La precesión del pericentro en la gravedad conforme de Weyl

The precession of the pericentre in Weyl conformal gravity

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. La teoría de la gravedad derivada del tensor de Weyl admite una solución estática y con simetría esférica que se diferencia de la correspondiente solución de la Relatividad General, lo que permite hallar divergencias entre ambas teorías. Analizamos la corrección a la precesión planetaria de Einstein obteniendo la solución exacta. Encontramos los valores de los parámetros de la solución estática con simetría simétrica que lo asociamos a la constante cosmológica.

Abstract. The theory of gravity as derived from the Weyl tensor admits a static, spherically symmetric solution which differs from the corresponding solution of general relativity, which allows us to find differences between the two theories. We analyze the correction to planetary precession of Einstein obtaining the exact solution. We found the parameters of the static spherically symmetric solution which we associate to the cosmological constant.

1. Introducción

En el año 1918 Hermann Weyl diseñó la primera teoría de campo unificado [1] [2], con la que pretendía explicar tanto el campo gravitatorio como el electromagnético a partir de una base geométrica. En esencia la teoría de Weyl supone una variedad espacio-temporal tetradimensional de tensor métrico simétrico, sin torsión (es decir de conexión simétrica) y con un tensor de no-metricidad no nulo dado por la expresión

$$Q_{ikr} = D_r g_{ik} = -2 g_{ik} \phi_r$$

donde

$$d\phi = \phi_r dx^r$$

es una forma diferencial, que en el caso de ser una diferencial exacta reduce la variedad de Weyl a la de Riemann.

En la teoría de Weyl g_{ik} cumple el mismo doble papel que en la teoría general de la relatividad, a saber, es el tensor que nos informa de las propiedades métricas de la variedad y también son las componentes del potencial gravitatorio. El tetravector ϕ_r representa en la teoría de Weyl las componentes del tetrapotencial electromagnético, o para ser más precisos, ambos tetravectores son proporcionales entre sí.

La variedad de Weyl admite cambios en la calibración. Es decir, se pueden obtener nuevas componentes del tensor métrico a partir de la relación

$$g'_{ik} = \psi\left(x^r\right) g_{ik}$$

donde ψ es una función cualquiera de la posición espacio-temporal. La teoría de Weyl exige que las ecuaciones de campo sean invariantes no sólo frente a transformaciones de coordenadas genéricas, sino también ante cambios de calibración. Consideremos dos calibraciones diferentes ψ y ψ', que dan lugar a dos nuevos tensores métricos

$$g'_{ik} = \psi g_{ik} \qquad g''_{ik} = \psi' g_{ik}$$

entonces al pasar de la calibración ψ a la ψ' el tensor métrico se transforma por

$$g''_{ik} = \frac{\psi'}{\psi}\psi g_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} g'_{ik} = \lambda^2 g'_{ik}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2 por ser éste el exponente de la función λ en la ecuación de transformación. Fácilmente se encuentra que el tensor métrico en forma contravariante tiene de peso -2 y que el determinante del tensor métrico es de peso 8. De aquí se deduce que el peso de la conexión es 0 e igual propiedad tienen el tensor de curvatura $R^{i}{}_{kpq}$ y su contracción el tensor de Ricci R_{ik} (definido por $R_{ik} = R^{p}{}_{ikp}$); no obstante la curvatura escalar tiene de peso -2, mientras que las coordenadas espacio-temporales no tienen peso, ya que son independientes de la calibración.

Las ecuaciones de campo se obtienen al aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$I = \int \sqrt{g}\, \mathfrak{L}\, d\Omega$$

donde debemos cuidar que el integrando sea invariante tanto frente a cambios de coordenadas como de calibración, lo que nos asegurará las correctas propiedades de invariancia de las ecuaciones de campo.

Desde hace unos años [3] se ha renovado el interés por las ecuaciones de la gravitación que se obtienen de densidades lagrangianas invariantes frente a calibración, es decir que son invariantes conformes. Una posibilidad que ha sido especialmente estudiada, son las ecuaciones de campo derivadas de la densidad lagrangiana

$$\sqrt{g}\, \mathfrak{L} = \sqrt{g}\, C_{ikpq} C^{ikpq} \tag{1}$$

donde $C^{i}{}_{kpq}$ es el tensor de Weyl que tiene como característica ser un tensor de cuarto orden con las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y ser invariante ante cambios de calibración; es definido en un espacio de Riemann (es decir que tomamos ϕ_k nula) por

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(g_{ik}R_{jl} - g_{il}R_{jk} - g_{jk}R_{il} + g_{jl}R_{ik}\right) + \frac{1}{6}\left(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}\right)R. \tag{2}$$

Una cálculo directo combinando (4) y (5) nos lleva a

$$\sqrt{g}\, C_{ikpq} C^{ikpq} = \sqrt{g}\left(R_{ikpq}R^{ikpq} - 2R_{ik}R^{ik} + \frac{1}{3}R^2 \right),$$

no obstante, la variación de la acción basada en la anterior expresión admite una nueva simplificación, de tal forma que se reduce a

$$\delta \int \sqrt{g}\, C_{ikpq} C^{ikpq} d\Omega = \delta \int \sqrt{g}\left(R_{ik}R^{ik} - \frac{1}{3}R^2 \right) d\Omega. \tag{3}$$

Debemos observar que estas ecuaciones de la teoría de la gravitación conforme son válidas en el espacio de Riemann y no en el de Weyl.

2. Solución estática con simetría esférica

De (3) se derivan las ecuaciones de campo gravitatorio de la teoría conforme [4]

$$\begin{aligned} &-D_m D^m R_{ik} - g_{ik} D_m D_l R^{ml} + D_m D_i R^m_k + D_m D_k R^m_i + \\ &+2R_{mi}R^m_k - \frac{1}{2}g_{ik}R_{ml}R^{ml} - \frac{1}{3}\left(2RR_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R^2 - 2g_{ik}D_m D^m R + 2D_i D_k R \right) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

si contraemos (4) se encuentra que

$$D_m D_l R^{ml} = \frac{1}{2} D_m D^m R,$$

entonces (4) también se puede poner como

$$-D_m D^m R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} D_m D^m R + D_m D_i R_k^m + D_m D_k R_i^m +$$
$$+2R_{mi} R_k^m - \frac{1}{2} g_{ik} R_{ml} R^{ml} - \frac{1}{3}\left(2RR_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R^2 - 2g_{ik} D_m D^m R + 2D_i D_k R \right) = 0. \tag{5}$$

Como se demuestra en [5] la solución estática con simetría esférica en una teoría conforme puede ponerse, en una adecuada calibración, bajo la forma

$$ds^2 = b(r) c^2 dt^2 - \frac{1}{b(r)} dr^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - r^2 d\theta^2,$$

la función $b(r)$ es dada por

$$b(r) = 1 - \frac{\beta(2-3\beta\gamma)}{r} - 3\beta\gamma + \gamma r - kr^2 \approx 1 - \frac{\beta}{r} + \gamma r - kr^2, \tag{6}$$

donde α, β y γ son constantes positivas.

La solución (6) debe reducirse a la métrica de Schwarchild, por tanto $\beta = 2GM/c^2$; además cuando $\gamma = 0$ entonces $R = 12k$. En Relatividad General cuando ocurre esta circunstancia en el caso exterior, que es el que estamos considerando, debe ser $R = 4\Lambda$, por tanto $k = \Lambda/3$. Para la determinación de la constante γ usamos el análisis dimensional, teniendo presente que γ sólo puede depender de las constantes G, c, de la masa del astro que crea el campo M y del término cosmológico Λ. De las diferentes soluciones que se encuentran la que tiene mayor base física es $\gamma = \gamma_0 \sqrt{\Lambda}$ donde γ_0 es un factor numérico adimensional del orden de la unidad. Entonces tendremos para la métrica estática con simetría esférica

$$b(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \gamma_0 \sqrt{\Lambda} r - \frac{\Lambda}{3} r^2. \tag{7}$$

Manhnheim y Kazanas [5] han planteado que el término γr explicaría las curvas de la rotación anómala de las galaxias, siempre y cuando $\gamma \approx 10^{-26} m^{-1}$. Los mismos autores señalan que el anterior valor es del mismo orden que la inversa de la longitud de Hubble. No obstante, por (7) y dando a la constante cosmológica el valor $\approx 10^{-52} m^{-2}$, encontramos el mismo valor numérico que el exigido a γ para explicar las curvas de rotación galácticas, con el añadido que con nuestra propuesta γ es una verdadera constante independiente del tiempo.

3. La constante cosmológica en la solución estática con simetría esférica

La presencia de la constante cosmológica en la solución estática con simetría esférica exige algún comentario. La constante cosmológica está asociada con la energía del vacío o energía oscura por la relación [6]

$$\rho_v = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

que produce una presión negativa dada por

$$p_v = -\rho_v c^2.$$

Podemos entender que esta energía oscura se encuentra esparcida por todo el Universo con una misma densidad. La masa correspondiente a la energía oscura es fuente de campo gravitatorio, aunque con una ley diferente de la que corresponde a la materia bariónica.

Partimos de la ecuación de campo gravitatorio con término cosmológico de la Relatividad General

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = -\chi T_{ik}$$

si descomponemos el tensor métrico $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$ donde η_{ik} es el tensor métrico de Minkowski siendo h_{ik} la perturbación gravitatoria y eliminamos de la ecuación de campo los términos no lineales obtenemos las ecuaciones linealizadas de la gravitación, las cuales pueden ser expresadas a partir de los campos gravitoeléctricos **E** y gravitomagnéticos **B**, en una forma bastante similar a las ecuaciones de Maxwell [7]. La primera de estas ecuaciones es

$$\nabla \mathbf{E} = -4\pi G\rho + \Lambda c^2 . \tag{8}$$

Ahora supongamos un cuerpo de masa *M* que crea el campo estático con simetría esférica, si además suponemos por el principio cosmológico que *M* se encuentra en el «centro del Universo» podemos aplicar el teorema de Gauss a la anterior ecuación (en forma idéntica como se hace en la teoría electromagnética) y obtenemos que el campo gravitoeléctrico producido por la energía oscura es

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\Lambda c^2 \mathbf{r} = 2G\frac{\varepsilon_v / c^2}{r^3}\mathbf{r}$$

donde ε_v / c^2 representa la masa asociada a la energía del vacío contenida en una esfera de radio *r*. Notemos que al campo gravitotorio sólo contribuye la energía oscura que está encerrada en el interior de la esfera de radio *r*. O sea, la energía oscura que ocupa el resto del Universo no interviene. Nos encontramos, por tanto, en la misma situación que se da en la teoría newtoniana con la llamada paradoja de la fuerza [8]. Según esta paradoja la fuerza que actúa sobre cada cuerpo en un Universo infinito queda indeterminada, ya que depende de cómo se haga el cálculo.

El anterior razonamiento nos viene a confirmar que el último sumando de (7) es problemático en tanto en cuanto no tiene en consideración al conjunto del Universo, sino solamente la porción de Universo encerrada en una esfera de radio *r* (distancia del planeta al astro respecto al cual orbita).

El anterior razonamiento no lo podemos extender al tercer sumando de (7) puesto que su existencia no modifica la ecuación (8) y por consiguiente no es de aplicación el teorema de Gauss.

4. Precesión del pericentro en gravedad conforme

Sultana, Kazanas y Levi Said [9] han aplicado (7) para obtener la corrección que hay que hacer a la precesión del pericentro predicha por la teoría general de la Relatividad. Estos autores han usado el métrodo dado por Weinberg [10] por lo que sólo obtienen un valor aproximado, válido hasta el primer orden de la excentricidad del planeta, aunque en su expresión final aparece la excentricidad al cuadrado.

A continuación haremos el cálculo exacto de la precesión del pericentro que se desprende de (7), para ello aplicaremos la teoría de las perturbaciones planetarias. Hay que advertir que las perturbaciones que nos interesan son de tipo clásico, es decir las perturbaciones originadas en la modificación del potencial kepleriano que ahora queda de la forma

$$b(r) = 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 + \frac{2\phi_0}{c^2} + \frac{2\phi_1}{c^2} + \frac{2\phi_2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \phi = -\frac{GM}{r} + \frac{1}{2}\gamma_0 c^2 \sqrt{\Lambda}\, r - \frac{\Lambda}{6}c^2 r^2 . \tag{9}$$

Señalar que asociada a las anteriores perturbaciones clásicas existen otras de tipo relativistas pero son sensiblemente más débiles por lo que son despreciadas.

Las aceleraciones perturbatrices derivadas de (9) son

$$\mathbf{W}_1 = -\nabla\phi_1 = -\nabla\left(\frac{1}{2}\gamma_0 c^2 \sqrt{\Lambda} r\right) = -\frac{1}{2}\gamma_0 c^2 \sqrt{\Lambda}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{W}_2 = -\nabla\phi_2 = -\nabla\left(-\frac{\Lambda}{6}c^2 r^2\right) = \frac{\Lambda}{3}c^2 \mathbf{r}.$$

Conocida las aceleraciones perturbatrices que actúan sobre el planeta se calcula la variación de sus elementos orbitales (semieje mayor, excentricidad, inclinación, longitud del nodo ascendente y argumento de latitud del pericentro; *a, e, i,* Ω y ω respectivamente) por las ecuaciones de Gauss [11]

$$\frac{di}{dt}=\frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}W^n\cos u$$
$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[eW^r\sin\theta+\frac{a\left(1-e^2\right)}{r}W^t\right]$$
$$\frac{de}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[W^r\sin\theta+W^t\left(\cos\theta+\frac{1}{e}-\frac{r}{ae}\right)\right]$$
$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{na\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}W^n\sin u$$
$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left\{-W^r\cos\theta+\left[1+\frac{r}{a\left(1-e^2\right)}\right]W^t\sin\theta\right\}-\cos i\frac{d\Omega}{dt}$$

W^n, W^r, W^t son las componentes normal, radial y tangencial de la aceleración perturbativa, θ la anomalía verdadera, n el movimiento medio y $u=\theta+\omega$.

Para la perturbación $\mathbf{W}_1$ tenemos

$$W_1^r=\mathbf{W}_1\frac{\mathbf{r}}{r}=-\frac{1}{2}\gamma_0c^2\sqrt{\Lambda};\quad W_1^n=0;\quad W_1^t=0$$

y la variación del argumento de latitud del pericentro queda

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right)_1=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}W_1^r\cos\theta=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\gamma_0c^2\sqrt{\Lambda}\cos\theta, \tag{10}$$

como lo que nos interesa es la perturbación secular y no la instantánea, promediamos (10) en un periodo. Para los cálculos siguientes usaremos las relaciones válidas para órbitas keplerianas

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta};\quad n=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{GM}{a^3}},$$

donde m su masa, T el periodo orbital y M la masa del astro central respecto al cual orbita el planeta. El cálculo se facilita usando como variable la anomalía excéntrica χ definida por

$$r=a\left(1-e\cos\chi\right),$$

siendo válidas las relaciones

$$\cos\theta=\frac{\cos\chi-e}{1-e\cos\chi};\quad t=\frac{\chi-e\sin\chi}{n};\quad dt=\frac{1-e\cos\chi}{n}d\chi$$

donde la segunda expresión es la ecuación de Kepler.

En (9) lo único que varía con el tiempo es $\cos\theta$ siendo por tanto la única función que hay que promediar

$$\overline{\cos\theta}=\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\cos\theta dt=\frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\chi-e}{1-e\cos\chi}\frac{1-e\cos\chi}{n}d\chi=-e$$

que al aplicarla a (10) da el ángulo que gira el pericentro respecto al nodo ascendente cada periodo

$$\Delta\psi_1=-\frac{\pi\sqrt{1-e^2}a^2}{GM}\gamma_0c^2\sqrt{\Lambda},$$

que es un resultado ligeramente diferente al obtenido por los autores citados, aunque para pequeños valores de la excentricidad ambos resultados coinciden.

Aplicando las restantes ecuaciones de Gauss se encuentra sin dificultad que los demás elementos orbitales quedan invariables.

Repitiendo el mismo procedimiento para la aceleración perturbatriz $\mathbf{W}_2$ se obtiene una variación del pericentro dada por [12]

$$\Delta\psi_2 = \frac{\pi\sqrt{1-e^2}\,a^3}{GM}\frac{\Lambda c^2}{3}$$

reuniendo los resultados anteriores con la precesión de Einstein se encuentra

$$\Delta\psi = \frac{6\pi GM}{c^2 a\left(1-e^2\right)} - \frac{\pi\sqrt{1-e^2}\,a^2}{GM}\gamma_0 c^2\sqrt{\Lambda} + \frac{\pi\sqrt{1-e^2}\,a^3}{GM}\frac{\Lambda c^2}{3}$$

que es una solución exacta váida para cualquier orden de la excentricidad.

5. Conclusiones

Analizamos la solución estática con simetría esférica de la gravedad conforme y relacionamos sus coeficientes con la constante cosmológica, encontrando que los valores numéricos son los adecuados para poder explicar la anómala curva de rotación de las galaxias.

Tratamos la teoría linealizada de la Relatividad General con término cosmológico y encontramos una paradoja que hace problemático el término que contiene esta constante en la solución con simetría esféria.

Finalmente hallamos de forma rigurosa la precesión por periodo del pericentro de un planeta tal como se deduce de la solución estática con simetría esférica de la gravedad conforme.

6. Bibliografía

[1] Weyl, H.: «Gravitation und Elektrizität», Sitzungsbericte der Preussischen Akad. d.Wissenschaften, 465-480 (1918), traducción al inglés en: Weyl, H.: «Gravitation and Electricity», en *The principle of relativity (a colletion of original memoirs on the special and general theory of relativity)*, Dover, 1952, pp. 201-216. En años sucesivos Weyl hizo modificaciones en su teoría, ver Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field theories», *Living Reviews in Relativity* 7 (2004) 1-153.

[2] Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.

[3] Schimming, Rainer; Schmidt, Hans-Jürgen: «On the history of fourth order metric theories of gravitation», arXiv:gr-qc/0412038v1, 2004.

[4] Payandeh, Farrin; Fathi, Mohsen: « R^2 theory of gravity», *Journal of Physics: Conferences Series* **442** (2013) 012053.

[5] Mannheim, Philip D.; Kazanas, Demosthenes: «Exact vacuum solution to conformal Weyl gravity and galactic rotation curves», *The Astrophysical Journal* **342** (1989) 635-638.

[6] Carroll, Sean M.: «The Cosmological Constant», arXiv:astro-ph/0004075v2, 2000.

[7] Segura González, Wenceslao: *Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach*, eWT Ediciones, 2013, pp. 64-67 y Matos, C. J. de: «Approximation to the Second Order. Approximation of Einstein Field Equations with a Cosmological Constant in a Flat Background», arXiv:gr-qc/0609116, 2006, los resultados de esta investigación no concuerdan con los nuestros.

[8] Assis, Andre K. T.: *Relational Mechanics*, Apeiron, 1999, pp. 86-94.

[9] Sultana, Joseph; Kazanas, Demosthenes, Levi Said, Jackson: «Conformal Weyl gravity and perihelion precessión», *Physical Review* **D 86** (2012).

[10] Weinberg, Steven: *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, Johan Wiley and Sons, 1972, pp. 194-201.

[11] Moulton, Forest Ray: *An Introduction to celestial mechanics*, Dover, 1970, pp. 321-363.

[12] Wright, Edward L.: «Interplanetary measures can not bound the cosmological constant», arXiv:astro-ph/9805292v1, 1998. La variación del pericentro calculada en este trabajo es el doble de la que nosotros hallamos en este trabajo.