Ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría unificada de Weyl

Gravitational field equations in the unified theory of Weyl

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. Obtenemos las ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría de campo unificado de Weyl sin imponer ninguna restrcción y hallamos la solución estática con simetría esférica.

Abstract. We obtain the gravitational field equations in the unified field theory of Weyl without imposing any restrictions and find static spherically symmetric solution.

1. Introducción

En el año 1918 Hermann Weyl diseñó la primera teoría de campo unificado [1] [2], con la que pretendía explicar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético a partir de una base geométrica. En esencia la teoría de Weyl supone una variedad espacio-temporal tetradimensional de tensor métrico simétrico, sin torsión (es decir de conexión simétrica) y con un tensor de no-metricidad no nulo dado por la expresión

$$Q_{ikr} = D_r g_{ik} = -2 g_{ik} \phi_r$$

donde

$$d\phi = \phi_r dx^r$$

es una forma diferencial, que en el caso de ser una diferencial exacta reduce la variedad de Weyl a la de Riemann.

En la teoría de Weyl g_{ik} cumple el mismo papel que en la teoría general de la relatividad, a saber, es el tensor que nos informa de las propiedades métricas de la variedad y también son las componentes del potencial gravitatorio. El tetravector ϕ_r representa en la teoría de Weyl las componentes del tetrapotencial electromagnético, o para ser más precisos, ambos tetravectores son proporcionales entre sí.

La variedad de Weyl admite cambios en la calibración. Es decir, se pueden obtener nuevas componentes del tensor métrico a partir de la relación

$$g'_{ik} = \psi\left(x^r\right) g_{ik}$$

donde ψ es una función cualquiera de la posición espacio-temporal. La teoría de Weyl exige que las ecuaciones de campo sean invariantes no sólo frente a transformaciones de coordenadas genéricas, sino también ante cambios de calibración. Consideremos dos calibraciones diferentes ψ y ψ', que dan lugar a dos nuevos tensores métricos

$$g'_{ik} = \psi g_{ik} \qquad g''_{ik} = \psi' g_{ik}$$

entonces al pasar de la calibración ψ a la ψ' el tensor métrico se transforma por

$$g''_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} \psi g_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} g'_{ik} = \lambda^2 g'_{ik}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2 por ser éste el exponente de la función λ en la ecuación de transformación. Fácilmente se encuentra que el tensor métrico en forma contravariante tiene de peso -2 y que el determinante del tensor métrico es de peso 8. De aquí se deduce que el peso de la conexión es 0 e igual propiedad tienen el tensor de curvatura $R^{i}{}_{kpq}$ y su contracción el tensor de Ricci R_{ik}; no obstante la curvatura escalar tiene de peso -2, mientras que las coordenadas espacio-temporales no tienen peso, ya que son independientes de la calibración.

Las ecuaciones de campo se obtienen al aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$I=\int\sqrt{g}\,\mathfrak{L}\,d\Omega$$

donde debemos cuidar que el integrando sea invariante tanto frente a cambios de coordenadas como de calibración, lo que nos asegurará las correctas propiedades de invariancia de las ecuaciones de campo.

Las densidades lagrangianas de menor orden de derivación que cumplen con las exigencias requeridas son [3]

$$\begin{array}{lll} R_{ikpq}R^{ikpq}; & R_{ik}R^{ik}; & R^{2}; \\ R_{ikpq}\overline{R}^{ikpq}; & R_{ikpq}\overline{\overline{R}}^{ikpq}; & F_{ik}F^{ik} \end{array} \tag{1}$$

donde

$$R^{i}{}_{kpq}=\Gamma_{kq,p}^{\ i}-\Gamma_{kp,q}^{\ i}+\Gamma_{kq}^{\ n}\Gamma_{np}^{\ i}-\Gamma_{kp}^{\ n}\Gamma_{nq}^{\ i}$$

es el tensor de curvatura obtenido a partir de la conexión de la variedad $\Gamma_{kq}^{\ i}$. R_{ik} es el tensor de Ricci que entendemos es la contracción $R^{p}{}_{ikp}$; $R=g^{ik}R_{ik}$ es la curvatura escalar; F_{ik} es el tensor antisimétrico

$$F_{ik}=\frac{\partial\phi_k}{\partial x^i}-\frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}$$

que se identifica con el tensor de campo electromagnético (o es proporcional a él) y $\overline{R}^{ikpq}$ y $\overline{\overline{R}}^{ikpq}$ son los dos posibles tensores duales asociados al tensor de Riemann, definidos por

$$\overline{R}_{ik}{}^{pq}=R_{ikmn}\,\Delta^{pqmn};\qquad \overline{\overline{R}}^{ikpq}=R_{rsmn}\Delta^{ikrs}\Delta^{pqmn}$$

siendo

$$\Delta^{ikpq}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ikpq}$$

y ε^{ikpq} son los símbolos de Levi-Civita que tiene el valor 1 si hay una permutación par de los índices, el valor -1 si la permutación es impar y 0 si hay al menos dos índices iguales.

Notemos que todas las expresiones (1) tienen peso 0 cuando se multiplican por $\sqrt{g}$. Por ejemplo, la tercera densidad lagrangiana tiene de peso $4-2-2=0$, puesto que el determinante del tensor métrico tiene de peso 8 y la curvatura escalar tiene el peso -2.

Démonos cuenta que las ecuaciones de campo que se deriven de las densidades lagrangianas (1) son ecuaciones diferenciales de cuarto orden. En efecto, las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen del principio de mínima acción para el caso de una densidad lagrangiana que dependa de las segundas derivadas del tensor metrico es

$$\frac{\partial}{\partial x^p}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g_{ik,p}}\right]-\frac{\partial^2}{\partial x^p\partial x^q}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{g}\mathfrak{L}\right)}{\partial g_{ik,pq}}\right]-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{ik}}=0 \tag{2}$$

de donde se ve que las ecuaciones de campo que se obtengan deben ser ecuaciones diferenciales de orden 4. Observemos que esta es la misma situación que se da en Relatividad General, cuya densidad lagrangiana es $\sqrt{g}R$ (que depende de las segundas derivadas del tensor métrico) pero resulta que al aplicar las ecuaciones (2) se anulan los términos que contienen un orden de derivación mayor que el segundo, lo que hace que las ecuaciones de campo de la Relatividad

General sean ecuaciones diferenciales de orden 2.

En su investigación original Hermann Weyl consideró la tercera de las densidades lagrangianas de (1), obteniendo las ecuaciones de campo gravitatorio al aplicar el principio de mínima acción cuando se da una variación arbitraria de las componentes del tensor métrico. Para simplificar los cálculos supuso lo que llamó la gauge natural $R=-4\Lambda$ donde Λ es una constante positiva que identificó con la constante cosmológica. El procedimiento seguido por Weyl y por otros investigadores no es satisfactorio [4], por eso nosotros a continuación obtendremos las ecuaciones de campo gravitatorio sin establecer *a priori* ninguna limitación, aunque al concluir los cálculos evaluaremos las ecuaciones de la gravedad en la gauge natural. [5] [6]

Añadir que para obtener las ecuaciones de campo electromagnético conjuntamente con las ecuaciones de la gravedad, Weyl consideró la densidad lagrangiana

$$\mathfrak{L}=R^2+2\chi F_{ik}F^{ik} \tag{3}$$

donde χ es la constante de acoplamiento entre los dos campos. Indicar que de la anterior expresión Weyl dedujo las ecuaciones de Maxwell sin introducir la restricción de la gauge natural.

Desde hace unos años se ha renovado el interés por las ecuaciones de la gravitación que se obtienen de densidades lagrangianas invariantes frente a calibración, es decir que son invariantes conformes. Una posibilidad que ha sido especialmente estudiada, son las ecuaciones de campo derivadas de la densidad lagrangiana

$$\sqrt{g}\,\mathfrak{L}=\sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq} \tag{4}$$

donde $C^{i}{}_{kpq}$ es el tensor de Weyl que tiene como características ser un tensor de cuarto orden con las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y ser invariante ante cambios de calibración; es definido en un espacio de Riemann (es decir que tomamos ϕ_k nula) por

$$C_{ijkl}=R_{ijkl}+\frac{1}{2}\left(g_{ik}R_{jl}-g_{il}R_{jk}-g_{jk}R_{il}+g_{jl}R_{ik}\right)+\frac{1}{6}\left(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}\right)R. \tag{5}$$

Una cálculo directo combinando (4) y (5) nos lleva a

$$\sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq}=\sqrt{g}\left(R_{ikpq}R^{ikpq}-2R_{ik}R^{ik}+\frac{1}{3}R^2\right),$$

no obstante, la variación de la acción basada en la anterior expresión admite una nueva simplificación, de tal forma que se reduce a

$$\delta\int\sqrt{g}\,C_{ikpq}C^{ikpq}d\Omega=\delta\int\sqrt{g}\left(R_{ik}R^{ik}-\frac{1}{3}R^2\right)d\Omega.$$

Debemos observar que estas ecuaciones de la teoría de la gravitación conforme son válidas en el espacio de Riemann y no en el de Weyl.

2. Relaciones útiles

Con vista a obtener las ecuaciones generales de campo gravitatorio de la teoría de Weyl debemos formular algunas relaciones matemáticas. Vamos a utilizar dos derivadas covariantes. Una de ellas es la expresión habitual, donde la derivación se calcula respecto a la conexión de la variedad. Para el caso de la derivada de un vector tendremos

$$D_k v^i=\partial_k v^i+v^s\Gamma_{sk}^{\ i}.$$

La otra derivada covariante se calcula respecto a los símbolos de Christoffel $L_{sk}^{\ i}$

$$\overset{*}{D}_k v^i=\partial_k v^i+v^s L_{sk}^{\ i}.$$

Como

$$L_{sk}^{\ i}=1/2\,g^{im}\left(\partial_s g_{km}+\partial_k g_{sm}-\partial_m g_{sk}\right)$$

entonces

$$D_m^* g_{ik} = 0.$$

Se estabece una relación entre ambas derivadas covariantes teniendo en cuenta que en una variedad de Weyl la conexión está relacionada con los símbolos de Christoffel por [7]

$$\Gamma_{sk}^{\ \ i} = L_{sk}^{\ \ i} + \delta_s^i \phi_k + \delta_k^i \phi_s - g_{sk} \phi^i, \tag{6}$$

para el caso de un vector tendremos

$$D_k v^i = D_k^* v^i + \delta_k^i v^s \phi_s + v^i \phi_k - v_k \phi^i$$

y para la divergencia de un vector

$$D_k v^k = D_k^* v^k + 4 v^k \phi_k . \tag{7}$$

Se puede comprobar sin dificultad que tanto en una variedad de Riemann como en una de Weyl es válida la relación

$$D_k \left(\sqrt{g}\, v^k \right) = \partial_k \left(\sqrt{g}\, v^k \right),$$

esto significa que podemos formular el teorema integral de Gauss de dos formas ligeramente diferentes

$$\int_V D_k \left(\sqrt{g}\, v^k \right) d\Omega = \int_\Sigma v_k dS^k ; \qquad \int_V D_k^* \left(\sqrt{g}\, v^k \right) d\Omega = \int_V \sqrt{g} D_k^* v^k d\Omega = \int_\Sigma v_k dS^k \tag{8}$$

este teorema será profusamente aplicado en nuestros ulteriores cálculos, indicar que haremos uso de la segunda formulación por parecernos que facilita las largas operaciones matemáticas típica de los cálculos variacionales, pero igualmente se podría hacer uso de la primera forma del teorema de Gauss.

Para abordar la variación de la acción frente a una variación arbitraria del tensor métrico es de suma utilidad la identidad de Palatini [8], aplicable tanto al tensor de Ricci

$$\delta R_{ik} = D_k \left(\delta \Gamma_{il}^{\ \ l} \right) - D_l \left(\delta \Gamma_{ik}^{\ \ l} \right), \tag{9}$$

como al tensor de curvatura

$$\delta R^i_{\ kpq} = D_p \left(\delta \Gamma_{kq}^{\ \ i} \right) - D_q \left(\delta \Gamma_{kp}^{\ \ i} \right), \tag{10}$$

donde debemos tener presente que aunque la conexión no sea un tensor sí lo es su variación.

De (6) obtenemos la variación de la conexión

$$\delta \Gamma_{sk}^{\ \ i} = \delta L_{sk}^{\ \ i} - \phi^i \delta g_{sk} + g_{sk} g^{im} \phi^n \delta g_{mn}$$

donde tomamos como variables independientes las componentes contravariantes del tetrapotencial electromagnético y no sus componentes covariantes que así quedan en función del tens or métrico por la relación $\phi_i = g_{ik} \phi^k$. La variación de los símbolos de Christoffel es

$$\delta L_{sk}^{\ \ i} = -g^{ip} L_{sk}^{\ \ q} \delta g_{pq} + \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_s \delta g_{km} + \partial_k \delta g_{sm} - \partial_m \delta g_{sk} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} g^{im} \left(D_s^* \delta g_{km} + D_k^* \delta g_{sm} - D_m^* \delta g_{sk} \right),$$

por tanto la variación de la conexión ante una variación del tensor métrico es

$$\delta \Gamma_{sk}^{\ \ i} = \frac{1}{2} g^{im} \left(D_s^* \delta g_{km} + D_k^* \delta g_{sm} - D_m^* \delta g_{sk} \right) - \phi^i \delta g_{sk} + g_{sk} g^{im} \phi^n \delta g_{mn} . \tag{11}$$

En la variedad de Weyl el tensor de Ricci y la curvatura escalar son [9]

$$\begin{gathered} R_{ik} = R_{ik}^* + F_{ik} - 2 D_k^* \phi_i - g_{ik} D_s^* \phi^s + 2 \phi_i \phi_k - 2 g_{ik} \phi_s \phi^s \\ R = R^* - 6 D_s^* \phi^s - 6 \phi_s \phi^s , \end{gathered} \tag{12}$$

donde R_{ik}^* y R^* es el tensor de Ricci y la curvatura escalar calculados a partir de los símbolos de Christoffel y no de la conexión.

Con estas herramientas matemáticas estamos en condiciones de abordar la obtención de las ecuaciones de la gravitación aplicando el principio de mínima acción a la densidad lagrangiana de Weyl.

3. Principio de mínima acción en la teoría de Weyl

Lo que pretendemos es obtener las ecuaciones de la gravitación a partir de la acción de Weyl

$$I=\int\sqrt{g}\left(R^{2}+2\chi F_{ik}F^{ik}\right)d\Omega, \tag{13}$$

para ello vamos a suponer una variación arbitraria del tensor métrico, con la condición de que tanto la variación como sus primeras derivadas se anulen en el límite de la integración. Aplicaremos la variación al primer sumando de la acción (13)

$$\delta\left(\sqrt{g}R^{2}\right)=R^{2}\delta\sqrt{g}+2\sqrt{g}R\delta R=-\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{ik}R^{2}\delta g^{ik}+2\sqrt{g}RR_{ik}\delta g^{ik}+2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik}$$

para calcular el último de los sumandos aplicamos la identidad de Palatini (9)

$$\begin{gathered}2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik}=\\=2\sqrt{g}R\left[D_{k}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)-D_{l}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ l}\right)-D_{k}\left(g^{ik}\right)\delta\Gamma_{il}^{\ l}+D_{l}\left(g^{ik}\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ l}\right],\end{gathered} \tag{14}$$

para dar una indicación de cómo se realiza este cálculo lo vamos a hacer con el primer sumando de (14). Utilizamos la relación (7)

$$2\sqrt{g}RD_{k}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)=2\sqrt{g}R\left[D_{k}^{*}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)+4\phi_{k}g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right] \tag{15}$$

el primer sumando de la anterior expresión lo simplificamos mediante el teorema integral de Gauss

$$2\sqrt{g}RD_{k}^{*}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)=2\sqrt{g}D_{k}^{*}\left(Rg^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)-2\sqrt{g}D_{k}^{*}\left(Rg^{ik}\right)\delta\Gamma_{il}^{\ l},$$

el primero de los sumandos desaparece cuando se hace la integración de volumen y para simplificar el segundo sumando usamos (11)

$$\begin{gathered}2\sqrt{g}RD_{k}^{*}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)=-\sqrt{g}g^{ik}g^{lm}D_{k}^{*}R\left(D_{i}^{*}\delta g_{lm}+D_{l}^{*}\delta g_{im}-D_{m}^{*}\delta g_{il}\right)\\+2\sqrt{g}g^{ik}D_{k}^{*}R\phi^{l}\delta g_{il}-2\sqrt{g}g^{ik}D_{k}^{*}R\phi^{n}\delta g_{in}\end{gathered}$$

donde hemos tenido en cuenta que la derivada covariante del tensor métrico es nula. Ahora de nuevo se aplica el teorema de Gauss y se encuentra finalmente

$$2\sqrt{g}RD_{k}^{*}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)=\sqrt{g}g^{ik}g^{lm}D_{i}^{*}D_{k}^{*}R\delta g_{lm}.$$

Para concluir con el primero de los sumandos de (14) analizamos el segundo sumando de (15)

$$\begin{gathered}8\sqrt{g}R\phi_{k}g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}=4\sqrt{g}g^{ik}g^{lm}R\phi_{k}\left(D_{i}^{*}\delta g_{lm}+D_{l}^{*}\delta g_{im}-D_{m}^{*}\delta g_{il}\right)-\\-8\sqrt{g}R\phi^{i}\phi^{l}\delta g_{il}+8\sqrt{g}R\phi^{i}\phi^{n}\delta g_{in}\end{gathered}$$

y de nuevo al hacer la integración por partes y usar el teorema de Gauss nos queda

$$\sqrt{g}\left(-4g^{ik}g^{lm}\phi_{k}D_{i}^{*}R-4g^{ik}g^{lm}RD_{i}^{*}\phi_{k}\right)\delta g_{lm}$$

por tanto el primer sumando de (14) queda

$$\begin{gathered}2\sqrt{g}RD_{k}\left(g^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}\right)=\\=\sqrt{g}\left(g^{il}g^{km}D_{i}^{*}D_{l}^{*}R-4g^{km}\phi^{i}D_{i}^{*}R-4g^{km}RD_{i}^{*}\phi^{i}\right)\delta g_{km}.\end{gathered}$$

El procedimiento es similar para los restantes tres sumandos de (14) y obtenemos para el segundo sumando

$$
\begin{gathered}
-2\sqrt{g}RD_l\left(g^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ l}\right)= \\
=\sqrt{g}\begin{pmatrix}
-2g^{ik}g^{lm}D_i^*D_l^*R+g^{km}g^{il}D_i^*D_l^*R-6g^{km}\phi^iD_i^*R+ \\
+16g^{im}\phi_kD_i^*R+8g^{ik}RD_i^*\phi^m-4g^{km}RD_i^*\phi^i- \\
-32\phi^k\phi^m+8g^{km}R\phi_l\phi^l
\end{pmatrix}\delta g_{km},
\end{gathered}
$$

para el tercer sumando

$$
-2\sqrt{g}RD_kg^{ik}\delta\Gamma_{il}^{\ l}=\sqrt{g}\left(2g^{km}RD_i^*\phi^i+2g^{km}\phi^iD_i^*R\right)\delta g_{km},
$$

donde hemos aplicado la relación $D_rg^{ik}=2g^{ik}\phi_r$ que se establece como definición de un espacio de Weyl. Para el cuarto sumando de (14) encontramos

$$
2\sqrt{g}RD_lg^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ l}=\sqrt{g}\begin{pmatrix}
-4g^{ik}RD_i^*\phi^m-4g^{ik}\phi^mD_i^*R+2g^{km}RD_i^*\phi^i+ \\
+2g^{km}\phi^iD_i^*R-4g^{km}R\phi_l\phi^l+16R\phi^k\phi^m
\end{pmatrix}\delta g_{km}.
$$

Reuniendo todos los resultados y considerando la variación respecto a las componentes contravariantes del tensor métrico en vez de con respecto a las covariantes

$$
\begin{gathered}
2\sqrt{g}Rg^{ik}\delta R_{ik}= \\
=\sqrt{g}\begin{pmatrix}
-2g_{ik}D_l^*D^{*l}R+D_i^*D_k^*R+6g_{ik}\phi^lD_l^*R+4g^{ik}RD_l^*\phi^l- \\
-6\phi_iD_k^*R-6\phi_kD_i^*R-2RD_i^*\phi_k-2RD_k^*\phi_i+16R\phi_i\phi_k-4Rg_{ik}\phi_l\phi^l
\end{pmatrix}\delta g^{ik}
\end{gathered}
$$

donde hemos simetrizado la expresión entre paréntesis, ya que su parte antisimétrica se anula cuando se multiplica por el tensor simétrico δg^{ik}.

Reagrupando términos encontramos

$$
\delta\left(\sqrt{g}R^2\right)=\sqrt{g}\begin{pmatrix}
2RR_{(ik)}-\frac{1}{2}g_{ik}R^2-2g_{ik}D_l^*D^{*l}R+2D_i^*D_k^*R+ \\
+6g_{ik}\phi^lD_l^*R+4g^{ik}RD_l^*\phi^l-6\phi_iD_k^*R-6\phi_kD_i^*R- \\
-2RD_i^*\phi_k-2RD_k^*\phi_i+16R\phi_i\phi_k-4g_{ik}R\phi^l\phi_l
\end{pmatrix}\delta g^{ik},
$$

donde $R_{(ik)}$ representa la parte simétrica del tensor de Ricci.

Es necesario finalmente hacer la variación de la parte electromagnética de la acción, obteniendo al igual que en Relatividad General, el tensor energía-momento del campo electromagnético. Por tanto las ecuaciones de campo gravitatorio que se obtienen de la acción de Weyl (13) es

$$
\begin{gathered}
RR_{(ik)}-\frac{1}{4}g_{ik}R^2-g_{ik}D_l^*R^{,l}+D_i^*R_{,k}+3g_{ik}\phi^lR_{,l}+2g_{ik}RD_l^*\phi^l- \\
-3\phi_iR_{,k}-3\phi_kR_{,i}-RD_i^*\phi_k-RD_k^*\phi_i+8R\phi_i\phi_k-2g_{ik}R\phi^l\phi_l=-\chi T_{ik}.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

anotemos también que D_i^*R coincide con la derivada parcial $\partial_iR=R_{,i}$ ya que R es un invariante.

Si en vez de usar la derivada covariante D_k^* usamos la otra derivada D_k se obtiene

$$
\begin{gathered}
RR_{(ik)}-\frac{1}{4}g_{ik}R^2-4g_{ik}R\phi^l\phi_l+4R\phi_i\phi_k+2\phi_iR_{,k}+2\phi_kR_{,i}- \\
-4g_{ik}\phi^lR_{,l}-g_{ik}D_lR^{,l}-2g_{ik}RD_l\phi^l+D_iR_{,k}+RD_i\phi_k+RD_k\phi_i=-\chi T_{ik}.
\end{gathered}
$$

3. Ecuaciones de campo gravitatorio

Como ya habíamos anticipado las ecuaciones de campo gravitatorio (16) son ecuaciones diferenciales de cuarto orden, donde se encuentran entremezclados los potenciales gravitatorio y electromagnético. A causa de la simetría, (16) son diez ecuaciones diferenciales, las mismas que en Relatividad General. A (16) hay que añadirle las cuatro ecuaciones de campo electromagnético que resultan de la variación de (13) respecto a una variación arbitraria del potencial electromagnético.

Si contraemos (16) encontramos

$$D_l^*\left(\frac{\partial R}{\partial x_l}-2R\phi^l\right)=0 \tag{17}$$

donde hemos tenido en cuenta que la traza del tensor energía-momento electromagnético es nulo. (17) corresponde a la ley de conservación de la densidad de carga eléctrica en la teoría de Weyl. (17) se obtiene igualmente de las ecuaciones de campo electromagnético variando el potencial en (13).

Las ecuaciones de la gravitación (16) para el caso en que no exista campo electromagnético son

$$R^*\left(R_{ik}^*-\frac{1}{4}g_{ik}R^*\right)+D_i\,D_kR^*=0. \tag{18}$$

donde hemos utilizado (17) $D_l^*R^{,l}=0$. De (12) encontramos que tanto el tensor de Ricci como la curvatura escalar de (18) coinciden con el obtenido a partir de los símbolos de Christoffel (R_{ik}^* y R^*). Notemos que al no existir campo electromagnético $D_i^*=D_i$.

La teoría de Weyl admite cambios de calibración o gauge, o dicho de otra forma, el tensor métrico se puede multiplicar por cualquier función escalar, de donde se obtiene un nuevo tensor métrico que da lugar a las mismas ecuaciones de campo. Elegir una u otra calibración no afecta a las ecuaciones de campo, por lo que, al igual que en electromagnetismo, se puede elegir una calibración concreta que tenga como propiedad que simplifique los cálculos. Una opción es la gauge natural definida por

$$R=-4\Lambda$$

donde Λ es la constante cosmológica, cuyo valor no puede ser determinado por las ecuaciones de la gravedad y debe ser valorado por la experiencia. En contraste con la condición gauge Lorentz del electromagnetismo, sólo existe una única solución de las ecuaciones gravitatorias que cumpla la condición gauge natural. En efecto, sea g_{ik} y ϕ_k los potenciales que corresponden cuando se impone la gauge natural. Si ahora hacemos un cambio de calibración, obtendremos una nueva curvatura escalar

$$R'=\lambda^{-2}R=-\lambda^{-2}\,4\Lambda$$

lo que significa que los nuevos potenciales surgidos al hacer el cambio de calibración ya no cumplen la gauge natural. Esto no ocurre en la gauge Lorentz del electromagnetismo, donde existe una familia de soluciones que cumplen esa condición; la diferencia observada es ocasionada porque la gauge natural no es invariante frente a un cambio de calibración, mientras que la condición gauge Lorentz es invariante frente a transformaciones de coordenadas.

Siempre es posible elegir la condición gauge natural. En efecto, supongamos que resolvemos las ecuaciones de la gravedad y obtenemos un determinado valor de *R*. Siempre podemos obtener unos nuevos potenciales al hacer un cambio de calibración que venga definido por la función

$$\lambda=\sqrt{\frac{R}{-4\Lambda}},$$

en esta nueva calibración la curvatura escalar cumplirá la gauge natural

$$R'=\lambda^{-2}R=-4\Lambda.$$

Por último señalar que la condición gauge natural simplifica considerablemente los cálculos.

Si aplicamos la gauge natural a la ecuación (15) encontramos

$$R_{ik}^*-\frac{1}{2}g_{ik}R^*-\Lambda g_{ik}-2D_k^*\phi_i-2D_i^*\phi_k+10\phi_i\,\phi_k-g_{ik}\,\phi_l\,\phi^l+4g_{ik}D_l^*\phi^l=-\chi' T_{ik} \tag{19}$$

donde hemos utilizado las relaciones (12) y χ' es una nueva constante definida por $\chi'=\chi/R$.

Contrayendo (18) y teniendo en cuenta que $T_i^i = 0$

$$-4\Lambda = R = R^* - 12D_l^*\phi^l - 6\phi_l\phi^l$$

que al compararla con la segunda ecuación (12) queda

$$D_l^*\phi^l = 0 \tag{20}$$

que no es más que la condición gauge Lorentz del electromagnetismo, que surge de las ecuaciones de campo gravitatorio para el caso en que la curvatura escalar sea una constante; la relación (20) se puede obtener igualmente de (17). Reagrupando (20) las ecuaciones de la gravedad para el caso de curvatura escalar constante resultan ser

$$R_{ik}^* - \frac{1}{2}g_{ik}R^* - \Lambda g^{ik} = -\chi M_{ik} - \chi' T_{ik} \tag{21}$$

donde hemos definido

$$M_{ik} = \frac{1}{\chi'}\left(-2D_k^*\phi_i - 2D_i^*\phi_k + 10\phi_i\phi_k - g_{ik}\phi_l\phi^i\right) \tag{22}$$

que cabe entenderlo como el tensor energía-momento de la materia, que tiene su origen tanto en el campo gravitatorio como en el electromagnético, aunque en ausencia de electromagnetismo no existiría materia. (22) es distinta de la expresión que obtuvo Weyl, ya que en su cálculo hizo una simplificación excesiva al tomar desde un principio la constancia de R, lo que debe hacerse, tal como hemos hecho nosotros, después de obtenidas las ecuaciones generales de la gravedad y no antes. Notemos por último que al contraer (21) se reencuentra la segunda igualdad de (12), siempre y cuando se tome $D_l^*\phi^l = 0$.

La ecuación (21) en ausencia de campo electromagnético se reduce a

$$R_{ik}^* - \frac{1}{2}g_{ik}R^* - \Lambda g^{ik} = 0 \tag{23}$$

que coincide con la expresión de la Relatividad General en ausencia de fuentes y cuando se toma en consideración el término cosmológico.

4. Soluciones estáticas con simetría esférica

Buscamos una solución de (17) que tenga la propiedad de ser estática y con simetría esférica, que nos será válida para comparar los resultados de la teoría de Weyl con los de la Relatividad General.

Como hemos visto podemos elegir libremente la gauge natural que simplificará considerablemente la ecuación (18). Notemos que el tensor métrico que obtengamos será diferente si la calibración es otra diferente, no obstante los resultados que obtengamos con esa gauge serán los mismos, en particular obtendremos la misma ecuación geodésica, puesto que la conexión no se ve alterada por un cambio en la gauge.

Al aplicar la gauge natural a (18) obtenemos (23) que tiene la misma solución que la ecuación equivalente en Relatividad General. El elemento de línea con simetría esférica tiene la siguiente forma general en coordenadas esféricas

$$ds^2 = b(r)c^2dt^2 - a(r)dr^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 - r^2d\theta^2,$$

y al aplicar (22) se obtiene

$$b = \frac{1}{a} = 1 + \frac{2GM}{c^2}\frac{1}{r} - \frac{R}{12}r^2, \tag{24}$$

que volvemos a indicar tiene carácter general, aunque si elegimos otra calibración obtendremos otros valores de las componentes del tensor métrico, que no obstante, darán los mismos resultados que (24).

(24) nos muestra que la teoría de Weyl en ausencia de campo electromagnético basada en la densidad lagrangiana (13) tiene la misma solución estática y con simetría esférica que la teoría gravitatoria de la Relatividad General cuando se considera el término cosmológico. La teoría de

Weyl, por tanto, da la misma explicación que la Relatividad General a asuntos tales como la precesión de perihelio de Mercurio, el encurvamiento de la luz que pasa por el borde del Sol o el efecto Shapiro.

5. Conclusiones

Hemos establecido las relaciones matemáticas necesarias para calcular la variación de a acción de Weyl, utlizando tanto la identidad de Palatini como el teorema integral de Gauss. Definimos la gauge natural y obtenemos las ecuaciones de la gravitación en esa gauge en el caso de ausencia de campo electromagnético. Finalmente encontramos la soución estático con simetría esféria, que resulta ser la misma que la equivalente solución para las ecuaciones de la Relatividad General con presencia de término cosmológico.

6. Bibliografía

[1] WEYL, H.: «Gravitation und Elektrizität», Sitzungsbericte der Preussischen Akad. d.Wissenschaften, 465-480 (1918), traducción al inglés en: WEYL, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216. En años sucesivos Weyl hizo modificaciones en su teoría, ver GOENNER, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

[2] WEYL, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.

[3] LANCZOS, Cornelius: «A remarkable property of the Riemann-Christoffe tensor in four dimensions», *Annals of Mathematics* **39-4** (1938) 842-850.

[4] EDDINGTON, A. S.: «The mathematical theory of Relativity», Chelsea Publishing Company, 1975, pp. 196-212.

[5] PAULI, Von Walfgang: «Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl», *Physikalische Zeitschrift* **20** (1919) 457-467.

[6] STRAUB, William O.: «Weyl's theory of the combined gravitational-electromagnetic field», www.weylmann.com.

[7] Hermann Weyl, *Space-Time-Matter*, ob. cit., pp. 121-138.

[8] FERRARIS, M.; FRANCAVIGLIA, M; REINA, C.: «Variational Formulation of General Relativity from 1915 to 1925 'Palatini's Method' Discovered by Einstein in 1925», *General Relativity and Gravitation* **14-3** (1982) 243-254.

[9] A. S. Eddington, ob. cit., pp. 196-212.