# Eselsbrücken für die Berechnung der Spur von Produkten von Gammamatrizen

Björn Schemmann

Der Autor stellt eine kleine Hilfestellung zur Berechnung von Spuren der Form $tr(\gamma^{\mu_1}, ..., \gamma^{\mu_{2n}})$ vor.

## EINLEITUNG

Im Rahmen der Quantenelektrodynamik treten bei der Berechnung der spin-gemittelten Amplituden bekannterweise Spuren über Produkte von Gammamatrizen auf. Bei der Berechnung dieser Spuren wird die Cliffordalgebra verwendet. Nach [1] ist die Spur eines Produktes einer geraden Anzahl von Gammamatrizen dann allgemein über die folgende Regel zu bestimmen:

$$tr(\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}) = 4 \sum \varepsilon (a_{i_1} \cdot a_{j_1}) \cdots (a_{i_n} \cdot a_{j_n}), \tag{1}$$

wobei $\varepsilon$ die Signatur der Permutation $i_1 j_1 ... i_n j_n$ ist. Die Summe läuft über die $\frac{2n!}{2^n n!} = (2n-1)!!$ Permutationen, welche die folgenden Regeln erfüllen: $1 = i_1 < i_2 < ... < i_n$ und $i_k < j_k$.

Um Ballast abzuwerfen und eine bessere mathematische Handhabbarkeit zu ermöglichen werden wir die obige „slash-Notation“ durch die einfachen Gammamatrizen ersetzen und die „Sigma-Schreibweise“ für die Permutationen verwenden. Außerdem wird sich folgende Definition als nützlich erweisen:

> **Definition 1** (*Gebundene Permutation*): Eine Permutation $\sigma \in S_{2n}$, $n \in N$, nennt man gebunden, wenn $1 = \sigma(1) < \sigma(3) < ... < \sigma(2n-1)$ und $\sigma(2k-1) < \sigma(2k)$ für alle $k = 1, ..., n$. Eine gebundene Permutation bezeichnen wir mit $\sigma_b$.

Die Aussage aus [1] nimmt dann folgende Gestalt an:

$$tr(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}) = 4 \sum_{\sigma_b \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma_b) \eta^{\mu_{\sigma_b(1)} \mu_{\sigma_b(2)}} \cdots \eta^{\mu_{\sigma_b(2n-1)} \mu_{\sigma_b(2n)}}, \tag{2}$$

wobei $\eta^{\alpha\beta}$ die Minkowskimetrik ist.

Im nun folgenden Text werden wir eine Konstruktionsvorschrift für die gebundenen Permutationen vorstellen, sowie eine Methode ihr entsprechendes Signum zu bestimmen. Wir werden feststellen, daß sich die Spuren nach folgendem Muster konstruieren lassen, z.B. für $tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)$:

Schreibe alle Indizes auf und verbinde je zwei mit Klammern. Wiederhole dies für alle möglichen Kombinationen von Verbindungen. In unserem Beispiel wären dies.

$$\mu\nu\alpha\beta, \quad \mu\nu\alpha\beta, \quad \text{und} \quad \mu\nu\alpha\beta. \tag{3}$$

Die verbundenen Indizes bilden die Komponenten der Minkowskimetriken, also $\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}$, $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}$ und $\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}$. Ihre Vorzeichen sind gegeben durch $(-1)^\kappa$, wobei $\kappa$ die Häufigkeit ist, mit der sich die Klammern kreuzen. Hier also $(-1)^0 = 1$ für den ersten Ausdruck, $(-1)^1 = -1$ für den zweiten Ausdruck und $(-1)^0 = 1$ für den letzten. Somit erhalten wir

$$tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4[(-1)^0 \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + (-1)^1 \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + (-1)^0 \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}] = 4[\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} - \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}] \tag{4}$$

## KONSTRUKTION GEBUNDENER PERMUTATIONEN

Wir werden nun das zuvor genannte Beispiel auf den Fall von $2n$ Gammamatrizen verallgemeinern und die zugehörigen Aussagen beweisen.

> **Aussage 1:** Man erhält sämtliche gebundenen Permutationen aus $S_{2n}$ indem man alle Mölichkeiten betrachtet, die Menge $\{1, ..., 2n\}$ zu Paaren $(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_n, \beta_n)$ zu gruppieren. Dabei soll $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_k < \beta_k$ für alle $k \in 1, ..., n$ und $\alpha_l < \alpha_m$ für alle $l < m$ gelten. Die zugehörige gebundene Permutation ist dann definiert durch $\sigma(2k-1) := \alpha_k, \ \sigma(2k) := \beta_k$.

> **Definition 2:** (Eselsbrücke) Ein Paar $(\alpha_k, \beta_k)$ wie oben erklärt nennen wir Eselsbrücke.

<u>*Beweis von Aussage 1:*</u> Der Beweis ergibt sich sofort aus der Definition einer gebundenen Permutation. Zunächst liefert die Konstruktionsvorschrift eine gebundene Permutation, da $\sigma(1) = \alpha_1 = 1$, sowie $\sigma(2l-1) := \alpha_l < \alpha_m =: \sigma(2m-1)$ für alle $l < m$, als auch $\sigma(2k-1) := \alpha_k < \beta_k =: \sigma(2k)$. Umgekehrt existiert zu jeder gebundenen Permutation ein Satz von Eselsbrücken. Gegeben sei eine gebundene Permutation $\sigma_b$. Die Eselsbrücken sind dann gegeben durch $(\sigma_b(1), \sigma_b(2)), ..., (\sigma_b(2n-1), \sigma_b(2n))$, denn diese erfüllen alle Bedingungen von Eselsbrücken. ∎

**Anmerkung 1:** Die obige Vorschrift läßt sich bildlich wie folgt beschreiben: Gegeben seien die Zahlen $1, ...., 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Verbinde die 1 mit einer weiteren Zahl $\beta_1$ durch einen Bogen, also $\overbrace{1, ..., \beta_1}, ..., 2n$. Im nächsten Schritt verbinde für den Fall daß $\beta_1 \neq 2$ die 2 mit einer weiteren Zahl $\beta_2$, mit der Einschränkung $\beta_2 \neq \beta_1$ und $\beta_2 \neq 1$. Wenn $\beta_1 = 2$ verbinde die 3 mit einer weiteren Zahl $\beta_2$, mit $\beta_2 \neq 1$ und $\beta_2 \neq 2$. Diesen Prozess führt man solange aus, bis jede Zahl durch genau einen Bogen mit einer anderen verbunden ist. Die Vorschrift liefert also eine aufsteigende Menge von Zahlen $1 =: \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ und eine Menge von Zahlen $\beta_1, ...\beta_n$ mit $\alpha_k < \beta_k$. Die Paare $(\alpha_k, \beta_k)$ sind also genau die vorher definierten Eselsbrücken. Umgekehrt ist natürlich jede Menge von Eselsbrücken einem solchen mit Klammern versehenen Bild zuzuordnen. Wir erhalten also alle Sätze von Eselsbrücken, wenn wir alle nach dieser Anmerkung möglichen Bilder zeichnen. Für die weitere Interpretation im nächsten Abschnitt ist es hilfreich die Bögen nur oberhalb oder nur unterhalb der Zahlenreihe zu zeichnen, also $1234$ oder $1234$, anstelle von $1234$, als auch darauf zu achten, daß sich die Bögen nur so wenig wie möglich kreuzen.

## SIGNUM UND ESELSBRÜCKEN

Bisher haben wir eine einfache Methode gefunden um alle gebundenen Permutationen von $S_{2n}$ zu finden. Wir nutzen einfach alle Möglichkeiten aus Anmerkung 1, um die Bögen zu zeichnen. Die Permutation ist dann durch die Interpretation der Paare als Eselsbrücke gegeben. Wir erinnern uns noch, daß in

$$tr(\gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_{2n}}) = 4 \sum_{\sigma_b \in S_{2n}} \varepsilon(\sigma_b) \eta^{\mu_{\sigma_b(1)} \mu_{\sigma_b(2)}} \cdots \eta^{\mu_{\sigma_b(2n-1)} \mu_{\sigma_b(2n)}} \tag{5}$$

die Paare $(\sigma_b(2k-1), \sigma_b(2k))$ genau die Eselsbrücken $(\alpha_k, \beta_k)$ sind, die wir nun sehr einfach bestimmen können. Was uns hingegen noch fehlt ist das Signum $\varepsilon(\sigma_b)$. Dem wollen wir uns nun zuwenden.

**Definition 3** (*Kreuzung*): *Man sagt, daß zwei Eselsbrücken* $(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j)$ *mit* $i < j$ *einander kreuzen, wenn gilt* $\beta_i > \alpha_j$ *und* $\beta_i < \beta_j$.

**Anmerkung 2:** Nach Voraussetzung gilt natürlich auch $\alpha_i < \alpha_j$. Man kann sich überzeugen, daß der Fall zweier sich kreuzender Eselsbrücken folgender Situation in dem Bild aus Anmerkung 1 entspricht:

$$..., \alpha_i, ..., \alpha_j, ..., \beta_i, ..., \beta_j, ... \tag{6}$$

Kommen wir nun zur zentralen

**Aussage 2:** Sei $\kappa_{\sigma_b}$ die Zahl der Kreuzungen von Eselsbrücken einer gebundenen Permutation $\sigma_b$, dann ist das zugehörige Signum gegeben durch $\varepsilon(\sigma_b) = (-1)^{\kappa_{\sigma_b}}$.

Für den Beweis dieser Aussage brauchen wir noch zwei Hilfssätze:

**Hilfssatz 1:** Für gebundene Permutationen $\sigma_b$ gilt

$$(-1)^{\kappa_{\sigma_b}} = \prod_{i<j}^{n} \frac{\sigma_b(2j-1) - \sigma_b(2i)}{2j-1-2i} \cdot \frac{\sigma_b(2j) - \sigma_b(2i)}{2j-2i} \cdot \left| \frac{(2j-2i)(2j-1-2i)}{\sigma_b(2j) - \sigma_b(2i)(\sigma_b(2j-1) - \sigma_b(2i))} \right|. \tag{7}$$

<u>*Beweis:*</u> Wir haben in Aussage 1 bereits gesehen, daß sich jede gebundene Permutation eindeutig einem Satz von Eselsbrücken zuordnen läßt. Um den Hilfssatz zu beweisen, müssen wir sicherstellen, daß jedes Paar von Eselsbrücken der gebundenen Permutation daraufhin untersucht wird, ob es sich kreuzt oder nicht. Für den Fall einer Kreuzung muß gelten

$$\frac{\sigma_b(2j-1) - \sigma_b(2i)}{2j-1-2i} \cdot \frac{\sigma_b(2j) - \sigma_b(2i)}{2j-2i} \cdot \left| \frac{(2j-2i)(2j-1-2i)}{\sigma_b(2j) - \sigma_b(2i)(\sigma_b(2j-1) - \sigma_b(2i))} \right| = -1, \tag{8}$$

für ein $i < j$. Ansonsten muß der Ausdruck eins ergeben.

Für jedes Paar von Eselsbrücken $(\alpha_l, \beta_l), (\alpha_m, \beta_m)$ gilt o.B.d.A mit $l < m$, daß dieses eindeutig dem Paar $(\sigma_b(2l-1), \sigma_b(2l)), (\sigma_b(2m-1), \sigma_b(2m))$ zugeordnet ist. Da wir im Produkt über alle $i < j$ multiplizieren, erhalten wir auch den Faktor

$$\frac{\sigma_b(2m-1)-\sigma_b(2l)}{2m-1-2l} \cdot \frac{\sigma_b(2m)-\sigma_b(2l)}{2m-2l} \cdot \left| \frac{(2m-2l)(2m-1-2l)}{\sigma_b(2m)-\sigma_b(2l)(\sigma_b(2m-1)-\sigma_b(2l))} \right| \tag{9}$$

$$= \frac{\alpha_m-\beta_l}{2m-1-2l} \cdot \frac{\beta_m-\beta_l}{2m-2l} \cdot \left| \frac{(2m-2l)(2m-1-2l)}{(\beta_m-\beta_l)(\alpha_m-\beta_l))} \right| \tag{10}$$

Wir haben also zu jedem Paar von Eselsbrücken genau einen solchen Faktor in unserem Produkt. Betrachten wir nun den Fall einer Kreuzung, also $\beta_l > \alpha_m$ und $\beta_l < \beta_m$. Hier ist

$$\frac{\alpha_m - \beta_l}{2m-1-2l} \cdot \frac{\beta_m - \beta_l}{2m-2l} \cdot \left| \frac{(2m-2l)(2m-1-2l)}{(\beta_m-\beta_l)(\alpha_m-\beta_l))} \right| = -1, \tag{11}$$

da $\frac{\alpha_m-\beta_l}{2m-1-2l} < 0$ und $\frac{\beta_m-\beta_l}{2m-2l} > 0$. Für die Fälle ohne Kreuzung, also $\beta_l > \beta_m$ und $\beta_l > \alpha_m$ sowie $\beta_l < \alpha_m$ und $\beta_l < \beta_m$ erhalten wir eine eins als Ergebnis. (Der Fall $\beta_l < \alpha_m$ und $\beta_l > \beta_m$ ist natürlich ausgeschlossen, da immer gilt $\beta_m > \alpha_m$.) Damit haben wir den Satz bewiesen, da wir für jede Kreuzung mit $(-1)$ multiplizieren, also insgesamt mit $(-1)^{\kappa_{\sigma_b}}$.

■

**Hilfssatz 2:** Für gebundene Permutaionen $\sigma_b$ gilt

$$\prod_{i<j}^{n} \frac{\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i)}{2j-1-2i} \cdot \frac{\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)}{2j-2i} \cdot \left| \frac{(2j-2i)(2j-1-2i)}{\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)(\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i))} \right| = \varepsilon(\sigma_b) \tag{12}$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Wir beginnen mit $n = 2$.

$$\prod_{i<j}^{2} \frac{\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i)}{2j-1-2i} \cdot \frac{\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)}{2j-2i} \cdot \left| \frac{(2j-2i)(2j-1-2i)}{(\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i))(\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i))} \right| \tag{13}$$

$$= \frac{\sigma_b(2\cdot2-1)-\sigma_b(2\cdot1)}{2\cdot2-1-2\cdot1} \cdot \frac{\sigma_b(2\cdot2)-\sigma_b(2\cdot1)}{2\cdot2-2\cdot1} \cdot \left| \frac{(2\cdot2-2\cdot1)(2\cdot2-1-2\cdot1)}{(\sigma_b(2\cdot2)-\sigma_b(2\cdot1))(\sigma_b(2\cdot2-1)-\sigma_b(2\cdot1))} \right| \tag{14}$$

$$= \frac{\sigma_b(3)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(3)-\sigma_b(2)|} \cdot \frac{\sigma_b(4)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(4)-\sigma_b(2)|} \tag{15}$$

Für die andere Seite der Gleichung nutzen wir, daß $\varepsilon(\sigma_b) = \prod_{\alpha<\beta}^{2n}$ sowie $\left|\prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{\beta-\alpha}\right| = 1 = \left|\prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\beta-\alpha}{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}\right|$ und können dann schreiben

$$\varepsilon(\sigma_b) := \prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{\beta-\alpha} = \prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{\beta-\alpha} \cdot \left| \prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\beta-\alpha}{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)} \right| = \prod_{\alpha<\beta}^{2n} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{|\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)|} \tag{16}$$

Für $n = 2$ erhalten wir deshalb

$$\prod_{\alpha<\beta}^{4} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{|\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)|} \tag{17}$$

$$= \frac{\sigma_b(2)-\sigma_b(1)}{|\sigma_b(2)-\sigma_b(1)|} \cdot \frac{\sigma_b(3)-\sigma_b(1)}{|\sigma_b(3)-\sigma_b(1)|} \cdot \frac{\sigma_b(4)-\sigma_b(1)}{|\sigma_b(4)-\sigma_b(1)|} \cdot \frac{\sigma_b(3)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(3)-\sigma_b(2)|} \cdot \frac{\sigma_b(4)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(4)-\sigma_b(2)|} \cdot \frac{\sigma_b(4)-\sigma_b(3)}{|\sigma_b(4)-\sigma_b(3)|} \tag{18}$$

$$= \frac{\sigma_b(3)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(3)-\sigma_b(2)|} \cdot \frac{\sigma_b(4)-\sigma_b(2)}{|\sigma_b(4)-\sigma_b(2)|} \tag{19}$$

Beim letzten Schritt haben wir die Eigenschaft der gebundenen Permutation benutzt, daß $\sigma_b(2) > \sigma_b(1)$ und $\sigma_b(4) > \sigma_b(3) > \sigma_b(1)$.

Führen wir nun den Induktionsschritt durch, zeigen also, daß

$$\prod_{i<j}^{n+1} \frac{\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i)}{2j-1-2i} \cdot \frac{\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)}{2j-2i} \cdot \left| \frac{(2j-2i)(2j-1-2i)}{(\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i))(\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i))} \right| = \prod_{\alpha<\beta}^{2(n+1)} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{\beta-\alpha}. \tag{20}$$

Anders ausgedrückt

$$\prod_{i<j}^{n+1} \frac{\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i)}{|\sigma_b(2j-1)-\sigma_b(2i)|} \cdot \frac{\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)}{|\sigma_b(2j)-\sigma_b(2i)|} = \prod_{\alpha<\beta}^{2(n+1)} \frac{\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)}{|\sigma_b(\beta)-\sigma_b(\alpha)|} \tag{21}$$

Da wir hier nur Produkte haben, können wir die Induktionsvoraussetzung praktischerweise direkt benutzen. Zu zeigen bleibt

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma_b(2(n+1)-1)-\sigma_b(2i)}{|\sigma_b(2(n+1)-1)-\sigma_b(2i)|}\cdot\frac{\sigma_b(2(n+1))-\sigma_b(2i)}{|\sigma_b(2(n+1))-\sigma_b(2i)|}=\prod_{\alpha=1}^{2n}\frac{\sigma_b(2n+1)-\sigma_b(\alpha)}{|\sigma_b(2n+1)-\sigma_b(\alpha)|}\cdot\prod_{\alpha=1}^{2n+1}\frac{\sigma_b(2(n+1))-\sigma_b(\alpha)}{|\sigma_b(2(n+1))-\sigma_b(\alpha)|}.\tag{22}$$

In der Tat ist das Produkt auf der rechten Seite über die geraden $\alpha$ genau der Ausdruck auf der linken Seite. Wir müssen also noch zeigen, daß das Produkt über die ungeraden $\alpha$ genau eins ergibt. Durch die gewählte Normierung ist jeder Faktor vom Betrag eins, desweiteren gilt aufgrund der Gebundenheit von $\sigma_b$ , daß $\sigma_b(2(n+1)) > \sigma_b(\alpha')$ mit $\alpha' := (2k-1)$ für alle $k = 1, ..., n+1$, sowie $\sigma_b(2n+1) > \sigma_b(\alpha'')$ mit $\alpha'' := (2l-1)$ für $l = 1, ..., n$. Also ist das Produkt über die ungeraden $\alpha$ auch positiv, und mit dem vorherigen Argument gleich eins. Damit ist der Satz bewiesen. ■

*Beweis von Aussage 2:* Die Aussage ist mit Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2 unmittelbar bewiesen. ■

**Anmerkung 3:** Mit Anmerkung 2 können wir $\kappa_{\sigma_b}$ sofort bestimmen, wenn wir die Klammern gezeichnet haben. Wir zählen einfach wie häufig sich die Klammern überschneiden.

## SUMMA SUMMARUM

Wir haben nun mit Anmerkung 1 und Anmerkung 3 gezeigt, daß wir

$$tr(\gamma^{\mu_1}\cdots\gamma^{\mu_{2n}})=4\sum_{\sigma_b\in S_{2n}}\varepsilon(\sigma_b)\eta^{\mu_{\sigma_b(1)}\mu_{\sigma_b(2)}}\cdots\eta^{\mu_{\sigma_b(2n-1)}\mu_{\sigma_b(2n)}}\tag{23}$$

einfach dadurch bestimmen können, indem wir alle Indizes $\mu_1, ..., \mu_{2n}$ hinschreiben und alle Möglichkeiten in Betracht ziehen diese in Paaren durch Klammern miteinander zu verbinden. Diese Paare (Eselsbrücken) beschreiben die Komponenten der Metriken $\eta$. Das Signum erhalten wir, wenn wir zählen wie häufig sich die Klammern kreuzen, beispielsweise $\kappa$ mal und erhalten $\varepsilon = (-1)^\kappa$.

Manchmal überzeugt ein Beispiel mehr als viele Worte, berechenen wir dehalb $tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma^\delta)$ explizit.

| Eselsbrücken | Summand | Signum |
|---|---|---|
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\beta}$ | $(-1)^0 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\rho}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\rho}$ | $(-1)^0 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\delta}\eta^{\alpha\beta}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta}$ | $(-1)^2 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\delta}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\delta}\eta^{\alpha\rho}$ | $(-1)^2 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\delta}$ | $(-1)^3 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\delta}$ | $(-1)^0 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\delta}\eta^{\beta\rho}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\rho}\eta^{\beta\delta}$ | $(-1)^2 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\delta}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\rho}$ | $(-1)^0 = 1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\delta}$ | $(-1)^1 = -1$ |
| $\mu\nu\alpha\beta\rho\delta$ | $\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\delta}$ | $(-1)^0 = 1$ |

Also ist

$$\begin{aligned}tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma^\delta) &= 4[\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\beta}-\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\rho}+\eta^{\mu\delta}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\rho}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\delta}\eta^{\alpha\beta}+\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\beta}\eta^{\alpha\delta}-\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\beta\delta}\\ &+ \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\delta}\eta^{\alpha\rho}-\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\rho}\eta^{\alpha\delta}+\eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha}\eta^{\rho\delta}-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\delta}\eta^{\beta\rho}+\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\rho}\eta^{\beta\delta}-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\eta^{\rho\delta}\\ &+ \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\delta}\eta^{\beta\rho}-\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\rho}\eta^{\beta\delta}+\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\delta}].\end{aligned}$$

Damit findet die praktische Anwendung der Eselsbrücken auch ihre vertretbare Grenze, da die Spur über acht Gammamatrizen schon aus 105 Summanden besteht. Der Autor hat dieses Verfahren bereits für vier oder sechs

Gammamatrizen verwendet. Ziel des Aufsatzes war es lediglich eine mathematische Begründung für diesen Algorithmus zu finden.

[1] Claude Itzykson, Jean Bernard Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw Hill Book Company (1980)