Perturbaciones orbitales producidas por la gravitoelectricidad
Planetary perturbations caused by gravitoelectricity

Wenceslao Segura González
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Sinopsis. Hay numerosos estudios sobre los efectos del gravitomagnetismo, en particular ha sido investigadas las perturbaciones orbitales de satélites por esta causa. Pero la inducción gravitatoria no está limitada a la acción gravitomagnética, caracterizada por producir fuerzas perpendiculares a la dirección de movimiento, sino que también hay acción gravitoeléctrica, en que las fuerzas producidas dependen de la velocidad de la fuente. Analizamos en esta investigación las perturbaciones de satélites orbitando la Tierra como un resultado de fuerzas de origen gravitoeléctrico. Encontramos que estos efectos son proporcionales a ω'^2 (ω' es la velocidad de rotación de la Tierra) por tanto considerablemente menores que similares efectos gravitomagnéticos.

Abstract. There are numerous studies on the effects of the gravitomagnetism, in particular has been investigated the perturbations orbitals of satellites for this cause. But gravitatory induction is not limited to the gravitomagnetic action, characterized by producing forces perpendicular to the direction of movement, but also there is gravitoelectric action, in that the forces produced depend on the speed of the source. We analyze in this study the perturbations of satellites orbiting the Earth as a result of forces of gravitolectric origin. We found that these effects are proportional to ω'^2 (ω' is the rotational speed of the Earth) therefore considerably lower than similars effects gravitomagnetics.

1 Introducción

Se llama gravedad inducida a la producida por el movimiento de la fuente de campo gravitatorio. Por ejemplo, la Tierra por su rotación diaria produce una gravedad inductiva que se añade a la gravedad estática producida exclusivamente por su masa. Esta gravedad adicional produce una leve perturbación en las órbitas de los satélites que orbitan la Tierra, que puede ser tratada por la teoría clásica de las perturbaciones orbitales planetarias.

Hay que distinguir dos tipos de gravedad inducida: la gravitomagnética y la gravitoeléctrica. La primera se caracteriza porque la fuerza que produce es perpendicular al movimiento del cuerpo sobre el que actúa, de forma análoga a como lo hace la fuerza magnética sobre una carga eléctrica en movimiento. Las restantes fuerzas inductivas son llamadas gravitoeléctricas y se caracterizan porque dependen de la velocidad de la fuente. Por último las fuerzas gravitatorias estáticas son las fuerzas gravitatorias que no dependen de la velocidad de la fuente, aunque es posible que dependan de la velocidad del cuerpo que la orbita, siendo la fuerza de Newton la más importante de todas ellas, pero no la única.

Se han estudiado los efectos que la fuerza gravitomagnética ejerce en astros orbitando la Tierra. [1] Lo que haremos en esta investigación es estudiar los efectos de la fuerza gravitoeléctrica producida por la rotación de la Tierra. Añadir que la perturbación de las fuerzas gravitatorias estáticas son las responsables de la perturbación planetaria de Einstein, que explica la precesión anómala del perihelio del planeta Mercurio.

Empezaremos este artículo exponiendo la ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio en segunda aproximación. Haciendo uso de la teoría gravitatoria débil obtendremos los potenciales necesarios para calcular las aceleraciones perturbatrices.

Finalmente se aplicarán las ecuaciones de Gauss y obtendremos la variación temporal de los elementos orbitales y concluiremos con un cálculo numérico. Hay que señalar que las perturbaciones gravitomagnéticas dependen de la velocidad angular de rotación de la Tierra, mientras que las perturbaciones gravitoeléctricas dependen de la misma velocidad pero al cuadrado. Como la velocidad de rotación terrestre es pequeña, también así lo serán los efectos gravitoeléctricos con relación a los gravitomagnéticos. De aquí resulta que las perturbaciones orbitales gravitoeléctricas sean sensiblemente menores que las gravitomagnéticas, a no ser que la velocidad angular del astro central sea elevada y grande su masa y su radio.

2 Teoría lineal y teoría débil de la gravitación

Para el estudio de los campos gravitatorios débiles podemos aplicar dos procedimientos. Uno de ellos es la teoría lineal que se obtiene eliminando de las ecuaciones generales de la gravitación los términos no lineales en el tensor métrico. Como resultado se obtiene una ecuación de ondas lineal que puede ser resuelta con la técnica de los potenciales retardados.

La teoría lineal es insuficiente, en el sentido de que hay términos no lineales en los potenciales que deben ser considerados en el caso de campos gravitatorios débiles. Así por ejemplo, con la teoría lineal no se puede calcular correctamente la precesión planetaria de Einstein, que exige términos no lineales.

El otro método para obtener ecuaciones simplificadas es la teoría débil de la gravitación, que consiste en desarrollar en serie de potencias las distintas componentes del tensor métrico y posteriormente aplicar las ecuaciones de la gravitación. Este método es el que aplicaremos a continuación y en donde retendremos las componentes del tensor métrico necesarias para obtener la ecuación de movimiento en la aproximación de segundo orden respecto a la inversa de c.

Como se muestra en [2] y en [3] las componentes del tensor métrico se desarrollan según

$$g_{00} = 1 + \overset{(2)}{g}_{00} + \overset{(4)}{g}_{00}; \qquad g_{0\alpha} = \overset{(3)}{g}_{0\alpha}; \qquad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\overset{(2)}{g}_{00} \tag{1}$$

donde el número entre paréntesis significa el orden respecto a la inversa de c y los índices griegos van de 1 a 3. * Nótese que para la componente 0,0 del tensor métrico tomamos hasta el término de orden cuatro respecto a la inversa de c. La razón es porque en la ecuación de movimiento g_{00} está multipicado por c^2, esto significa que si queremos conservar hasta términos de orden dos en la ecuación de movimiento es necesario tomar el término de orden cuatro en el desarrollo en serie de g_{00}. [4]

Como se ve en (1) es necesario conocer tres potenciales para el cálculo de la ecuación de movimiento. Dos de ellos son escalares tridimensionales y el tercero es un vector tridimensional. Estos potenciales son definidos por

$$\overset{(2)}{g}_{00} = \frac{2\phi}{c^2}; \qquad \overset{(4)}{g}_{00} = \frac{2\phi^2}{c^4} + \frac{2\psi}{c^4}; \qquad \overset{(3)}{g}_{0\alpha} = -\frac{4}{c}A^\alpha, \tag{2}$$

notamos en (2) la presencia de un segundo potencial escalar ψ que normalmente es despreciado, pero como veremos es el principal responsable de los fenómenos de inducción gravitoeléctrica. En (2) el término no lineal viene representado por ϕ^2.

2 Ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio débi

En general el elemento de línea es

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}\,dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

y en la aproximación dada por (1)

$$ds^2 = \left(dx^0\right)^2 + \overset{(2)}{g}_{00}\left(dx^0\right)^2 + \overset{(4)}{g}_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2\overset{(3)}{g}_{0\alpha}\,dx^0 dx^\alpha + \left(-\delta_{\alpha\beta} + \overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta,$$

sustituyendo los potenciales escalares y el potencial vector definidos en (2) se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = c\left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^4} + \frac{2\psi}{c^4} - \frac{8}{c^2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \frac{2\phi}{c^4}v^2\right]^{1/2}.$$

* La última de las relaciones (1) implica que estamos considerando coordenadas armónicas, véase [2].

Hacemos uso de la aproximación

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$$

válida cuando x es muy pequeño, con lo que se llega a

$$\frac{ds}{dt} \approx c\left[1+\frac{\phi}{c^2}-\frac{v^2}{2c^2}+\frac{\phi^2}{c^4}+\frac{\psi}{c^4}-\frac{4}{c^2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}+\frac{\phi}{c^4}v^2-\frac{1}{8}\left(\frac{2\phi}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right]$$

donde solo consideramos términos hasta el orden cuatro respecto a la inversa de la velocidad de la luz. Agrupando términos y teniendo en cuenta que la lagrangiana de una partícula libre es

$$L=-mc\frac{ds}{dt}$$

nos queda

$$L=-mc^2-m\phi-m\frac{\psi}{c^2}+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{8}m\frac{v^4}{c^2}+4m\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}-\frac{3}{2}m\phi\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{2}m\frac{\phi^2}{c^2}. \tag{3}$$

Podemos dividir los términos que aparecen en (3) en cuatro categorías. Los sumandos 2, 4 y 5 son términos relacionados con la relatividad especial. En efecto, los sumandos 4 y 5 son los términos cinéticos. El segundo sumando es el potencial kepleriano.

El sexto sumando es un término genuino de la relatividad general y representa la acción gravitomagnética (aunque de él también se deducen efectos gravitoeléctricos). También los dos últimos sumandos corresponden en exclusiva a la relatividad general y son de carácter gravitoeléctricos. El término gravitomagnético $4m\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}$ es de segundo orden respecto a la inversa de c, por serlo $\mathbf{A}$ como veremos más adelante; también son de orden dos los restantes términos no clásicos.

La ecuación de movimiento de una partícula libre se obtiene aplicando la ecuación de Euler-Lagrange a (3). Calculamos primero

$$-\frac{1}{mc^2}\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}+\frac{\psi}{c^4}\right)-\frac{4}{c^2}\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^\alpha}+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$$

mientras que el otro sumando de la ecuación de Euler-Lagrange es

$$-\frac{1}{mc^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha}\right)=-\frac{1}{c^2}\ddot{x}^\alpha-\frac{4}{c^2}\frac{\partial A^\alpha}{\partial t}-\frac{4}{c^2}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^4}\ddot{x}^\alpha-\frac{1}{c^4}\dot{x}^\alpha(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})+3\frac{\phi}{c^4}\ddot{x}^\alpha+\frac{3\dot{x}^\alpha}{c^4}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi\right],$$

teniendo en cuenta

$$\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}\dot{x}^\beta-\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha}\dot{x}^\beta=-\left[\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A})\right]^\alpha$$

se obtiene la ecuación de movimiento en forma vectorial

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\frac{4}{c^2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^4}\frac{d\mathbf{v}}{dt}-\frac{1}{c^4}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})+\frac{3}{c^4}\phi\frac{d\mathbf{v}}{dt}+$$
$$+\frac{3}{c^4}\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{3}{c^4}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi-\nabla\left(\frac{\phi}{c^2}+\frac{\phi^2}{2c^4}+\frac{\psi}{c^4}\right)-\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^4}\nabla\phi+\frac{4}{c^2}\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A})$$

tomando como primera aproximación

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\phi$$

se obtiene definitivamente la ecuación de movimiento de una partícula libre en un campo gravitatorio débil

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\phi-4\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+4\mathbf{v}\wedge\left(\nabla\wedge\mathbf{A}\right)-\nabla\left(\frac{2\phi^2}{c^2}+\frac{\psi}{c^2}\right)+3\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}+4\frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\mathbf{v}\nabla\right)\phi-\frac{v^2}{c^2}\nabla\phi \qquad (4)$$

el primer sumando corresponde a la aproximación de orden cero o newtoniana. * Los siguientes sumandos son todos de orden segundo respecto a la inversa de c. ** Esta ecuación de movimiento es la equivalente a la fórmula de Lorentz de la electrodinámica. [5]Nótese que los términos de segundo orden tienen (o pueden tener) valores parecidos, por lo que ninguno de ellos se puede despreciar.

El elemento de línea tiene en coordenadas esféricas la forma

$$ds^2=\left(1+\frac{2\phi}{c^2}+\frac{2\phi^2}{c^4}+\frac{2\psi}{c^4}\right)c^2dt^2-\frac{8}{c}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}cdt-\left(1-\frac{2\phi}{c^2}\right)\left(dr^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2+r^2d\theta^2\right) \quad (5)$$

donde aparecen todos los términos necesarios para calcular la ecuación de movimiento de una partícula a segundo orden en la inversa de c. Las ecuaciones (4) y (5) son válidas cuando usamos coordenadas armónicas; las expresiones cambian en otros sistemas de coordenadas.

3 Teoria de campo gravitatorio débil

Como hemos dicho se puede aplicar la ecuación de la gravitación al desarrollo (1). Obtenemos por tanto los primeros términos en el desarrollo de las componentes del tensor métrico, que son los necesarios para aplicar la ecuación de movimiento (4). De esta teoría débil se obtienen términos que no son lineales y que están ausentes en la teoría lineal de la gravitación.

Como se demuestra en [2] y [3] las ecuaciones de campo gravitatorio en la teoría débil son

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\overset{(2)}{g}_{00}+\nabla^2\overset{(4)}{g}_{00}=\chi\overset{(-2)}{T}{}^{00}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overset{(2)}{g}_{00}}{\partial t^2}-\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\overset{(2)}{g}_{00}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}+\left(\frac{\partial\overset{(2)}{g}_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2+\chi\left(\overset{(0)}{T}{}^{00}+2\overset{(2)}{g}_{00}\overset{(-2)}{T}{}^{00}+\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\alpha}\right)\\
&\nabla^2\overset{(3)}{g}_{0\alpha}=-2\chi\overset{(-1)}{T}{}^{0\alpha} \qquad\qquad (6)\\
&\nabla^2\overset{(2)}{g}_{\alpha\beta}=\chi\delta_{\alpha\beta}\overset{(-2)}{T}{}^{00}\ .
\end{aligned}$$

donde las T son los términos del desarrollo de las componentes del tensor energía-momento, en cuyo cálculo hemos exigido que la velocidad de la fuente sea no relativista, aunque no hacemos limitación alguna de la velocidad de la partícula que se mueve en el campo. Las ecuaciones (6) utilizan la gauge armónica, nótese que de la tercera de las ecuaciones (6) se obtiene la relación entre $g_{\alpha\beta}$ y ϕ que fue establecida en (1). Se observa que solo la primera ecuación de (6) es diferente de las obtenidas por el método de las ecuaciones linealizadas. Y en esta ecuación es donde se encuentran términos no lineales. La solución que obtengamos de (6) se diferenciará de la teoría linealizada en que no solo contendrá los términos lineales, sino también las componentes del tensor métrico necesarias para obtener todos los términos (sean lineales o no) de segundo orden de la ecuación de movimiento.

Como se deduce en [2] las soluciones de las ecuaciones (6) son

$$\phi=-\frac{G}{c^2}\int\frac{[\overset{(-2)}{T}{}^{00}]}{r'}dV'; \qquad \psi=-G\int\frac{\overset{(0)}{T}{}^{00}+\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\alpha}}{r'}dV'; \qquad A^\alpha=-\frac{G}{c^3}\int\frac{\overset{(-1)}{T}{}^{0\alpha}}{r'}dV'$$

donde el corchete significa valores retrasados y en la segunda ecuación hay suma sobre α. Para el caso especial de materia en forma de polvo el tensor de energía-momento es

$$T^{ik}=\rho u^i u^k$$

* ϕ no es idéntico al potencial kepleriano, pues contiene los términos que se derivan de la aplicación de los potenciales retardados y que por ello dependen de la velocidad de la fuente.

* La ecuación (4) permite calcular las perturbaciones al movimiento newtoniano con independencia de la velocidad de la partícula. No obstante la velocidad de la fuente debe ser no relativista.

donde u^k es la tetravelocidad de la fuente y ρ es su densidad propia de masa. Vamos a desarrollar el tensor energía-momento hasta el segundo orden en la inversa de la velocidad de la luz, entonces la relación que debemos tomar entre el tiempo propio τ y el coordenado t es

$$d\tau^2 = \left(1 + \frac{2\phi_0}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2$$

donde ϕ_0 es el potencial kepleriano en el punto de la fuente que lleva velocidad u, por tanto la componentes buscadas son

$$T^{00} = \overset{(-2)}{T^{00}} + \overset{(0)}{T^{00}} = \rho u^0 u^0 = \rho c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \rho c^2 - 2\rho\phi_0 + \rho u^2$$

$$T^{\alpha\alpha} = \overset{(0)}{T^{\alpha\alpha}} = \rho u^2$$

$$T^{0\alpha} = \overset{(-1)}{T^{0\alpha}} = \rho c u^\alpha$$

concluimos que los potenciales en el caso de que la fuente esté formada por materia en polvo de densidad ρ es

$$\phi = -G\int \frac{[\rho]}{r'} dV'; \quad \psi = -G\int \frac{2\rho u^2 - 2\rho\phi_0}{r'} dV'; \quad A^\alpha = -\frac{G}{c^2}\int \frac{\rho u^\alpha}{r'} dV'. \tag{7}$$

5 Sistemas de referencia

Para el estudio de las perturbaciones de un satélite orbitando la Tierra vamos a considerar el sistema de coordenadas pseudocartesianas K (x, y, z) que tiene su origen en el centro de la Tierra, el eje z coincide en dirección y sentido con su eje de rotación y el eje x se dirige hacia el equinoccio de primavera o nodo ascendente de la órbita terrestre en torno al Sol.

El sistema K' (X, Y, Z) tiene su origen en el centro de la Tierra, el eje X se dirige hacia el nodo ascendente de la órbita del satélite y el plano X-Y es por donde se mueve el satélite.

Bajo estas premisas el ángulo entre los ejes x y X es la longitud del nodo ascendente Ω (medida por el ecuador) y el ángulo entre los ejes z y Z es la inclinación de la órbita i respecto al ecuador celeste.

Para pasar del sistema K al K' es necesario hacer dos rotaciones. La primera de ellas de valor Ω alrededor del eje z, y la segunda una rotación de ángulo i en torno al eje x. Por tanto los vectores básicos del sistema K' $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)$ están relacionados con los vectores básicos del sistema K $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ por

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_X &= \cos\Omega \mathbf{e}_x + \sin\Omega \mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_Y &= -\cos i \sin\Omega \mathbf{e}_x + \cos i \cos\Omega e_y + \sin i \mathbf{e}_z \\
\mathbf{e}_Z &= \sin i \sin\Omega \mathbf{e}_x - \sin i \cos\Omega \mathbf{e}_y + \cos i \mathbf{e}_z \ .
\end{aligned}$$

Ahora es necesario obtener los vectores unitarios asociados con el triedro comóvil en las direcciones radial $\mathbf{e}_r$, transversal $\mathbf{e}_t$ y normal $\mathbf{e}_n$. El vector unitario radial se encuentra en el plano X-Y y es paralelo a $\mathbf{r}$ (vector de posición del satélite), entonces

$$\mathbf{e}_r = \cos u \mathbf{e}_X + \sin u \mathbf{e}_Y$$

donde u es el ángulo contado desde el nodo ascendente hasta el satélite

$$u = \theta + \omega$$

θ es la anomalía verdadera, mientras que ω es el argumento de latitud del pericentro, es decir, ángulo contado desde el nodo ascendente hasta el pericentro. El vector unitario transversal del satélite es perpendicular a $\mathbf{e}_r$ y también se encuentra en el plano de la órbita

$$\mathbf{e}_t = -\sin u \mathbf{e}_X + \cos u \mathbf{e}_Y$$

finalmente el vector unitario normal es perpendicular al plano orbital

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_Z$$

Para simplificar los cálculos vamos a suponer que el nodo ascendente del satélite coincide con el equinoccio, por tanto $\Omega = 0$, lo que no significa ninguna pérdida de generalidad, porque cualquier otro valor de Ω originaría una situación idéntica a la anterior.

Los vectores básicos comóviles en función de los vectores unitarios de K quedan

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos u \mathbf{e}_x + \cos i \sin u \mathbf{e}_y + \sin i \sin u \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_t &= -\sin u \mathbf{e}_x + \cos i \cos u \mathbf{e}_y + \sin i \cos u \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_n &= -\sin i \mathbf{e}_y + \cos i \mathbf{e}_z \ . \end{aligned} \tag{8}$$

El vector de posición del satélite es

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$$

y el vector velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\,\mathbf{e}_r\right). \tag{9}$$

El satélite sigue una órbita kepleriana, pero sus elementos orbitales van variando con el tiempo a causa de la perturbación. Entonces será aceptable usar la ecuación de la elipse para describir la órbita

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}$$

donde a es el semieje mayor y e la excentricidad. El módulo del momento angular orbital L del satélite de masa m cumple la relación

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

el punto significa derivación respecto al tiempo. Desarrollando (9) queda

$$\mathbf{v} = \frac{L/m}{a\left(1-e^2\right)}\left[\left(-\sin u - e\sin\omega\right)\mathbf{e}_X + \left(\cos u + e\cos\omega\right)\mathbf{e}_Y\right].$$

Para la órbita kepleriana se cumple

$$\frac{L^2}{mk} = a\left(1-e^2\right)$$

donde $k = GMm$, siendo M la masa del cuerpo central.

Al expresar la velocidad en función de los vectores básicos del sistema K queda

$$\mathbf{v} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\left[\left(-\sin u - e\sin\omega\right)\mathbf{e}_x + \left(\cos u + e\cos\omega\right)\cos i\mathbf{e}_y + \left(\cos u + e\cos\omega\right)\sin i\mathbf{e}_z\right]$$

donde n es el movimiento medio definido por

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

siendo T el periodo orbital.

4 Aceleración perturbativa de la gravitoelectricidad inducida

Un cuerpo en rotación produce un campo gravitoelectromagnético que origina una perturbación de la órbita kepleriana de un satélite que gira a su alrededor y que viene expresada por la modificación de sus elementos orbitales. Si el campo gravitatorio es débil y la velocidad de rotación del cuerpo que produce el campo es pequeña en comparación con c, se puede usar la ecuación de movimiento (4), que toma la forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi + \mathbf{W},$$

en nuestro caso $\mathbf{W}$ es pequeña en comparación con la aceleración kepleriana, por lo que puede entenderse como la aceleración perturbativa, que puede ser dividida en tres términos

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_E + \mathbf{W}_{GE} + \mathbf{W}_{GM}\,. \tag{10}$$

El primero de ellos es la aceleración gravitoestática responsable de la precesión de Einstein *

$$\mathbf{W}_E = -\nabla\left(\frac{2\phi^2}{c^2}\right) + 4\frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \frac{v^2}{c^2}\nabla\phi + 3\frac{\mathbf{v}}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{11}$$

mientras que

$$\mathbf{W}_{GE} = -\frac{1}{c^2}\nabla\psi$$

es la aceleración perturbativa generada por la inducción gravitoeléctrica. Finalmente

$$\mathbf{W}_{GM} = -4\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + 4\mathbf{v}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A})$$

es la aceleración perturbativa gravitomagnética.** También debemos de tener presente que en la aceleración kepleriana

$$\mathbf{W}_K = -\nabla\phi$$

se encuentran incluidos términos inductivos, puesto que ϕ es el potencial kepleriano más los términos derivados del desarrollo de los potenciales retardados, los cuales dependen de la velocidad de la fuente del campo. No obstante, en el caso que vamos a considerar de un cuerpo esférico con una densidad homogénea que permanece constante, el potencial ϕ coincide con el potencial clásico kepleriano y no ocasiona, por tanto, perturbaciones en la órbita de los satélites

Vamos a suponer que la Tierra es una esfera formada por materia en polvo (es decir despreciamos, de momento, las tensiones en su interior) que tiene de radio R y una densidad uniforme ρ. Un satélite se encuentra en un punto exterior situado a una distancia r del centro de la Tierra. Queremos calcular la aceleración perturbativa de origen gravitoeléctrico que actúa sobre el satélite.

Por (7) el segundo potencial escalar es

$$\psi = -G\int\frac{2\rho u^2 - 2\rho\phi_0}{r'}dV' = -G\int\frac{2\rho u^2}{r'}dV' + G\int\frac{2\rho\phi_0}{r'}dV' \tag{12}$$

ϕ_0 es el potencial gravitatorio en un punto del interior de la Tierra. Nótese que la segunda de las integrales del segundo miembro de (12) no depende de la velocidad de la Tierra, es decir no es un término inductivo, por lo que no lo tenemos en cuenta. §

El vector $\mathbf{r}$ es el de posición del satélite respecto a un sistema de coordenadas centrado en la Tierra, $\mathbf{r}^*$ es el vector de posición de un punto fuente del interior de la Tierra, y el vector $\mathbf{r}'$ es el que va del punto fuente al satélite. Para calcular la primera de las integrales del segundo sumando de (12) elegimos la parte positiva del eje z de tal forma que en él se encuentre el satélite. El eje y es elegido con la orientación adecuada para que el eje de rotación de la Tierra se encuentre en el plano z-y, siendo α el ángulo entre el eje z y el eje de rotación terrestre El ángulo θ es el que hay entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}^*$. Entonces

$$\mathbf{r}^* + \mathbf{r}' = \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad r' = r\sqrt{1+\left(\frac{r^*}{r}\right)^2 - 2\frac{r^*}{r}\cos\theta} = rB\sqrt{1-C\cos\theta}$$

donde

$$B = \sqrt{1+\left(r^*/r\right)^2}; \quad C = \frac{2r^*/r}{1+\left(r^*/r\right)^2}.$$

* El último sumando de (11) no interviene en el cálculo de la precesión anómala del perihelio de Mercurio. Este término sería significativo si hubiera una variación de la masa del Sol, lo que no es considerado en la precesión de Einstein.

** En realidad $\partial\mathbf{A}/\partial t$ es un término gravitoeléctrico, lo agrupamos con el término gravitomagnético para seguir con la práctica seguida por otros investigadores.

§ Este término debe de sumarse a la fuerza perturbativa de Einstein, pero al generar una aceleración de cuarto orden de la inversa de c se puede despreciar.

Como el vector de posición de un punto de la Tierra en coordenadas esféricas es

$$\mathbf{r}^* = r^* \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + r^* \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + r^* \cos\theta\mathbf{k}$$

y la velocidad angular de la Tierra

$$\boldsymbol{\omega}' = \omega' \sin\alpha\mathbf{j} + \omega' \cos\alpha\mathbf{k}$$

entonces la velocidad lineal de un punto de la esfera terrestre queda

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{r}^* = \left(r^* \omega' \cos\theta\sin\alpha - r^* \omega' \sin\theta\sin\varphi\cos\alpha\right)\mathbf{i} + \\ + r^* \omega' \sin\theta\cos\varphi\cos\alpha\mathbf{j} - r^* \omega' \sin\theta\cos\varphi\sin\alpha\mathbf{k}$$

después de simplificar resulta que su cuadrado es

$$u^2 = r^{*2} \omega'^2 \sin^2\alpha - r^{*2} \omega'^2 \sin^2\alpha\sin^2\theta\sin^2\varphi + \\ + r^{*2} \omega'^2 \cos^2\alpha\sin^2\theta - 2r^{*2} \omega'^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\varphi.$$

Ahora hay que hacer una integración de volumen cuyo elemento es

$$dV' = r^{*2} \sin\theta d\theta d\varphi dr^*$$

Hay que resolver la primera de las integrales del segundo término de (12), problema que podemos abordar descomponiéndola en tres integrales más elementales. La primera de ellas es

$$\psi_1 = -2G\rho\int \frac{r^{*2}\omega'^2\sin^2\alpha}{r\sqrt{1+\left(\frac{r^*}{r}\right)^2 - 2\frac{r^*}{r}\cos\theta}} r^{*2}\sin\theta d\theta d\varphi dr^* = \\ = -2G\rho\frac{1}{r}\omega'^2\sin^2\alpha\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R r^{*4}\, dr^*\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{B\sqrt{1-C\cos\theta}}$$

siendo R el radio de la Tierra, entonces la primera de las componentes del potencial ψ

$$\psi_1 = -\frac{6}{5}GM\omega'^2\sin^2\alpha\frac{R^2}{r}$$

La segunda de las integrales en que se descompone ψ es

$$\psi_2 = -2G\rho\int \frac{-r^{*2}\omega'^2\sin^2\alpha\sin^2\theta\sin^2\varphi}{rB\sqrt{1-C\cos\theta}} r^{*2}\sin\theta d\theta d\varphi dr^* = \\ = 2G\rho\frac{1}{r}\omega'^2\sin^2\alpha\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^R r^{*4}\, dr^*\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{B\sqrt{1-C\cos\theta}}d\theta$$

de donde obtenemos

$$\psi_2 = \frac{2}{5}GM\omega'^2\sin^2\alpha\frac{R^2}{r}\left[1-\frac{1}{7}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right].$$

La tercera de las componentes del potencial escalar ψ es

$$\psi_3 = -2G\rho\int \frac{r^{*2}\omega'^2\cos^2\alpha\sin^2\theta}{rB\sqrt{1-C\cos\theta}} r^{*2}\sin\theta d\theta d\varphi dr^* = \\ = -2G\rho\frac{1}{r}\omega'^2\cos^2\alpha\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R r^{*4}\, dr^*\int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{B\sqrt{1-C\cos\theta}}d\theta$$

simplificando queda

$$\psi_3 = -\frac{4}{5}GM\omega'^2\cos^2\alpha\frac{R^2}{r}\left[1-\frac{1}{7}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right].$$

La última de las cuatro integrales en que se puede descomponer ψ es nula. Ahora podemos reagrupar todos los resultados y tras simplificar queda

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = -\frac{4}{5}\frac{GM\omega'^2R^2}{r}\left[1+\frac{1}{14}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(1-3\cos^3\alpha\right)\right].$$

Vamos a elegir un nuevo sistema de coordenadas, tal que el eje z coincida con el eje de rotación de la Tierra, es decir el sistema K(x, y, z) definido en el epígrafe 5, entonces

$$z = r\cos\alpha$$

y el potencial ψ queda

$$\psi = -\frac{4}{5}GM\omega'^2R^2\frac{1}{r} - \frac{2}{35}GM\omega'^2R^4\frac{1}{r^3} + \frac{6}{35}GM\omega'^2R^4\frac{z^2}{r^5}$$

la aceleración inducida sobre la partícula exterior a la esfera es

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{GE} = -\frac{1}{c^2}\nabla\psi = -\frac{4}{5}\frac{GM\omega'^2R^2}{c^2}\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{6}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2}\frac{\mathbf{r}}{r^5} + \\ +\frac{30}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2}\frac{z^2\mathbf{r}}{r^7} - \frac{12}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2}\frac{z\mathbf{e}_z}{r^5}\end{aligned} \tag{13}$$

teniendo en cuenta que

$$\omega'^2\mathbf{r} = -\boldsymbol{\omega}' \wedge (\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r})$$

$$\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r}) = \omega'^2 z\,\mathbf{k}$$

$$z^2 = r^2\cos^2\alpha$$

entonces la aceleración inducida perturbativa gravitoeléctrica es

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{GE} = -\frac{1}{c^2}\nabla\psi = \frac{4}{5}\frac{GMR^2}{c^2r^3}\left[1+\frac{3}{14}\left(\frac{R}{r}\right)^2(1-5\sin^2\lambda)\right]\boldsymbol{\omega}' \wedge (\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{r}) - \\ -\frac{4}{5}\frac{GMR^2}{c^2r^3}\left[1+\frac{9}{14}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(1-\frac{15}{9}\sin^2\lambda\right)\right]\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r})\end{aligned}$$

hemos puesto la fórmula en función de la latitud λ del punto donde se encuentra el satélite. Obtenemos no solo una aceleración centrífuga inducida (primer sumando del segundo miembro) sino también una componente axial (o sea, paralela el eje de rotación de la Tierra). Hay que observar que el sentido de la fuerza inducida es contraria a la producida en el caso interior de una esfera hueca, es decir, esta fuerza se dirige hacia el eje de rotación, por lo que podríamos hablar más bien de una fuerza anticentrífuga. Nótese la dependencia de la fuerza inducida de la latitud del satélite. La fuerza axial tiene el mismo sentido que en el caso interior, o sea, se dirige hacia la parte negativa del eje de rotación.

El cociente entre las intensidades de la fuerza gravitatoria newtoniana y la de inducción gravitoeléctrica para el caso de un cuerpo sobre la superficie de la Tierra es

$$\frac{F_{\text{Newton}}}{F_{\text{inductiva}}} \approx \left(\frac{c}{R\omega}\right)^2 \approx 4\cdot 10^{11}\,.$$

5 Perturbaciones de órbitas de satélites por efecto de la gravitoelectricidad inducida

Conocida la aceleración perturbatriz que actúa sobre el satélite se calcula la variación de los elementos orbitales (semieje mayor, excentricidad, inclinación, longitud del nodo ascendente y argumento de latitud del pericentro; *a, e, i,* Ω y ω respectivamente) por las ecuaciones de Gauss [6]

$$\begin{aligned}
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}W^n\cos u \\
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[eW^r\sin\theta + \frac{a(1-e^2)}{r}W^t\right] \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[W^r\sin\theta + W^t\left(\cos\theta+\frac{1}{e}-\frac{r}{ae}\right)\right] \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na\sin i\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}W^n\sin u \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left\{-W^r\cos\theta + \left[1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right]W^t\sin\theta\right\} - \cos i\frac{d\Omega}{dt}
\end{aligned} \tag{14}$$

La inducción gravitoeléctrica está compuesta de dos partes: los términos de segundo orden del desarrollo de ϕ y el potencial ψ dado por la segunda ecuación (7).

Para el caso de un cuerpo que rota alrededor de su eje, los citados términos inductivos gravitoeléctricos dependen de su velocidad angular al cuadrado, que ahora representaremos por ω'^2 para evitar confusión con el argumento de latitud del pericentro. Pero estos efectos gravitoeléctricos son menores que los gravitomagnéticos, razón por la que han sido despreciados. Pero hay que advertir que estos efectos son de segundo orden respecto a la inversa de c y que en condiciones óptimas pueden tener valores similares a la acción perturbativa gravitomagnética.

La aceleración perturbativa procedente de la gravitoelectricidad inducida para el caso de una esfera homogénea formada por polvo viene dada por (13), de donde podemos deducir las aceleraciones radial, normal y tangencial. Para el cálculo hay que tener presente que por (8)

$$z = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_z = r\,\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_z = r\sin i\sin u.$$

Entonces

$$W_{GE}^{r} = \mathbf{W}_{GE}\cdot\mathbf{e}_r = -\frac{4}{5}\frac{GM\omega'^2R^2}{c^2}\frac{1}{r^2}\left[1+\frac{3}{14}\frac{R^2}{r^2}\left(1-3\sin^2 i\sin^2 u\right)\right], \tag{15}$$

para el cálculo de las componentes radial y tangencial tenemos en cuenta que por (8)

$$\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_n = 0;\qquad \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_n = \cos i;\qquad \mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_t = 0;\qquad \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_t = \sin i\cos u,$$

por tanto

$$\begin{aligned} W_{GE}^{n} &= \mathbf{W}_{GE}\cdot\mathbf{e}_n = -\frac{12}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2}\sin i\cos i\frac{\sin u}{r^4} \\ W_{GE}^{t} &= \mathbf{W}_{GE}\cdot\mathbf{e}_t = -\frac{12}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2}\sin^2 i\frac{\sin u\cos u}{r^4} \end{aligned} \tag{16}$$

donde R, M y ω' son el radio, la masa y la velocidad angular de rotación de la Tierra. Ahora es necesario aplicar las ecuaciones de Gauss (14) a las aceleraciones perturbatrices (15) y (16) para hallar la variación secular de los parámetros orbitales de un satélite.

Hagamos, como ejemplo, el cálculo de la variación de la inclinación de la órbita. Para estos cálculos tenemos en cuenta las siguientes relaciones válidas para órbitas keplerianas

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta};\quad n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}};\quad L/m = \sqrt{GMa}\sqrt{1-e^2};\quad \dot\theta = \frac{L}{mr^2},$$

además $u = \theta + \omega$, entonces tenemos

$$\frac{di}{dt} = -\frac{12}{35}\frac{GM\omega'^2R^4}{c^2n\sqrt{1-e^2}}\sin i\cos i\left(\frac{\sin u\cos u}{r^3}\right)$$

pero lo que nos interesa no es la variación instantánea de la excentrícidad, sino su variaciación secular. Para su cálculo hacemos un promedio para un periodo de la anterior expresión entre paréntesis, que es la única sometida a variación

$$\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\sin u\cos u}{r^3}dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta+\omega)\cos(\theta+\omega)}{r^3}\frac{d\theta}{\dot\theta} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta+\omega)\cos(\theta+\omega)}{r^3\,L/mr^2}d\theta =$$
$$= \frac{m}{TLa\left(1-e^2\right)}\int_0^{2\pi}\left(1+e\cos\theta\right)\sin(\theta+\omega)\cos(\theta+\omega)d\theta$$

y al hacer la integral nos da cero.

Al hacer cálculos similares para los restantes elementos orbitales y tomando solamente hasta el primer orden de la excentricidad de la órbita (que suponemos suficientemente pequeña) obtenemos

$$\begin{aligned} &\overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} = 0;\quad \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} = 0;\quad \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} = 0 \\ &\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} = -\frac{12\pi}{35}\frac{\omega'^2R^4}{c^2Ta^2}\cos i;\quad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = -\frac{6\pi}{35}\frac{\omega'^2R^4}{c^2Ta^2}\left(1-5\cos^2 i\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Una aplicación numérica para los planetas del sistema solar (ver más adelante), nos muestra que las variaciones de (15) son muchos órdenes de magnitud menor que el correspondiente efecto gravitomagnético, por tanto, despreciable para estos astros, a consecuencia del débil efecto gravitoeléctrico producido por la rotación del Sol.

No obstante, hay que advertir que para astros centrales que tengan una elevada velocidad de rotación, los efectos gravitoeléctricos pueden ser del orden de los gravitomagnéticos.

6 Corrección de la presión por la fuerza centrífuga

El modelo de esfera terrestre sobre el que hemos hecho los cálculos anteriores no es físicamente realizable. En efecto, no es posible mantener en equilibrio una esfera compuesta de partículas en forma de polvo sin ningún tipo de interacción entre ellas. Inevitablemente la acción de la gravitación tendería a colapsar la esfera y si esta llega a ser estable significaría que debe de existir una presión que contrarreste la acción de la gravedad.

Pero hay más, por la rotación de la esfera debe de aparecer una fuerza centrígufa sobre todas las partículas que la componen, que tendrá como resultado disminuir la gravedad en el interior de la esfera según sea su latitud y su distancia al centro.

Si bien la presión es fuente de campo gravitatorio no produce gravedad inducida, es decir la gravedad que origina no dependerá de la velocidad de rotación de la esfera. No obstante, la corrección a la presión por el efecto centrífugo sí depende de la velocidad de rotación, o sea, producirá gravedad inducida y es este término el que nos interesa en nuestra investigación.

Para simplificar el problema vamos a suponer que la Tierra tiene una forma esférica de densidad constante, * está constituida por un fluido perfecto y que además rota con una misma velocidad angular ω. **

Al aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de volumen de la Tierra se encuentra

$$\rho \mathbf{g} dV - \nabla p dV = \rho \mathbf{a} dV \tag{18}$$

donde **a** es la aceleración del elemento de volumen, que por efecto de la rotación de la Tierra está sometida a una aceleración

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{r}})$$

siendo $\hat{r}$ la distancia del elemento de volumen al eje de rotación. Si el vector de posición del elemento de volumen es

$$\mathbf{r}^* = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j} + z^* \mathbf{k}$$

entonces

$$\hat{\mathbf{r}} = x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j}$$

donde suponemos que el eje z está alineado con el eje de rotación terrestre. Con esta suposición la aceleración del elemento de volumen es

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \hat{\mathbf{r}} = -\omega^2 (x^* \mathbf{i} + y^* \mathbf{j}), \tag{19}$$

para el caso de una esfera homogénea la intensidad de campo gravitatorio en su interior es

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} G \rho \mathbf{r}^* = -\frac{4\pi}{3} \frac{GM}{R^3} \mathbf{r}^*$$

con (19) y (20) se puede integrar (18) obteniéndose el siguiente resultado para la presión en un punto interior de la Tierra

$$p = G \frac{M\rho}{R^3} \left(R^2 - r^{*2} \right) + p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \hat{r}^2 \tag{21}$$

siendo p_0 la presión atmosférica en la superficie terrestre. Como hemos dicho el único término de

---

* Podemos mejorar el modelo del interior de la Tierra suponiendo dos zonas de densidades diferentes: el núcleo que se extiende hasta la distancia de 3.490 kilómetros del centro terrestre y con densidad 11,0 g/cm^3 y el manto que es la concha esférica que va desde el núcleo a la superficie de la Tierra y con densidad 4,4437 g/cm^3. [7]

** Este modelo sigue siendo imperfecto, entre otras razones porque la rotación hace que la forma de la Tierra deje de ser esférica.

(20) que da lugar a gravitoelectricidad inducida es el último, que puesto en función del módulo de la velocidad del punto interior de la Tierra queda

$$p' = \frac{1}{2}\rho u^2 .$$

Para el caso considerado de un fluido perfecto, el tensor energía-momento toma la siguiente forma

$$T^{ik} = \left(\rho + p/c^2\right) - g^{ik} p,$$

entonces la componente α,α de orden cero del tensor energía-momento queda

$$\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\alpha} = \rho u^2 - g^{\alpha\alpha} p = \rho u^2 + \frac{3}{2}\rho u^2 = \frac{5}{2}\rho u^2 ,$$

donde suponemos suma respecto al índice α. Solamente hemos tenido en cuenta los términos dependientes de la velocidad, que son los únicos que producen gravedad inductiva. Entonces el potencial ψ en el modelo terrestre que estamos considerando es dada por

$$\psi = -G\int \frac{\overset{(0)}{T}{}^{00} + \overset{(0)}{T}{}^{\alpha\alpha}}{r'} dV' = -G\int \frac{7/2\,\rho u^2}{r'} dV'$$

es decir que obtenemos para las perturbaciones que sufre un satélite orbitando la Tierra los mismos resultados que en (17) alterando solamente el coeficiente numérico, de tal forma que tendremos

$$\overline{\left(\frac{di}{dt}\right)} = 0; \quad \overline{\left(\frac{da}{dt}\right)} = 0; \quad \overline{\left(\frac{de}{dt}\right)} = 0 \qquad (22)$$

$$\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} = -\frac{3\pi}{5}\frac{\omega'^2 R^4}{c^2 T a^2}\cos i; \quad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = -\frac{3\pi}{10}\frac{\omega'^2 R^4}{c^2 T a^2}\left(1 - 5\cos^2 i\right).$$

6 Aplicaciones numéricas

De (22) se observa que la perturbación gravitoeléctrica inductiva produce una variación del plano de la órbita del satélite ya que la línea de sus nodos va variando. También de la última de las ecuaciones (22) se comprueba que cambia la orientación de la órbita, expresada en la variación del pericentro del satélite.

Se ve de la última de las ecuaciones (22) que la posición del pericentro respecto al nodo de la órbita permanece inalterable cuando la inclinación del plano orbital es tal que se cumple

$$5\cos^2 i = 1$$

lo que corresponde a $i = 63^\circ\ 26'$.

Los valores máximos de las perturbaciones correponden a un satélite que tiene una órbita circular de radio el radio del planeta que orbita y teniendo su plano orbital una inclinación de 0° respecto al ecuador celeste, entonces

$$\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}_{\max} = -\frac{3}{10}\frac{\sqrt{GMR}\,\omega'^2}{c^2}; \quad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{\max} = \frac{3}{5}\frac{\sqrt{GMR}\,\omega'^2}{c^2},$$

Este resultado se puede comparar con las correspondientes perturbaciones de origen gravitomagnético que resulta ser [2]

$$\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)} = \frac{2GJ}{c^2 a^3} = \frac{4}{5}\frac{GMR^2\omega'}{c^2 a^3}; \quad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = -\frac{6GJ\cos i}{c^2 a^3} = -\frac{12}{5}\frac{GMR^2\omega'}{c^2 a^3}\cos i$$

calculadas a primer orden de la excentricidad del satélie. J representa el momento angular de rotación del astro central. La perturbación gravitoeléctrica de Einstein solo modifica el argumento de latitud del pericentro del satélite según la ley

$$\overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)} = \frac{6\pi GM}{c^2 a T}$$

también a primer orden de la excentricidad.

El cociente entre los valores máximos de las perturbaciones gravitomagnéticas y las gravitoeléctricas es dada por

$$\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}_{GM}\bigg/\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}_{GE}=\frac{8}{3}\frac{T'}{T};\qquad \overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{GM}\bigg/\overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{GE}=4\frac{T'}{T}$$

donde T' es el periodo de rotación del astro central. Entonces cuando $T \simeq T'$ los efectos gravitomagnéticos y gravitoeléctricos son del mismo orden.

La relación entre la perturbación de Einstein y la graitoeléctrica es

$$\overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{E}\bigg/\overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{GE}=5\left(\frac{T'}{T}\right)^2$$

encontrando de nuevo similitud entre los valores de ambas perturbaciones cuando el periodo orbital del satélite es de igual valor que el periodo de rotación del astro central.

Para concluir vamos a hacer la valoración numérica para las perturbaciones sufridas por un satélite que orbita la Tierra y Júpiter, en el caso en que la inclinación de la órbita sea nula y que el semieje mayor de la orbita coincida con el radio del planeta:

	Tierra	Júpiter
$\overline{\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}_{\max}$	$0.006''/año$	$2.0''/año$
$\overline{\left(\frac{d\omega}{dt}\right)}_{\max}$	$0.011''/año$	$4.0''/año$

7 Conclusiones

Hemos identificado la fuerza gravitoeléctrica inductiva, que es una fuerza gravitatoria que depende de la velocidad de la fuente del campo y que no es perpendicular a la dirección de movimiento del cuerpo sobre el que actúa. Aplicamos el resultado al caso de una esfera homogénea y calculamos la aceleración que la fuerza gravitoeléctrica produce sobre un satélite que la orbita.

Dado que esta aceleración es pequeña la podemos tomar como una perturbación y aplicar la teoría clásica de perturbaciones planetarias para calcular la variación secular de los parámetros orbitales del satélite.

La valoración de este resultado (22) nos indica que el efecto gravitoeléctrico depende del cuadrado de la velocidad angular del astro central, en contraste con la dependencia lineal respecto a la misma velocidad que tiene el efecto gravitomagnético. Esto significa que el efecto gravitoeléctrico es sensiblemente menor que el gravitomagnético, dado que la velocidad de rotación de los astros es pequeña.

No obstante comprobamos que si el periodo de rotación del astro central es de valor simiwlar al periodo de rotación del satélite, los dos efectos, gravitoeléctrico y gravitomagnético, son de valores similares.

8 Referencias

[1] Entre otros muchos trabajos véase: Lense, J; Thirring, H: «On the Influence of the Proper Rotation of Central bodies on the Motions of Planets and Moons According to Einstein's Theory of Gravitation», en *Nonlinear Gravitodynamics. The Lense-Thirring Effect*, Remo J. Ruffini, Costantino Sigismondi editores, World Scientific, 2003, pp. 365-379; Iorio, Lorenzo: «The Lense-Thirring Effect on the Orbit of a Test Particle» en *The Measurement of Gravitomagnetism. A Challenging Enterprise*, Lorenzo Iorio Editor, Nova Sicience Publishers, 2007, pp. 73-86; Lichtenegger, Herbert; Iorio, Lorenzo: «Post-Newtonian Orbital Perturbations», en *The Measurement of Gravitomagnetism. A Challenging Enterprise*, Lorenzo Iorio Editor, Nova Sicience Publishers, 2007, pp. 87-100; Ruggiero, Matteo Luca; Iorio, Lorenzo: «Gravitomagnetic time-varying on the motion of test particle», *General Relativity and Gravitation* **42-10** (2010) 2393-2402; Iorio, Lorenzo: «A gravitomagnetic effect on the orbit of a test body due to the earth's variable angular momentum», *International Journal of Modern Physics* **D11-5** (2002) 781-787.

[2] Segura González, Wenceslao: *Gravitoelectromagnetismo y principio de Mach*, eWT Ediciones, 2013, pp. 41-68.

[3] Weinberg, Steven: *Gravitation and Cosmology: principles and applicatons of the general theory of relativity,* John Willey and Sons, 1972, pp. 211-249.

[4] Landau, L.O.; Lifshitz, E. M.: *Teoría clásica de campos*, Reverté, 1970, pp. 455-462.

[5] Se han formulado variadas ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo gravitatorio débil, no todas ellas coincidentes entre sí y que se apartan del planteamiento que hemos hecho en el texto. Entre otros trabajos están: Einstein, A.: *El significado de la relatividad*, Espasa-Calpe, 1971, pp. 119-124; Davidson,W.: «General relativity and Mach's principle», *MNRAS* **117** (1957) 212-224; Mashhonn, B.: «Gravitoelectromagnetism: a brief review», arXiv: gr-qc/0311030 v1, 8 nov. 2003; Ruggiero, M.L.; Tartaglia, A.: «Gravitomagnetism effects», arXiv:gr-qc/0207065v2, 23 jul. 2002; Pascual-Sánchez, J.-F.: «The harmonic gauge condition in the gravitomagnetic equations», arXiv:gr-qc/0010075v1, 20 oct. 2000; Ciufolini, I.; Wheeler, J. A.: *Gravitation and inertia*, Princeton University Press, 1995, pp.315-326 y Bini, Donato; Cherubini, Christian; Chicone, Carmen; Mashhoon, Bahram: «Gravitational induction», arXiv: 0803.0390v2, 3 nov. 2008.

[6] Moulton, Forest Ray: *An Introduction to celestial mechanics*, Dover, 1970, pp. 321-363.

[7] Synder, R.: «Two-density model of the Earth», *American Journal of Physics* **54-6** (1986) 511-513