:

$$n_1 = 6(p - s)p$$

$$n_2 = 5p^2 - 9ps + 3s^2$$

$$n_3 = p^2 + 3ps - 3s^2$$

$$n_4 = p^2 - 3ps + 3s^2$$

$$n_5 = 7p^2 - 9ps + 3s^2$$

Симметричные решения уравнения:

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 + n_4^3 + n_5^3 = n_6^3$$

Можно записать используя Пифагоровы тройки:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

И выглядят довольно просто, первое:

$$n_1 = cp^2 - 3(a + b)ps + 3cs^2$$

$$n_2 = bp^2 + 3bps - 3bs^2$$

$$n_3 = ap^2 + 3aps - 3as^2$$

$$n_4 = -bp^2 + (6c - 3b)ps + (9c - 9a - 6b)s^2$$

$$n_5 = -ap^2 + (6c - 3a)ps + (9c - 6a - 9b)s^2$$

$$n_6 = cp^2 + (6c - 3a - 3b)ps + (12c - 9a - 9b)s^2$$

$$n_1 = cp^2 - 3(a + b)ps + 3cs^2$$

$$n_2 = bp^2 + 3bps - 3bs^2$$

$$n_3 = ap^2 + 3aps - 3as^2$$

$$n_4 = (3c + 3a + 2b)p^2 - 3(2c + b)ps + 3bs^2$$

$$n_5 = (3c + 2a + 3b)p^2 - 3(2c + a)ps + 3as^2$$

$$n_6 = (4c + 3a + 3b)p^2 - 3(2c + a + b)ps + 3cs^2$$

Решения уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2$$

Можно получить задав любые целые числа a, b, p, s

Причём любого знака.

$$x = 2a^2s^2 - 2abs^2 \pm 2apbs$$

$$y = 2a^2s^2 + 2abs^2 \pm 2apbs$$

$$z = p^2b^2 - a^2s^2 + s^2b^2 \pm 2apbs$$

$$u = p^2b^2 + 3a^2s^2 + s^2b^2 \pm 2apbs$$

Такого рода уравнения можно решить всегда, при любых заданных наперёд коэффициентах. Расчёты просто усложняются. И каждый слагаемый надо умножить на длиннющий коэффициент.

Решения уравнения:

$$x^2 + xy + xz + y^2 + yz + z^2 = u^2$$

Получаем задавая любые целые числа a, p, b, s.

$$x = 2abps + 2a^2s^2 - abs^2$$

$$y = 2abps + 2a^2s^2 - 3abs^2 - 2psb^2 + b^2s^2$$

$$z = 3abs^2 - 3a^2s^2 - b^2s^2 + p^2b^2$$

$$u = 3a^2s^2 - 3abs^2 + 2abps + b^2s^2 - b^2ps + b^2p^2$$

$$x = 6p^2b^2 - 10psb^2 + 2abps - abs^2 + 2b^2s^2$$

$$y = 6p^2b^2 + 2abps + abs^2 - 3b^2s^2$$

$$z = a^2s^2 + 4abps + p^2b^2 - 5abs^2 - 10psb^2 + 7b^2s^2$$

$$u = a^2s^2 + 6abps + 11p^2b^2 - 5abs^2 - 15psb^2 + 7b^2s^2$$

Уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + q^3 + t^3 = xyz + xyq + xyt +$$

$$+ xzq + xzt + xqt + yzq + yzt + yqt + zqt$$

Имеет решение:

$$x = 25s^2 + 10ps + 5p^2$$

$$y = 10s^2 + 10ps + 4p^2$$

$$z = 20s^2 + 10ps + 2p^2$$

$$q = 5s^2 + 3p^2$$

$$t = 15s^2 + p^2$$

Уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 + q^3 + t^3 + n^3 = xyz + xyq + xyt + xyn +$$
$$+ xzq + xzt + xzn + xqt + xqn + xtn + yzq + yzt +$$
$$+ yzn + yqt + yqn + ytn + zqt + zqn + ztn + qtn$$

Имеет решение

$$x = 3a^2p^2 + 5b^2p^2 + 45a^2s^2 + 75b^2s^2$$

$$y = 200a^2s^2 + 80abps + 1000b^2s^2$$

$$z = a^2p^2 + 15a^2s^2 + 15p^2b^2 + 225b^2s^2$$

$$q = 5a^2p^2 \pm 10abp^2 \pm 50psa^2 + 125a^2s^2 + 25b^2p^2 +$$
$$+ 20abps \mp 150abs^2 \pm 250psb^2 + 625b^2s^2$$

$$t = 4a^2p^2 \pm 10abp^2 \pm 50psa^2 + 310a^2s^2 + 10b^2p^2 +$$
$$+ 100abps \mp 150abs^2 \pm 250psb^2 + 1400b^2s^2$$

$$n = 2a^2p^2 \pm 10abp^2 \pm 50psa^2 + 280a^2s^2 + 20b^2p^2 +$$
$$+ 100abps \mp 150abs^2 \pm 250psb^2 + 1550b^2s^2$$

Уравнение $x^2 + y^2 = z^2 + q^2$ имеет решения:

$$x = a(p^2 + s^2)$$

$$y = b(p^2 + s^2)$$

$$z = 2bps + a(p^2 - s^2)$$

$$q = 2aps - b(p^2 - s^2)$$

$$x = p^2b^2 + (a^2 - b^2)s^2$$

$$y = p^2b^2 + (b - a)^2s^2 - 2psb^2$$

$$z = (p - s)^2b^2 + 2abps - a^2s^2$$

$$q = (b - a)^2s^2 + 2abps - p^2b^2$$

Числа a, b, p, s должны быть целыми.

Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + q^2 = xy + xz + xq + yz + yq + zq$$

Имеет решение:

$$x = a^2s^2 + 3b^2(p - s)^2$$

$$y = (a + 3b)^2s^2 + 3b^2p^2$$

$$z = 12(s^2 - ps + p^2)b^2$$

$$q = (as + 3bp)^2 + 3b^2s^2$$

$$x = a^2s^2 + 6abs^2 + 6abps + 21b^2s^2 - 6psb^2 + 21b^2p^2$$

$$y = a^2s^2 - 6abs^2 + 6abps + 9b^2s^2 - 18psb^2 + 21b^2p^2$$

$$z = 3a^2s^2 + 6abs^2 + 6abps + 3b^2s^2 + 6psb^2 + 3b^2p^2$$

$$q = a^2s^2 + 6abs^2 - 6abps + 21b^2s^2 - 18psb^2 + 9b^2p^2$$

Уравнение $x^2 + xy + y^2 = z^3$ будет иметь решение

И они задаются целыми числами p, s.

Формулы выглядят так:

$$x = s^3 + 3ps^2 - p^3$$

$$y = p^3 + 3sp^2 - s^3$$

$$z = p^2 + ps + s^2$$

Уравнение $an_1{}^2 + bn_2{}^2 + cn_3{}^2 = jn_4{}^2$ будет иметь решение если корень рационален $\sqrt{c(j-a-b)}$, Числа p,s,t,k являются целыми и задаются нами.

Где $q = j(a+b+c)k^2 - 2bjkt + b(j-a-c)t^2$

$$n_1 = \left[2c(jk-bt)^2 - q\left(c \pm \sqrt{c(j-a-b)}\right)\right]p^2 + 2(jk-bt)\left(\sqrt{c(j-a-b)} \mp c\right)ps + \\ + \left(c \mp \sqrt{c(j-a-b)}\right)s^2$$

$$n_2 = \left[2c(jk-bt)(jk+(a+c-j)t) - q\left(c \pm \sqrt{c(j-a-b)}\right)\right]p^2 + \\ + 2\left[(jk+(a+c-j)t)\sqrt{c(j-a-b)} \pm c(bt-jk)\right]ps + \left(c \mp \sqrt{c(j-a-b)}\right)s^2$$

$$n_3 = \left[2c(jk-bt)^2 + q\left(a+b-j \mp \sqrt{c(j-a-b)}\right)\right]p^2 + \\ + 2(jk-bt)\left(\sqrt{c(j-a-b)} \mp c\right)ps - \left(a+b-j \pm \sqrt{c(j-a-b)}\right)s^2$$

$$n_4 = \left[2c\big((a+b+c)k - bt\big)(jk - bt) - q\left(c \pm \sqrt{c(j-a-b)}\right)\right]p^2 +$$

$$+2\left[\big((a+b+c)k - bt\big)\sqrt{c(j-a-b)} \mp c(jk - bt)\right]ps + \left(c \mp \sqrt{c(j-a-b)}\right)s^2$$

Если же корень $\sqrt{j(a+b+c)}$ рационален, тогда решения можно записать:

Где $q = c(j-a-b)k^2 + 2cbkt + b(j-a-c)t^2$

$$n_1 = \left[2j(ck+bt)^2 - q\left(j \mp \sqrt{j(a+b+c)}\right)\right]p^2 + 2(ck+bt)\left(\sqrt{j(a+b+c)} \pm j\right)ps +$$

$$+\left(j \pm \sqrt{j(a+b+c)}\right)s^2$$

$$n_2 = \left[2j\big(ck+(j-a-c)t\big)(ck+bt) - q\left(j \mp \sqrt{j(a+b+c)}\right)\right]p^2 +$$

$$+2\left[\big(ck+(j-a-c)t\big)\sqrt{j(a+b+c)} \pm j(ck+bt)\right]ps + \left(j \pm \sqrt{j(a+b+c)}\right)s^2$$

$$n_3 = \left[2j\big((j - a - b)k + bt\big)(ck + bt) - q\left(j \mp \sqrt{j(a + b + c)}\right)\right]p^2 +$$

$$+ 2\left[\big((j - a - b)k + bt\big)\sqrt{j(a + b + c)} \pm j(ck + bt)\right]ps + \left(j \pm \sqrt{j(a + b + c)}\right)s^2$$

$$n_4 = \left[2j(ck + bt)^2 - q\left(a + b + c \mp \sqrt{j(a + b + c)}\right)\right]p^2 + 2(ck + bt)\left(\sqrt{j(a + b + c)} \pm j\right)ps +$$

$$+ \left(a + b + c \pm \sqrt{j(a + b + c)}\right)s^2$$

Формулу решения уравнения:

$$an_1{}^2 + \mathrm{b}n_2{}^2 + \mathrm{c}n_3{}^2 = \mathrm{j}n_4{}^2$$

Можно выразить через решения уравнения:

$$j(a + b + c)x^2 - 2\mathrm{bj}xy + \mathrm{b}(j - a - c)y^2 = \mathrm{z}^2$$

И задаются они, кроме этого целыми числами p, s:

$$n_1 = [2c(by - jx) + (j - a - b)(jx - by \pm \mathrm{z})]p^2 -$$
$$-2\mathrm{c}[\mathrm{z} \pm (by - jx)]\mathrm{ps} + \mathrm{c}(\pm\mathrm{z} + by - jx)s^2$$

$$n_2 = [2c(by - jx) + (j - a - b)(jx + (a + c - j)y \pm \mathrm{z})]p^2 -$$
$$-2\mathrm{c}[\mathrm{z} \pm (by - jx)]\mathrm{ps} + \mathrm{c}[\pm\mathrm{z} - jx - (a + c - j)y]s^2$$

$$n_3 = (j - a - b)(by - jx \pm \mathrm{z})p^2 +$$
$$+2[(a + b - j)\mathrm{z} \mp c(by - jx)]\mathrm{ps} + \mathrm{c}(\pm\mathrm{z} + by - jx)s^2$$

$$n_4 = \left[2c(by - jx) + (j - a - b)\left((a + b + c)x - by \pm \mathrm{z}\right)\right]p^2 -$$
$$-2\mathrm{c}[\mathrm{z} \pm (by - jx)]\mathrm{ps} + \mathrm{c}[\pm\mathrm{z} + by - (a + b + c)x]s^2$$

Если же это уравнение имеет решений:

$$c(j-a-b)x^2 + 2\text{cb}xy + \text{b}(j-a-c)y^2 = \text{z}^2$$

Тогда формулу решения можно записать:

$$n_1 = [2j(by + cx) - (a + b + c)(cx + by \mp \text{z})]p^2 +$$
$$+ 2\text{j}[\text{z} \pm (by + cx)]\text{ps} + \text{j}(cx + by \pm \text{z})s^2$$

$$n_2 = \left[2j(by + cx) + (a + b + c)\big((a + c - j)y - cx \pm \text{z}\big)\right]p^2 +$$
$$+ 2\text{j}[\text{z} \pm (by + cx)]\text{ps} + \text{j}[cx + (j - a - c)y \pm \text{z}]s^2$$

$$n_3 = \left[2j(by + cx) + (a + b + c)\big((a + b - j)x - by \pm \text{z}\big)\right]p^2 +$$
$$+ 2\text{j}[\text{z} \pm (by + cx)]\text{ps} + \text{j}[(j - a - b)x + by \pm \text{z}]s^2$$

$$n_4 = (a + b + c)(by + cx \pm \text{z})p^2 +$$
$$+ 2[(a + b + c)\text{z} \pm j(by + cx)]\text{ps} + \text{j}(cx + by \pm \text{z})s^2$$

Уравнение:

$$x^3 + y^2 = z^3 + t^2$$

имеет решения, и задаются любыми целыми числами

$$x = d\mathrm{bs}(2bs + 6as \pm 2pb)$$

$$y = d(p^2b^2 + 3a^2s^2 + b^2s^2 - 36adb^3s^4 \pm 2psb^2)$$

$$z = d\mathrm{bs}(2bs - 6as \pm 2pb)$$

$$t = d(p^2b^2 + 3a^2s^2 + b^2s^2 + 36adb^3s^4 \pm 2psb^2)$$

Представим

$$q = 3a^2 + 3ab + b^2$$

$$f = (q + 2d)b + 2\mathrm{a}$$

Тогда решения имеют вид:

$$x = f\mathrm{a}$$

$$y = f[a + (q + d)b]$$

$$\mathrm{z} = f(a + b)$$

$$t = f(a + db)$$