

Hyperkomplexe Algebren und ihre Anwendung in der mathematischen Formulierung der Quantentheorie

Torsten Hertig ^{I1}, Philip Höhmann ^{II2}, Ralf Otte ^{I3}

^{I1} *tecData AG*

Bahnhofsstrasse 114, CH-9240 Uzwil, Schweiz

^{I1} torsten.hertig@tecdata.ch

^{I3} ralf.otte@buhlergroup.com

^{II} *info-key GmbH & Co. KG*

Heinz-Fangman-Straße 2, DE-42287 Wuppertal, Deutschland

^{II} hoehmann@info-key.de

31. März 2014

Abstract

Eine der grundlegenden Theorien der Physik, nämlich die Quantentheorie (QT) bzw. Quantenmechanik (QM), namentlich in Form der Wellenmechanik von ERWIN SCHRÖDINGER (1926) lässt sich in ihrer allgemeinen, vollständigen Form nur mit Hilfe des Körpers \mathbb{C} der komplexen Zahlen (respektive äquivalenter mathematischer Objekte) formulieren.

Auch die komplexwertige Beschreibung erwies sich allerdings bald als unzureichend. Die Einbeziehung von EINSTEINS Spezieller Relativitätstheorie (SRT) (SCHRÖDINGER, OSKAR KLEIN, WALTER GORDON, 1926, PAUL DIRAC 1928) führte zu einer Gleichungen mit Koeffizienten, die keine reellen oder komplexen Zahlen, sondern hyperkomplex sein müssen. Üblicherweise wird die DIRAC-Gleichung mit antivertauschenden Matrizen formuliert, doch dies *ist* eine hyperkomplexe Beschreibung, denn ein Ring quadratischer Matrizen *ist* eine hyperkomplexe Algebra, und zwar eine assoziative. Wichtig ist ohnehin nicht die konkrete Form der Matrizen, sondern deren algebraische Eigenschaften. Das spricht dafür, anstelle einer konkreten Matrixschreibweise eine symbolische Formulierung der Elemente als Linearkombination aus den Basiselementen zu verwenden. Im Falle der DIRAC-Gleichung handelt es sich um Biquaternionen, d.h. Quaternionen über den komplexen Zahlen.

Die Biquaternionen sind als \mathbb{R} -Algebra achtdimensional; zu ihren Unteralgebren gehören einerseits der Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen, andererseits die Algebra $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ der bikomplexen Zahlen, die im Unterschied zu \mathbb{H} kommutativ ist. $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ wiederum besitzt, wie sich herausstellt, mehrere *rein nichtreelle* Unteralgebren, die zu \mathbb{C} isomorph sind, sodass sich Wellenfunktionen mit Werten aus dieser Algebra gleichsam aus mehreren voneinander unabhängigen quasi-komplexen Wellenfunktionen zusammensetzen können.

In diesem Paper werden zunächst die Grundlagen der nichtrelativistischen und relativistischen Quantentheorie kurz dargestellt. Dann werden hyperkomplexe Algebren allgemein vorgestellt und anhand eines Beispiels gezeigt, wie eine relativistische Gleichung - wie die von DIRAC - mittels hyperkomplexer Koeffizienten formuliert werden kann. Anschließend werden die algebraischen Voraussetzungen dafür formuliert, dass sich in einem rein nicht-reellen Unterraum einer hyperkomplexen Algebra Schwingungen durch Exponentialfunktionen ausdrücken lassen und dort somit auch eine Wellenfunktion und eine der SCHRÖDINGER-Gleichung entsprechende Wellengleichung aufgestellt werden kann. Ferner werden die algebraischen Voraussetzung einer FOURIER-Transformation in einem solchen Unterraum untersucht. Es wird sich herausstellen, dass ein derartiger nicht-reeller Unterraum auch eine *Unteralgebra*, also unter Multiplikation abgeschlossen sein muss. Ferner ist die Unteralgebra ein *Ideal* und wird daher mit \mathcal{J} bezeichnet. Dieses muss zu \mathbb{C} isomorph sein, also ein *internes Einselement* enthalten. Ferner wird sich herausstellen, dass die bikomplexen Zahlen Unteralgebren mit den gesuchten Eigenschaften besitzen. Daher lässt sich auf diesen Unteralgebren der gesamte Formalismus der QT entwickeln. Wir werden zeigen, dass sich in der Algebra der bikomplexen Zahlen unterschiedliche Formen der Konjugation definieren lassen, darunter eine, die ein Element von \mathcal{J} genauso behandelt wie die gewöhnliche komplexe Konjugation eine komplexe Zahl. Dies erlaubt die Definition eines sog. Modulus, der im Unterschied zum Betragsquadrat einer komplexen Zahl nichtreell bleibt (sie könnte als 'pseudo-reell' bezeichnet werden). Eine explizite physikalische Interpretation wird hier allerdings noch nicht vorgenommen und bleibt späteren Untersuchungen vorbehalten.

keywords Algebra, bikomplex, hyperkomplex, Quantenmechanik, Quantentheorie, Quaternionen, SCHRÖDINGER-Gleichung, Spezielle Relativitätstheorie, Wellenfunktion.

1 Einleitung

Die Geschichte der Quantentheorie beginnt mit der Entdeckung des Welle-Teilchen-Dualismus von Licht durch MAX PLANCK (Erklärung der Schwarzkörperstrahlung 1900) und ALBERT EINSTEIN (Erklärung des Photoelektrischen Effekts, 1905): Die Entdeckung, dass elektromagnetische Strahlung der Frequenz ν bzw. der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ nur in 'Portionen' oder Quanta von $E = h\nu = \hbar\omega$ (mit dem PLANCKschen Wirkungsquantum h bzw. dem reduzierten P.W. $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,054 \times 10^{-34} \text{Nms}$) absorbiert oder emittiert wird. Doch nicht nur für Licht gilt dieser Dualismus: Auf der Suche nach einer plausiblen Erklärung für die Stabilität bestimmter Elektronenzustände im Atom wandte LOUIS VICTOR DE BROGLIE diesen Dualismus 1924 auf Materie an und postulierte für Teilchen mit Energie E und Impuls \vec{p} die Kreisfrequenz $\omega = \frac{E}{\hbar}$ und den Wellenvektor $\vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar}$.

Wellengleichung und komplexer Lösungsansatz ERWIN SCHRÖDINGER griff 1926 DE BROGLIES Idee auf. Indem er klassische Variablen durch Differenzialoperatoren ersetzte, entwickelte er eine der wichtigsten Grundgleichungen der Quantenmechanik (QM) mit den sog. Wellenfunktionen $\phi(\vec{x}, t)$ als Lösungen. Dafür erwies sich der allgemeine reelle Ansatz

$$a \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + b \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1)$$

als unzureichend, nicht zuletzt weil die Gleichung 1. Ordnung in der Zeitableitung ist, weshalb die Lösung die Form einer Exponentialfunktion haben muss. Dank LEONHARD EULERS Formel $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ erweist sich der komplexwertige Ansatz

$$ze^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = ze^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

als geeignet, der erstens die trigonometrischen Funktionen in sich und mit der Exponentialfunktion vereinigt und zweitens Differenzialgleichungen jeder Ordnung ein schließlich der 1. und 2. gleichzeitig lösen kann.¹

Interpretation der Wellenfunktion Nicht zuletzt wegen ihrer Komplexwertigkeit (respektive Hyperkomplexwertigkeit) kam es später zu einer lebhaften Debatte über das Wesen dieser Wellenfunktionen; SCHRÖDINGER hielt sie für Darstellungen physischer Wellen, er dachte zum Beispiel an die Ladungsdichteverteilung.

Das Gros der Physiker sah dies anders. MAX BORN schlug noch im selben Jahr die Interpretation des Betragsquadrates der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung vor, die noch heute gültig ist. Dies führte zur Kopenhagener Deutung, die vom Positivismus beeinflusst ist. Ihr prominentester Exponent, NIELS BOHR, hielt die Wellenfunktion lediglich für ein nützliches mathematisches Hilfsmittel ohne physikalische Realität.

Dieser Auffassung schließen wir uns jedoch nicht an. Aus unserer Sicht haben komplexwertige Funktion ganz spezielle physikalische Eigenschaften und stellen mitnichten ein bloßes mathematisches Hilfsmittel dar [16], da wir überzeugt sind, dass ein solches wohl kaum ganz reale physikalische Auswirkungen wie destruktive Interferenz haben könnte, bei denen sich ja die Wellenfunktionen selbst überlagern müssen und nicht etwa Wahrscheinlichkeitsdichten. Dieser *Quantenrealismus* gilt auch hyperkomplexen Ansätzen, zumal diese für eine konsistente Naturbeschreibung schlicht unausweichlich erscheinen. Dabei ist nicht etwa *reell* mit *messbar* und *imaginär* mit *nicht messbar* gleichzusetzen; der Realteil einer Wellenfunktion ist ebenso wenig messbar wie der Imaginärteil. Gemessen werden können ohnehin nur Eigenwerte hermitescher Operatoren, allerdings lassen sich mittels vieler Messungen an identisch präparierten Systemen die oben erwähnten Betragsquadrate rekonstruieren. Was unmessbar bleibt, ist die *Phase*.²

SRT und hyperkomplexe Erweiterung Etwa zeitgleich mit der QT kam die Spezielle Relativitätstheorie (SRT, EINSTEIN, 1905, s. Anhang C) auf; sie entsprang der Erkenntnis, dass GALILEIS Relativitätsprinzip wie für die Gesetze der Mechanik auch für JAMES CLERK MAXWELLS Elektrodynamik gilt, was impliziert, dass $c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,³ die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen, in jedem Inertialsystemen unabhängig von dessen Bewegungszustand dieselbe sein muss. Bei der Einbeziehung der SRT in die Wellenmechanik erwies sich der skalare komplexe Ansatz als unzureichend für eine vollständige Beschreibung von Materie. Eine Lösung dieses Problems gelang PAUL DIRAC 1928, indem er eine Gleichung mit *hyperkomplexen* Koeffizienten aufstellte. Sie werden in Form quadratischer Matrizen geschrieben und ihre Lösungen als Vektoren von Funktionen.

Konventionen für den folgenden Text Universelle Konstanten wie c oder \hbar sind letztlich Artefakte des Maßsystems (s. auch Anhang C). Über mathematische Zusammenhänge sagen sie nichts aus. Theoretische Physiker bevorzugen daher bei Rechnungen *natürliche Einheiten*, in denen sie gleich Eins oder zumindest dimensionslos sind. Dem schließen wir uns an; im Folgenden wird im Regelfall ein Maßsystem mit $\hbar = 1, c = 1$ vorausgesetzt und Ausnahmen ausdrücklich bezeichnet. Dadurch vereinfacht sich (2) zu

$$ze^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}. \quad (3)$$

¹ Im Prinzip wäre auch eine Lösung mit Hilfe eines abstrakten \mathbb{R}^2 und reellen 2×2 -Matrizen als Vorfaktoren möglich, ist jedoch völlig äquivalent zur komplexen Lösung, nur nicht so elegant. Solche Koeffizienten wären vor allem auch isomorph zu komplexen Zahlen.

²Jedenfalls bis auf spezielle Zustände bei Photonen, die kohärent genannt werden; deren "Teilchenzahl" ist allerdings nur unscharf definiert.

³Das ist der heute bekannte Wert. Dieser Wert ist seit der Redefinition des Meters durch die GCPM 1983 exakt und liegt innerhalb der letzten Fehlergrenzen (1973).

Ferner werden in Anlehnung an die Konventionen der Relativitätstheorien griechische Indizes verwendet, wenn die Indexmenge den Wert 0 einschließt, anderenfalls lateinische; über doppelte Indizes wird summiert, wenn dies nicht ausdrücklich verneint ist; dabei werden auch obere Indizes auftreten, auf die hingewiesen wird, wenn Verwechslungsgefahr mit Potenzen besteht. Integrale ohne Grenzen im Text sind nicht *unbestimmt*, sondern *uneigentlich*, d.h. sie gehen über den gesamten Definitionsbereich des Integranden. Zudem werden wir für Operatoren der Form

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \dots$$

die platzsparende Schreibweise $\partial_x, \partial_x^2, \partial_t, \partial_t^2, \dots$ verwenden, wenn nicht ohnehin ein Bruch vorliegt.

2 Matrizenmechanik und Wellenmechanik

Für die QT gibt es zwei Ansätze, die auf den ersten Blick grundverschieden wirken: Die Matrizenmechanik (u.a. WERNER HEISENBERG, 1925) und die Wellenmechanik (u.a. ERWIN SCHRÖDINGER, 1926). SCHRÖDINGER zeigte jedoch schon im selben Jahr, dass beide äquivalent sind [20, 21, 22].

Die Matrizenmechanik ist allgemeiner und *koordinatenfrei*. Ihr gebührt insofern das Primat, als dass sich jegliche Wellenmechanik ebenso auch in der Terminologie der Matrizenmechanik beschreiben lassen muss⁴. Sie bietet die gesamten Begrifflichkeiten, den Formalismus, der in Anhang B.1 dargestellt ist. In B.2 sind ein Zweizustandssystem und ein Raum von Ortswellenfunktionen als sehr verschiedene Beispiele für HILBERTräume, d.h. Räume von Zustandsvektoren, dargestellt. Die Wellenmechanik ist ein *Spezialfall* der Matrizenmechanik. Allerdings ist sie anschaulicher, beschreibt sie doch das "Teilchen" durch Funktionen in Raum und Zeit. Zudem motiviert vor allem sie die Verwendung komplexwertiger Funktionen, was einer möglichen Erweiterung auf Funktionen mit hyperkomplexen Werten durchaus entgegenkommt, weshalb wir uns im Folgenden im Wesentlichen mit ihr auseinandersetzen werden.

2.1 Die SCHRÖDINGER-Gleichung und ihre Lösungen

HAMILTON- und Energieoperator Eine Gleichung der Klassischen Mechanik besagt, dass die HAMILTON-Funktion der (verallgemeinerten) Koordinaten x_r und Impulse p_r , gleich der Gesamtenergie des Systems ist:

$$E = \mathcal{H}(p_r, x_r) \equiv \frac{1}{2m} \sum_r p_r^2 + U(x_r) \quad (4)$$

Die Ersetzung der Variablen durch Operatoren und deren Anwendung auf einen Zustand $|\phi\rangle$ liefert die Beziehung

$$\hat{E}|\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle \equiv \left(\frac{1}{2m} \sum_r \hat{p}_r^2 + U(\hat{x}_r) \right) |\phi\rangle \quad (5)$$

zwischen Energie- und HAMILTON-Operator, und dies ist gerade die SCHRÖDINGER-Gleichung in der Terminologie der Matrizenmechanik. Zu bemerken ist, dass \hat{H} und \hat{E} zwei *wirklich unterschiedliche* Operatoren sind - sonst wäre (5) trivial - denn \hat{E} beschreibt das zeitliche Verhalten von $|\phi\rangle$, \hat{H} das räumliche Verhalten und die Wirkung von Potentialen. Natürlich haben sie dieselben Eigenfunktionen $|\phi(E)\rangle$ zu denselben Eigenwerten E , sodass für einen Zustand $|\phi(E)\rangle$ der Operator \hat{E} durch den Wert E ersetzt werden kann:

$$\hat{H}|\phi(E)\rangle = E|\phi(E)\rangle \quad (6)$$

Als Überleitung zur Wellendarstellung drücken wir mit (3) die Operatoren für Impuls und Energie in Ortsdarstellung aus:

$$\hat{p}_r = i^{-1} \partial_{x_r} = -i \partial_{x_r} \quad (7)$$

$$\hat{E} = -i^{-1} \partial_t = i \partial_t \quad (8)$$

SCHRÖDINGER-Gleichung Einsetzen von (7) und (8) in (5) liefert sofort die Ortsdarstellung (SCHRÖDINGER, 1926)

$$\hat{H}\phi(\vec{x}, t) = \left(\frac{-\nabla^2}{2m} + U(\vec{x}) \right) \phi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t). \quad (9)$$

Die Eigenwertgleichung (6) nimmt mit (7) in Ortsdarstellung folgende Form an:

$$\hat{H}\phi = \left(\frac{-\nabla^2}{2m} + U(\vec{x}) \right) \phi = E\phi \quad (10)$$

Deren Lösungen haben nach (3) die Gestalt $\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) \cdot e^{-iEt}$, und schon die *stationäre* Funktion $\phi(\vec{x})$ ist Lösung von (10). Sie kann - im Unterschied zur zeitabhängigen Lösung, die den Faktor e^{iEt} , nicht aber e^{-iEt} enthält - durchaus reell sein, etwa für Teilchen in einem Kasten. Eine solche Lösung ist als Überlagerung von Zuständen mit gegenläufigen Impulsen zu verstehen (stehende Welle).

⁴und auch lässt, was umgekehrt jedoch nicht immer möglich ist; es gibt z.B. keine Ortswellenfunktion des Spins

2.2 Speziell-relativistische Wellenmechanik

Ausgangspunkt der Quantisierung der SRT ist die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung* (s. Anhang C, (99)). Wie bei der Gewinnung der SCHRÖDINGER-Gleichung entsteht durch Ersetzen der physikalischen Größen durch Operatoren eine Differenzialgleichung (freies Teilchen, OSKAR KLEIN, WALTER GORDON, 1926):

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m^2)\phi = (\eta^{\mu\rho} p_\mu p_\rho - m^2)\phi = 0 \quad (11)$$

Einerseits gilt diese Gleichung immer. Andererseits beschreibt jedoch viele Systeme nur unvollständig, nicht zuletzt, weil sie 2. Ordnung ist⁵. Mit Hilfe von Koeffizienten γ^μ , die *keine* Zahlen sein können, lässt sich folgende Gleichung 1. Ordnung formulieren (PAUL DIRAC, 1928) [4, 5]:

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)\phi = 0. \quad (12)$$

Die γ^μ können weder reell noch komplex sein, denn Quadrieren des Operators auf der linken Seite liefert

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)^2 \phi &= (\gamma^\mu \gamma^\rho \hat{p}_\mu \hat{p}_\rho + m^2 - 2m\gamma^\mu \hat{p}_\mu)\phi \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\rho \hat{p}_\mu \hat{p}_\rho - m^2 - 2m\gamma^\mu \hat{p}_\mu + 2m^2)\phi \\ &= (\gamma^\mu \gamma^\rho \hat{p}_\mu \hat{p}_\rho - m^2)\phi - \underbrace{2m(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - m)}_{=0}\phi = 0 \\ &\Rightarrow (\gamma^\mu \gamma^\rho \hat{p}_\mu \hat{p}_\rho - m^2)\phi = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

wir erinnern daran, dass der Ausdruck $\gamma^\mu \gamma^\rho \hat{p}_\mu \hat{p}_\rho$ eine Summe ist, die jedes Indexpaar in jeder Reihenfolge enthält. Damit jedes $\phi(x^\mu)$ auch (11) genügt, müssen die γ^ρ untereinander *antivertauschen*, damit gemischte Terme wegfallen. Quadriert müssen sie $\pm \hat{1}$ ergeben, wobei $\hat{1}$ die Zahl 1 verallgemeinert⁶. Insgesamt genügen sie also der Vertauschungsrelation

$$\gamma^\mu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\rho} \hat{1}, \quad (14)$$

wobei $\eta^{\mu\rho}$ der metrische Tensor ist. Die räumlichen Koeffizienten verhalten sich gerade so wie die imaginären Basiselemente von \mathbb{H} , dem Schiefkörper der *Quaternionen*, und tatsächlich lässt sich die DIRAC-Gleichung mit Hilfe von Quaternionen bzw. *Biquaternionen* (Quaternionen über \mathbb{C} statt über \mathbb{R} s. 3.1.3) kompakterer als üblich formulieren.

3 Hyperkomplexe Algebren und ihre Anwendung auf die QT

Eine hyperkomplexe Algebra ist eine *Verallgemeinerung* (oft auch eine *Erweiterung*, aber nicht immer) des Körpers \mathbb{C} der komplexen Zahlen in seiner Eigenschaft als Algebra und damit Vektorraum über \mathbb{R} . Entscheidend ist, dass die Algebra *unitär* ist, d.h. das neutrale Element 1 und damit \mathbb{R} selbst enthält. In einer Basis, in der 1 explizit auftritt, hat ein Element einer solchen Algebra also die Form [11, 7]

$$q = a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_n i_n, \quad (15)$$

wobei die nicht-reellen Basiselemente $i_r, r = 1, \dots, n$ oft ungeachtet der Regeln, nach denen sie multipliziert werden, als “imaginäre Einheiten” bezeichnet werden[11]. Wir werden diese Terminologie aus zwei Gründen nicht übernehmen: Erstens bezeichnet das Wort “Einheit” in der Algebra die Existenz eines multiplikativ Inversen, und eine “imaginäre Einheit” im o.g. Sinn kann auch ein *Nullteiler* sein, was eine Division durch sie unmöglich macht. Zweitens ist zumindest dann, wenn 1 und ein nichtreelles Basiselement eine zweidimensionale Unteralgebra bilden, leicht zu zeigen, dass diese auch ein Element enthält, dessen Quadrat -1, 0 oder 1 ist; für diese Elemente wollen wir das Wort “imaginär” reservieren. In hyperkomplexen Algebren gilt in jedem Fall beidseitig das Distributivgesetz [2, 24], alle anderen Eigenschaften der Multiplikation wie Umkehrbarkeit, Assoziativität oder gar Kommutativität sind jedoch nicht konstitutiv. Gerade darin aber bestehen die grundlegenden Unterschiede zwischen verschiedenen Algebren derselben Dimension, denn eine Basis transformation kann die Multiplikationsregeln derart verändern, dass die Algebra bestenfalls mit Mühe wiedererkennbar ist; andere Multiplikationsregeln implizieren also nicht automatisch eine andere Algebra.

Das Produkt zweier Basiselemente ist i. Allg. eine Linearkombination der ganzen Basis, d.h.

$$i_r i_s = \sum_{\mu=0}^n p_{rs\mu} i_\mu = p_{rs0} + p_{rs1} i_1 + \dots + p_{rsn} i_n, \quad (16)$$

wobei $i_0 \equiv 1$ ist und, wohl bemerkt, nichts mit der unten eingeführten imaginären Einheit i_0 zu tun hat. Im Folgenden werden wir nur Algebren mit einer Basis berücksichtigen, in der für jedes geordnete Paar (r, s) , also jedes Produkt $i_r i_s$ maximal ein Koeffizient $p_{rs\mu}$ von 0 verschieden ist, also

$$\forall r, s \in \{1, \dots, n\} \exists \mu \in \{0, \dots, n\} : i_r i_s \in \{0, -i_\mu, +i_\mu\}. \quad (17)$$

Natürlich werden wir voraussetzen, dass eine solche Basis bereits vorliegt. Es gibt dann nur noch endlich viele mögliche Multiplikationsregeln, wobei $(2n + 3)^{n^2}$ eine obere Schranke ist.

⁵Eine Gleichung 2. Ordnung hat natürlich mehr Lösungen als eine 1. Ordnung.

⁶In einem Ring von $n \times n$ -Matrizen stellt $\hat{1}$ z.B. die $n \times n$ -Einheitsmatrix dar.

Unterräume und Unteralgebren Ein (echter) Unterraum $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{A}$ ist dann eine (echte) *Unteralgebra* von \mathcal{A} , wenn

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{U} : \alpha\beta \in \mathcal{U} \wedge \beta\alpha \in \mathcal{U}. \quad (18)$$

Ideale und Nullteiler Eine echte Unteralgebra $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{A}$ ist dann ein (echtes) *Ideal* von \mathcal{A} , wenn

$$\forall \gamma \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{J} : \beta\gamma \in \mathcal{J} \wedge \gamma\beta \in \mathcal{J}. \quad (19)$$

Eine Algebra, die - außer $\{0\}$ - keine echten Ideale besitzt, heißt *einfach*.

Zwei Elemente $\alpha, \beta \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ heißen *Nullteiler*⁷, wenn $\alpha \cdot \beta = 0$ ist. Nullteiler in \mathbb{R} -Algebren gehören oft zu Idealen. Offensichtlich sind $\alpha \in \mathcal{J}_1, \beta \in \mathcal{J}_2$ Nullteiler, wenn $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2 = \{0\}$. Division durch $\beta \in \mathcal{J}$ ist in keinesfalls möglich:

- Ist $\gamma \notin \mathcal{J}$, hat die Gleichung $\beta\xi = \gamma$ bzw. $\xi\beta = \gamma$ keine Lösung $\xi \in \mathcal{A}$, namentlich für $\gamma = 1$, d.h. $\nexists \beta^{-1}$.
- Ist $\gamma \in \mathcal{J}$, so ist die Lösung wegen $\dim \mathcal{A} > \dim \mathcal{J}$ zumindest i. Allg. mehrdeutig.

Wir werden sehen, dass Nullteiler bei *Eigenwertgleichungen* eine wichtige Rolle spielen (s. Anhang C.4, v.a. (108)).

3.1 Bekannte Beispiele

3.1.1 Algebren mit einer imaginären Einheit

Außer \mathbb{C} selbst als bekanntester unitärer Algebra gibt es auch die *dualen Zahlen*, deren imaginäre Einheit, oft Ω genannt, durch $\Omega^2 = 0$ definiert ist⁸, sowie die (wesentlich interessanteren) *binären Zahlen* mit der imaginären Einheit \mathcal{E} oder σ , deren Quadrat $+1$ ist; wir bevorzugen σ in Anlehnung an die PAULI-Matrizen, deren Quadrat die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Im Englischen heißen die binären Zahlen *split-complex numbers* oder *hyperbolic numbers*, und zwar wegen

$$(a_0 + a_1\sigma)(a_0 - a_1\sigma) = a_0^2 - a_1^2; \quad (20)$$

diese Größe heißt im Englischen *Modulus* und charakterisiert Hyperbeln in der binären Zahlenebene wie die Norm einer komplexen Zahl einen Kreis⁹; sie entspricht dem Quadrat der MINKOWSKI-(Pseudo-)Norm. Die Algebra enthält die beiden nichttrivialen idempotenten Elemente

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sigma). \quad (21)$$

Das sind die *einzigsten* zweidimensionalen hyperkomplexen Algebren, denn für ein nichtreelles Basiselement i mit $i^2 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich durch quadratische Ergänzung ein imaginäres Element finden, dessen Quadrat reell und, falls von Null verschieden, normierbar ist [11]:

$$i^2 - bi + \frac{b^2}{4} = \left(i - \frac{b}{2}\right)^2 = a + \frac{b^2}{4} \in \mathbb{R} \quad (22)$$

$$\Rightarrow \frac{i - \frac{b}{2}}{\sqrt{|a + \frac{b^2}{4}| + \delta_{4a, -b^2}}} = \begin{cases} \Omega, & 4a = -b^2 \\ \sigma, & 4a > -b^2 \\ i, & 4a < -b^2 \end{cases} \quad (23)$$

3.1.2 Quaternionen

Anders als die bisherigen Beispiele enthalten die folgenden \mathbb{C} , stellen also echte Erweiterungen dar. Bei dem erfolglosen Versuch, eine umkehrbare Multiplikation für Vektoren zu definieren, stieß WILLIAM ROWAN HAMILTON 1843 durch Erweiterung um eine skalare Komponente auf die Quaternionen [9]; die Algebra wurde später zu seinen Ehren mit \mathbb{H} bezeichnet. Es gibt 3 imaginäre Einheiten; eine Quaternion q hat also die Form¹⁰

$$q = a_0 + a_1i_1 + a_2i_2 + a_3i_3, \quad a_p \in \mathbb{R}. \quad (24)$$

Die Multiplikationsregeln sind in Tabelle 1 zusammengefasst; weil \mathbb{H} nicht kommutativ ist, ist die Reihenfolge relevant und als Zeile mal Spalte zu verstehen [9, 10]. Wie in \mathbb{C} gibt es zu jedem $q \in \mathbb{H}$ eine konjugierte Quaternion

$$\bar{q} = a_0 - a_1i_1 - a_2i_2 - a_3i_3, \quad (25)$$

mit deren Hilfe sich die Größen

$$\Re(q) = \frac{q + \bar{q}}{2}, \quad \Im(q) = \frac{q - \bar{q}}{2}, \quad |q| = \sqrt{q\bar{q}}$$

⁷Genauer heißt i. Allg. α Links- und β Rechtsnullteiler.

⁸In [8] werden solche Zahlen auch als *Pseudo-Nul* oder Wurzeln der Null bezeichnet.

⁹Eine Ausnahme bilden binäre Zahlen mit *Modulus* 0; sie bilden die Asymptoten der Hyperbeln und sind natürlich Nullteiler.

¹⁰Üblicherweise werden die imaginären Einheiten mit i, j, k bezeichnet, aber diese Symbole werden anderweitig verwendet.

	1	i_1	i_2	i_3
1	1	i_1	i_2	i_3
i_1	i_1	-1	i_3	$-i_2$
i_2	i_2	$-i_3$	-1	i_1
i_3	i_3	i_2	$-i_1$	-1

Tabelle 1: Multiplikation der Quaternionen

ausdrücken lassen. Man beachte den Unterschied zu \mathbb{C} , wo in einem Element $a_0 + a_1 i$ der reelle Koeffizient a_1 und nicht $a_1 i$ als Imaginärteil bezeichnet wird. Bei einer Quaternion q heißen $\Re(q)$ und $\Im(q)$ auch Skalarteil und Vektorteil. Eine *reine Quaternion* q^{\Im} ist durch $\Re(q^{\Im}) = 0$ definiert. Sie lässt sich formal als Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{i}$ ($\vec{i} := {}^T(i_1, i_2, i_3)$) schreiben. Das Produkt zweier reiner Quaternionen $q_1^{\Im} q_2^{\Im}$ ist

$$-\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{i},$$

d.h. ihre Multiplikation vereint Skalar- und Kreuzprodukt in sich. Quaternionen können auch Drehungen beschreiben[11]. Die imaginären Einheiten haben so viel mit räumlichen Dimensionen gemein, dass dies nahelegt, Raum als etwas *seinem Wesen nach Imaginäres* anzusehen - wie die imaginären MINKOWSKI-Normen raumartiger Vierervektoren in der SRT.

\mathbb{H} ist ein *Schiefkörper*, d.h., mit Ausnahme der Kommutativität erfüllt die Multiplikation alle Körperaxiome. Jede Ebene, die \mathbb{R} enthält, ist eine Unteralgebra von \mathbb{H} und isomorph zu \mathbb{C} , denn die imaginären Einheiten sind algebraisch äquivalent. Eine Übersicht über die Eigenschaften von \mathbb{H} sowie anderer Algebren bietet Anhang A.2.

3.1.3 Biquaternionen

Die (HAMILTON-CAYLEYSchen) Biquaternionen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ sind eine Erweiterung sowohl der Quaternionen als auch der bikomplexen Zahlen (s.u.). Sie lassen sich als Algebra über $\mathbb{C} = \text{Span}(\{1, i_0\})$ mit den drei äußeren imaginären Einheiten i_1, i_2, i_3 auffassen, die paarweise antivertauschen, mit i_0 jedoch vertauschen, also $i_0 i_r = i_r i_0 =: \sigma_r$, $r = 1, 2, 3$, für die einzeln gilt:

$$\sigma_r^2 = (i_r i_0)^2 = i_r^2 i_0^2 = (-1) \cdot (-1) = +1 \quad (26)$$

Wie die i_r antivertauschen natürlich auch die σ_r ; mit dem Levi-Civita-Pseudotensor ε_{qrs} ist

$$\sigma_q \sigma_r = i_0^2 i_q i_r = -i_0^2 i_r i_q = -\delta_{qr} - \varepsilon_{qrs} i_s = \delta_{qr} + \varepsilon_{qrs} i_0 \cdot \sigma_s. \quad (27)$$

Ihre algebraischen Eigenschaften sind also dieselben wie die der PAULI-Matrizen; daher eignen sie sich zur Formulierung der relativistischen QT, wie etwa der DIRAC-Gleichung (s. Anhang C) und auch der nichtrelativistischen Näherung von PAULI. Eine Übersicht über die Multiplikation bietet Tabelle 2; wie bei den Quaternionen gilt hier Zeile mal Spalte.

	1	i_0	i_1	i_2	i_3	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	i_0	i_1	i_2	i_3	σ_1	σ_2	σ_3
i_0	i_0	-1	σ_1	σ_2	σ_3	$-i_1$	$-i_2$	$-i_3$
i_1	i_1	σ_1	-1	i_3	$-i_2$	$-i_0$	σ_3	$-\sigma_2$
i_2	i_2	σ_2	$-i_3$	-1	i_1	$-\sigma_3$	$-i_0$	σ_1
i_3	i_3	σ_3	i_2	$-i_1$	-1	σ_2	$-\sigma_1$	$-i_0$
σ_1	σ_1	$-i_1$	$-i_0$	σ_3	$-\sigma_2$	1	$-i_3$	i_2
σ_2	σ_2	$-i_2$	$-\sigma_3$	$-i_0$	σ_1	i_3	1	$-i_1$
σ_3	σ_3	$-i_3$	σ_2	$-\sigma_1$	$-i_0$	$-i_2$	i_1	1

Tabelle 2: Multiplikation der Biquaternionen

Innere und äußere Konjugation Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Konjugation eindeutig bestimmt, nämlich durch $\bar{z} = x - iy$. Im Prinzip gilt Entsprechendes auch für \mathbb{H} , da die imaginären Einheiten dort gleichartig sind. Dagegen hat $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ die o.g. verschiedenen Typen von imaginären Einheiten und lässt sich insbesondere als \mathbb{C} -Algebra beschreiben, sodass eine Biquaternion $q = \alpha + \beta_0 i_0 + \sum_{r=1}^3 (\beta_r i_r + \beta_{r+3} \sigma_r)$, $\alpha, \beta_\mu \in \mathbb{R}$ sich auch als $a_0 + \sum_r a_r i_r$, $a_\mu \in \mathbb{C}$ schreiben lässt. Hier gibt es daher neben der ‘einfachen’ Konjugation $\check{q} = \alpha - \beta_0 i_0 - \sum_{r=1}^3 (\beta_r i_r + \beta_{r+3} \sigma_r)$ auch die ‘äußere’ Konjugation $\bar{q} = a_0 - \sum_r a_r i_r$ und die ‘innere’ Konjugation $q^* = \bar{a}_0 + \sum_r \bar{a}_r i_r$ [17, 25]. Diese Arten von Konjugation lassen sich zudem zu $q^\dagger = \bar{a}_0 - \sum_r \bar{a}_r i_r$ kombinieren.

3.1.4 Bikomplexe Zahlen

Eine weitere hyperkomplexe Algebra, die \mathbb{C} enthält, ist die Algebra $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ der bikomplexen Zahlen, erstmals 1892 beschrieben von CORRADO SEGRE, der zuvor die Quaternionen studiert hatte. Sie lassen sich als komplexe Zahlen $a + i_1 b \in \mathbb{C}_1$, $a, b \in \mathbb{C}_0 := \langle \{1, i_0\} \rangle$ mit der weiteren ‘inneren’ imaginären Einheit i_0 auffassen. Im Unterschied zu ihrer Oberalgebra $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ ist $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ kommutativ [3, 23] und besitzt nur eine ‘äußere’ imaginäre Einheit, sodass sie im Prinzip gegen die ‘innere’ austauschbar ist. Damit ist die Multiplikationstabelle in Normalform (NF) oder kanonischer Form, in der alle Basiselemente sich zu -1, 0 oder 1 quadrieren, insgesamt wie folgt definiert:

	1	i_0	i_1	σ
1	1	i_0	i_1	σ
i_0	i_0	-1	σ	$-i_1$
i_1	i_1	σ	-1	$-i_0$
σ	σ	$-i_1$	$-i_0$	1

Tabelle 3: Multiplikation der bikomplexen Zahlen (kanonische Basis)

Ebenfalls im Gegensatz zu den Quaternionen ist die Algebra der bikomplexen Zahlen keine Divisionsalgebra, da sie mit $\langle \{1, \sigma\} \rangle$ eine zu den bekanntermaßen nicht nullteilerfreien binären Zahlen isomorphe Unter algebra besitzt. Daher hat sie wie diese die zwei nichttrivialen idempotenten Elemente

$$\left(\frac{1 \pm \sigma}{2}\right)^2 = \frac{1^2 \pm 2\sigma + \sigma^2}{4} = \frac{2 \pm 2\sigma}{4} = \frac{1 \pm \sigma}{2}, \quad (28)$$

von denen jede zu einer rein nichtreellen Unter algebra von $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ gehört, das zugleich ein *Ideal* ist. Eine Übersicht über die Eigenschaften von $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ sowie anderer Algebren bietet Anhang A.2.

3.2 Hyperkomplexe Verallgemeinerung wellenmechanisch relevanter Operationen

Im Folgenden untersuchen wir die Kriterien, denen eine hyperkomplexwertige Funktion genügen muss, um eine Wellenfunktion im SCHRÖDINGERSchen Sinne zu sein:

1. Schwingungen und Wellen müssen sich durch Exponentialfunktionen ausdrücken lassen, um daraus Wellenfunktionen entwickeln zu können, die sich als Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung (bzw. ihrer relativistischen Entsprechungen, KLEIN-GORDON-, DIRAC-Gleichung etc.) eignen.
2. Eine Fourier-Transformation in beide Richtungen muss möglich sein, um zwischen verschiedenen Darstellungen zu wechseln (z.B. \vec{x}, \vec{p}).

Um auch Systeme beschreiben zu können, die sich nicht direkt messen lassen, fordern wir *zusätzlich*, dass die verwendete Algebra einen *rein nichtreellen* (zweidimensionalen) Unterraum (der dann auch eine Unter algebra und sogar ein Ideal ist) mit diesen Voraussetzungen besitzt. Dessen Basiselemente werden für den allgemeinen Fall im Folgenden mit α und β bezeichnet und ihre erforderlichen Eigenschaften untersucht.

3.2.1 Algebraische Voraussetzungen für die Darstellung von Schwingungen durch Exponentialfunktionen und die Formulierung der SCHRÖDINGER-Gleichung

Schwingungen und Reihendarstellungen In \mathbb{C} (d.h. $\alpha = 1, \beta = i$) verknüpft die Eulersche Formel

$$e^{ipx} = \cos(px) + i \sin(px), \quad p, x \in \mathbb{R}$$

Exponentialfunktion mit trigonometrischen Funktionen und somit Schwingungen; dies lässt sich auch an der TAYLOR-Reihe erkennen, deren gerade Glieder die Reihendarstellung des Kosinus, die ungeraden die des Sinus mal i ergeben:

$$\begin{aligned} e^{ipx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (px)^n}{n!} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{i^{2r} (px)^{2r}}{(2r)!} + \frac{i^{(2r+1)} (px)^{(2r+1)}}{(2r+1)!} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(px)^{2r}}{(2r)!} + i \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(px)^{2r+1}}{(2r+1)!} \\ &= \cos(px) + i \sin(px) \end{aligned} \quad (29)$$

In einer hyperkomplexen Algebra \mathcal{A} und ihren Unterräumen/Unter algebren zeigt sich normalerweise an der *Potenzreihendarstellung* einer Exponentialfunktion $\alpha e^{\beta px}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, ob sie Schwingungen und Wellen darstellen kann. Insbesondere

müssen Potenzen wohldefiniert und damit \mathcal{A} (wenigstens die fraglichen Unteralgebren) zumindest *potenz-assoziativ* und *flexibel* (s. Anhang A.1) sein, was für alternative assoziative Algebren automatisch gilt. Wir werden Flexibilität und Potenz-Assoziativität voraussetzen. Die Potenzreihendarstellung von $\alpha e^{\beta px}$ lautet

$$\begin{aligned}\alpha e^{\beta(px)} &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (px)^n}{n!} = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\beta^{2r} (px)^{2r}}{(2r)!} + \frac{\beta^{(2r+1)} (px)^{(2r+1)}}{(2r+1)!} \right) \\ &= \alpha \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{2r} \frac{(px)^{2r}}{(2r)!} + \alpha \beta \sum_{r=0}^{\infty} \beta^{2r} \frac{(px)^{(2r+1)}}{(2r+1)!}.\end{aligned}\quad (30)$$

Damit die durch (30) dargestellte Funktion periodisch ist, muss β sich wie eine imaginäre Zahl im Sinne von \mathbb{C} verhalten, d.h., es muss $\gamma \in \mathcal{A}$ geben, dessen lineare Hülle isomorph zu \mathbb{R} ist und für die $\beta^2 = -1 \cdot \gamma^2$ gilt; dann gibt es auch $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\gamma^2 = \lambda \gamma$. Somit muss $\lambda^{-1} \gamma =: \epsilon$ idempotent sein, d.h. $\epsilon^m = \epsilon \forall m \in \mathbb{N}$ (was $\epsilon = 1$ als Möglichkeit einschließt). Damit ist $\beta^2 = -\lambda^2 \epsilon$ und

$$\begin{aligned}\alpha e^{\beta(px)} &= \alpha \epsilon \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\lambda(px))^{2r}}{(2r)!} + \frac{\alpha \beta}{\lambda} \epsilon \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\lambda(px))^{(2r+1)}}{(2r+1)!} \\ &= \alpha \epsilon \cos(\lambda(px)) + \alpha \frac{\beta}{\lambda} \epsilon \sin(\lambda(px)).\end{aligned}\quad (31)$$

In der ersten Zeile haben wir die Idempotenz von ϵ benutzt und es als Konstante vor das Summenzeichen gezogen. Der Einfachheit halber soll $\lambda = 1$ angenommen werden. Im Übrigen ist $\text{Span}(\{\epsilon, \beta\})$ eine zu \mathbb{C} isomorphe Unteralgebra von \mathcal{A} , zu der auch α gehören kann (nicht muss, wie rein imaginäre Schwingungen in \mathbb{H} zeigen).

Die Rolle des idempotenten Elementes Idempotente Elemente wie ϵ müssen entweder 1 oder Nullteiler sein, weil

$$\epsilon^2 = \epsilon \Rightarrow \epsilon \cdot \epsilon = 1 \cdot \epsilon \Rightarrow (\epsilon - 1)\epsilon = 0. \quad (32)$$

Aufgrund unserer Forderung, dass $\text{Span}(\{\epsilon, \beta\})$ eine rein nicht-reelle Unteralgebra von \mathcal{A} ist, kann \mathcal{A} also keine Divisionsalgebra sein.

Schwingungen und Differentialgleichungen Einen grundlegenden Zugang zu Schwingungen als Reihenentwicklungen und trigonometrische Funktionen bieten Differentialgleichungen (DG), denn sie beschreiben Systemverhalten elementar. Soll eine Funktion $f(x)$ eine harmonische Schwingung darstellen, ist sie zwangsläufig Lösung einer DG der Form

$$\partial_x^2 f(x) = -p^2 f(x). \quad (33)$$

Mit $f(x) = \alpha e^{\beta px}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ist

$$\partial_x^2 \alpha e^{\beta px} = \alpha \beta^2 p^2 e^{\beta px} \stackrel{!}{=} -\alpha p^2 e^{\beta px} \Rightarrow \alpha(\beta^2 + 1) = 0, \quad (34)$$

woraus $\beta^2 = -1$ folgt, wenn \mathcal{A} einfach ist und keine Nullteiler enthält.

(Freie) SCHRÖDINGER-Gleichung Die SCHRÖDINGER-Gleichung ist eine Art Wellengleichung und setzt Impuls und (im potentialfreien Fall kinetische) Energie miteinander in Beziehung. Für ein Teilchen in einem Eigenzustand ϕ von Impuls und Energie zu den Eigenwerten p und E ist

$$\frac{p^2}{2m} \phi = E \phi.$$

Mit dem Ansatz $\phi = \alpha e^{\beta(px-Et)}$ lautet die erste Ableitung nach t

$$\begin{aligned}\partial_t \phi &= \alpha \beta (-E) e^{\beta(px-Et)} = -E \alpha \beta e^{\beta(px-Et)} \\ &= \mp E \beta \phi, \text{ falls } \alpha \beta = \pm \beta \alpha,\end{aligned}\quad (35)$$

falls also α und β entweder vertauschen oder antivertauschen. Damit ist wegen $\beta^2 \alpha = \alpha \beta^2 = -\alpha$

$$\beta \partial_t \phi = \mp E \beta^2 \phi = \pm E \phi, \quad (36)$$

da α als Faktor in ϕ enthalten ist. Die zweite Ableitung nach x lautet

$$\partial_x^2 \phi = \alpha \beta^2 p^2 e^{\beta(px-Et)} = -p^2 \phi, \quad (37)$$

sodass ϕ Eigenfunktion des Operators $-\partial_x^2$ zum Eigenwert p^2 wird. Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet somit

$$-\frac{\partial^2}{2m \partial x^2} \phi = \pm \beta \frac{\partial}{\partial t} \phi, \quad (38)$$

je nachdem, ob α und β vertauschen oder antivertauschen.

Schwingung und SCHRÖDINGER-Gleichung am Beispiel der Quaternionen \mathbb{H} hat unendlich viele Unteralgebren, die zu \mathbb{C} isomorph und in denen deshalb Schwingungen möglich sind; ihre Basiselemente sind die 1 und eine beliebige *reine Einheitsquaternion*, also ein Element der Form

$$\vec{v}_a = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \quad \text{mit} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Da die i_r paarweise antivertauschen und gemischte Terme somit einander aufheben, ist

$$\vec{v}_a^2 = a_1^2 i_1^2 + a_2^2 i_2^2 + a_3^2 i_3^2 = (-1)a_1^2 + (-1)a_2^2 + (-1)a_3^2 = -1,$$

es verhält sich also genau wie $i \in \mathbb{C}$. Eine Funktion $e^{\vec{v}_a p x}$ stellt daher eine Schwingung dar, und dies gilt, weil konstante Vorfaktoren daran nichts ändern, natürlich auch für $\vec{v}_b e^{\vec{v}_a p x}$ mit einer zweiten reinen Einheitsquaternion

$$\vec{v}_b = b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 \quad \text{mit} \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1.$$

Falls zudem $\vec{v}_a \perp \vec{v}_b$, d.h. $\sum_{r=1}^3 a_r b_r = 0$, ist die Schwingung rein imaginär. Eine solche Exponentialfunktion in einer rein imaginären Ebene ist beispielsweise

$$\begin{aligned} i_3 e^{i_1 p x} &= i_3 \cdot \left(1 + \frac{i_1 p x}{1!} - 1 \frac{(p x)^2}{2!} - i_1 \frac{(p x)^3}{3!} + 1 \frac{(p x)^4}{4!} + i_1 \frac{(p x)^5}{5!} + \dots \right) \\ &= i_3 + i_2 \frac{p x}{1!} - i_3 \frac{(p x)^2}{2!} - i_2 \frac{(p x)^3}{3!} + i_3 \frac{(p x)^4}{4!} + i_2 \frac{(p x)^5}{5!} - \dots \\ &= i_3 \cos(p x) + i_2 \sin(p x). \end{aligned} \quad (39)$$

Natürlich erfüllt diese Funktion auch (34). Da die imaginären Einheiten antivertauschen, muss eine freie SCHRÖDINGER-Gleichung mit dem Ansatz $\phi = i_3 e^{i_1(p x - E t)}$ gemäß (38) wie folgt lauten:

$$-\frac{\partial^2}{2m \partial x^2} \phi = -i_1 \frac{\partial}{\partial t} \phi. \quad (40)$$

Quaternionen erlauben es also, Schwingungen durch Exponentialfunktionen auszudrücken und auch eine SCHRÖDINGER-Gleichung zu formulieren, und zwar auch mit einer rein imaginären Wellenfunktion, allerdings gegenüber der komplexen Version mit negativem Vorzeichen an der Zeitableitung.

3.2.2 Algebraische Voraussetzung für die Formulierung der Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt arbeiten wir die Kriterien dafür aus, dass eine Fourier-Transformation in einer Ebene von \mathcal{A} durchführbar ist. Deren Basiselemente bezeichnen wir mit α und β und bestimmen die Bedingungen für die Multiplikationsregeln.

Ausgangspunkt: 1D-FOURIER-Transformation in \mathbb{C} Eine Funktion $F(x)$ lässt sich oft als Summe verschiedener periodischer Funktionen oder zumindest als Integral über ein ganzes Kontinuum von Funktionen $G(p)$ auffassen:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int G(p) e^{i p x} dp \quad (41)$$

Die Funktion der Amplituden lässt sich via

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(x) e^{-i p x} dx \quad (42)$$

ermitteln.

Hyperkomplexe Verallgemeinerung Dies soll im Folgenden auf zwei zunächst nicht näher spezifizierte hyperkomplexe Elemente α und β verallgemeinert werden:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int G(p) \alpha e^{\beta p x} dp \quad (43)$$

$$G(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(x) \alpha e^{-\beta p x} dx \quad (44)$$

Ein konkreter Wert von F lässt sich mittels der DIRACschen Deltafunktion¹¹ extrahieren, die durch die Identität

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad \forall f(x) \quad (45)$$

¹¹Diese ist eigentlich eine sog. Distribution, also ein Funktional und wirkt auf Funktionen. Im Rahmen der *Nichtstandard-Analysis* von ABRAHAM ROBINSON (1961), in der von 0 verschiedene infinitesimale sowie unendliche Zahlen sauber definiert sind, ist sie allerdings als Funktion interpretierbar, z.B. als normierte GAUSSfunktion mit infinitesimaler Standardabweichung.

definiert ist. Daraus ergibt sich

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \delta(x - x') dx'. \quad (46)$$

Mit der (auf α, β verallgemeinerten) integralen Darstellung der Deltafunktion

$$\delta(x - x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{\beta p(x-x')} dp \quad (47)$$

ist dies

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \delta(x - x') dx' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') dx' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{\beta p(x-x')} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x') \alpha e^{-\beta p x'} dx' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{\beta p x} dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(p) \alpha e^{\beta p x} dp. \end{aligned} \quad (48)$$

Daraus ergibt sich folgende Bedingung an die Exponentialfunktion:

$$\alpha e^{\beta p(x+x')} = \alpha e^{\beta p x} \cdot \alpha e^{\beta p x'} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} e^{ix} e^{ix'} &= (\cos x + i \sin x)(\cos x' + i \sin x') \\ &= \cos x \cos x' + i \cos x \sin x' + i \sin x \cos x' + i \sin x \sin x' \\ &= \cos(x + x') + i \sin(x + x') \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \alpha e^{\beta x} \alpha e^{\beta x'} &= \alpha e^{\beta(x+x')} \left[\stackrel{(49)}{=} \alpha \cos(x + x') + \beta \sin(x + x') \right] \\ &= (\alpha \cos x + \beta \sin x)(\alpha \cos x' + \beta \sin x') \\ &= \alpha \cos x \cos x' - \alpha \sin x \sin x' + \beta \sin x \cos x' + \beta \sin x' \cos x \\ &= \alpha^2 \cos x \cos x' + \beta^2 \sin x \sin x' + \beta \alpha \sin x \cos x' + \beta \alpha \sin x' \cos x \end{aligned} \quad (51)$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt, dass

$$\alpha^2 = \alpha \quad \beta^2 = -\alpha \quad \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \quad (52)$$

sein muss. Die Unteralgebra muss also in jedem Fall isomorph zu \mathbb{C} sein, d.h. dieselben Multiplikationsregeln haben. Für eine rein imaginäre Unteralgebra bedeutet dies, dass α ein *internes Einselement* sein muss.

Anwendung auf die Quaternionen Da \mathbb{H} eine *Divisionsalgebra* und damit nullteilerfrei ist, besitzt sie keine rein imaginären Unteralgebren mit internem Einselement und erfüllt daher nicht die Voraussetzungen für FOURIER-Transformation in rein imaginären Unteralgebren.

3.3 Nichtreelle komplex-isomorphe Unteralgebren der bikomplexen Zahlen

Von den bikomplexen Zahlen wissen wir bereits aus (28), dass sie die von Eins verschiedenen idempotenten Elemente $\frac{1 \pm \sigma}{2}$ haben. Sei im Folgenden $\frac{1 + \sigma}{2} =: k$; dann ist $\frac{1 - \sigma}{2} = 1 - k = \bar{k}$ ¹². Neben diesen Elementen gibt es $\frac{1}{2}(i_0 - i_1) =: j$ mit

$$\left(\frac{i_0 - i_1}{2} \right)^2 = \frac{i_0^2 - 2i_0 i_1 + i_1^2}{2} = \frac{-1 - \sigma}{2} = -k$$

und

$$\frac{1 + \sigma}{2} \frac{i_0 - i_1}{2} = \frac{i_0 - i_1}{2}$$

sowie $\frac{1}{2}(i_0 + i_1) = i - j = \bar{j}$ mit

$$\left(\frac{i_0 + i_1}{2} \right)^2 = \frac{i_0^2 + 2i_0 i_1 + i_1^2}{2} = \frac{\sigma - 1}{2} = k - 1$$

und

$$\frac{1 - \sigma}{2} \frac{i_0 + i_1}{2} = \frac{i_0 + i_1}{2}.$$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	$-k$	j
j	j	$-k$	$-k$	j
k	k	j	j	k

Tabelle 4: Multiplikation für die bikomplexen Zahlen in Schrägbasis-Darstellung

Da j und k untereinander und auch von 1 und i linear unabhängig sind, lassen sie sich anstelle von i_0 und i_1 als Basiselemente verwenden. Da sie, anschaulich gesprochen, diagonal zu den kanonischen Basiselementen liegen, werden wir die Basis $\{1, i, j, k\}$ kurz als Schrägbasis bezeichnen. Die Multiplikationsregeln für die gesamte Algebra in Schrägbasis-Darstellung sind in Tabelle 4 aufgeführt. Die Algebra der bikomplexen Zahlen hat also 4 \mathbb{C} -isomorphe Unteralgebren, von denen 2 rein nichtreell sind (s. Tabelle 5).¹³

Symbolische Bezeichnung	kanonische Basis	Schrägbasis
\mathbb{C}_1	$\langle\{1, i_1\}\rangle$	$\langle\{1, i\}\rangle$
\mathbb{C}_0	$\langle\{1, i_0\}\rangle$	$\langle\{1, (i - 2j)\}\rangle$
\mathcal{J}	$\langle\{1 + \sigma, i_0 - i_1\}\rangle$	$\langle\{k, j\}\rangle$
$\overline{\mathcal{J}}$	$\langle\{1 - \sigma, i_0 + i_1\}\rangle$	$\langle\{1 - k, i - j\}\rangle = \langle\{\overline{k}, \overline{j}\}\rangle$

Tabelle 5: Zu \mathbb{C} isomorphe Ebenen in der Algebra der bikomplexen Zahlen

Die Unteralgebren $\mathcal{J}, \overline{\mathcal{J}}$ bestehen aus den zueinander $\prime\prime\prime$ -konjugierten Elementen und sind zugleich Ideale, was

$$ab = 0 \forall a \in \mathcal{J}, b \in \overline{\mathcal{J}}$$

impliziert, z.B. $1/4(1 + \sigma)(1 - \sigma) = k(1 - k) = 0$ und $1/4(i_0 - i_1)(i_0 + i_1) = j(i - j) = 0$.
Im Folgenden werden wir uns auf

$$\text{Span}(\{1, i\}) = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \text{Span}(\{1 + \sigma, i_0 - i_1\}) = \text{Span}(\{k, j\}) = \mathcal{J}$$

konzentrieren.

3.4 Anwendung der bikomplexen Zahlen auf die Quantentheorie

Im Folgenden untersuchen wir die Wirkung quantenmechanischer Operationen auf \mathbb{C} - und \mathcal{J} -wertige Wellenfunktionen, und zwar für den einfachen Fall einer ebenen Welle mit festem Wellenvektor (\cong Impuls) \vec{p} (bzw. Wellenzahl p).

3.4.1 Wellenfunktionen mit Werten aus einem der Ideale

Bezeichnen wir (3) mit $\phi_{\mathbb{C}}$ und fassen \mathbb{C} als Unteralgebra auf, so hat ihr Pendant mit Werten aus \mathcal{J} mit demselben \vec{p} und E die Form

$$\phi_{\mathcal{J}}(\vec{x}, t) \propto k e^{j(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}. \quad (53)$$

Letzteres ist übrigens auch gleich $k e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}$, weil, wie man sich anhand der Reihendarstellung überzeugen kann,

$$k \cdot i = k \cdot j = j \quad (54)$$

ist. Für unsere grundsätzlichen Betrachtungen genügt 1D, deshalb schreiben wir im Folgenden

$$\phi_{\mathbb{C}} = e^{i(px - Et)} \quad (55)$$

$$\phi_{\mathcal{J}} = k e^{j(px - Et)} \stackrel{(54)}{=} k e^{i(px - Et)} = k \phi_{\mathbb{C}}. \quad (56)$$

Beide Funktionen lassen sich als Teil-Wellenfunktionen einer Gesamtwellenfunktion $\phi = \phi_{\mathbb{C}} + \phi_{\mathcal{J}}$ auffassen. Sogar e^{jpx} lässt sich durch $\phi_{\mathcal{J}}$ ausdrücken, wie die Reihenentwicklung zeigt, nämlich als $\phi_{\mathcal{J}} - k + 1$.

¹²Und *vice versa*. Die nichtreellen Elemente k und $k - 1$ sind gegeneinander austauschbar.

¹³Die dreieckigen Klammern um die geschweiften bedeuten lineare Hülle; statt $\langle\{1, i\}\rangle$ kann auch $\text{Span}(\{1, i\})$ geschrieben werden.

3.4.2 Operatoren und SCHRÖDINGER-Gleichung

Ausgangspunkt ist wieder die Standard-QM. Die Teil-Wellenfunktion $\phi_{\mathbb{C}}$ ist Eigenfunktion des Wellenzahloperators $-i\partial_x$ zum Eigenwert p :

$$-i\partial_x\phi_{\mathbb{C}} = -i\partial_x e^{i(px-Et)} = \underbrace{-i \cdot i}_{=1} p e^{i(px-Et)} = p\phi_{\mathbb{C}}. \quad (57)$$

Allerdings muss sich der Operator auch auf die Gesamtwellenfunktion anwenden lassen und damit natürlich auch auf die Teil-Wellenfunktion $\phi_{\mathcal{J}}$; diese ist interessanterweise ebenfalls Eigenfunktion desselben Operators zum selben Eigenwert:

$$-i\partial_x\phi_{\mathcal{J}} = -i \cdot jpk e^{j(px-Et)} = -i \cdot jpe^{j(px-Et)} = pke^{j(px-Et)} = p\phi_{\mathcal{J}} = -j\partial_x\phi_{\mathcal{J}} \quad (58)$$

Umgekehrt muss sich auch das k -fache des Impulsoperators auf die Gesamtwellenfunktion und damit auf $\phi_{\mathbb{C}}(x)$ anwenden lassen, und dies ergibt via

$$k \cdot (-i\partial_x)\phi_{\mathbb{C}} = -j\partial_x\phi_{\mathbb{C}} = -j \cdot ipe^{i(px-Et)} = -j \cdot ipe^{i(px-Et)} = pke^{i(px-Et)} = kp\phi_{\mathbb{C}} = k \cdot -i\partial_x\phi_{\mathbb{C}}, \quad (59)$$

eindeutig den nichtreellen Eigenwert kp . Die Anwendung des letzteren Operators auf $\phi_{\mathcal{J}}$ ergibt hingegen

$$k \cdot (-i\partial_x)\phi_{\mathcal{J}} = -j\partial_x\phi_{\mathcal{J}} = -j \cdot jpk e^{j(px-Et)} = -j \cdot jpe^{j(px-Et)} = pke^{j(px-Et)} = p\phi_{\mathcal{J}} = kp\phi_{\mathcal{J}}, \quad (60)$$

d.h. der Eigenwert ist insofern *mehrdeutig*, als dass sich $\phi_{\mathcal{J}}$ als Eigenfunktion dieses Operators *sowohl zu kp als auch* als zu p gehörig interpretieren lässt. Dieses Resultat ruft nach einer physikalischen Interpretation, die Gegenstand künftiger Untersuchungen sein wird. In jedem Fall ergibt sich ein *eindeutig* nicht-reeller Eigenwert nur durch Anwendung eines \mathcal{J} -wertigen Operators auf eine \mathbb{C} -wertige Wellenfunktion.

Als Eigenfunktion des Impuls- bzw. Wellenvektors zum Eigenwert p sind $\phi_{\mathbb{C}}$ und $\phi_{\mathcal{J}}$ selbstverständlich auch beide Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung (9), z.B. für $U = 0$:

$$\hat{H}_{\mathbb{C}}\phi_{\mathbb{C}} = -\frac{\partial_x^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = \frac{-i^2 p^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = \frac{p^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = i\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathbb{C}} = i \cdot (-i)E\phi_{\mathbb{C}} = E\phi_{\mathbb{C}} \quad (61)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{J}}\phi_{\mathcal{J}} = -\frac{\partial_x^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = \frac{-j^2 p^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = \frac{kp^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = \frac{p^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = i\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathcal{J}} = i \cdot (-j)E\phi_{\mathcal{J}} = kE\phi_{\mathcal{J}} = E\phi_{\mathcal{J}} \quad (62)$$

Wendet man das k -fache der SCHRÖDINGER-Gleichung auf beide Gleichungen an, so ergibt sich

$$\hat{H}_{\mathcal{J}}\phi_{\mathcal{J}} = -k\frac{\partial_x^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = -kj^2\frac{p^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = k\frac{p^2}{2m}\phi_{\mathcal{J}} = j\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathcal{J}} = j \cdot (-j)E\phi_{\mathcal{J}} = kE\phi_{\mathcal{J}} = E\phi_{\mathcal{J}} \quad (63)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{J}}\phi_{\mathbb{C}} = -k\frac{\partial_x^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = -ki^2\frac{p^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = k\frac{p^2}{2m}\phi_{\mathbb{C}} = j\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathbb{C}} = j \cdot (-i)E\phi_{\mathbb{C}} = kE\phi_{\mathbb{C}}. \quad (64)$$

Dies zeigt, dass die SCHRÖDINGER-Gleichung sowohl in ihrer \mathbb{C} - als auch in ihrer \mathcal{J} -Form (also mit oder ohne k , das sich wegen der Idealeigenschaft von \mathcal{J} nicht mehr entfernen lässt) auf $\phi_{\mathcal{J}}$ anwendbar ist und zur selben Mehrdeutigkeit führt wie die Impulsoperatoren.

Fazit: Die Teil-Wellenfunktion $\phi_{\mathcal{J}}$ liefert für beide Operatoren sowohl reelle als auch k -wertige Eigenwerte, was sich nicht unterscheiden lässt. Bei der \mathbb{C} -wertigen Funktion ist hingegen unterscheidbar, ob ein \mathbb{C} -wertiger Operator der gewöhnlichen Quantentheorie oder der neu definierte \mathcal{J} -wertige auf die Funktion angewandt wurde. Für die physikalische Interpretation liegt es nahe, eher den Operator als die Wellenfunktion als das in unserem Sinne zu Erweiternde zu betrachten. Das ist gar nicht so abwegig, denn bei der Beschreibung des Photons[12] werden die eigentlichen physikalischen Größen wie z.B. die elektrische Feldstärke ebenfalls durch die Operatoren dargestellt.

3.4.3 Darstellungswechsel und FOURIER-Transformation

Wie $\phi_{\mathbb{C}}$ sollte $\phi_{\mathcal{J}}$ eine Impuls- und Energiedarstellung haben, die sich durch FOURIER-Transformation gemäß (44) ergibt. Dabei genügt zur Demonstration des Prinzips eine Dimension völlig. Damit ist

$$\phi_{\mathcal{J}}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathcal{J}}(x) k e^{-jp'x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{j(p-p')x-Et} dx = k\delta(p-p')e^{jEt}. \quad (65)$$

Die Delta-Funktion kommt dadurch zustande, dass der Integrand, grob gesprochen, in dem unendlich schmalen Bereich $p' = p$ wegen der gegenseitigen Aufhebung der Phasenfaktoren konstant wird und dadurch das Integral dort divergiert. Dies geschieht übrigens nicht, wenn man versucht, die \mathbb{C} -FOURIER-Transformation auf $\phi_{\mathcal{J}}$ anzuwenden:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\mathcal{J}}(x) k e^{-ip'x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{(jp-ip')x-jEt} dx, \quad (66)$$

denn der Integrand bleibt auch für $p' = p$ periodisch und das Integral daher beschränkt. Entsprechendes geschieht auch bei der Anwendung der \mathcal{J} -Fourier-Transformation auf $\phi_{\mathbb{C}}$. Eine physikalische Interpretation dieser Befunde wird Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

3.4.4 Doppelte Konjugation, Modulus und Erwartungswert

In der QT wird das Betragsquadrat $\overline{\phi}_1(x)\phi_{\mathbb{C}}(x)$ ¹⁴ für eine Observable x der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte für die Messung eines bestimmten Wertes von x interpretiert, wobei hier die Wellenfunktionen komplexwertig und die Konjugation eindeutig definiert ist. Wie wir jedoch gezeigt haben, sind in $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ und damit auch in $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ unterschiedliche Konjugationen definierbar: Neben der ‘simplen’ Konjugation, bei der jede imaginäre Komponente in ihr negatives überführt wird, gibt es eine ‘äußere’, die i_1 und σ invertiert und eine ‘innere’, die i_0 und σ invertiert. Beide Konjugationen überführen ein Element aus \mathcal{J} in eines aus $\overline{\mathcal{J}}$, dessen Produkt mit Ersterem immer gleich Null ist, also ist auch $\overline{\phi_{\mathcal{J}}}\phi_{\mathcal{J}} \equiv 0$.

Zudem ist es möglich, beide Konjugationsarten zu kombinieren, das Konjugierte von $q \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ ist $q^\dagger := \overline{q^*} = \overline{q}^*$. Wegen $i_0^\dagger = -i_0, i_1^\dagger = -i_1$ ist $\sigma^\dagger = (-i_0)(-i_1) = \sigma$, und $k^\dagger = k, j^\dagger = -j$, genau wie in \mathbb{C} , nur dass hier k an Stelle der 1 steht. Da das Produkt $q^\dagger q$ weiterhin nichtreell ist, weil es k enthält, darf es natürlich nicht Betragsquadrat heißen; in Anlehnung an die englische Bezeichnung des Produkts einer binären Zahl mit ihrem Konjugierten werden wir es “Modulus” nennen. Der Modulus einer Eigenfunktion des Wellenzahl-Operators ist räumlich konstant; dass er nichtreell ist, soll weiter verdeutlichen, dass er nicht eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt, die man prinzipiell messen könnte!¹⁵

$$\begin{aligned} ke^{jpx}ke^{-jpx} &= (k \cos(px) + j \sin(px))(k \cos(px) - j \sin(px)) \\ &= k^2 \cos^2(px) - j^2 \sin^2(px) \\ &= k (\cos^2(px) + \sin^2(px)) \\ &= k. \end{aligned} \tag{67}$$

Die Wahl der Konjugation ist auch wichtig bei der Berechnung eines *Erwartungswertes* bzw. einer Entsprechung davon. Der Erwartungswert des Operators $-i\partial_x$ im Zustand $\phi_{\mathbb{C}}$ ist natürlich

$$\langle \phi_{\mathbb{C}} | -i\partial_x | \phi_{\mathbb{C}} \rangle = e^{-i(px-Et)} \cdot -i\partial_x e^{i(px-Et)} = e^{-i(px-Et)} \cdot -i \cdot i \cdot p \cdot e^{i(px-Et)} = p \tag{68}$$

$$\langle \phi_{\mathbb{C}} | i\partial_t | \phi_{\mathbb{C}} \rangle = e^{-i(px-Et)} \cdot i\partial_t e^{i(px-Et)} = e^{-i(px-Et)} \cdot i \cdot -i \cdot E \cdot e^{i(px-Et)} = E. \tag{69}$$

Mit ϕ^\dagger als Konjugierter von ϕ ist der ‘Erwartungswert’ desselben Operators im Zustand $\phi_{\mathcal{J}}$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathcal{J}} | -i\partial_x | \phi_{\mathcal{J}} \rangle &= ke^{-j(px-Et)} \cdot -i\partial_x ke^{j(px-Et)} = kp \\ &= e^{-i(px-Et)} \cdot -j\partial_x e^{i(px-Et)} = \langle \phi_{\mathbb{C}} | -j\partial_x | \phi_{\mathbb{C}} \rangle \\ &= ke^{-j(px-Et)} \cdot -j\partial_x ke^{j(px-Et)} = \langle \phi_{\mathcal{J}} | -j\partial_x | \phi_{\mathcal{J}} \rangle. \end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathcal{J}} | i\partial_t | \phi_{\mathcal{J}} \rangle &= ke^{-j(px-Et)} \cdot i\partial_t ke^{j(px-Et)} = kE \\ &= e^{-i(px-Et)} \cdot j\partial_t e^{i(px-Et)} = \langle \phi_{\mathbb{C}} | j\partial_t | \phi_{\mathbb{C}} \rangle \\ &= ke^{-j(px-Et)} \cdot j\partial_t ke^{j(px-Et)} = \langle \phi_{\mathcal{J}} | j\partial_t | \phi_{\mathcal{J}} \rangle. \end{aligned} \tag{71}$$

Der Erwartungswert enthält also eindeutig in jedem Fall k , wo entweder die Wellenfunktion oder der Operator \mathcal{J} -wertig ist, auch da, wo für den Eigenwert diese Eindeutigkeit nicht gegeben ist. Übrigens ist zu beachten, dass $ke^{i(px-Et)} = ke^{j(px-Et)}$ und damit auch $k\phi_{\mathbb{C}} = \phi_{\mathcal{J}}$ ist.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Zunächst haben wir die Quantentheorie in ihren Grundlagen dargestellt und festgestellt, dass sie sich in newtonscher Näherung nur mit Hilfe komplexer Zahlen (oder wahlweise auch spezieller quadratischer Matrizen, die aber einen zu den komplexen Zahlen isomorphen Körper bilden) formulieren lässt.

Wir haben ferner gesehen, dass zur Formulierung einer korrekten, relativistisch invarianten Quantentheorie (KLEIN-Gordon-Gleichung in SCHRÖDINGERScher Form, DIRAC-Gleichung) eine solche komplexwertige Formulierung nicht ausreicht, sondern eine nichtkommutative hyperkomplexe Algebra höherer Dimension erforderlich ist, der die Koeffizienten der DIRAC-Gleichung entstammen.

Bevor wir auf Einzelheiten eingegangen sind, haben wir zunächst allgemein beschrieben, wodurch sich hyperkomplexe Algebren auszeichnen. Dann haben wir Beispiele niedriger Dimension gezeigt; einige von ihnen sind nicht nur Verallgemeinerungen, sondern echte Erweiterungen von \mathbb{C} sind. Neben dem Schiefkörper der Quaternionen \mathbb{H} , der bekanntesten hyperkomplexen Algebra, haben wir die Algebra $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ der (HAMILTON-CAYLEYSchen) Biquaternionen $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$, die sich als adäquate Algebra zur Formulierung der DIRAC-Gleichung herausstellte, wenngleich nicht ohne gewisse Interpretationsschwierigkeiten, deren nähere Betrachtung und Lösung jedoch in einer späteren Untersuchung vorgenommen werden soll. Neben der ‘einfachen’ Konjugation, bei der jede imaginäre Komponente durch ihr Negatives ersetzt wird, haben wir

¹⁴Oder $\phi_{\mathbb{C}}^*(x)\phi_{\mathbb{C}}(x)$ wie in der Physik üblich

¹⁵Der Rückschluss, “imaginär” heiße “nicht messbar” und “reell” heiße “messbar”, ist nicht erlaubt! Der Realteil einer gewöhnlichen Wellenfunktion ist ebenso wenig messbar wie der Imaginärteil. Umgekehrt kann man im Rahmen der SRT “imaginär” und “raumartig” miteinander identifizieren.

noch drei weitere kennengelernt, die ‘äußere’, die ‘innere’ und ihre Kombination. Schließlich haben wir die bikomplexen Zahlen beschrieben, die im Unterschied zu \mathbb{H} kommutativ ist, wie die Biquaternionen aber auch Nullteiler enthält, also Elemente, durch die nicht dividiert werden kann und von denen einige idempotent sind, was sich später als bedeutsam herausstellen sollte.

Unser Hauptanliegen war es, eine hyperkomplexe Erweiterung für die Quantentheorie mit mindestens einem rein nicht-reellen Unterraum S zu finden, sodass sich S -wertige QT in derselben Weise betreiben lässt wie komplexwertige. Daher sollten S -wertige Exponentialfunktionen Schwingungen und Wellen einschließlich Wellenfunktionen darstellen, die wiederum Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichungen sind, was in \mathbb{H} durchaus möglich ist. Des Weiteren setzt die Anwendbarkeit für die QT aber auch die Möglichkeit der FOURIER-Transformation voraus, da diese ja ein Basiswechsel von Orts- zu Impulsdarstellung und umgekehrt ist. Dabei stellte sich heraus, dass ein solcher rein nicht-reeller Unterraum eine Unteralgebra sein und isomorph zu \mathbb{C} sein muss. Daraus folgt die Existenz eines internen Einselements, also eines von der 1 verschiedenen idempotenten Elements. Wir konnten zeigen, dass ein solches Element ein Nullteiler sein muss, was impliziert, dass besagte Unteralgebren auch echte Ideale sein oder zu echten Idealen gehören müssen; vor allem aber schließt es Divisionsalgebren und damit auch \mathbb{H} aus.

Schließlich stellten wir fest, dass die bikomplexen Zahlen unsere Forderungen erfüllen, denn sie haben zwei idempotente Elemente k und \bar{k} sowie j, \bar{j} mit $j^2 = -k, \bar{j}^2 = -\bar{k}$, welche die Ideale $\mathcal{J} := \text{Span}(\{k, j\})$ und $\bar{\mathcal{J}} := \text{Span}(\{\bar{k}, \bar{j}\})$ aufspannen. Zudem spannen $1, i, j, k$ die gesamte Algebra auf, und wir verwenden sie als neue Basis.

Schließlich haben wir zwei Teil-Wellenfunktionen $\phi_{\mathbb{C}}$ mit Werten aus \mathbb{C} und $\phi_{\mathcal{J}}$ mit Werten aus \mathcal{J} eingeführt, und zwar für eine Dimension und den Spezialfall eines scharf definierten Impulses p , sodass $\phi_{\mathbb{C}} = e^{ipx}$ und $\phi_{\mathcal{J}} = ke^{jpx}$ ist und Impulsoperatoren sowie die SCHRÖDINGER-Gleichung mit Werten aus \mathbb{C} und \mathcal{J} auf sie angewandt. Dabei stellte sich heraus, dass die Anwendung der \mathcal{J} -wertigen Version auf $\phi_{\mathcal{J}}$ insofern zu mehrdeutigen Eigenwerten führt, als dass dieser als k -wertig, aber auch als reell interpretierbar ist. Zum Schluss haben wir mit Hilfe der aus ‘äußerer’ und ‘innerer’ kombinierten Konjugation $\phi_{\mathcal{J}}$ einen nichtverschwindenden Modulus und Operatoren Erwartungswerte für den Zustand $\phi_{\mathcal{J}}$ zugeordnet, die anders als die Erwartungswerte eindeutig sind.

Künftigen Untersuchungen wird es nun obliegen, unter Berücksichtigung unserer Befunde eine physikalische Interpretation der \mathcal{J} -wertigen Wellenfunktion sowie der $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ -wertigen Gesamtwellenfunktion vorzunehmen.

Danksagung Wir danken Hans R. Moser für die anregenden Diskussionen und kritische Anmerkungen bei der Erstellung des Papers.

Literatur

- [1] ALAM, Shah: Comparative Study of Quaternions and Mixed Numbers. In: *Journal of Theoretics* (2001)
- [2] BREMNER, Murray R. ; MURKAMI, Lúcia I. ; SHESTAKOV, Ivan P.: Nonassociative Algebras. In: HOBGEN, Leslie (Hrsg.): *Handbook of Linear Algebra*. 2007
- [3] DAVENPORT, Clyde: *Commutative Hypercomplex Mathematics*. <http://home.comcast.net/~cmdaven/hyprcplx.htm>, 2008. – Last modified: 2011-05-06
- [4] DIRAC, Paul Adrienne M.: The Quantum Theory of the Electron. In: *Proceedings of the Royal Society of London* Bd. 117, Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1928 (A 778)
- [5] DIRAC, Paul Adrienne M.: The Quantum Theory of the Electron, Part II. In: *Proceedings of the Royal Society of London* Bd. 118, 1928 (A 779)
- [6] EINSTEIN, Albert: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: *Annalen der Physik und Chemie* Bd. 17. Leipzig : Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1905, S. 891–938
- [7] FROBENIUS, Georg: Theorie der hyperkomplexen Größen. In: *Sitzungsberichte der königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin : Deutsche Akademie der Wissenschaften, 1903. – Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-18860>
- [8] FROBENIUS, Georg: Theorie der hyperkomplexen Größen II. In: *Sitzungsberichte der königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin : Deutsche Akademie der Wissenschaften, 1903. – Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-18869>
- [9] HAMILTON, William R.: On Quaternions. In: *Philosophical Magazine* 25 (1844), S. 489–495
- [10] HORN, Martin: Quaternionen und geometrische Algebra. In: *Didaktik der Physik*, LOB-Lehmanns Media, 2006. – Beiträge zur Frühjahrstagung in Kassel, Tagungs-CD des Fachverbandes Didaktik der Physik in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

- [11] KANTOR, I. L. ; SOLODOWNNIKOW, A. S.: *Hyperkomplexe Zahlen*. BSB BG. Teubner Verlagsgesellschaft, 1973
- [12] KUHN, Wilfried ; STRNAD, Janez: *Quantenfeldtheorie. Photonen und ihre Deutung*. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1995
- [13] LORENTZ, Antoon: Simplified Theory of Electrical and Optical Phenomena in Moving Systems. In: *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, 1899, S. 427–442
- [14] MINKOWSKI, Hermann: Das Relativitätsprinzip. In: *Annalen der Physik* Bd. 47. Leipzig : Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1907/1915, S. 927–938
- [15] MINKOWSKI, Hermann: Raum und Zeit. In: *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Leipzig und Berlin : Verlag von B.G. Teubner, 1908/1909
- [16] OTTE, Ralf: *Versuch einer Systemtheorie des Geistes*. Cuvillier, E, 2011 (ISBN 978-3869559179)
- [17] RAETZ, George: *Quaternion Quantum Mechanics*. <http://home.pcisys.net/~bestwork.1/QQM/QuaternionQuantumMechanics.htm>, 2010
- [18] RAWAT, S. ; NEGI, O.P.S.: *Quaternion Dirac Equation and Supersymmetry*. arXiv:hep-th/0701131. <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0701131v1.pdf>
- [19] SCHAFER, Richard D.: *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Gutenberg, 1966
- [20] SCHRÖDINGER, Erwin: Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen. In: *Annalen der Physik* Bd. 79. Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1926, S. 734–756
- [21] SCHRÖDINGER, Erwin: Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung). In: *Annalen der Physik* Bd. 79. Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1926, S. 361–376
- [22] SCHRÖDINGER, Erwin: Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung). In: *Annalen der Physik* Bd. 79. Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1926, S. 489–527
- [23] SEGRE, Corrado: Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. In: *Mathematische Annalen* 40 (1892)
- [24] STUDY, Eduard: Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. In: *Monatshefte f. Math. u. Physik* 1 (1890), S. 283–354
- [25] TIAN, Yongge: *Matrix Theory over the Complex Quaternion Algebra*. arXiv:math/0004005 [math.RA]. <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0701131v1.pdf>
- [26] TOTH, Viktor T.: *Quaternions and the Dirac equation*. online, 2003. – persistent link: <http://www.vttoth.com/CMS/physics-notes/165>

ANHANG

A Übergeordnete Eigenschaften hyperkomplexer Algebren

A.1 Allgemeine Eigenschaften

Die Distributivität bezieht sich insofern immer *zugleich* auf Addition und Multiplikation, als dass sich Faktoren auf Summanden verteilen. Alle anderen Eigenschaften beziehen sich auf beide Operationen *einzelnen*. Im Folgenden werden wir sie jedoch mit Bezug auf die Multiplikation beziehen, denn für die Addition gelten sie in Algebren *immer*.

Distributivität Die Gültigkeit der Distributivitätsgesetze

$$\begin{aligned} a(b + c) &= ab + ac \\ (b + c)a &= ba + ca \end{aligned} \tag{72}$$

sind Grundforderung für jedwede hyperkomplexe Algebra.

Das Assoziativgesetz und seine Abschwächungen Eine Algebra \mathcal{A} heißt assoziativ, wenn

$$(ab)c = a(bc) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}. \tag{73}$$

Beispiele dafür sind \mathbb{R} , \mathbb{C} und \mathbb{H} sowie sämtliche $n \times n$ -Matrizenringe. Umgekehrt gibt es für assoziative hyperkomplexe Algebren auch eine Matrixdarstellung [2] mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix als Einselement. Allfällige Nullteiler treten dann in Gestalt singulärer Matrizen auf.

Eine andere Formulierung von Assoziativität ist, dass der *Assoziator* $[a, b, c] =: (ab)c - a(bc)$ verschwindet.

\mathcal{A} heißt **alternativ**, wenn

$$(aa)b = a(ab) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}. \tag{74}$$

Ein Beispiel ist die Algebra \mathbb{O} der Oktonionen oder Oktaven, jedoch sind natürlich alle assoziativen Algebren auch alternativ. Der Name kommt daher, dass der Assoziator alterniert, d.h. $[a, b, c] = -[a, c, b]$ u.s.w. [2, 19].

\mathcal{A} heißt **flexibel**, wenn

$$(ab)a = a(ba) \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \tag{75}$$

und **potenz-assoziativ**, falls

$$a^{m+n} = (a^m)(a^n) \quad \forall a \in \mathcal{A}, m, n \in \mathbb{N}. \tag{76}$$

Ein Beispiel für diese beiden Eigenschaften ist die Algebra \mathbb{S} der Sedenionen, jedoch sind natürlich alle alternativen Algebren sowohl flexibel als auch potenz-assoziativ.

Kommutativität und Antikommutativität \mathcal{A} heißt kommutativ bzw. antikommutativ, wenn

$$ab = \pm ba \quad \forall a, b \in \mathcal{A}; \tag{77}$$

dies ist an der Multiplikationstabelle sofort daran erkennbar, dass sie symmetrisch bzw. antisymmetrisch zur Hauptdiagonalen ist. Allerdings gibt es strenge Antikommutativität in hyperkomplexen Algebren natürlich nicht, weil sie die reellen Zahlen enthalten, die mit jedem Element kommutieren. Nichts desto weniger gibt es Elemente, die untereinander antiver-tauschen, wenn \mathcal{A} nicht kommutativ ist.

Allgemeine Umkehrbarkeit der Multiplikation \mathcal{A} heißt Divisionsalgebra, wenn

$$z_1 z = z_2 \quad \text{und} \quad z z_1 = z_2 \tag{78}$$

für alle Variablen $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, eine eindeutige Lösung z haben. Falls z_1 ein *Nullteiler* ist bzw. einem *Ideal* \mathcal{I} angehört, gibt es für $z_2 \notin \mathcal{I}$ keine Lösung, für $z_2 \in \mathcal{I}$ viele, oft sogar ein ganzes Kontinuum von Lösungen.

A.2 Eigenschaften der hier untersuchten Algebren

Für die hier explizit erwähnten und untersuchten Algebren fassen wir die Eigenschaften in Tabelle 6 zusammen.

Die Biquaternionen und bikomplexen Zahlen bilden keine Divisionsalgebren, wie man besonders gut in der sog. Schrägbasis (Tabelle 4) erkennt, wo Nullteiler als Basiselemente auftreten, die hier als k und j bezeichnet wurden. Die Spalten und Zeilen für j und k enthalten weder 1 noch i , dafür jedoch j und k jeweils doppelt.

Name	Symbol	distributiv	assoziativ	kommutativ	Division
komplexe Zahlen	\mathbb{C}	ja	ja	ja	ja
duale Zahlen	-	ja	ja	ja	nein
binäre Zahlen	-	ja	ja	ja	nein
Quaternionen	\mathbb{H}	ja	ja	nein	ja
Biquaternionen	$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$	ja	ja	nein	nein
bikomplexe Zahlen	$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$	ja	ja	ja	nein

Tabelle 6: Eigenschaften der in diesem Paper untersuchten Algebren

B Formalismus der QT

B.1 Zusammenfassung der wichtigsten Grundbegriffe

HILBERTRÄUME UND ZUSTANDSVEKTOREN Die Matrizenmechanik verallgemeinert die analytische Geometrie des anschaulichen 3D-Raums. Dieser ist ein Spezialfall der nach DAVID HILBERT benannten Vektorräume über \mathbb{R} oder \mathbb{C} , denn er hat ein Skalarprodukt und damit die euklidische Norm und ist *vollständig*, d.h. alle CAUCHY-Folgen konvergieren *innerhalb* des Raumes.¹⁶ Diese Eigenschaften hat *jeder* HILBERTraum.

In der QT wird ein Vektor aus \mathfrak{H} nach PAUL DIRAC mit $|\phi\rangle$ bezeichnet. Jedes komplexe Vielfache $z|\phi\rangle$, $z \in \mathbb{C}$ repräsentiert den Quantenzustand eines Teilchens bzw. Systems, sodass der durch $|\phi\rangle$ dargestellte Zustand mit $\text{Span}(|\phi\rangle) \subset \mathfrak{H}$, also einem ganzen eindimensionalen Unterraum, identifiziert werden kann.

HILBERTRÄUME können sehr verschiedene Dimension haben, einschließlich unendlicher und auch überabzählbarer. Ein Beispiel für einen HILBERTraum überabzählbarer Dimension ist der Funktionenraum $L^2(\mathbb{R}^3)$, *der die Brücke zur Wellenmechanik schlägt*. Die Wellenfunktion $\phi(\vec{x}, t)$ ist nämlich nichts anderes als eine spezielle Darstellung, und zwar die Ortsdarstellung des Zustandsvektors $|\phi\rangle$. Der Ortsraum ist seinen Eigenschaften nach natürlich ein HILBERTraum, aber in Bezug auf *den* HILBERTraum, von dem hier die Rede ist, stellt er lediglich eine verallgemeinerte Indexmenge dar.

Kombination mehrerer HILBERTRÄUME Das Tensorprodukt $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}^{(n)}$ von n HILBERTräumen ist wieder ein HILBERTraum, mit den Elementen $|\phi\rangle = |\phi\rangle_1 \dots |\phi\rangle_n$. Die \mathfrak{H}_r können sehr unterschiedlich sein. In vielen Fällen liefert erst eine solche Kombination eine vollständige Beschreibung für Teilchen, insbesondere wenn sie einen *Spin* haben. Für ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wie das Elektron ist $\mathfrak{H} = \mathbb{C}^2$. Eine vollständige Beschreibung eines solchen Teilchens ist daher nur mit dem Tensorprodukt $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ möglich; zu ihm gehören die Lösungen von WOLFGANG PAULIS Gleichung.

Dualraum und Skalarprodukt Zu einem Zustand $|\phi\rangle \in \mathfrak{H}$ gibt es stets einen Vektor $\langle\phi|$ des Dualraums \mathfrak{H}^* von \mathfrak{H} , der damit eigentlich eine lineare Abbildung $\mathfrak{H} \rightarrow K$ ist, nämlich die Abbildung eines beliebigen Vektors $|\psi\rangle$ auf dessen Skalarprodukt mit $|\phi\rangle$, das daher $\langle\phi|\psi\rangle$ geschrieben wird. I. Allg. ist $K = \mathbb{C}$. Vermutlich in Anlehnung an die Dualität wird in der QT meist z^* statt \bar{z} geschrieben.

Normierung und Orthonormalbasis Als HILBERTraum besteht \mathfrak{H} vollständig aus Elementen, die eine *Norm* haben, durch die sie dividiert und so *normiert* werden können. So ist $L^2(\mathbb{R}^3)$ dadurch definiert, dass er nur *quadratintegrale* Funktionen enthält, also Funktionen $\phi(\vec{x})$ mit $\int \phi^* \phi d^3x < \infty$. Normiert heißt $|\phi\rangle$ bzw. $\phi(\vec{x}, t)$, wenn

$$\langle\phi|\phi\rangle = \int_{\{\vec{x}\}} \phi^*(\vec{x}, t = \text{const.}) \phi(\vec{x}, t = \text{const.}) d^3x = 1 \quad (79)$$

ist. Eine Orthonormalbasis (ONB) oder vollständiges Orthonormalsystem (VONS) ist eine Basis $\{|r\rangle\}$ (wobei r zu einer beliebigen Indexmenge gehört, die kontinuierlich sein kann) von \mathfrak{H} mit

$$\langle r|s\rangle = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s \end{cases} \quad (80)$$

Es stört etwas, dass Ansatz (3) selbst mangels Normierbarkeit gar nicht zu $L^2(\mathbb{R}^3)$ gehört. Streng periodische Funktionen (solche mit scharf definiertem \vec{p}) sind offenbar eine Idealisierung.

Durch Multiplikation mit einer extrem flach verlaufenden normierbaren Funktion¹⁷ entsteht daraus eine quadratintegrale Wellenfunktion mit einem weiträumig praktisch nicht von (3) unterscheidbaren Verlauf. Im Folgenden sollen die Funktionen als normiert angenommen werden.

¹⁶ Dies im Unterschied zu \mathbb{Q}^3 , da es rationale Cauchy-Folgen mit irrationalem Grenzwert gibt.

¹⁷Vorzugsweise einer GAUSS-Funktion; sie ist der *Fixpunkt* der FT.

Operatoren Die Verallgemeinerung einer Matrix in \mathfrak{H} ist ein linearer Operator \hat{A} . Bezüglich eines bestimmten VONS $|r\rangle$ besitzt \hat{A} die Matrixdarstellung $\langle r|\hat{A}|s\rangle$, wobei r, s Indizes sind, die kontinuierlich sind, wenn \mathfrak{H} ein Funktionenraum ist. Repräsentiert \hat{A} eine Observable A , so ist er hermitesch, d.h. $\langle s|\hat{A}|r\rangle = \langle r|\hat{A}|s\rangle^*$, was $\langle r|\hat{A}|r\rangle \in \mathbb{R}$ impliziert; dieses Matrixelement heißt dann auch *Erwartungswert* von \hat{A} im Zustand $|r\rangle$.

Eigenwerte und Eigenvektoren, Messungen Ein Zustandsvektor $|v\rangle$ mit $\hat{A}|v\rangle = a_v|v\rangle$ heißt *Eigenzustand* von \hat{A} zum *Eigenwert* $a_v \in A = \{a\}$ und repräsentiert einen Zustand, in dem Messungen von A ohne *prinzipielle* Schwankungen den Messwert a_v ergeben. Natürlich ist a_v zugleich Erwartungswert von \hat{A} in $|v\rangle$; es ist $\langle v|\hat{A}|v\rangle = \langle v|a_v|v\rangle = a_v \langle v|v\rangle = a_v$.

Entwicklung nach Eigenzuständen, FOURIER-Transformation Gemessen werden können also ausschließlich Eigenwerte hermitescher Operatoren wie z.B. \hat{A} ; dies gilt auch, wenn der Zustand $|\phi\rangle$ nicht Eigenzustand von \hat{A} ist. Auch dann nämlich lässt er sich nach Eigenzuständen von \hat{A} *entwickeln* (Verallgemeinerung einer Linearkombination):

$$|\phi\rangle = \sum_{a \in A} z(a)|a\rangle \quad \text{bzw.} \quad |\phi\rangle = \int_A z(a)|a\rangle da \quad (81)$$

Dabei heißt $z(a)$ komplexe Wahrscheinlichkeitsamplitude und ist $z^*(a)z(a) \equiv |z(a)|^2$ die Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte einer Messung von a im Zustand $|\phi\rangle$. Ein Beispiel aus der Wellenmechanik ist die Entwicklung einer Wellenfunktion $\phi(\vec{x}, t)$ nach Funktionen des Typs (3), was nichts anderes ist als die *FOURIER-Transformation*

$$\phi(\vec{p}, t) = \mathcal{F}(\phi(\vec{x}, t)) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\{\vec{x}\}} \phi(\vec{x}, t) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3x, \quad (82)$$

wobei die Funktion $\phi(\vec{p}, t)$ die Koeffizienten liefert, die für jedes \vec{p} etwas über den Anteil der jeweiligen Impulseigenfunktion aussagen, d.h., $|\phi(\vec{p}, t)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Impulsmessung. Umgekehrt lässt sich daraus wieder die ursprüngliche Funktion zusammensetzen, nämlich mit der inversen Transformation

$$\phi(\vec{x}, t) = \mathcal{F}(\phi(\vec{p}, t)) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\{\vec{p}\}} \phi(\vec{p}, t) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} d^3p. \quad (83)$$

Dass FOURIER-Transformierte voneinander sich als Orts- und Impulsdarstellung desselben Zustandsvektors eignen, ist dem Satz von MARC ANTONIO PARSEVAL zu verdanken, demzufolge

$$\int |\phi(\vec{x}, t)|^2 d^3x = \int |\phi(\vec{p}, t)|^2 d^3p. \quad (84)$$

Unschärferelation Die Standardabweichungen verhalten sich dabei reziprok, d.h. die FOURIER-Transformierte einer sehr flach verlaufenden Funktion ist nur in einer kleinen Umgebung von 0 überhaupt wesentlich von 0 verschieden, nimmt aber dort sehr große Werte an. Damit ist sie eine endliche Näherung an die DIRACsche *Deltafunktion*. Das Produkt der Standardabweichungen unterschreitet niemals $\hbar/2$ (in konventionellen Einheiten); das Gleichheitszeichen gilt für die GAUSSfunktion, die auch ein *Fixpunkt* der FOURIER-Transformation ist. Die Unschärferelation gilt ganz allgemein für zwei Observablen, deren Operatoren \hat{A}, \hat{B} einen festen Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ und daher keine gemeinsamen Eigenzustände besitzen (HEISENBERG, 1925). Ist der Kommutator selbst ein Operator, kann es gemeinsame Eigenzustände geben; so haben z.B. alle Drehimpulskomponenten einen gemeinsamen Eigenzustand, nämlich für $|\vec{L}| = 0$.

B.2 Beispiele zur Schreibweise in der Quantentheorie

Die DIRACschen Bra-Ket-Schreibweise lässt es zu, Zustände in sehr abstrakter und allgemeiner Weise zu notieren, sodass sie Extrembeispiele wie einen Zustandsraum eines Zweizustandssystems oder einen Raum von Ortswellenfunktionen mit einem ganzen Kontinuum von Basiszuständen umfasst. Für diese beiden Extremfälle wollen wir die Schreibweise konkretisieren.

B.2.1 Zweizustandssystem

In diesem Fall und in Matrixschreibweise ist

$$\langle\phi| = (c_{\phi,1}^* \quad c_{\phi,2}^*), \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_{\psi,1} \\ c_{\psi,2} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\phi|\psi\rangle = (c_{\phi,1}^* \quad c_{\phi,2}^*) \begin{pmatrix} c_{\psi,1} \\ c_{\psi,2} \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^n c_{\phi,r}^* c_{\psi,r}. \quad (85)$$

\hat{A} hat in einem solchen HILBERTraum bezüglich einer einmal gewählten Standardbasis, die dann als

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

geschrieben wird, die Gestalt einer 2×2 -Matrix (a_{rs}) , $r, s = 1, 2$, und es ist

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \begin{pmatrix} c_{\phi,1}^* & c_{\phi,2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\psi,1} \\ c_{\psi,2} \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n c_{\phi,r}^* a_{rs} c_{\psi,s}. \quad (86)$$

Falls $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ ebenfalls eine Basis von \mathfrak{H} bilden, so hat \hat{A} in dieser Basis die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle & \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle \\ \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle & \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \end{pmatrix}, \quad (87)$$

und die Diagonalelemente sind die Erwartungswerte von \hat{A} in den Zuständen $\text{Span}(|\phi\rangle)$ und $\text{Span}(|\psi\rangle)$.

Beispiel Spinsystem Spinrichtungs-Eigenwerte sind stets Projektionen des Spins auf eine gegebene Achse. Die z -Achse ist die traditionelle Rotationsachse im 3D-Raum, wie ja an der Definition der Kugelkoordinaten erkennbar ist; daher ist die Orientierung bezüglich der z -Achse konventionellerweise die Standardbasis. Die Eigenzustände in den anderen Richtungen lassen sich natürlich nach den z -Eigenzuständen entwickeln; beispielsweise schreiben sich die y -Eigenzustände gemäß geltender Konvention als

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm i|-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \quad (88)$$

Dies sind die Eigenvektoren der PAULI-Matrix $\sigma_2 = \sigma_y$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Sie liefern im ‘+’-Fall den Eigenwert 1, im ‘-’-Fall den Eigenwert -1 (der Normierungsfaktor kann bei der Eigenwertgleichung weggelassen werden). Diese Eigenwerte sind natürlich auch die Erwartungswerte des Operators σ_y in den Eigenzuständen (88). Die außerdiagonalen Elemente hingegen ergeben 0, da die beiden Eigenzustände orthogonal sind. Somit hat der Operator in der Basis seiner eigenen Eigenzustände die Gestalt

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\langle + | + \rangle + i \langle - | \rangle) \sigma_y (|+\rangle + i|-\rangle) & (\langle + | + \rangle + i \langle - | \rangle) \sigma_y (|+\rangle - i|-\rangle) \\ (\langle + | - \rangle - i \langle - | \rangle) \sigma_y (|+\rangle + i|-\rangle) & (\langle + | - \rangle - i \langle - | \rangle) \sigma_y (|+\rangle - i|-\rangle) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

genau wie der Operator σ_3 bzw. σ_z in der Standardbasis.

B.2.2 Ortswellenfunktion

Im Fall $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^3(\vec{x}))$ sind die Vektoren Funktionen, und die Summen werden zu Integralen:

$$\langle \phi | \vec{x} \rangle = \phi^*(\vec{x}, t), \quad \langle \vec{x} | \psi \rangle = \psi(\vec{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \langle \phi | \psi \rangle = \int_{\{\vec{x}\}} \phi^*(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) d^3x \quad (91)$$

In diesem Fall hat das Matrixelement bezüglich $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ die Form

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{\{\vec{x}\}} \phi^*(\vec{x}, t) \hat{A} \psi(\vec{x}, t) d^3x \quad (92)$$

oder allgemeiner

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{\{\vec{x}\}} \int_{\{\vec{x}'\}} \phi^*(\vec{x}, t) \langle \vec{x} | \hat{A} | \vec{x}' \rangle \psi(\vec{x}', t) d^3x d^3x'. \quad (93)$$

Für $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ ist das gerade der Erwartungswert. Ist $\langle \vec{x} | v \rangle = \phi_v(\vec{x}, t)$ eine Eigenfunktion von \hat{A} zum Eigenwert a_v , so ist

$$\begin{aligned} \langle v | \hat{A} | v \rangle &= \int_{\{\vec{x}\}} \phi_v^*(\vec{x}, t) \hat{A} \phi_v(\vec{x}, t) d^3x = \int_{\{\vec{x}\}} \phi_v^*(\vec{x}, t) a_v \phi_v(\vec{x}, t) d^3x \\ &= a_v \int_{\{\vec{x}\}} \phi_v^*(\vec{x}, t) \phi_v(\vec{x}, t) d^3x = a_v, \end{aligned} \quad (94)$$

genau wie es sein sollte, denn natürlich muss der Erwartungswert in diesem Fall dem Eigenwert gleich sein.

C Die Spezielle Relativitätstheorie und ihre Quantisierung

C.1 Relativitätsprinzip und Spezielle Relativitätstheorie

Eines der grundlegenden Prinzipien der klassischen Mechanik ist das *Relativitätsprinzip* (RP). Es geht auf GALILEO GALILEI zurück und besagt, dass die Gesetze der Mechanik in zwei relativ zueinander in x -Richtung bewegten Koordinatensystemen K und K' identisch sind, oder, formeller ausgedrückt, sie sind invariant unter den GALILEI-Transformation. Sie lässt sich in Form einer Matrix-Vektor-Gleichung

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (95)$$

schreiben, wobei hier als räumliche Dimension nur x berücksichtigt ist und t und x zu einem Vektor zusammengefasst wurden, im vollständigen SRT-Formalismus als Vierervektor bezeichnet.

JAMES CLERK MAXWELLS Grundgleichungen der Elektrodynamik sind allerdings nicht GALILEI-invariant, und für die - aus ihnen hergeleiteten - elektromagnetischen Wellengleichungen gilt dasselbe. Das führte zur Hypothese eines *lichttragenden Äthers*, in dem sich elektromagnetische Wellen mit einer heute als c bezeichneten Geschwindigkeit ausbreiten. Der Äther wurde als absolut ruhend angenommen. In einem bewegten System - wie dem der Erde - sollte die Lichtgeschwindigkeit je nach Richtung variieren und dies interferometrisch messbar sein. Entsprechende Experimente lieferten jedoch wider Erwarten keine Abweichungen vom RP. Um dies zu erklären, modifizierte HENDRIK ANTOON LORENTZ (95) schrittweise; das Ergebnis ist die LORENTZ-Transformation

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad (96)$$

wobei γ der LORENTZ-Faktor heißt. Mit der Ersetzung $t \rightarrow ct$ wird (96) symmetrischer, es ist dann

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \text{symbolisch} \quad \vec{x}' = \Lambda(\vec{v}) \vec{x}. \quad (97)$$

Die LORENTZ-Transformationen [13] lassen nicht nur die elektromagnetische Wellengleichung und c invariant, sondern auch die MAXWELL-Gleichungen. *Vor allem aber genügen sie dem RP*, denn im Unterschied zu den schon 1887 von WOLDEMAR VOIGT aufgestellten Transformationen, die c ebenfalls invariant lassen, bilden sie eine *Gruppe* und ist somit auch ihre Umkehrung eine Lorentz-Transformation zur entgegengesetzten Geschwindigkeit, symbolisch ausgedrückt, $\Lambda^{-1}(\vec{v}) = \Lambda(-\vec{v})$. ALBERT EINSTEIN machte sie 1905 zur Grundlage für seine Spezielle Relativitätstheorie (SRT)[6] und fand dabei auch die Ruheenergie $E_0 = mc^2$; sie weist im Umkehrschluss auch jeder Energie die Masse $m_E = Ec^{-2}$ zu.¹⁸ Die Universalkonstante c ist ein Artefakt des Maßsystems in sofern, als dass Längen und Zeitspannen in verschiedenen Einheiten gemessen werden.¹⁹

C.2 Kovariante Form und Vierervektoren

In der sog. kovarianten Formulierung der SRT, die später auch die koordinatenfreie Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) erleichtern sollte, ist ct bzw. t eine Koordinate, die mit x^0 oder x_0 bezeichnet wird, was für den Index 0 dasselbe ist. Insgesamt ist $x^\mu = {}^T(t, x, y, z)$ und heißt kontravarianter Vierervektor, während $x_\mu = {}^T(t, -x, -y, -z)$ der entsprechende kovariante Vierervektor heißt. Beide lassen sich mit Hilfe des *metrischen Tensors*

$$\eta^{\mu\rho} = \eta_{\mu\rho} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\} \quad (98)$$

via $x^\mu = \eta^{\mu\rho} x_\rho$ bzw. $x_\mu = \eta_{\mu\rho} x^\rho$ ineinander umrechnen. Für zwei Vierervektoren x_μ, x'_μ ist ein LORENTZ-invariantes (uneigentliches) Skalarprodukt $x^\mu x'_\mu = \eta^{\mu\rho} x_\mu x'_\rho$ definiert. Uneigentlich heißt es, weil ihm mit der positiven Definitheit eine Eigenschaft eigentlicher Skalarprodukten fehlt. Es induziert eine uneigentliche oder schwache Norm $\|x^\mu\| = \sqrt{x^\mu x_\mu}$, die zuerst von EINSTEINS Lehrer HERMANN MINKOWSKI erwähnt wurde und nach ihm benannt ist.[14, 15]

C.3 Relativistische Energie-Impulsbeziehung und Viererimpuls

Das Pendant zu x_μ im Impulsraum ist der *Viererimpuls* $p_\mu = {}^T(E, -p_x, -p_y, -p_z)$, das zu x^μ ist $p^\mu = {}^T(E, p_x, p_y, p_z)$; dieses Konzept wird gerechtfertigt durch die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 - \vec{p}^2 = p^\mu p_\mu = m^2, \quad (99)$$

d.h. die Masse bzw. Ruheenergie ist (bis auf eine Proportionalitätskonstante) gerade der Betrag dieses Viererimpulses.

¹⁸Schon 1904 hatte FRIEDRICH HASENÖHRL schon 1904 eine Masse für Hohlraumstrahlung berechnet, sodass die Äquivalenz von Energie und Masse nur in ihrer völligen Allgemeinheit neu war.

¹⁹Ähnlich wie die Messung horizontaler Abstände in Metern und vertikaler in Fuß zu einer "Universalkonstante" $\kappa = 0,3048 \text{ ft/m}$ führen würde.

C.4 Quantisierung der SRT

An die Stelle der Normierung (79) der Wellenfunktion für einen Zeitpunkt $t = \text{const.}$, der in der SRT nicht wohldefiniert ist, tritt eine *Kontinuitätsgleichung*, die aus der Grundgleichung hervorgehen sollte, also aus jeweils einer der im Folgenden behandelten Gleichungen.

Die KLEIN-GORDON-Gleichung Noch bevor SCHRÖDINGER die nach ihm benannte nichtrelativistische Gleichung aufstellte, schuf er durch Ersetzung der physikalischen Größen in (99) durch Operatoren folgende Differenzialgleichung (s. auch (11)):

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \phi = -\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = -\square \phi := (-\partial_t^2 + \nabla^2) \phi = m^2 \phi \quad (100)$$

Sie ist in allen Ableitungen 2. Ordnung und besitzt daher reelle Lösungen, auch zeitabhängige, und damit auch solche mit negativem E , weshalb sie lange für unphysikalisch gehalten und von SCHRÖDINGER wieder verworfen wurde; sie wurde dann von OSKAR KLEIN und WALTER GORDON weiter untersucht und ist heute nach ihnen benannt (Abk.: KGG). Bei genauerer Untersuchung erweist sich übrigens auch die Energie von Lösungen mit negativem E als positiv; solche Lösungen stellen *Antiteilchen* dar. Aus (100) lässt sich die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla^\mu (\phi^* \nabla_\mu \phi - \phi \nabla_\mu \phi^*) = \nabla^\mu \tilde{j}_\mu = \partial_t \tilde{\rho} + \nabla \cdot \tilde{\vec{j}} = 0. \quad (101)$$

herleiten, die aussagt, dass der sog. Viererstrom quellenfrei ist. Dessen Zeitkomponente $\tilde{j}_0 \equiv \tilde{\rho}$ ist allerdings nicht positiv definit und daher auch nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretierbar und induziert somit keine Teilchenzahlerhaltung. In diesem Fall bietet sich tatsächlich die Interpretation von $\tilde{\rho}$ als Ladungsdichte an, oder zumindest als ‘‘Ladungswahrscheinlichkeitsdichte’’. Die reellen Lösungen stellen neutrale KLEIN-GORDON-Felder dar, für welche die Terme in (101) einzeln verschwinden. Neutrale Teilchen, die die KGG vollständig beschreibt, lassen sich also erzeugen oder vernichten, ohne die Gleichung zu verletzen; umgekehrt folgt aus ihr nicht ihre Erhaltung. Sie sind auch ihre eigenen Antiteilchen, was man auch von Photonen kennt; letztere sind jedoch durch die KGG nur unvollständig beschrieben, denn sie sind ja Quanten eines Tensorfeldes, nämlich des elektromagnetischen.

Die DIRAC-Gleichung PAUL DIRAC kam 1928 auf die Idee, eine Gleichung 1. Ordnung zunächst formal als Ansatz mit zunächst unbekanntem Koeffizienten zu formulieren, deren erforderliche Eigenschaften später zu untersuchen waren [4, 5]. In kovarianter Form und natürlichen Einheiten lautet sie

$$\gamma^\rho \hat{p}_\rho \phi = m \phi. \quad (102)$$

Seine Bedingung lautete, dass eine Funktion ϕ , die (102) genügt, auch (100) genügen muss. Das führt zu folgenden Vertauschungsrelationen oder vielmehr Antivertauschungsrelationen (14). In der aus (102) hergeleiteten Kontinuitätsgleichung

$$\nabla_\mu (\bar{\phi} \gamma^\mu \phi) = \nabla_\mu (\phi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \phi) = \nabla_\mu \tilde{j}^\mu = \partial_t \underbrace{(\phi^\dagger \phi)}_{\tilde{\rho}} + \nabla \cdot \underbrace{(\phi^\dagger \vec{\alpha} \phi)}_{\tilde{\vec{j}}} = 0 \quad (103)$$

steht der positiv definite Ausdruck $\phi^\dagger \phi =: \tilde{\rho}$ für die zeitliche Komponente des Viererstroms und lässt sich daher als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren, sodass (103) nicht nur Ladungs- sondern auch *Teilchenzahlerhaltung* zum Ausdruck bringt. Das macht die DIRAC-Gleichung zu einer geeignet zur Beschreibung von Materie.

Mit den biquaternionischen (s. auch 3.1.3) imaginären Einheiten σ_r , die gewöhnlich als komplexe 2×2 -Matrizen geschrieben werden, lassen sich die Koeffizienten der DIRAC-Gleichung konkreter als

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ -\sigma_r & 0 \end{pmatrix} \quad (104)$$

schreiben und zudem mit $\gamma^0 = \beta, \alpha^r = \gamma^0 \gamma^r$ in eine SCHRÖDINGERSche Form bringen, d.h. nach der Zeitableitung auflösen, um die Berechnung der nichtrelativistischen Näherung zu erleichtern. So nimmt diese für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld mit $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_3) =: \vec{\sigma}$ und dem kinetischen Impuls des Teilchens $\vec{p} - q\vec{A} =: \vec{\pi}$ die Form

$$\frac{i\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = (\beta m + \hat{1} q A_0 + \vec{\alpha} \cdot \hat{1} \vec{\pi}) \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + q A_0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & -m + q A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} \quad (105)$$

an. Im Grenzfall verschwindender Geschwindigkeiten und Felder wird daraus

$$\frac{i\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Falls $E = +m$, muss $\phi_- = 0$ sein, falls $E = -m$, muss $\phi_+ = 0$ sein; daher steht ϕ_+ für gewöhnliche Materie und ϕ_- für Antimaterie [1, 18, 26]. Bei hohen Energien treten meist beide auf, und eine Ein-Teilchen-Beschreibung wie bei

SCHRÖDINGER wird zumindest schwierig.

Für jeden der beiden Fälle $E = \pm m$ lässt sich gesondert die **Pauli-Gleichung** herleiten, die sich im positiven Fall als

$$i \frac{\partial}{\partial t} \xi \left(\frac{(\hat{p} - q\vec{A})^2 - q\vec{\sigma} \cdot (\nabla \times \vec{A})}{2m} + qA_0 \right) \xi, \quad \xi = \phi_{\mathbb{C}} e^{-imt} \quad (107)$$

schreiben lässt.

Die σ_r sind die Komponenten des Spin-Operators. Werden sie als Matrizen aufgefasst, so lassen sich die Zustände, auf die sie wirken, als \mathbb{C}^2 -Vektoren schreiben. Werden sie stattdessen als Biquaternionen aufgefasst, so müssen die Zustände ebenfalls Biquaternionen sein:

$$\sigma_r(1 \pm \sigma_r) = \sigma_r \pm 1 = \pm(1 \pm \sigma_r), \quad (108)$$

d.h., $(1 \pm \sigma_r)$ als Zustand ist eine Eigen-Biquaternion von σ_r zum Eigenwert ± 1 . Das impliziert freilich, dass sie ein Nullteiler ist, und zwar mit dem einfachen, äußeren oder inneren Konjugierten als Nullteiler-Partner.

Hürden bei der Interpretation Die Darstellung von Zuständen und Operatoren mit Elementen derselben Algebra - der Biquaternionen - verwischt den Unterschied zwischen beiden. Eine weitere Hürde ist die Notwendigkeit, Skalarprodukte und Normen für Nullteiler zu definieren, wobei natürlich die Multiplikation mit dem Konjugierten nicht hilfreich ist. Außerdem sollten sich Spin-Eigenzustände des Operators für eine Richtung auch nach Eigenzuständen des Operators für eine andere entwickeln lassen. Bei der Matrix-Vektor-Schreibweise ergibt sich das völlig natürlich, bei den Biquaternionen nicht so ohne Weiteres, da die σ_r linear unabhängig sind. Diese Problematik dürfte zu einem guten Teil dazu beigetragen haben, dass sich die Formulierung nicht gegen die Matrix-Vektor-Formulierung durchgesetzt hat.

D Vorfaktoren vor Differenzialoperatoren im HILBERTraum über dem Ideal

Im Folgenden sind partielle Ableitungen von Funktionen vom Typ (3) und (53) mit unterschiedlichen Vorfaktoren aus \mathcal{J} vor dem Differenzialoperator aufgeführt, die im Hauptteil fehlen (unterstrichene Ergebnisse gelten auch für $\phi_{\mathcal{J}} \neq k\phi_{\mathbb{C}}$):

$$+j\partial_x\phi_{\mathbb{C}} = +j \cdot ipe^{i(px-Et)} = -kpe^{i(px-Et)} = \underline{-kp\phi_{\mathbb{C}}} = -kp\phi_{\mathcal{J}} = -p\phi_{\mathcal{J}} \quad (109)$$

$$+j\partial_x\phi_{\mathcal{J}} = +j \cdot jpk e^{j(px-Et)} = j^2 p e^{j(px-Et)} = -kpe^{j(px-Et)} = \underline{-kp\phi_{\mathcal{J}}} = -p\phi_{\mathcal{J}} \quad (110)$$

$$-k\partial_x\phi_{\mathbb{C}} = -k \cdot ipe^{i(px-Et)} = -jpe^{i(px-Et)} = \underline{-jp\phi_{\mathbb{C}}} = -jkp\phi_{\mathbb{C}} = -jp\phi_{\mathcal{J}} \quad (111)$$

$$-k\partial_x\phi_{\mathcal{J}} = -k \cdot jpk e^{j(px-Et)} = -jpe^{j(px-Et)} = -jp\phi_{\mathbb{C}} = -jkp\phi_{\mathbb{C}} = \underline{-jp\phi_{\mathcal{J}}} = -ip\phi_{\mathcal{J}} \quad (112)$$

$$+k\partial_x\phi_{\mathbb{C}} = +k \cdot ipe^{i(px-Et)} = jpe^{i(px-Et)} = \underline{jp\phi_{\mathbb{C}}} = jkp\phi_{\mathbb{C}} = jp\phi_{\mathcal{J}} \quad (113)$$

$$+k\partial_x\phi_{\mathcal{J}} = +k \cdot jpk e^{j(px-Et)} = jpe^{j(px-Et)} = jp\phi_{\mathbb{C}} = jkp\phi_{\mathbb{C}} = \underline{jp\phi_{\mathcal{J}}} = ip\phi_{\mathcal{J}}. \quad (114)$$

Die $+j$ -wertigen Operatoren liefern ein negatives Vorzeichen, im Fall einer Differentiation nach t wären sie korrekt. Die k -wertigen Operatoren liefern rein imaginäre Eigenwerte, sind also antihermitesch, egal, welches Vorzeichen sie haben. Wenn die QT in \mathcal{J} so funktionieren soll wie in \mathbb{C} , sollten die Eigenwerte jedoch pseudo-reell sein, also k -wertig.