Um comentário sobre a solução em 2ª ordem da Equação de Schwarzschild

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
Matemático – USP - Brasil
valdir.msgodoi@gmail.com

Na seção 3 de meu recente artigo[1] é obtida em 2ª ordem de aproximação a solução

$$u = \frac{mc^2}{l^2} (1 + ecos\varphi + e(\delta\omega)sen\varphi), \tag{1}$$

para a equação de Schwarzschild

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mc^2}{l^2} + 3mu^2, \tag{2}$$

onde

$$\delta\omega = \frac{3m^2c^2}{l^2} \varphi. \tag{3}$$

Como $\delta\omega << 1$ a equação (1) é aproximada para

$$u = \frac{mc^2}{l^2} (1 + ecos(\varphi - \delta\omega)), \tag{4}$$

e vem explicar a precessão do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral.

Criticamos este raciocínio, que em linhas gerais é adotado por vários autores[2], pelo fato de que, além de não resolver a equação diferencial (2) que a originou, leva a um intervalo de variação diferente de (1). Enquanto em (4) o valor máximo de u é dado por

$$u = \frac{mc^2}{l^2} (1 + e), \tag{5}$$

e o mínimo é

$$u = \frac{mc^2}{l^2} (1 - e), \tag{6}$$

com a equação preliminar (1) u pode variar de $-\infty$ a $+\infty$, uma vez que o ângulo φ também pode variar entre estes dois extremos infinitos e não está apenas como argumento da função $cos\varphi$, e sim aparece como o produto $\varphi sen\varphi$, como se vê facilmente substituindo-se (3) em (1).

Para uma volta completa no sentido anti-horário faz-se $\varphi = 2\pi$ em (3) para se obter o deslocamento angular do periélio

$$\delta\omega = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}, \quad (7)$$

sendo $a = mc^2/l^2$ o semi-eixo maior da elipse, $m = GM/c^2$ e $l^2 = aGM(1-e^2)$, onde l é o momento angular que se conserva.

Para duas voltas deve-se fazer $\varphi = 4\pi$, para k voltas completas devemos ter $\varphi = 2k\pi$ em (3), o que faria (1) tornar-se arbitrariamente grande, em módulo, com o aumento de k. A suposição $\delta\omega \ll 1$ mencionada na passagem para (4) só pode valer para um número limitado de voltas, mas muito longe da realidade do nosso sistema planetário, conforme disse anteriormente, onde bilhões de voltas já foram dadas em torno do Sol e provavelmente muitas outras ainda serão dadas por um longo tempo, talvez infinito.

O que queremos comentar aqui, e que não percebemos anteriormente, é que, independentemente da crítica que foi feita, a solução (1) pode trazer uma verdade sobre a realidade física maior que a solução (4): mais importante que um deslocamento de periélio, e até mais dramático, seria um movimento espiralado. Como $u = 1/r$, e r é a distância do planeta à origem, mesmo do infinito e com velocidade inicial nula o movimento convergiria para a origem do sistema, onde neste modelo se localizaria o Sol (ou outra fonte de força), em um movimento espiral modulado com funções seno e cosseno.

Esta conclusão pode não ser fisicamente viável, mas é matematicamente possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Godoi, V.M.S., *O cálculo do movimento do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral*, disponível em http://vixra.org/abs/1406.0050 (2014).

2. Novello, M. et al, *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1 (Teoria da Gravitação, autor Vitorio de Lorenci). Rio de Janeiro: editora Jauá (2010).