O cálculo do movimento do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
Matemático Aplicado e Computacional – USP
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – É feita uma primeira leitura da maneira como se calcula a precessão do periélio de Mercúrio na Relatividade Geral. Mostra-se que a equação do movimento obtida para esta precessão não resolve a equação diferencial que a originou, já que é apenas aproximada, e portanto não podemos ter certeza sobre o fato da Relatividade Geral explicar esta precessão através de sua solução. Mostramos também que mesmo na Mecânica Clássica pode-se obter uma falsa precessão para a órbita dos planetas, através do uso de quantidades consideradas pequenas. Resolvemos exatamente a equação diferencial de Binet para a Relatividade Geral (equação de Schwarzschild) para alguns casos.

Palavras Chave: precessão, periélio, Mercúrio, Relatividade Geral.

1 – Introdução

Decorridos mais de 20 anos em que comecei a pensar sobre a Teoria da Relatividade Restrita, e tendo chego a conclusões um tanto decepcionantes sobre ela [1] a [6], na continuação natural desta pesquisa chega-se à Relatividade Geral (R.G.). A primeira, quando comparada a esta, é como uma brincadeira de crianças, nas palavras do próprio Einstein [7]. Landau e Lifschitz a consideraram como a mais bela das teorias físicas existentes [8]. Para mim, ao menos por enquanto, me parece uma das mais difíceis teorias para se compreender.

A R.G. foi publicada em 1916 [9], e ela trouxe em seu último parágrafo 3 previsões, todas já verificadas experimentalmente e que consagraram a aceitação da teoria:

1) as riscas espectrais da luz que nos chegam da superfície de grandes astros devem apresentar-se desviadas para o extremo vermelho do espectro (*red shift*);
2) a marcha dos raios luminosos num campo gravitacional apresenta uma curvatura, sofre uma deflexão, em relação à trajetória em linha reta;
3) um desvio em relação às leis de Kepler-Newton referentes ao movimento planetário, que se traduz no seguinte: a órbita elíptica de um planeta efetua, no sentido do movimento de revolução do planeta, uma lenta rotação, cujo valor angular para a revolução é o seguinte:

$$\varepsilon = 24\,\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} . \tag{1}$$

Nesta fórmula *a* designa o semi-eixo maior da elipse, *c* é a velocidade da luz, *e* é a excentricidade da órbita e *T* o tempo de revolução em segundos.

Para a rotação da órbita do planeta Mercúrio o cálculo acima dá um valor de 43" por século, em correspondência exata (nas palavras de Einstein) com os resultados dos astrônomos e que não pode ser atribuída a perturbações causadas por outros planetas, conforme a teoria newtoniana clássica. É o conhecido avanço ou precessão do periélio de Mercúrio, descoberto por Urbain Jean Joseph Le Verrier em 1843, que também descobriu o planeta Netuno. Vale mencionar que Le Verrier até sua morte acreditou ter descoberto um novo planeta entre Mercúrio e o Sol, batizado de Vulcano, responsável pela anomalia do planeta Mercúrio, e que mesmo hoje não deveríamos descartar totalmente esta hipótese, dada uma possível existência de corpos *vulcanoids* nas proximidades do Sol [10],[11], bem como de asteróides cruzando a órbita de Mercúrio [12].

O que pretendemos analisar neste artigo, sem esgotar o assunto, é se a R.G. explica, adequadamente, esta precessão. A resposta será "talvez não".

2. O cálculo de Einstein para o movimento do periélio de Mercúrio

No ano anterior à apresentação da R.G., Einstein publica sua "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity" [13]. Einstein, sistematicamente, utiliza aproximações, partindo das equações do campo gravitacional para o vácuo,

$$\sum_\alpha \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0, \qquad (2)$$

onde

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = -\left\{ {\mu\nu \atop \alpha} \right\} = -\sum_\beta g^{\alpha\beta} \left\{ {\mu\nu \atop \beta} \right\} = \qquad (3)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_\beta g^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right],$$

e o determinante

$$\det g_{\mu\nu} = -1, \qquad (4)$$

até chegar ao resultado expresso em (1) para o avanço do periélio de um planeta. O Sol é considerado um ponto material e está na origem do sistema de coordenadas.

Em primeira ordem de aproximação sua equação original apresenta a solução

$$\Gamma^\tau_{\rho\sigma} = -\alpha \left(\delta_{\rho\sigma} \frac{x_\tau}{r^3} - 3\frac{x_\rho\ x_\sigma\ x_\tau}{2r^5}\right), \qquad (5)$$

para ρ, σ, π indo de 1 a 3, $\delta_{\rho\sigma}$ o delta de Kronecker, e

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = \Gamma_{4\sigma}^{4} = \frac{-\alpha x_\sigma}{2r^3}, \tag{6}$$

para σ indo de 1 a 3. As outras componentes em que o índice 4 aparece uma ou três vezes são iguais a zero.

Em segunda ordem de aproximação e usando propriedades de simetria sua equação original se reduz a

$$\sum_\sigma \frac{\partial \Gamma_{44}^{\sigma}}{\partial x_\sigma} = \frac{-\alpha^2}{2r^4}, \tag{7}$$

e é apresentada sua solução final,

$$\Gamma_{44}^{\sigma} = \frac{-\alpha x_\sigma}{2r^3}\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right), \tag{8}$$

não sendo necessário, segundo Einstein, encontrar as demais componentes $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$, $\mu\nu \neq 44$, neste grau de aproximação.

Aplicando a solução anterior à equação do movimento de um ponto material em um campo forte,

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \sum_{\sigma\tau} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} \frac{dx_\sigma}{ds} \frac{dx_\tau}{ds}, \tag{9}$$

obtém

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = \frac{-\alpha x_\nu}{2r^3}\left[1 + \frac{\alpha}{r} + 2u^2 - 3\left(\frac{dr}{ds}\right)^2\right], \tag{10}$$

onde $u^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{ds^2}$.

Fazendo $A = \frac{1}{2}u^2 + \Phi$ e $B = r^2 \frac{d\emptyset}{ds}$ constantes do movimento (conservação da energia e lei das áreas, respectivamente), com $\Phi = -\frac{\alpha}{2r}\left(1 + \frac{B^2}{r^2}\right)$, obtém, após mais considerações,

$$\left(\frac{dx}{d\emptyset}\right)^2 = 2\frac{A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3, \tag{11}$$

para $x = 1/r$.

Para resolver esta equação extrai a raiz quadrada de ambos os membros, mantendo apenas o sinal positivo, e obtém a integral elíptica

$$\emptyset = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{2\frac{A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3}}, \qquad (12)$$

onde α_1 e α_2 são as primeiras raízes de

$$2\frac{A}{B^2} + \frac{\alpha}{B^2}x - x^2 + \alpha x^3 = 0. \qquad (13)$$

Mais aproximações levam a

$$\emptyset \cong \left[1 + \frac{\alpha}{2}\ (\alpha_1 + \alpha_2)\right] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(1-\alpha x)}} \qquad (14.1)$$

$$\cong [1 + \frac{\alpha}{2}\ (\alpha_1 + \alpha_2)] \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(1+\frac{\alpha}{2}x)dx}{\sqrt{-(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}}, \qquad (14.2)$$

cuja integração exata leva a

$$\emptyset = \pi\ [1 + \frac{3}{4}\ \alpha(\alpha_1 + \alpha_2)]. \qquad (15)$$

Sendo α_1 e α_2 os valores dos recíprocos das máximas e mínimas distâncias ao Sol, temos

$$\emptyset = \pi\ [1 + \frac{3\alpha}{2a(1-e^2)}]. \qquad (16)$$

Para uma passagem inteira o periélio se move

$$\varepsilon = 3\pi\ [\frac{\alpha}{a(1-e^2)}] \qquad (17)$$

na direção do movimento orbital, onde *a* é o semi-eixo maior e *e* a excentricidade.

Em relação ao período orbital *T* (em segundos) e *c* a velocidade da luz (em cm/s) vem a já mencionada equação (1),

$$\varepsilon = 24\ \pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)}, \qquad (18)$$

que dá um valor de 43” por século, usando $\alpha = 2\ GM/c^2$, o raio de Schwarzschild, G a constante gravitacional e M a massa do Sol.

Este valor de ε está em bom acordo com o valor experimental da época, ε = (45” ± 5”) por século, e para os dias de hoje é ainda melhor, ε = (43,1” ± 0,1”) por século.

3. A solução obtida atualmente

Schwarzschild apresentou cerca de 2 meses após o artigo de Einstein uma dedução mais rigorosa da equação (11), chegando a [14]

$$\left(\frac{dx}{d\emptyset}\right)^2 = \frac{1-h}{c^2} + \frac{h\alpha}{c^2}x - x^2 + \alpha x^3, \tag{19}$$

onde h é uma constante do movimento.

Fazendo $c^2/h = B^2$ e $(1-h)/h = 2A$ obtém-se exatamente a mesma equação de Einstein.

Schwarzschild não resolve a equação (19), mencionando apenas que ela leva à observada anomalia do periélio de Mercúrio.

Seguindo uma referência mais atual [15], a equação para partículas-teste no espaço-tempo de Schwarzschild é

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2\varepsilon^2 - b}{l^2} + \frac{2mb}{l^2}u + 2mu^3, \tag{20}$$

onde $u = 1/r, m = GM/c^2$, e ε e $l = r^2\,\dot{\varphi}$ são constantes.

Para partículas-teste com massa ($b = c^2$) vem

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2}{l^2}(\varepsilon^2 - 1) + \frac{2mc^2}{l^2}u + 2mu^3. \tag{21}$$

Tomando a derivada desta equação com respeito a φ resulta

$$2\,\frac{du}{d\varphi}\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] = 2\,\frac{du}{d\varphi}\left[\frac{mc^2}{l^2} + 3mu^2\right], \tag{22}$$

ou (equação de Schwarzschild)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{mc^2}{l^2} + 3mu^2. \tag{23}$$

Esta é a equação que deve ser resolvida para explicar, segundo a R.G., o avanço do periélio de Mercúrio (e dos planetas em geral), em essência equivalente a (11), (19) e (21).

Em primeira aproximação, considerando $3mu^2 = 0$, obtém-se

$$u_0 = \frac{mc^2}{l^2}\,(1 + e\cos\varphi) \tag{24}$$

para solução, que corresponde à equação de uma elipse com excentricidade e e equivale à solução newtoniana.

Em mais uma ordem de aproximação chega-se a

$$u = \frac{mc^2}{l^2}\,(1 + ecos\varphi + e(\delta\omega)sen\varphi), \tag{25}$$

para

$$\delta\omega = \frac{3m^2c^2}{l^2}\,\varphi. \tag{26}$$

Como δω << 1 a equação para u pode ser representada como

$$u = \frac{mc^2}{l^2}\,(1 + ecos(\varphi - \delta\omega)). \tag{27}$$

Assim, a cada revolução o afélio (ou periélio) da órbita avança de uma quantidade δω, dada por

$$\delta\omega = \frac{6\pi G^2M^2}{c^2l^2}. \tag{28}$$

Um melhor ajuste para l leva a

$$l^2 = aGM(1 - e^2) \tag{29}$$

e

$$\delta\omega = \frac{6\pi GM}{ac^2(1-e^2)}, \tag{30}$$

sendo $a = mc^2/l^2$ o semi-eixo maior da elipse, para $m = GM/c^2$.

É este valor para δω, então, o valor que queríamos encontrar com a solução de (23), igual a (17) substituindo $\alpha = 2GM/c^2$.

4 – A solução exata

Está claro que (27) não resolve exatamente (23), visto que foi obtida de maneira aproximada apenas.

Nossa equação original (23) é da forma

$$u'' + u = A + Bu^2, \tag{31}$$

e encontramos como solução $u(\varphi)$

$$u = A(1 + e\,cos\big((1 - AB)\varphi\big)). \qquad (32)$$

Substituindo (32) em (31) obtemos

$$-ABy = 1 + y^2, \qquad (33)$$

para

$$y = e\,cos((1 - AB)\varphi). \qquad (34)$$

A equação do 2º grau em *y* anterior tem por soluções

$$y = \frac{-AB \pm \sqrt{A^2B^2 - 4}}{2}, \qquad (35)$$

que só é real para $|AB| \geq 2$.

Como

$$\begin{aligned} A &= \frac{mc^2}{l^2} = \frac{GM}{l^2} \cong \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}98\cdot 10^{30}}{(2{,}78\cdot 10^{15})^{\ 2}} \cong 1{,}71\cdot 10^{-11} \\ B &= 3m = 3\frac{GM}{c^2} \cong 3\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}98\cdot 10^{30}}{(2{,}9979\cdot 10^{8})^{\ 2}} \cong 4408{,}37 \\ AB &= 3\left(\frac{GM}{cl}\right)^2 \cong 7{,}53\cdot 10^{-8} \end{aligned} \qquad (36)$$

no sistema Mercúrio-Sol, vemos que $0 < AB \ll 2$, e portanto não há solução real possível para o problema. Mas ainda que houvesse uma solução real verifica-se que não seria válida para qualquer valor de φ, pois não teríamos obtido uma identidade trigonométrica.

Sendo assim, por que confiar nas conclusões obtidas com uma solução que na realidade não resolve a equação original? E se ainda pudéssemos ter "razoável" confiança na solução, em determinado grau de aproximação, por quanto tempo ela corresponderia à realidade do movimento planetário, i.e., para grandes valores do tempo, t→ ∞? Sendo da ordem de 5 bilhões de anos a idade do sistema solar, esta é com certeza uma pergunta relevante.

4.1 - Soluções constantes

Inicialmente busquemos uma solução constante: $u = \alpha$. Fazendo $u'' = 0$ e $u = \alpha$ em (31) obtemos

$$B\alpha^2 - \alpha + A = 0, \qquad (37)$$

donde

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B}, \tag{38}$$

e que para valores pequenos de AB, quando $\sqrt{1-4AB} \cong 1-2AB$, se reduz a

$$\alpha_1 \cong A \tag{39}$$

e

$$\alpha_2 \cong \frac{1-AB}{B} = \frac{1}{B} - A. \tag{40}$$

No caso do movimento de Mercúrio ao redor do Sol encontramos para a primeira raiz, conforme (36), o valor $\alpha_1 = A \cong 1{,}71 \cdot 10^{-11}\ m^{-1}$.

Para $u = \alpha_1 = A = \frac{1}{r}$ vem $r = \frac{1}{A} \cong 5{,}85 \cdot 10^{10} m$, que é da ordem da distância média de Mercúrio ao Sol ($\langle r_{orbital} \rangle = 5{,}79 \cdot 10^{10} m$), ou seja, segundo esta solução Mercúrio (e os demais planetas) mantém uma distância constante em torno do Sol. Esta mesma solução $u = A = \frac{1}{r}$ também pode ser obtida fazendo $B = 0$ em (31), i.e., na equação newtoniana.

Para a segunda raiz, usando (36) em (40), temos $\alpha_2 \cong 2{,}27 \cdot 10^{-4} m^{-1} \cong \frac{1}{B}$. Para $u = \alpha_2 = \frac{1}{r}$ vem $r = \frac{1}{\alpha_2} \cong 4405{,}3\ m \cong B$, uma distância aparentemente sem significado astronômico, aproximadamente igual a 1,5 vezes o raio de Schwarzschild para o Sol ($r_S \cong 2{,}94\ km$).

4.2 – Binômio de grau n

Vamos supor uma solução binomial da forma

$$u = a\varphi^n + b. \tag{41}$$

Para n = 1 e n = 2 não haverá nenhuma solução possível, como é fácil de ver.

No caso geral teremos, aplicando (41) em (31),

$$b = A + Bb^2, \tag{42}$$

donde

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B}, \tag{43}$$

e a condição em φ que precisará ser satisfeita é

$$an(n-1)\varphi^{n-2} + a\varphi^n = B(a^2\varphi^{2n} + 2ab\varphi^n). \quad (44)$$

Para que a igualdade anterior seja uma identidade para todo φ fazemos

$$n - 2 = 2n \quad (45.1)$$
$$n = -2 \quad (45.2)$$

donde, aplicando este valor de *n* em (44), devem ser satisfeitas as igualdades

$$an(n-1) = a^2 B \quad (46.1)$$
$$a = \frac{6}{B} \quad (46.2)$$

e

$$a = 2abB \quad (47.1)$$
$$b = \frac{1}{2B} = \frac{a}{12}. \quad (47.2)$$

Então, voltando ao resultado obtido em (43), devemos ter

$$b = \frac{1}{2B} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4AB}}{2B} \quad (48.1)$$
$$AB = \frac{1}{4} \quad (48.2)$$

ou seja, há solução desta forma apenas para um caso particular, aparentemente sem significado astronômico.

Pode-se verificar facilmente que a equação

$$u'' + u = A + Bu^2 \quad (49)$$

tem a solução exata

$$u = \frac{6}{B}\varphi^{-2} + \frac{1}{2B}, \quad (50)$$

para $A = \frac{1}{4B}$, conforme (48.2).

4.3 – Série polinomial infinita

Outras soluções com um número finito de termos envolvendo $\varphi^n, cos\ at, sen\ at$ e e^{at} não são possíveis no caso geral. Dada a característica não linear da equação (31) sabemos da dificuldade em se obter soluções exatas, mas podemos supor uma expansão em série polinomial infinita de tal forma que $u(\varphi)$ possa ser expressa como

$$u(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + \cdots + a_n\varphi^n + \cdots \quad (51)$$

Assim sendo,

$$u' = a_1 + 2a_2\varphi + 3a_3\varphi^2 + 4a_4\varphi^3 \ldots + na_n\varphi^{n-1} + \cdots \quad (52)$$
$$u'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3\varphi + 4 \cdot 3a_4\varphi^2 + \cdots + n(n-1)a_n\varphi^{n-2} + \cdots \quad (53)$$
$$u^2 = {a_0}^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)\varphi + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)\varphi^2 + \cdots \quad (54)$$
$$= \sum_{i=0}^{2n}(\sum_{j+k=i} a_ja_k)\varphi^i$$

Substituindo as igualdades anteriores na equação original, obtemos com o termo livre o valor

$$2a_2 + a_0 = A + B{a_0}^2 \quad (55.1)$$
$$a_2 = \frac{A + B{a_0}^2 - a_0}{2} \quad (55.2)$$

Com o termo de 1º grau,

$$3 \cdot 2a_3 + a_1 = B \cdot 2a_0a_1 \quad (56.1)$$
$$a_3 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_1}{3 \cdot 2} \quad (56.2)$$

Com o termo de 2º grau,

$$4 \cdot 3a_4 + a_2 = B(2a_0a_2 + {a_1}^2) \quad (57.1)$$
$$a_4 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_2 + B{a_1}^2}{4 \cdot 3} \quad (57.2)$$

e continuando,

$$a_5 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_3 + 2Ba_1a_2}{5 \cdot 4} \quad (58)$$
$$a_6 = \frac{(2Ba_0 - 1)a_4 + B(2a_1a_3 + {a_2}^2)}{6 \cdot 5} \quad (59)$$

etc.

Analisando um caso especial, se $a_0 = u(0) = 0$ e $a_1 = u'(0) = 0$ então todos os termos de ordem ímpar são iguais a zero e os de ordem par têm os coeficientes

$$a_2 = \frac{A}{2} \quad (60)$$
$$a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 3} = \frac{-A}{4 \cdot 3 \cdot 2} \quad (61)$$
$$a_6 = \frac{-a_4 + Ba_2^2}{6 \cdot 5} = \frac{A}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{A^2B}{6 \cdot 5 \cdot 4} \quad (62)$$

e assim por diante, podendo-se calcular computacionalmente quantos coeficientes forem necessários, sem maiores dificuldades.

A solução para o caso em que $a_0 = a_1 = 0$ é então uma função par e, quanto menor for o valor de B, mais se aproxima da expansão em série de Taylor da função $u = A(1 - cos\varphi)$ em torno de $\varphi = 0$, $|\varphi| < \infty$, i.e., quanto mais for possível desprezar o termo u^2 da equação diferencial. Nota-se, entretanto, que para o sistema Mercúrio-Sol o valor de B, calculado em (36), é da ordem de milhar, longe de ser um número próximo de zero.

5 – Pseudo-precessão

Eu diria que é preciso muita "coragem" para concluir que da solução aproximada (16) para a integral elíptica (12) chega-se a (17), com o significado de um avanço de periélio. Esta solução, em verdade, significa que da menor distância à maior distância ao Sol transcorrem-se mais do que π radianos, i.e., mais do que 180º, e portanto periélio (menor distância) e afélio (maior distância) não são diametralmente opostos na Relatividade Geral, como o são na Mecânica Newtoniana. Isto também implica, obviamente, que o movimento não é uma elipse, mas nada nos diz se a órbita é aberta ou fechada. Concluir que trata-se de uma precessão, periódica, e que pode-se usar sem maiores cuidados as leis de Kepler e propriedades das elipses, é de fato uma grande "tentação", sabendo-se que há uma precessão do periélio observada astronomicamente.

Outra conclusão sem rigor matemático ocorre na passagem de (25) para (27). Em (27) o valor máximo de u é dado por

$$u = \frac{mc^2}{l^2}(1 + e), \tag{63}$$

e o mínimo é

$$u = \frac{mc^2}{l^2}(1 - e). \tag{64}$$

Já com a equação preliminar (25) u pode variar de $-\infty$ a $+\infty$, uma vez que o ângulo φ também pode variar entre estes dois extremos infinitos e não está apenas como argumento da função $\cos\varphi$, e sim aparece como o produto $\varphi sen\varphi$, como se vê facilmente substituindo-se (26) em (25). Para uma volta completa no sentido anti-horário faz-se $\varphi = 2\pi$ em (26), como feito para se obter (28), para duas voltas deve-se fazer $\varphi = 4\pi$, e assim sucessivamente. Para k voltas completas devemos ter $\varphi = 2k\pi$, o que faria (26) tornar-se arbitrariamente grande, em módulo, com o aumento de k. A suposição $\delta\omega \ll 1$ mencionada na passagem para (27) só pode valer para um número limitado de voltas, muito longe da realidade do nosso sistema planetário, onde bilhões de voltas já foram dadas em torno do Sol e provavelmente muitas outras ainda serão dadas por um longo tempo, talvez infinito.

Vamos agora verificar que também é possível encontrar uma precessão no movimento orbital com a Mecânica Newtoniana, mas é uma falsa precessão, obtida apenas com suposições sobre quantidades consideradas pequenas e aproximações.

Desprezando-se o termo Bu^2 em (31) obtemos a equação

$$u'' + u = A. \quad (65)$$

Para $A = GM/l^2$ e $l = r^2\dot{\varphi}$ uma constante, o momento angular específico que se conserva, obtemos a Equação de Binet, válida para o movimento planetário no limite clássico, sem considerar as influências relativísticas, e considerando que os dois corpos que interagem são pontuais (lembrando que o Sol é o maior corpo do sistema solar, e muito maior que Mercúrio, o menor planeta do sistema solar e o mais próximo do Sol, tal consideração chega a ser preocupante).

A solução de (65) pode ser colocada na forma

$$u = A + (u_0 - A)cos\varphi + u_0' sen\varphi, \quad (66)$$

onde $u_0 = u(0)$ e $u_0' = u'(0) = \frac{du}{d\varphi}(0)$.

Como $\cos(\varphi - \Delta\varphi) = cos\varphi cos\Delta\varphi + sen\varphi sen\Delta\varphi$, para pequenos valores do ângulo $\Delta\varphi$ temos $cos\Delta\varphi \approx 1$ e $sen\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, donde $\cos(\varphi - \Delta\varphi) \approx cos\varphi + \Delta\varphi sen\varphi$.

Assim, se $AB\varphi sen\varphi$ for considerado pequeno (suponhamos φ limitado por $-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$), obtemos de (66)

$$u = A + (u_0 - A)[cos\varphi + \frac{u_0'}{u_0 - A} sen\varphi] \quad (67.1)$$

$$= A + (u_0 - A)[cos\varphi + AB\varphi sen\varphi - AB\varphi sen\varphi + \frac{u_0'}{u_0 - A} sen\varphi] \quad (67.2)$$

$$\cong A\left[1 + \frac{u_0 - A}{A}\cos(\varphi - \Delta\varphi)\right] - (u_0 - A)AB\varphi sen\varphi \quad (67.3)$$

$$\cong A\left[1 + \frac{u_0 - A}{A}\cos(\varphi - \Delta\varphi)\right] \quad (67.4)$$

que é da mesma forma da equação (27) para

$$A = \frac{mc^2}{l^2} = \frac{GM}{l^2} \quad (68.1)$$

$$e = \frac{u_0 - A}{A} \quad (68.2)$$

$$\delta\omega = \Delta\varphi = AB\varphi \quad (68.3)$$

e onde adotou-se $u_0' = 0$ em (67.2) e desprezou-se o termo $-(u_0 - A)AB\varphi sen\varphi$ em (67.3).

Nota-se que o termo que foi desprezado é realmente bem pequeno para o sistema Mercúrio-Sol quando comparado com um valor médio de u, da ordem de $A \approx 1{,}71 \times 10^{-11}$,

$$(u_0 - A)AB\varphi sen\varphi = eA^2B\varphi sen\varphi \approx 2{,}65 \times 10^{-19}, \quad (69)$$

onde se usou $e = 0{,}2056$.[16]

Então foi admitindo-se que $u'_0 = 0$, o mesmo valor que pode ser adotado tanto para a solução newtoniana quanto para a einsteiniana (i.e., $\varphi = 0$ corresponde, por hipótese das condições iniciais, a um ponto extremo de u), que AB é pequeno, φ não assume grandes valores e desprezando-se o segundo termo em (67.3), que conseguimos obter a chamada pseudo-precessão. Assim obtivemos $\Delta\varphi$ como uma função linear do ângulo φ, havendo o deslocamento angular para os máximos e mínimos da função $u(\varphi)$ a cada volta.

Mas por que esta precessão é falsa? A solução (66), verdadeira e completa, possui os mesmos valores de u para qualquer volta que se considere, ou seja, $u(\varphi) = u(\varphi + 2k\pi)$, para k inteiro, assim, se o ângulo φ em $u(\varphi)$ corresponde a um periélio ou afélio, i.e., a um ponto extremo de u (lembrando que um máximo de $u \neq 0$ corresponde a um mínimo de $r = 1/u$, e vice-versa), na próxima volta completa esta posição de periélio ou afélio se manterá, permanecerá constante, sem nenhum deslocamento. Não é isto o que acontece com a "falsa" equação (67.4), construída com considerações sobre valores pequenos.

6 – Conferindo valores numéricos

Nem no *paper* de 1915, nem no de 1916, Einstein menciona quais os valores numéricos de a, T, c, e utilizou para calcular o valor angular ε do deslocamento do periélio de Mercúrio em sua órbita ao redor do Sol, conforme (1). Dada a extraordinária coincidência entre o cálculo teórico e o valor experimental, a correspondência exata mencionada por Einstein, isto é de causar surpresa.

Sendo

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)}, \tag{70}$$

usando os dados mencionados em [15] e [16],

a = semi-eixo maior da elipse = $5{,}791 \times 10^{10}\ m$
T = tempo de revolução = $7{,}60 \times 10^6\ s$
c = velocidade da luz = $2{,}99792458 \times 10^8\ m/s$
e = excentricidade = $0{,}2056$

obtemos para o deslocamento angular em radianos

$$\varepsilon_\pi = \ 5{,}019459 \times 10^{-7} rad/revolução,$$

e para o deslocamento em graus

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 2{,}875938 \times 10^{-5}\ °/revolução. \tag{71}$$

Sendo o período orbital de Mercúrio igual a $\tau_M = T = 7{,}60 \times 10^6\ s$ e o da Terra igual a $\tau_T = 3{,}16 \times 10^7\ s$, obtemos para um período de 100 anos

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sec} &= 100\frac{\tau_T}{\tau_M}\varepsilon_0 = 415{,}78947\varepsilon_0 = 0{,}0119578°/século \\ &= 0{,}7174708'/século \\ &= 43{,}0482509''/século.\end{aligned} \tag{72}$$

O valor observado para este desvio, conforme [17], é $\varepsilon = (43{,}1 \pm 0{,}1)''/século$, em bom acordo com o cálculo anterior.

Não obstante tamanha precisão, se escolhermos alguns outros números para este conjunto de variáveis, ainda que próximos dos primeiros valores, obteremos novos valores para ε que podem ser ligeiramente diferentes do resultado experimental mais recente.

No livro de Misner, Thorne e Wheeler[18] encontramos para o período (sideral) de Mercúrio e da Terra valores aparentemente mais precisos que os da referência [15] anterior:

$$\tau_M = T = 87{,}9686\ dias = 7.600.487{,}04\ s$$
$$\tau_T = 365{,}257\ dias = 31.558.204{,}80\ s$$

Utilizando estes novos valores em (70) e prosseguindo até o cálculo do deslocamento secular em segundos obtemos

$$\varepsilon_{sec} = 42{,}983053''/século,$$

que já se encontra fora do intervalo de precisão dado em [17].

Diminuindo ainda mais este resultado, fazendo

$$c = 3{,}0 \times 10^8\ m/s$$
$$e = 0{,}2$$

obtemos

$$\varepsilon_{sec} = 42{,}822045''/século,$$

que embora ainda dentro da precisão de resultados antigos, já não é tão espetacularmente coincidente com o valor experimental mais atual.

7 – Conclusão

Einstein utiliza uma solução aproximada, de uma equação aproximada, para explicar "exatamente" uma precessão bastante pequena, de cerca de $5{,}02 \times 10^{-7}$ rad/revolução, ou algo próximo de 43''/século, e que até então nenhuma teoria precisa conseguia explicar.

Para uma órbita de cerca de $5{,}79 \times 10^{10}\, m$ de raio, a distância média de Mercúrio ao Sol, isto dá um deslocamento linear de 29,0658 km por revolução, ou 13,6542 km a menos que a diferença entre os diâmetros equatorial e polar da Terra (42,72 km) [19]. Sendo o raio equatorial de Mercúrio igual a 2.439,7 km [20], este deslocamento corresponde a 0,6 % de seu diâmetro equatorial, por volta completa. Como se pode notar, é um valor pequeno para as dimensões astronômicas.

As técnicas de aproximação, e em especial os métodos de perturbação, são rotineiramente utilizados na Física, por exemplo, na Mecânica Quântica, particularmente quando os potenciais envolvidos não são apenas os mais simples, mas no caso da R.G., que viria se tornar uma teoria revolucionária, seria mais justo que ela fosse capaz de calcular por completo e exatamente todas as influências decorrentes dos demais planetas e satélites do sistema solar, além do próprio Sol, para que só depois pudesse obter a precessão resultante para Mercúrio (ou qualquer outro planeta), confrontando com o resultado observável.

Pois os 43’’ de precessão para Mercúrio não são medidos diretamente, e sim são resultantes de uma subtração. A real precessão que é observada é maior, o efeito composto de todos os corpos do sistema solar, mais a rotação da Terra, e corresponde a pouco mais de 130 vezes este valor menor, algo surpreendente. O valor total observado do avanço do periélio do planeta Mercúrio é de (5.600,73 ± 0,41)’’ por século, sendo que o efeito de perturbações não relativísticas é de (5.557,62 ± 0,20)’’, e somente (43,11 ± 0,45)’’ são efeitos não previstos pela teoria newtoniana [21],[16]. Calcula-se que os demais planetas do sistema solar, em especial Vênus, Terra e Júpiter, contribuem com cerca de 532’’ para a precessão final[16], mais que 12 vezes os 43’’, enquanto a rotação da Terra é a responsável maior, contribuindo com cerca de 5.025’’. Ou seja, usa-se a Mecânica de Newton para calcular o valor maior de 5.557’’ de precessão (1° 32’ 37’’), e a Relatividade Geral para explicar apenas os 43’’ residuais. Parece realmente uma mescla de teorias, e a R.G. assim também não se mostrou capaz de calcular sozinha todos os efeitos dos demais planetas do sistema solar sobre Mercúrio. Talvez se usarmos apenas a R.G., e sem recorrer sistematicamente às aproximações de primeira e segunda ordens, o valor total resultante das diversas precessões seja superior aos 5.600’’ observados. É uma possibilidade.

Mas o problema da R.G. não está apenas na precessão de Mercúrio. Além do fato da solução obtida para o movimento dos planetas não resolver a equação diferencial que a originou, pois como vimos é apenas uma solução aproximada, além do fato de que se calculou esta precessão só levando em consideração a presença do Sol, considerado pontual, desprezando-se a precessão 130 vezes maior resultante da Mecânica de Newton, *em 1896 Newcomb havia detectado não uma, mas seis anomalias no movimento dos planetas no Sistema Solar, que não eram explicadas pela Teoria da Gravitação de Newton*, conforme o professor Roberto de Andrade Martins relata no seu artigo “Alguns Aspectos da Teoria da Gravitação” [22]. *Uma delas era a precessão do periélio de Mercúrio, outra era a precessão de Marte, sendo que essas duas cabem na gravitação einsteniana* (como vimos, se é que cabem!), *mas as outras quatro não eram explicadas pela Teoria da Relatividade Geral. Uma delas era a anomalia do movimento da Lua, oscilações nesse movimento (às vezes ela estava um pouco atrasada ou* *adiantada em relação ao movimento previsto pela Teoria Newtoniana). Einstein tentou explicar isso e foi mal sucedido. A distância entre a Lua e a Terra é satisfatoriamente explicada, mas o movimento em longitude, não. Existem ainda outros problemas, como a aceleração secular dos satélites de Marte, que são discutidos até hoje. Além de não ter resolvido todos os problemas astronômicos, existem problemas teóricos dentro dela que são muito importantes, como a possibilidade de ciclos causais* [23].

Sendo assim, por enquanto não podemos ter certeza de que a R.G. explique, satisfatoriamente, a precessão do periélio de Mercúrio. Muitas mentes brilhantes já analisaram este problema, de mais de um século, bem como toda a Relatividade Geral, mas acredito que ainda não tivemos a melhor, e talvez mais simples, resposta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Godoi, V.M.S., *A Dedução das Transformações de Lorentz em 1905*, Revista Brasileira de Ensino de Física 19, 3, 315-324 (1997), disponível em http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19_315.pdf e http://www.vixra.org/abs/1404.0039.

2. Godoi, V.M.S., *Algumas Contradições na Teoria da Relatividade Restrita*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1404.0041.

3. Godoi, V.M.S., *Simultaneidade, Tempo Relativístico e Transformações de Galileu*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1404.0040.

4. Godoi, V.M.S., *On the Contradictions of Relativity of Simultaneity and the Synchronism of Clocks*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1404.0044. *Sobre as Contradições do Sincronismo de Relógios e da Relatividade da Simultaneidade*, disponível em http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/5452.

5. Godoi, V.M.S., *A Simultaneity in the Lorentz Transformation of the time*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1404.0043. *Uma Simultaneidade na Transformação de Lorentz para o Tempo*, em http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/5453.

6. Godoi, V.M.S., *A Contradiction on Lorentz´s Transformation of Time*, disponível em http://www.vixra.org/abs/1404.0042. *Uma Contradição na Transformação de Lorentz do Tempo*, disponível em http://gsjournal.net/Science-Journals/Essays/View/5454.

7. *The Collected Works of Albert Einstein* V, p.324, carta de A. Einstein escrita a A. Sommerfeld (29/out/1912). Princeton: Princeton University Press (1989).

8. Landau, L. e Lifschitz, E., *Teoria do Campo*. São Paulo: Hemus Livraria Editora Ltda. (1974).

9. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*. Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, pp. 141-214. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983). Traduzido de Ann. d. Phys. 49 (1916).

10. http://en.wikipedia.org/wiki/Vulcan_(hypothetical_planet), acessado em 11/05/2014

11. http://en.wikipedia.org/wiki/Vulcanoid_asteroid, acessado em 11/05/2014.

12. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Mercury-crossing_minor_planets, acessado em 11/05/2014.

13. Einstein, A., *Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory*, do original *"Erklarung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitatstheorie"*, Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 831–839 (1915), disponível em http://www.gsjournal.net/old/eeuro/vankov.pdf
14. Schwarzschild, K., *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, em http://zelmanov.ptep-online.com/papers/zj-2008-03.pdf, do original "*Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*", Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196 (1916).
15. Novello, M. et al, *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1 (Teoria da Gravitação, autor Vitorio de Lorenci). Rio de Janeiro: editora Jauá (2010).
16. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp.198-199. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).
17. Anderson, J.D. et al, *Acta Astronautica* 5, 43 (1978).
18. Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., *Gravitation*, p.638. New York: W. H. Freeman and Company (1973).
19. http://www.ccvalg.pt/astronomia/sistema_solar/terra.htm, acessado em 07/06/2014.
20. http://astro.if.ufrgs.br/solar/mercury.htm, acessado em 06/06/2014.
21. Berman, M.S. e Gomide, F.M., *Cálculo Tensorial e Relatividade Geral – Uma Introdução*. São Paulo: McGraw-Hill (1987).
22. Martins, R.A., *Alguns Aspectos da Teoria da Gravitação*. Perspicillum 4, 1, 9-15 (1990), disponível em http://www.ghtc.usp.br/server/pdf/ram-40.pdf.
23. Martins, R.A., *O Princípio da Antecedência das Causas na Teoria da Relatividade.* Anais da ANPOF 1, 1, 51-72 (1986), em http://www.ghtc.usp.br/server/pdf/ram-29.pdf