Contents

A Potential Elementary Proof Of The Riemann Hypothesis

A.Garcés Doz

angel1056510@gmail.com

Abstract

This paper presents a possible elementary proof of the Riemann hypothesis. We say possible or potential, you have to be very cautious and skeptical of the potential of the evidence presented, is free of a crucial error that invalidates the proof. After several months of extensive review, the author, having found no error we have decided to publish it in the hope that someone will find the error. However, it is considered that the method may be useful in some way. This potential proof uses only the rudiments of analysis and arithmetic inequalities. It includes a first part of the reason why we think that the Riemann hypothesis seems to be true.

Acknowledgements

I am gratefull to God Almighty for letting me know of its wonders.And the Lord Jesus Christ, our Savior

1 Introduction

In 1859 Riemann formulated his hypothesis, in his doctoral thesis: "On the prime numbers less than a given magnitude." As this hypothesis was not essential for his doctoral thesis, did not try to give a proof of it. But he knew Riemann zeros nontrivial are distributed around the line $s = \frac{1}{2} + it$, and knew also that all nontrivial zeros should be in the range $0 \leq \Re e(s) \leq 1$

Riemann found, a few zeros that were on the critical line with real part $1/2$ and suggested that all nontrivial zeros have real part $1/2$; and this is the Riemann hypothesis.

In 1896, Hadamard and de la Vallée-Poussin independently proved that any zero could be on the line $\Re e(s) = 1$

United with other properties of the nontrivial zeros, demonstrated by Riemann, this showed that the nontrivial zeros should be on the critical band $0 < \Re e(s) < 1$

In 1914, Hardy showed that there is an infinite number of zeros $\Re e(s) = 1/2$, however there was still the possibility that an infinite number of zeros were in critical band $\Re e(s) \neq 1/2$

2 The Function $\zeta(s)$ of Riemann.

The Riemann zeta function is defined, for $\Re e(s) > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.1}$$

The zeta function has a singularity at $s = 1$, which reduces divergent harmonic series. Being s, the complex number defined as $s = \sigma + it$

The previous series is a prototype of Dirichlet series which converges absolutely an analytic function for s such that $\sigma > 1$ and diverges for all other values of s

Riemann showed that the function defined by the series in the half-plane of convergence can be continued analytically to all complex values $s \neq 1$. for $s = 1$ is the harmonic series, which diverges to $+\infty$

Hence the Riemann zeta function is a meromorphic function in the whole complex s-plane, which is holomorphic everywhere except for a simple pole at $s = 1$ with residue 1.

2.1 The analytic extension of the function $\zeta(s)$ of Riemann.

The Riemann zeta function satisfies, the so-called Riemann functional equation.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \tag{2.2}$$

Where $\Gamma(s)$ is the gamma function, which is an equality of meromorphic functions valid in the whole complex plane.

This equation relates the values of the Riemann zeta function at points $s and 1-s$.Functional equation (due to the properties of the sine function) implies that $\zeta(s)$ has a simple zero at each negative integer $s = -2n$. These are called the trivial zeros $\zeta(s)$. For s with positive integer number, the product $\sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)$ is regular and the functional equation relates to the values of the Riemann zeta function at negative integers even and odd positive integers.

The functional equation was established by Riemann in his 1859 paper, "On the number of primes less than a given magnitude" and is used to construct the analytic continuation first. An equivalent relationship was conjectured by Euler over a hundred years before, in 1749, for the Dirichlet eta function (alternating zeta function, $\zeta^*(s)$).

$\eta(s) = \zeta^*(s)$

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{2.3}$$

This Dirichlet series is the alternating sum, corresponding to the expansion of the Dirichlet series of the Riemann zeta function, $\zeta(s)$; and for this reason the Dirichlet eta function is also known as the zeta alternate function, also symbolized $\zeta^*(s)$. The following simple relationship holds:

$$\zeta^*(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \tag{2.4}$$

The eta function zeros include all the zeros of the zeta function: the infinity of negative integers (real simple zeros equidistant), an infinity of zeros along the critical line, none of which are known to be multiple and over 40% of which have been shown to be simple, and zeros in the critical strip hypothetical but not on the critical line, if they do, should be placed at the vertices of rectangles symmetrical about the x-axis and the critical line and whose multiplicity is unknown. Furthermore, the factor $(1 - 2^{1-s})$ adds an infinity of simple complex zeros, located at equidistant points on the line $\Re(s) = 1$ at $s_n = 1 + 2n\pi i/\ln(2)$ where n is a nonzero integer.

The potential and alleged demonstration, which is presented in this paper, we will use the Dirichlet eta function as essential functional of the proof.

Hardy gave a simple proof of the functional equation for eta function, which is:

$$\frac{\eta(1-s)}{\eta(s)} = -\frac{(2^s - 1)}{\pi^s(2^{s-1} - 1)} \Gamma(s) \cos(\pi s/2) \tag{2.5}$$

3 Möbius function and the Riemann Hypothesis.

Multiplicative Möbius function is defined by:

$\mu(n) = 1$ if n is a square-free integer and a number of prime factors even.

$\mu(n) = -1$ if n is a square-free integer and an odd number of prime factors.

$\mu(n) = 0$ if n is an integer with a prime factor squared.

One of the consequences of the Riemann hypothesis, if it is true, is estimating Mertens function, or the sum of the Möbius function. In the event that the Riemann hypothesis is true, it satisfies the following estimation function of Mertens (*Titchmarsh, Edward Charles (1986), The theory of the Riemann zeta-function (2nd ed.), The Clarendon Press Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853369-6, MR 882550*) :

$$\sum_{n\leq x}\mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{3.1}$$

3.1 The function that counts the number of positive integers square free.

Be the sum of the quantity of all numbers, free square prime factors less than or equal to x , $S(x)$

Theorem 3.1. *("A Survey on k-freeness", Francesco Pappalardi)*

$$S(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2}) \tag{3.2}$$

Proof. We start with the identity:

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|\mathrm{n}}\mu(d) \tag{3.3}$$

This identity is obtained by the fact that μ is a multiplicative function. From it is obtained:

$(3.3.b)$ $S(x) = \sum_{n\leq x}\mu^2(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n}\mu(d) = \sum_{d\leq\sqrt{x}}\mu(d)\left(\frac{x}{d^2}+O(1)\right) = \cdots$

$\cdots = x\sum_{d\leq\sqrt{x}}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{1/2}) = x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\sqrt{x}+x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\right) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})$

Where $\zeta(2)$ is the value of the function ζ of Riemann for the integer 2: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ □

Lemma 3.2. *Let the function* $S(x)$ *,is fulfilled:*

$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)\Big|$

Proof. For the identity (3.3), the function $S(x)$ can be divided into two sums, one corresponding to negative values of $\mu(n)_- = -1$, and the other summation for positive values of $\mu(n)_+ = 1$, therefore be obtained, the following equivalent equation $S(x)$:

$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_+\Big|$. since $sgn\left(\Big|\mu(n)_-\Big|\right) = sgn(\mu^2(n)_-)$; and $sgn\left(\Big|\mu(n)_+\Big|\right) = sgn(\mu^2(n)_+) = \mu(n)_+$

Have finally:

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_+\Big| = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_+$$

Which concludes the proof of Lemma 3.2 □

Lemma 3.3. *Summation function* $S(x)$; *can be expressed in the following equivalent identity:*

$S(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|$

Proof. Given that: $2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|$; and $sgn\left(\sum_{n\leq x}\mu(n)_-\right) = -sgn\left(\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|\right)$;have finally:

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \cdots \tag{3.4}$$

$$\cdots \sum_{n\le x}\mu^2(n)_- + \sum_{n\le x}\mu^2(n)_+ = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$$

$\square$

3.1.1 Limits when $x\to\infty$ for the functions $\sum_{n\le x}\Big|\mu(n)_-\Big|$ and $\sum_{n\le x}\Big|\mu(n)_+\Big|$

In the limit when $x\to\infty$ Following two sets are equipotent to the set of natural numbers N :

Sets are $A_- = \left\{ \Big|\mu(n)_-\Big| \right\}$; and $B_+ = \left\{\Big|\mu(n)_+\Big|\right\}$

Corollary 3.4. *In the limit when $x\to\infty$,is fulfilled:* $A_-\sim B_+$ *;* $A_-\sim N$ *;* $B_+\sim N$

Since by Theorem 3.1 $S(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$, applying Corollary 3.4, one finds that in the limit when $x\to\infty$:

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n\le x}|\mu(n)_-|}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n\le x}|\mu(n)_+|}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n\le x}\mu(n)_+}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

3.1.2 Application of Lemma 3.3 and Corollary 3.4

By Lemma 3.3, the function $S(x)$ could be expressed as:

$S(x) = \sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\le x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$

Applying the corollary 3.4 and isolating the term $O(x^{1/2})$, you get:

$\sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ + 2\Big(\frac{3}{\pi^2}x + \frac{1}{2}O(x^{1/2})\Big) - \frac{6}{\pi^2}x = O(x^{1/2})$

Finally, we obtain the following identity: $\sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ + O(x^{1/2}) = O(x^{1/2})$

The above equality holds only in two cases: 1) when $\sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ = 0$ and 2) if:

$\sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ = O(x^{1/2})$; since $O(x^{1/2}) + O(x^{1/2}) = O(2x^{1/2}) = O(x^{1/2})$

Hence, we obtain a bounding given by:

$$\sum_{n\le x}\mu(n)_- + \sum_{n\le x}\mu(n)_+ = O(x^{1/2}) \tag{3.5}$$

4 From Special Properties Function $\sqrt{x}$ and its Relationship with Möbius and Mertens functions

The common characteristic of all equivalences of RH, is that you get always a bounding of certain statement as a function $O(x^{1/2+\epsilon})$. What special feature have this function, that constantly appears before bounding?

4.1 Unique properties of the function $\sqrt{x}$

One of the fundamental properties that make this unique elemental function is as follows:

Corollary 4.1. *The derivative of the function* $\sqrt{x}$ *is* $1/2$ *the inverse of the same function. That is:*

$$f(x) = x^{1/2}\ ;\ df(x) = \frac{1}{2f(x)} \tag{4.1}$$

$$2df(x)f(x) = 1 = \exp(2\pi i)$$

$$\int\frac{2df(x)}{f(x)} = \ln(x) \tag{4.2}$$

Applying the corollary 4.1 we have: $a)\ 2df(n)f(n)\mu(n) = \mu(n)\ b) 2df(n)f(n)\mu(n)_- = -2df(n)f(n) = \mu(n)_-\ c)\ +2df(n)f(n)\mu(n)_+ = \mu(n)_+$

Recall that $\sqrt{n}$, has two solutions: $\left\{-\sqrt{n} \quad , +\sqrt{n}\right.$ And this is the second important property: symmetry.

Corollary 4.2. *Be a complex number* $s = \frac{1}{2} + it$, $\overline{s} = \frac{1}{2} - it$

Only when $\Re(s) = \frac{1}{2}$ *the following identity holds:*

$$\frac{dx^{\overline{s}}}{\overline{s}} - \frac{1}{x^s} = 0 \tag{4.3}$$

Where $dx^{\overline{s}}$ *is the derivative of* $x^{\overline{s}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx^{\overline{s}}}{\overline{s}} - \frac{1}{x^s} = 0 \tag{4.4}$$

Theorem 4.3. *In the limit when* $x \to \infty$ *the following identity holds:*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n)_- + \lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n)_+ = ..$$

$$\cdots = \lim_{x\to\infty} \int \pm 2df(n)f(n)\mu(n) = O(x^{1/2}) \tag{4.5}$$

Proof. In the limit when $x \to \infty$ the set defined by $\{C\} = \left\{\sum_{n\le x} 2df(n)f(n)\mu(n)_- + \sum_{n\le x} 2df(n)f(n)\mu(n)_+\right\}$, is equipotent to set defined by:

$\{D\} = \left\{\sum_{n\le x} \pm 2df(n)f(n)\right\}$ Indeed, for each element of the set C bijective relationship exists with the set D :

$2df(n)f(n)\mu(n)_- \longleftrightarrow -2df(n)f(n)$; $2df(n)f(n)\mu(n)_+ \longleftrightarrow +2df(n)f(n)$

Both sets are therefore equipotent $C \sim D$. Hence, holds, that in the limit $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (\sum_{n\le x} 2df(n)f(n)\mu(n)_- + \sum_{n\le x} 2df(n)f(n)\mu(n)_+)..$$

$$\cdots = \cdots \lim_{x\to\infty} (\sum_{n\le x} \pm 2df(n)f(n)\ ) = \cdots$$

$$\cdots \lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n)_- + \lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n)_+$$

□

And finally:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\le x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \int \pm 2df(n)f(n)\mu(n) = O(x^{1/2})$$

5 Because believe that the Riemann Hypothesis is true.

Regardless of the results that have been obtained in the previous sections, it is likely that the fulfillment of the Riemann hypothesis has implications in determining most fundamental laws of physics. Specifically: there is an algebraic form recurrently throughout fundamental physics (quantum mechanics) on all areas.

This recurring algebraic form, is the function: $\sqrt{}$ and all equivalences of the Riemann hypothesis involve estimates of the type $O(x^{1/2})$, as a fundamental element.

5.1 Possible connections, the Riemann hypothesis with physics.

The square root function is, for example, in the following fundamental identities:

1. Probability density: $(\rho_t(x))^{1/2} = \psi(x,t)$
2. Matter-antimatter asymmetry (baryon physical density) as a function dependent on the sum of the Möbius function, by their equivalents: the R-parity or operator of supersymmetry $(-1)^F$; $(-1)^B$; where F and B are respectively the number of fermions and bosons.
3. One of the dualities of string theory: $f(x) = \sqrt{x}$; $2df(x) = \frac{1}{f(x)}$

4. Probability in a given volume: $P(v) = \int_v \left|\psi(x,t_0)^2\right| dx$

5. The total power: $E_t = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$

6. The Planck mass, Planck time and Planck length: $m_{pk} = (\frac{\hbar c}{G_N})^{1/2}$

7. The symmetry of the vacuum with respect to the electric charge, taking into account that the origin of the electric charge is due to the unification of gravity with the electromagnetic field: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} m_{pk}\sqrt{G_N}}{\pm e \cdot n^s} = \left(\frac{m_{pk}\sqrt{G_N}}{\pm e}\right) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}) = 0$; $s = \frac{1}{2} + it_n$ Where $Im(s) = t_n$, corresponds to a zero of $\zeta(s)$. By empirical calculations with the imaginary part of consecutive zeros of the function $\zeta(s)$; found the following identities, which indicates a very strong, in our view, RH compliance and his intimate connection with the fundamental laws of physics (quantum mechanics).

5.1.1 Semiempirical identities connecting the zeros of the function $\zeta(s)$ with the unification of gravity and electromagnetism: Ratio $m_{pk}/(\pm e^2/G_N)^{1/2}$

Data: Planck mass: $2.176437508 \cdot 10^{-8} Kg = \sqrt{\hbar c/G_N}$; $\hbar = 6.62606957 \cdot 10^{-34} J \cdot s/2\pi$; $G_N = 6.67428 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/Kg^2$

$\pm e = 1.602176565 \cdot 10^{-19} C$; $c = 2.99792458 \cdot 10^8 m/s$; $Z_n = Im(s_n)$; $\zeta(s_n) = 0$

- 1) The first zeros, the imaginary part of the function $\zeta(s)$ of Riemann, used in the calculation:

- $Z_1 = 14.134725141734$; $Z_2 = 21.022039638771$; $Z_3 = 25.010857580145$; $Z_4 = 30.424876112585$; $Z_5 = 32.935061587739$

$$\ln[(\sum_q q^2)(1 + \frac{1}{\exp(2\pi) - 1})] = \frac{(\sum_n \exp(-Z_n))^{-1}}{(m_{pk}/\sqrt{\pm e^2/G_N})} \tag{5.1}$$

Where: $\sum_q q^2 = (-1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2 + (4/3)^2 + 1^2$; and $\frac{1}{\exp(2\pi)-1}$; is a probability factor spontaneous emission of photons of a black (thermal equilibrium Boltzmann law)

- 2) Fine structure constant inverse to zero moment: $\alpha^{-1} = 137.035999073$; $\zeta^{-1}(-7) = dim(lE8) = 240\, nonzero\ roots$

- $lE8 = lattice\, in\, R^8$; $2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e) = 103.0556831$; $m_{pk} = Planck\ mass$; $m_e = electron\ mass$

- $Baryonic\, density = \Omega_b = \frac{(\alpha^{-1} + 2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e)) - 240}{2} \approx 240 - \exp(5 + \ln^2(2))$

$$\ln[(\sum_n \exp(-Z_n))^{-1}] - \cdots$$

$$\cdots - \frac{2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e)}{2(\alpha^{-1} + 2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e))(\exp(1/[\alpha^{-1} \cdot \pi \cdot \cos\theta_{s=2}]))}$$

$$\ldots = \ln\left(\frac{m_{pk}}{\sqrt{\pm e^2/G_N}}\right) \tag{5.2}$$

Where: $\cos\theta_{s=2} = (s = 2)/\sqrt{s(s+1)}$; $spin\ 2$

5.1.2 From the matter-antimatter asymmetry, their possible connection to the Mertens function and the RH.

In this section we show some identities which seem to indicate a relationship between the matter-antimatter asymmetry and RH, by a modification of the Mertens function, or the sum of the Möbius function.

There is a physical model that applies the Mertens function and the Pauli exclusion principle: the model Riemann gas, or gas Primon. Specifically, in a model gas supersymmetric Riemann, if we consider the particles are fermions, the Pauli exclusion principle prohibits multiple particle states include squares of primes. By spin-statistics theorem, field states with an even number of particles are bosons, while those with an odd number of particles are fermions. The fermion operator $(-1)^F$ has a very concrete realization in this model as the Möbius function, in that the Möbius function is positive for bosons, fermions negative, and zero in the states forbidden by the Pauli exclusion principle.

We consider a theoretical model and more realistic overall.The model is simply the application of what really must have happened in the first moments of the big bang; ie: matter-antimatter asymmetry is expressed mathematically by: $1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b$; Where: $n(B) =$ baryons number; $n(\overline{B}) =$ antibaryons number.

The observed matter-antimatter asymmetry implies that: $sgn(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1$ Regardless that uses a parity operator, or an operator fermion-boson, the matter-antimatter asymmetry must obey the identity:

$$1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b \qquad (5.3)$$

The previous identity (5.3) could be expressed by a modified function Mertens function, such that:

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)n + f(n(m)) = 1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b$$

Where $f(n(m))$ is a function of the amount of particles and their masses, to a stable state of vacuum, with particles with an average life time; $t = \infty$. The photon and electron particles have to be adequate to meet these requirements and as final residue involved in nuclear reactions that gave rise to protons and neutrons, in a final state of matter-antimatter asymmetry.

Conjecture 5.1. *If space-time-energy, and therefore vacuum states, are quantified, are not continuous and are a manifestation of certain geometric and topological lattices, as the derivative of the group E8, then the function* $\sum_{n\leq x} \mu(n) \cdot n$ *is bounded for some lattice* n

We consider the vacuum and the geometry of space-time-energy is a manifestation of a geometry-based lattice E8 group.(Quantum Information and Cosmology: the Connections)

$$\Omega_b = \frac{(\alpha^{-1} + 2\cdot\ln(m_{pk}/m_e)) - 240}{2} \approx 240 - \exp(5 + \ln^2 2)$$

Proposition 5.2.

$$\frac{\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n}{\cos\theta_{s=2} + \cos\theta_{s=1/2}} \Big(1 + \frac{1}{137^2\sqrt{2}}\Big) = \alpha^{-1} \qquad (5.4)$$

Remark 5.3. $\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n = 191$

$$\Big|\sum_{n\leq 248} \mu(n) \cdot n\Big| = 7^2 = \sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n$$

$$\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n + \sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n = dim(lR^8) = 240$$

Proposition 5.4.

$$\frac{\alpha^{-1}\Big(\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n\Big)}{\sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n} + \Big(\frac{240}{\alpha^{-1}} - 1\Big)^{-1} \approx \exp(2\pi) \qquad (5.5)$$

Remark 5.5. $dim(SO(7)) + \frac{\sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n}{(240/4)} = 21 + 0.81\overline{6} \approx \Omega_b^{-1}$

Proposition 5.6.

$$\frac{\alpha^{-1} - 2\ln(m_{pk}/m_e)}{\pi} + \Big|\sum_{n=1}^{dim(SU(5))} \mu(n)n\Big| = 21.81627051 \qquad (5.6)$$

$$21.81627051 \approx \Omega_b^{-1}$$

Proposition 5.7.

$$\Big(\frac{[\Omega_b^{-1} - Z_1]3\alpha^{-1}}{2\pi}\Big)^{1/2} \approx \Big(240 - \exp(5 + \ln^2 2)\Big)^{-1} \qquad (5.7)$$

Where $Z_1 = Im(s_1)$; $\zeta(s_1) = 0$ *(first zero of the function* $\zeta(s)$ *of Riemann)*

5.1.3 The Riemann hypothesis and the form of the equation of total energy

It is possible that the form of the total energy equation is a consequence of the fulfillment of the Riemann hypothesis. Specifically: Mertens function to quantify the energy with positive and negative values.

Data: ratio of Higgs vacuum energy and electron energy: 481842.894; r_7 = smaller radius dimensionless seven dimensions circular compactifying = 2.9569490582

Proposition 5.8.

$$\sum_{E_n} \mu(n)(n^2(m^2c^4 + p^2c^2))^{1/2} = E_T \tag{5.8}$$

$$\frac{\sum_{E_n} E}{E_0} = \sum_{n\leq x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{5.9}$$

Casimir Effect: $\frac{E}{A} = \frac{-\hbar c\pi^2}{6a^3}\zeta(-3)$; $\zeta(-3) = \frac{1}{120} = \frac{-1}{\sum_{n\leq 120} \mu(n)\cdot n}$

$$\frac{\sum_{n=1}^{120} n^2}{\sqrt[4]{2}\cdot\left(1+\frac{1}{17\cdot\sqrt{\frac{\alpha^{-1}}{4\pi}}}\right)} = 481844.47 \approx \frac{E_H}{E_e} \tag{5.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor E_H/E_e\rfloor = 481842} \mu(n) = 17$$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor E_H/E_e\rfloor = 481842} \mu(n) - \left(\frac{3}{r_7^2}\right)^{-1} - 1 \approx \ln(E_H/E_e) \tag{5.11}$$

Parameter matter-antimatter asymmetry.

Proposition 5.9.

$$\frac{\frac{\alpha^{-1}+2\ln(m_{pk}/m_e)-240}{2} = \Omega_b}{\sqrt[4]{2}\cdot\left(\frac{E_H}{E_e}\right)\cdot\left(\sum_{n\leq 240}\mu(n)\cdot n\right)\cdot\sin(\frac{2\pi}{\varphi^2})} = \frac{n(B)-n(\overline{B})}{s} \tag{5.12}$$

$\frac{n(B)-n(\overline{B})}{s} = 6.200682068\cdot 10^{-10}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6 Elemental Potential Proof Of The Riemann Hypothesis

As mentioned in section 2, this proof will be based on the elementary analytic extension of the function $\zeta(s)$ Riemann by function η of Dirichlet.

$$\eta(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \tag{6.1}$$

From (6.1) it follows immediately:

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}}{1-2^{1-s}} \tag{6.2}$$

The function defined by (6.2) has singularities when $s_n = 1 + \frac{2n\pi i}{\ln(2)}$; $(1-2^{1-s_n}) = 0$. When $0 < \Re e(s) < 1$ do not exist singularities and the function (6.2) is the analytical extension of $\zeta(s)$

Theorem 6.1. *All zero of the function $\zeta(s_1 = \frac{1}{2} + it_1) = 0$ can not be a zero for $s_2 = \frac{1}{2} + \alpha + it_2$; $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; being the imaginary part of s_1 y s_2 equal: $t_1 = t_2$*

Proof. : □

Lemma 6.2. *Be a zero of the function $\zeta(s_1) = 0$; $s = \frac{1}{2} + it$. The partial sums of the positive and negative terms $\zeta(s_1)$; defined by function $\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}}}{1-2^{1-s_1}}$;tend to be symmetrical in its absolute value and $\lim_{n\to\infty} S_{1+} = \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$*

Proof. Be $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}}$ being as $1-2^{1-s_1}$ is a constant value, it has to applying the identity (6.2): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} = 0$

We choose one of the zeroes, since induction also applies to dependent function $\sin(t\ln n)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$

Be the set of all positive terms, of the previous identity: $A_+ = \{a_{1+}, a_{2+}, \cdots, a_{n+}\}$; That is: $sgn(a_n) = +$

Let be the set of all negative terms of the same identity: $B_- = \{b_{1-}, b_{2-}\cdots, b_{n-}\}$; That is: $sgn(b_n) = -$

We define the sum of the terms of the sets A_+ , B_-: $S_{1+} + S_{1-} = \sum_{n\to\infty} a_{n+} + \sum_{n\to\infty} b_{n-} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$

Indeed, only if the partial sums satisfy: $S_{1+}(n = x) \sim |S_{1-}(n = x)|$; being x a positive integer that bounds the partial sums, taking the limit will have to: $\lim_{n\to\infty} S_{1+} = \lim_{n\to\infty}|S_{1-}|$; and therefore: $\lim_{n\to\infty}(S_{1+} + S_{1-}) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}}$

With this is proved the lemma 6.2 ☐

Lemma 6.3. *Let the function $\zeta(s_2)$; defined for a $s_2 = \frac{1}{2} + \alpha + it_2$; and $Im(s_1) = Im(s_2)$, then we have:*

$$\zeta(s_2) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[\cos(t\ln n) - i\sin(t\ln n)]}{\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}}{(1-2^{1-s_2}) = k}$$

Indeed, since the imaginary part is the same for s_1 and s_2 ,the terms $\cos(t\ln n)$; $-i\sin(t\ln n)$,have the same value and sign for each n of $\zeta(s_1)$ and $\zeta(s_2)$

Hence $\zeta(s_2)$ can be expressed by the sums of the terms of the sets A_+ y B_-; that is:

$$\zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n\to\infty}\frac{a_{n+}}{n^{\alpha}\cdot k} + \sum_{n\to\infty}\frac{b_{n-}}{n^{\alpha}\cdot k}\ , \ k = 1 - 2^{1-s_2}$$

Now, we obtain that for all a_{n+} is fulfilled: $\frac{a_{1+}}{n_1^{\alpha}} = c_{n_1+}$, and $c_{n_1+} < a_{1+}$ And in a general way: $c_{n+} < a_{n+}$ Applying the rules of the sums of inequalities, we have:

$$\sum_n c_{n+} < \sum_n a_{n+} \tag{6.3}$$

The same result is obtained for negative terms: $\frac{b_{1-}}{n_1^{\alpha}} = d_{n_1-}$, $|d_{1-}| < |b_{1-}|$ And in a general way: $|d_{n-}| < |b_{n-}|$

Applying again the rules of the sums of inequalities, we have:

$$\sum_n |d_{n-}| < \sum_n |b_{n-}| \tag{6.4}$$

Suppose $\zeta(s_2) = 0$ and are the partial sums of the positive and negative terms: $S_{2+}(x) = \sum_{n=1}^{x} c_{n+}$; $S_{2-}(x) = \sum_{n=1}^{x} d_{n-}$

Applying the lemma (6.2) necessarily has to fulfill: $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; and $\lim_{x\to\infty}(S_{2+}(x) + S_{2-}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_n c_{n+} + \sum_n d_{n-}) = 0$

Now is also fulfilled: $S_{1+}(x) \sim |S_{1-}(x)|$; **and for inequalities (6.3) and (6.4) holds also:** $S_{1+}(x) < S_{2+}(x)$; **and** $|S_{2-}(x)| < |S_{1-}(x)|$ **But because:** $S_{1+}(x) \sim |S_{1-}(x)|$; **and** $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; **then necessarily there exists a constant** $C > 1 \in \mathbb{R}$ **,such that:** $\frac{S_{1+}(x)}{C} \sim S_{2+}(x)$; $\frac{|S_{1-}(x)|}{C} \sim |S_{2-}(x)|$ **Indeed, only if it satisfies:**

$$\frac{S_{1+}(x)}{C} \sim S_{2+}(x)\ ; \ \frac{|S_{1-}(x)|}{C} \sim |S_{2-}(x)| \tag{6.5}$$

You can go to the limit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C\cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = 0 \tag{6.6}$$

But the identity (6.6) is impossible, since at most the constant C **can equal only a single** n^{α} **; because if:**

$\lim_{x\to\infty}(\frac{S_{1+}(x)}{C\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C\cdot k}) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{k\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}$; **then for every** $n = 1$, $n = 2, \cdots n = x$; **be fulfilled:** $C = n^{\alpha}$, **which is impossible, since at most** $C = n^{\alpha}$, **for a single** n

Therefore, Theorem 6.1 is demonstrated

By the functional equation (2.2) of Riemann, if: $\zeta(s_2) \neq 0$; **then** $\zeta(1 - s_2) \neq 0$; **as:**

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Theorem 6.4. ***All nonzero of the function*** $\zeta(s_1 = \frac{1}{2}+it_1) \neq 0$ ***can not be a zero for*** $s_2 = \frac{1}{2}+\alpha+it_2; 0 < \alpha < \frac{1}{2}$; ***being the imaginary part of*** s_1 ***y*** s_2 ***equal:*** $t_1 = t_2$

Proof. □

Lemma 6.5. ***Is a non-zero of the function*** $\zeta(s_1) \neq 0$; $s = \frac{1}{2} + it$. *The partial sums of the positive and negative terms of* $\zeta(s_1)$; *defined by function* $\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}}}{1-2^{1-s_1}}$;***tend to be non-symmetric in its absolute value and*** $\lim_{n\to\infty} S_{1+} \neq \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$

Proof. Be $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}}$ being as $1 - 2^{1-s_1}$ is a constant value, it has to applying the identity (6.2): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$; *either* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} \neq 0$

Even if it can be admitted that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$; *and* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} \neq 0$

We chose one of the two cases and repeat the election of Theorem 6.1, since by induction also applies to dependent function of $\sin(t\ln n)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$

Be the set of all positive terms, the previous identity: $A_+ = \{a_{1+}, a_{2+}, \cdots, a_{n+}\}$; That is: $sgn(a_n) = +$

Let be the set of all negative terms of the same identity: $B_- = \{b_{1-}, b_{2-}\cdots, b_{n-}\}$; That is: $sgn(b_n) = -$

We define the sum of the terms of the sets A_+ , B_-: $S_{1+} + S_{1-} = \sum_{n\to\infty} a_{n+} + \sum_{n\to\infty} b_{n-} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = y$; *and* $|y| \neq 0$

Indeed, only if the partial sums satisfy: $S_{1+}(n = x) \nsim |S_{1-}(n = x)|$; , being x a positive integer that bounds the partial sums, taking the limit will have to: $\lim_{n\to\infty} S_{1+} \neq \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$; and therefore: $\lim_{n\to\infty}(S_{1+} + S_{1-}) = y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}}$

With this is proved the lemma 6.5 □

Lemma 6.6. *Let the function* $\zeta(s_2)$; *defined for an* $s_2 = \frac{1}{2} + \alpha + it_2$; *y* $Im(s_1) = Im(s_2)$, *then we have:*

$$\zeta(s_2) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[\cos(t\ln n) - i\sin(t\ln n)]}{\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}}{(1-2^{1-s_2}) = k}$$

Indeed, since the imaginary part is the same for s_1 *and* s_2 *,the terms* $\cos(t\ln n)$; $-i\sin(t\ln n)$, *have the same value and sign for each* n *of* $\zeta(s_1)$ *and* $\zeta(s_2)$

Hence $\zeta(s_2)$ *can be expressed by the sums of the terms of the sets* A_+ *y* B_-*; that is:*

$$\zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n\to\infty}\frac{a_{n+}}{n^{\alpha}\cdot k} + \sum_{n\to\infty}\frac{b_{n-}}{n^{\alpha}\cdot k}, \quad k = 1 - 2^{1-s_2}$$

Now, we obtain that for all a_{n+} *is fulfilled:* $\frac{a_{1+}}{n_1^{\alpha}} = c_{n_1+}$ *, and* $c_{n_1+} < a_{1+}$ *And in a general way:* $c_{n+} < a_{n+}$ *Applying the rules of the sums of inequalities holds:*

$$\sum_n c_{n+} < \sum_n a_{n+} \tag{6.7}$$

The same result is obtained for negative terms: $\frac{b_{1-}}{n_1^{\alpha}} = d_{n_1-}$, $|d_{1-}| < |b_{1-}|$ *And in a general way:* $|d_{n-}| < |b_{n-}|$

Applying again the rules of the sums of inequalities, we have:

$$\sum_n |d_{n-}| < \sum_n |b_{n-}| \qquad (6.8)$$

Assume that: $\zeta(s_2) = 0$ **and are the partial sums of the positive and negative terms:** $S_{2+}(x) = \sum_{n=1}^{x} c_{n+}$; $S_{2-}(x) = \sum_{n=1}^{x} d_{n-}$

Applying the lemma (6.2) necessarily has to fulfill: $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; and $\lim_{x\to\infty}(S_{2+}(x) + S_{2-}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_n c_{n+} + \sum_n d_{n-}) = 0$

Now is also fulfilled: $S_{1+}(x) \nsim |S_{1-}(x)|$; **and by inequalities (6.7) and (6.8) also holds:** $S_{1+}(x) < S_{2+}(x)$; **and** $|S_{2-}(x)| < |S_{1-}(x)|$ **But because:** $S_{1+}(x) \nsim |S_{1-}(x)|$; **and** $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; **then necessarily exist two constants** $C_1 > 1 \in \mathbb{R}$, **and** $C_2 > 1 \in \mathbb{R}$; $C_1 \neq C_2$ **, such that:** $\frac{S_{1+}(x)}{C_1} \sim S_{2+}(x)$; $\frac{|S_{1-}(x)|}{C_2} \sim |S_{2-}(x)|$ **. Indeed, only if it satisfies:**

$$\frac{S_{1+}(x)}{C_1} \sim S_{2+}(x) \, ; \, \frac{|S_{1-}(x)|}{C_2} \sim |S_{2-}(x)| \qquad (6.9)$$

You can go to the limit:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C_1 \cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C_2 \cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t \ln n)) = 0 \qquad (6.10)$$

But the identity (6.10) is impossible, since at most the constants C_1 **y** C_2 **can only be equal to a pair of** n^{α} **; because if:**

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C_1 \cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C_2 \cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t \ln n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t \ln n)}{k\sqrt{n} \cdot n^{\alpha}}$; **then for every** $n = 1$, $n = 2$, $\cdots n = x$; **be fulfilled:** $C_1 = n_1^{\alpha}$, **and** $C_2 = n_2^{\alpha}$ **, which is impossible, since at most** $C_1 = n_1^{\alpha}$ **, for a single** n_1 **and** $C_2 = n_2^{\alpha}$ **for a single** n_2

Hence is demonstrated Theorem 6.4

By the functional equation (2.2) of Riemann if $\zeta(s_2) \neq 0$ **; then** $\zeta(1 - s_2) \neq 0$ **;since:**

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1 - s)\zeta(1 - s)$$

Since Theorems 6.1 and 6.4 and the Riemann functional equation (2.2) hold for every complex number $s = \sigma + it$; $0 < \sigma < 1$; $\sigma \neq \frac{1}{2}$; **immediately follows that the nontrivial zeros of the function** $\zeta(s)$ **are all of the form:** $s = \frac{1}{2} + it$ **; and therefore (if no error in this proof) holds the Riemann hypothesis.**

CONCLUSIONS Once submitted this alleged demonstration of RH, the author continues to believe that there is an error in it. But after an exhaustive review of the proof, repeating the review process for several months, not having been able to find the error, it was decided to publish, in the belief that it will be refuted by someone who finds the error. However, even if the error is, we consider useful in general terms most of this work.

References

[1] Apostol, T. M. (2010), "Zeta and Related Functions", in Olver, Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W., NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, ISBN 978-0521192255, MR2723248

[2] Jonathan Borwein, David M. Bradley, Richard Crandall (2000). "Computational Strategies for the Riemann Zeta Function"J. Comp. App. Math. 121 (1–2): 247–296

[3] Hadamard, Jacques (1896). "Sur la distribution des zeros de la fonction zeta et ses consequences arithmetiques". Bulletin de la Societe Mathematique de France 14: 199–220.

[4] http://oldweb.cecm.sfu.ca/~pborwein/COURSE/MATH08/LECTURE.pdf

[5] Odlyzko, Andrew, Home page including papers on the zeros of the zeta function and tables of the zeros of the zeta function.http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/

[6] Watkins, Matthew R. (2007-07-18), Proposed proofs of the Riemann Hypothesis.http://secamlocal.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/RHproofs.htm

[7] Odlyzko, A. M.; te Riele, H. J. J. (1985), "Disproof of the Mertens conjecture", Journal für die reine und angewandte Mathematik 357: 138–160, doi:10.1515/crll.1985.357.138, MR 783538

[8] Conrey, J. Brian (2003), "The Riemann Hypothesis" (PDF), Notices of the American Mathematical Society: 341–353 Reprinted in (Borwein et al. 2008).http://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf

[9] Deligne, Pierre (1974), "La conjecture de Weil. I", Publications Mathématiques de l'IHÉS 43: 273–307, doi:10.1007/BF02684373, MR 0340258

[10] Franel, J.; Landau, E. (1924), "Les suites de Farey et le problème des nombres premiers" (Franel, 198–201); "Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel (Landau, 202–206)", Göttinger Nachrichten: 198–206

[11] Hardy, G. H. (1914), "Sur les Zéros de la Fonction zeta de Riemann", C. R. Acad. Sci. Paris 158: 1012–1014, JFM 45.0716.04 Reprinted in (Borwein et al. 2008).

[12] Haselgrove, C. B.; Miller, J. C. P. (1960), Tables of the Riemann zeta function, Royal Society Mathematical Tables, Vol. 6, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-06152-0, MR 0117905

[13] Keating, Jonathan P.; Snaith, N. C. (2000), "Random matrix theory and Zeta(1/2 + it)", Communications in Mathematical Physics 214 (1): 57–89, doi:10.1007/s002200000261, MR 1794265

Contents

A Potential Elementary Proof Of The Riemann Hypothesis

A.Garcés Doz

angel1056510@gmail.com

Abstract

This paper presents a possible elementary proof of the Riemann hypothesis. We say possible or potential, you have to be very cautious and skeptical of the potential of the evidence presented, is free of a crucial error that invalidates the proof. After several months of extensive review, the author, having found no error we have decided to publish it in the hope that someone will find the error. However, it is considered that the method may be useful in some way. This potential proof uses only the rudiments of analysis and arithmetic inequalities. It includes a first part of the reason why we think that the Riemann hypothesis seems to be true.

Acknowledgements

I am gratefull to God Almighty for letting me know of its wonders.And the Lord Jesus Christ, our Savior

1 Introducción

En 1859 Riemann formula su hipótesis, en su tesis doctoral: *"Sobre los números primos menores que una magnitud dada"*.

Como no era esencial esta hipótesis para su tesis doctoral, no intentó dar una prueba de la misma. Pero Riemann sabía que los ceros

no triviales están distribuidos en torno a la recta $s = \frac{1}{2} + it$, y sabía también que todos los ceros no triviales debían estar en el rango $0 \leq \Re e(s) \leq 1$

Riemann comprobó unos cuantos ceros que estaban en la linea crítica con parte real $1/2$ y sugirió que todos los ceros no triviales tenían parte real $1/2$; y esta es la hipótesis de Riemann.

En 1896, Hadamard y de la Vallée-Poussin probaron independientemente, que ningún cero podía estar sobre la recta $\Re e(s) = 1$

Unido con otras propiedades de los ceros no triviales demostradas por Riemann, esto demostró que los ceros no triviales deben estar en la banda crítica $0 < \Re e(s) < 1$

En 1914, Hardy demostró que existe una cantidad infinita de ceros $\Re e(s) = 1/2$, no obstante aún existia la posibilidad que un número infinito de ceros se encontraran en la banda crítica con $\Re e(s) \neq 1/2$

2 La Función $\zeta(s)$ de Riemann.

La función zeta de Riemann esta definida, para $\Re e(s) > 1$, por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.1}$$

La función zeta tiene una singularidad en $s = 1$, donde se reduce a las series harmónicas divergentes. Siendo s, el número complejo definido como $s = \sigma + it$

La anterior serie es un prototipo de las series de Dirichlet que converge absolutamente a una función analítica para un s tal que $\sigma > 1$ y diverge para todos los otros valores de s

Riemann mostró que la función definida por la serie en el semiplano de convergencia se puede continuar analíticamente a todos los valores complejos $s \neq 1$. Para $s = 1$ es la serie harmónica que diverge hacia $+\infty$

Por lo tanto la función zeta de Riemann es una función meromórfica en el conjunto s-plano complejo, que es holomorfa en todas partes excepto para un polo simple en $s = 1$ con residuo 1.

2.1 La extensión analítica de la función $\zeta(s)$ de Riemann.

La función zeta de Riemann satisface la llamada ecuación funcional de Riemann.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \tag{2.2}$$

Donde $\Gamma(s)$ es la función gamma; la cual es una igualdad de funciones meromórficas válida en todo el plano complejo.

Esta ecuación relaciona los valores de la función zeta de Riemann en los puntos s y $1-s$. La ecuación funcional (debido a las propiedades de la función seno) implica que $\zeta(s)$ tiene un cero simple en cada número entero negativo $s = -2n$; estos son conocidos como los ceros triviales de $\zeta(s)$. Para s un número entero positivo par, el producto $\sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)$ es regular y la ecuación funcional se refiere a los valores de la función zeta de Riemann en números enteros negativos pares e impares enteros positivos.

La ecuación funcional fue establecido por Riemann en su documento de 1859, *"Sobre el número de primos menores que una magnitud dada"*; y se utiliza para la construcción de la continuación analítica en primer lugar. Una relación equivalente se había conjeturado por Euler más de cien años antes, en 1749, para la función eta de Dirichlet (función zeta alterna, $\zeta^*(s)$).

$\eta(s) = \zeta^*(s)$

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{2.3}$$

Esta serie de Dirichlet es la suma alterna correspondiente a la expansión de la serie de Dirichlet de la función zeta de Riemann, ζ (s) - y por esta razón la función eta de Dirichlet también se conoce como la función alterna zeta, también denotado ζ * (s). La siguiente relación simple se cumple:

$$\zeta^*(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \tag{2.4}$$

Los ceros de la función eta incluyen todos los ceros de la función zeta: la infinidad de enteros pares negativos (verdaderos ceros simples equidistantes), una infinidad de ceros a lo largo de la línea crítica, ninguno de las cuales se sabe que sean múltiples y más del 40% de que se han demostrado ser simples, y los ceros hipotéticos en la franja crítica pero no en la línea crítica, que si lo hacen, de existir deben de situarse en los vértices de rectángulos simétricos alrededor del eje x y la línea crítica y cuya multiplicidad es desconocida . Además, el factor de $(1 - 2^{1-s})$ añade una infinidad de ceros simples complejos, situados en puntos equidistantes en la línea $\Re(s) = 1$ a $s_n = 1 + 2n\pi i/\ln(2)$ donde n es un número entero distinto de cero.

En la potencial y presunta demostración que se presenta en este trabajo se utilizará la función eta de Dirichlet como el elemento esencial funcional de la demostración.

Hardy dio una simple prueba de la ecuación funcional para la función eta, que es:

$$\frac{\eta(1-s)}{\eta(s)} = -\frac{(2^s - 1)}{\pi^s(2^{s-1} - 1)} \Gamma(s) \cos(\pi s/2) \tag{2.5}$$

3 La Función de Möbius y la Hipótesis de Riemann.

La función multiplicativa de Möbius se define por:

$\mu(n) = 1$ si n es un entero libre de cuadrados y con un número de factores primos par.

$\mu(n) = -1$ si n es un entero libre de cuadrados y con un número de factores primos impar.

$\mu(n) = 0$ si n es un entero con un factor primo elevado al cuadrado.

Una de la consecuencias de la hipótesis de Riemann, en el caso de que se cierta, es la estimación de la función de Mertens; o el sumatorio de la función de Möbius. En el caso de que la hipótesis de Riemann sea cierta se cumple la siguiente estimación de la función de Mertens (*Titchmarsh, Edward Charles (1986), The theory of the Riemann zeta-function (2nd ed.), The Clarendon Press Oxford University Press, ISBN 978-0-19-853369-6, MR 882550*) :

$$\sum_{n\leq x} \mu(n) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{3.1}$$

3.1 La Función que cuenta la cantidad de números enteros positivos libres de cuadrados.

Sea la suma de la cantidad de todos los números libres de factores primos cuadrados menores o igual a x, $S(x)$

Theorem 3.1. *("A Survey on k-freeness", Francesco Pappalardi)*

$$S(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2}) \tag{3.2}$$

Proof. Empezamos con la identidad:

$$\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d) \tag{3.3}$$

Esta identidad se obtiene por el hecho de que μ es una función multiplicativa. A partir de ella se obtiene:

$$(3.3.b)\quad S(x) = \sum_{n\leq x} \mu^2(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d^2|n} \mu(d) = \sum_{d\leq\sqrt{x}} \mu(d)\Big(\frac{x}{d^2} + O(1)\Big) = \cdots$$

$$\cdots = x\sum_{d\leq\sqrt{x}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(x^{1/2}) = x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} + O\Big(\sqrt{x} + x\sum_{d>\sqrt{x}}\frac{1}{d^2}\Big) = \frac{x}{\zeta(2)} + O(x^{1/2})$$

Donde $\zeta(2)$ es el valor de la función ζ de Riemann para el valor entero 2: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ □

Lemma 3.2. *Sea la función* $S(x)$ *, se cumple:*

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)\Big|$$

Proof. Por la identidad (3.3), la función $S(x)$ podemos dividirla en dos sumatorios, uno correspondiente a los valores negativos de $\mu(n)_- = -1$, y el otro sumatorio para los valores positivos de $\mu(n)_+ = 1$, por lo que se obtendrá la siguiente igualdad equivalente de $S(x)$:

$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_+\Big|$. Puesto que $sgn\Big(\Big|\mu(n)_-\Big|\Big) = sgn(\mu^2(n)_-)$; y $sgn\Big(\Big|\mu(n)_+\Big|\Big) = sgn(\mu^2(n)_+) = \mu(n)_+$

Se tiene finalmente:

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_+\Big| = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_+$$

; lo cual concluye la prueba del lema 3.2 □

Lemma 3.3. *la función sumatoria* $S(x)$ *; se puede expresar con la siguiente identidad equivalente:*

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|$$

Proof. Puesto que: $2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| + \sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|$; y $sgn\Big(\sum_{n\leq x}\mu(n)_-\Big) = -sgn\Big(\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|\Big)$; se tiene finalmente que:

$$S(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \cdots \tag{3.4}$$

$$\cdots \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu^2(n)_+ = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$$

□

3.1.1 Límites cuando $x \to \infty$ para las funciones $\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big|$ y $\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_+\Big|$

En el límite cuando $x \to \infty$ los dos conjuntos siguientes son equipotentes al conjunto de los números naturales N :

Sean los conjuntos $A_- = \Big\{\Big|\mu(n)_-\Big|\Big\}$; y $B_+ = \Big\{\Big|\mu(n)_+\Big|\Big\}$

Corollary 3.4. *En el límite cuando* $x \to \infty$ *,se cumple:* $A_- \sim B_+$ *;* $A_- \sim N$ *;* $B_+ \sim N$

Puesto que por el teorema 3.1 $S(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$, aplicando el corolario 3.4; se tiene que en el límite cuando $x \to \infty$:

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x}|\mu(n)_-|}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x}|\mu(n)_+|}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\sum_{n\leq x}\mu(n)_+}{x} = \frac{3}{\pi^2}$$

3.1.2 Aplicación del Lemma 3.3 y el Corollary 3.4

Por el lemma 3.3 la función $S(x)$ se podía expresar como:

$S(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\sum_{n\leq x}\Big|\mu(n)_-\Big| = \frac{6}{\pi^2}x + O(x^{1/2})$

Aplicando el corollary 3.4 y aislando el termino $O(x^{1/2})$, se obtiene:

$\sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + 2\Big(\frac{3}{\pi^2}x + \frac{1}{2}O(x^{1/2})\Big) - \frac{6}{\pi^2}x = O(x^{1/2})$

Finalmente se obtiene la siguiente identidad: $\sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ + O(x^{1/2}) = O(x^{1/2})$

La anterior igualdad se cumple solo en dos casos: 1) cuando $\sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ = 0$ y 2) cuando:

$\sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ = O(x^{1/2})$; ya que $O(x^{1/2}) + O(x^{1/2}) = O(2x^{1/2}) = O(x^{1/2})$

Por lo tanto se obtiene una acotación dada por:

$$\sum_{n\leq x}\mu(n)_- + \sum_{n\leq x}\mu(n)_+ = O(x^{1/2}) \tag{3.5}$$

4 De las Propiedades Especiales de la Función $\sqrt{x}$ y su Relación con las Funciones de Möbius y Mertens

La característica común de todas las equivalencias de la RH es que se obtiene siempre una acotación de determinado enunciado como una función $O(x^{1/2+\epsilon})$. ¿Qué característica especial tiene esta función, para que constantemente aparezca la anterior acotación?

4.1 Propiedades únicas de la función $\sqrt{x}$

Una de las propiedades fundamentales que hacen de esta función elemental única, es la siguiente:

Corollary 4.1. *La derivada de la función $\sqrt{x}$ es $1/2$ la inversa de la misma función. Es decir:*

$$f(x) = x^{1/2}\ ;\ df(x) = \frac{1}{2f(x)} \tag{4.1}$$

$$2df(x)f(x) = 1 = \exp(2\pi i)$$

$$\int \frac{2df(x)}{f(x)} = \ln(x) \tag{4.2}$$

Aplicando el corollary 4.1 se tiene: *a)* $2df(n)f(n)\mu(n) = \mu(n)$ *b)* $2df(n)f(n)\mu(n)_- = -2df(n)f(n) = \mu(n)_-$ *c)* $+2df(n)f(n)\mu(n)_+ = \mu(n)_+$

Recordemos que $\sqrt{n}$, tiene dos soluciones: $\{-\sqrt{n}\ \ , +\sqrt{n}$ Y esta es la segunda propiedad importante: la simetría.

Corollary 4.2. *Sea un número complejo* $s = \frac{1}{2} + it$, $\overline{s} = \frac{1}{2} - it$

Solamente cuando $\Re(s) = \frac{1}{2}$ *se cumple la siguiente identidad:*

$$\frac{dx^{\overline{s}}}{\overline{s}} - \frac{1}{x^s} = 0 \tag{4.3}$$

Donde $dx^{\overline{s}}$ *es la derivada de* $x^{\overline{s}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{dx^{\overline{s}}}{\overline{s}} - \frac{1}{x^s} = 0 \tag{4.4}$$

Theorem 4.3. *En el límite cuando $x \to \infty$ se cumple la siguiente identidad:*

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n)_- + \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n)_+ = ..$$

$$\cdots = \lim_{x\to\infty} \int \pm 2df(n)f(n)\mu(n) = O(x^{1/2}) \tag{4.5}$$

Proof. En el límite cuando $x \to \infty$ el conjunto definido por $\{C\} = \left\{\sum_{n\leq x} 2df(n)f(n)\mu(n)_- + \sum_{n\leq x} 2df(n)f(n)\mu(n)_+\right\}$, es equipotente al conjunto definido por:

$\{D\} = \left\{\sum_{n\leq x} \pm 2df(n)f(n)\right\}$ Efectivamente para cada elemento del conjunto C existe una relación biyectiva con el conjunto D :

$2df(n)f(n)\mu(n)_- \longleftrightarrow -2df(n)f(n)$; $2df(n)f(n)\mu(n)_+ \longleftrightarrow +2df(n)f(n)$

Ambos conjuntos son pues equipotentes: $C \sim D$. Por lo tanto se cumple, que en el límite $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (\sum_{n\leq x} 2df(n)f(n)\mu(n)_- + \sum_{n\leq x} 2df(n)f(n)\mu(n)_+)..$$

$$\cdots = \cdots \lim_{x\to\infty} (\sum_{n\leq x} \pm 2df(n)f(n)\ ) = \cdots$$

$$\cdots \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n)_- + \lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n)_+$$

□

Y finalmente:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\leq x} \mu(n) = \lim_{x\to\infty} \int \pm 2df(n)f(n)\mu(n) = O(x^{1/2})$$

5 Por que Pensamos que la Hipótesis de Riemann es Verdadera

Independientemente de los resultados que se han obtenido en las anteriores secciones, es muy probable que el cumplimiento de la hipótesis de Riemann tenga implicaciones determinantes en las leyes más fundamentales de la física. Concretamente: existe una forma algebraica recurrente en toda la física fundamental (mecánica cuántica) que aparece en todos los ambitos.

Esta forma algebráica recurrente es la función: $\sqrt{}$ y todas las equivalencias de la hipótesis de Riemann implican estimaciones del tipo $O(x^{1/2})$, como elemento fundamental.

5.1 Las posibles conexiones de la hipótesis de Riemann con la física.

La función raiz cuadrada se encuentra, por ejemplo, en las siguientes identidades fundamentales:

1. Densidad de probabilidad: $(\rho_t(x))^{1/2} = \psi(x,t)$
2. La asimetría materia-antimateria (densidad física de bariones) como una función dependiente del sumatorio de la función de Möbius mediante sus equivalentes :la R-paridad o el operador de supersimetria $(-1)^F$; $(-1)^B$; donde F y B, son respectivamente número de fermiones y bosones.
3. Una de las dualidades de la teoría de cuerdas: $f(x) = \sqrt{x}$; $2df(x) = \frac{1}{f(x)}$
4. Probabilidad en un volumen dado: $P(v) = \int_v \left|\psi(x,t_0)^2\right| dx$
5. La energía total: $E_t = (m^2c^4 + p^2c^2)^{1/2}$
6. La masa de Planck, tiempo de Planck y longitud de Planck: $m_{pk} = (\frac{\hbar c}{G_N})^{1/2}$
7. La simetría del vacio respecto a la carga eléctrica, teniendo en cuenta que el origen de la carga eléctrica es debido a la unificación de la gravedad con el campo electromagnético: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} m_{pk}\sqrt{G_N}}{\pm e \cdot n^s} = \left(\frac{m_{pk}\sqrt{G_N}}{\pm e}\right) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}) = 0$; $s = \frac{1}{2} + it_n$ Donde $Im(s) = t_n$, corresponde con un cero de $\zeta(s)$. Por cálculos empíricos con la parte imaginaria de los ceros consecutivos de la función $\zeta(s)$; se han encontrado las siguientes identidades que indican de forma muy fuerte, en nuestra opinión, el cumplimiento de RH y su conexión íntima con las leyes fundamentales de la física (mecánica cuántica).

5.1.1 Identidades semiempíricas que conectan los ceros de la función $\zeta(s)$ con la unificación de la gravedad y el electromagnetismo: Ratio $m_{pk}/(\pm e^2/G_N)^{1/2}$

Datos: masa de Planck: $2.176437508 \cdot 10^{-8} Kg = \sqrt{\hbar c/G_N}$; $\hbar = 6.62606957 \cdot 10^{-34} J \cdot s/2\pi$; $G_N = 6.67428 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/Kg^2$

$\pm e = 1.602176565 \cdot 10^{-19} C$; $c = 2.99792458 \cdot 10^8 m/s$; $Z_n = Im(s_n)$; $\zeta(s_n) = 0$

- 1) Los primeros ceros, su parte imaginaria, de la función $\zeta(s)$ de Riemann; utilizados en el calculo:
- $Z_1 = 14.134725141734$; $Z_2 = 21.022039638771$; $Z_3 = 25.010857580145$; $Z_4 = 30.424876112585$; $Z_5 = 32.935061587739$

$$\ln[(\sum_q q^2)(1 + \frac{1}{\exp(2\pi) - 1})] = \frac{(\sum_n \exp(-Z_n))^{-1}}{(m_{pk}/\sqrt{\pm e^2/G_N})} \tag{5.1}$$

Donde: $\sum_q q^2 = (-1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2 + (4/3)^2 + 1^2$;y $\frac{1}{\exp(2\pi)-1}$; es un factor de probabilidad de emisión espontánea de fotones de un cuerpo negro (equlibrio térmico, ley de Boltzman)

- 2) Constante estructura fina para momento cero: $\alpha^{-1} = 137.035999073$; $\zeta^{-1}(-7) = dim(lE8) = 240\, raices\, no\, nulas$
- $lE8 = lattice\, in\, R^8$; $2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e) = 103.0556831$; $m_{pk} = Planck\ mass$; $m_e = electron\ mass$
- $Baryonic\, density = \Omega_b = \frac{(\alpha^{-1} + 2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e)) - 240}{2} \approx 240 - \exp(5 + \ln^2(2))$

$$\ln[(\sum_n \exp(-Z_n))^{-1}] - \cdots$$

$$\cdots - \frac{2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e)}{2(\alpha^{-1} + 2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e))(\exp(1/[\alpha^{-1} \cdot \pi \cdot \cos\theta_{s=2}]))}$$

$$\ldots = \ln\Big(\frac{m_{pk}}{\sqrt{\pm e^2/G_N}}\Big) \tag{5.2}$$

Donde: $\cos\theta_{s=2} = (s = 2)/\sqrt{s(s+1)}$; $spin\ 2$

5.1.2 De la asimetría materia-antimateria, su posible conexión con la función de Mertens y la hipótesis RH

En este apartado se mostraran algunas identidades que parecen indicar una relación entre la asimetría materia-antimateria y la RH; mediante una modificación de la función de Mertens, o el sumatorio de la función de Möbius.

Existe un modelo físico que aplica la función de Mertens y el principio de exclusión de Pauli: el modelo del gas de Riemann, o gas primón. Concretamente en un modelo supersimétrico del gas de Riemann si se consideran las partículas que sean fermiones, el principio de exclusión de Pauli prohíbe a los estados múltiples de partículas que incluyen cuadrados de números primos. Por el teorema spin-estadística, estados de campo con un número par de partículas son bosones, mientras que aquellos con un número impar de partículas son fermiones. El operador fermion $(-1)^F$ tiene una realización muy concreta en este modelo como la función de Möbius, en que la función de Möbius es positiva para bosones, negativa para fermiones, y cero en los estados prohibidos por el principio de exclusión de Pauli.

Nosotros consideraremos un modelo teórico general y mucho más realista. El modelo es simplemente la aplicación de lo que realmente tiene que haber ocurrido en los primeros instantes del big-bang; es decir: una asimetría matería-antimatería que matemáticamente se expresa por: $1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b$; Donde: $n(B) =$ número de bariones; $n(\overline{B}) =$ número de antibariones.

La asimetría materia-antimateria observada, implica que: $sgn(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1$ Independientemente que se utilice un operador paridad o un operador fermión-bosón, la asimetría materia-antimateria tiene que obedecer la identidad:

$$1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b \qquad (5.3)$$

La anterior identidad (5.3) podría ser expresada por una función modificada de la función de Mertens, tal que:

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)n + f(n(m)) = 1/(\sum_B n(B) - \sum_{\overline{B}} n(\overline{B})) = 1/\Omega_b$$

Donde $f(n(m))$ es una función de la cantidad de partículas y sus masas, para un estado estable del vacio con partículas con una vida media, con $t = \infty$. El fotón y el electrón tienen que ser las partículas adecuadas que cumplen estos requisitos y que participaron como residuo final en las reacciones nucleares que dio origen a protones y neutrones; en un estado final de asimetría materia-antimateria.

Conjecture 5.1. *Si el espacio-tiempo-energía, y por tanto los estados del vacio, estan cuantificados, no son continuos y son una manifestación geométrica y topológica de ciertos enrejados, como el derivado del grupo E8; entonces la función* $\sum_{n\leq x} \mu(n) \cdot n$ *esta acotada para cierto enrejado* n

Consideramos que el vacio y la geometria del espacio-tiempo-energía son una manifestación de una geometría de enrejados basados en el grupo E8. (Quantum Information and Cosmology: the Connections)

$$\Omega_b = \frac{(\alpha^{-1} + 2 \cdot \ln(m_{pk}/m_e)) - 240}{2} \approx 240 - \exp(5 + \ln^2 2)$$

Proposition 5.2.

$$\frac{\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n}{\cos\theta_{s=2} + \cos\theta_{s=1/2}} \left(1 + \frac{1}{137^2\sqrt{2}}\right) = \alpha^{-1} \qquad (5.4)$$

Remark 5.3. $\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n = 191$

$$\left|\sum_{n\leq 248} \mu(n) \cdot n\right| = 7^2 = \sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n$$

$$\sum_{n\leq 240} \mu(n) \cdot n + \sum_{n\leq (240/4)} \mu(n) \cdot n = dim(lR^8) = 240$$

Proposition 5.4.

$$\frac{\alpha^{-1}\Big(\sum_{n\leq 240}\mu(n)\cdot n\Big)}{\sum_{n\leq(240/4)}\mu(n)\cdot n}+\Big(\frac{240}{\alpha^{-1}}-1\Big)^{-1}\approx \exp(2\pi) \quad (5.5)$$

Remark 5.5. $dim(SO(7))+\frac{\sum_{n\leq(240/4)}\mu(n)\cdot n}{(240/4)}=21+0.81\overline{6}\approx\Omega_b^{-1}$

Proposition 5.6.

$$\frac{\alpha^{-1}-2\ln(m_{pk}/m_e)}{\pi}+\Big|\sum_{n=1}^{dim(SU(5))}\mu(n)n\Big|=21.81627051 \quad (5.6)$$

$21.81627051\approx\Omega_b^{-1}$

Proposition 5.7.

$$\Big(\frac{[\Omega_b^{-1}-Z_1]3\alpha^{-1}}{2\pi}\Big)^{1/2}\approx\Big(240-\exp(5+\ln^2 2)\Big)^{-1} \quad (5.7)$$

Donde $Z_1=Im(s_1)$; $\zeta(s_1)=0$ *(primer cero de la función* $\zeta(s)$ *de Riemann)*

5.1.3 La hipótesis de Riemann y la forma de la ecuación de la energía total

Es posible que la forma de la ecuación de la energía total sea una consecuencia del cumplimiento de la hipótesis de Riemann. Concretamente: la función de Mertens permite cuantificar la energía con valores positivos y negativos.

Datos: ratio energía del vacio de Higgs y energía del electrón: 481842.894; $r_7=$ ***radio menor adimensional compactificación circular en siete dimensiones*** $=$ ***2.9569490582***

Proposition 5.8.

$$\sum_{E_n}\mu(n)(n^2(m^2c^4+p^2c^2))^{1/2}=E_T \quad (5.8)$$

$$\frac{\sum_{E_n}E}{E_0}=\sum_{n\leq x}\mu(n)=O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \quad (5.9)$$

Efecto Casimir: $\frac{E}{A}=\frac{-\hbar c\pi^2}{6a^3}\zeta(-3)$; $\zeta(-3)=\frac{1}{120}=\frac{-1}{\sum_{n\leq 120}\mu(n)\cdot n}$

$$\frac{\sum_{n=1}^{120}n^2}{\sqrt[4]{2}\cdot\Big(1+\frac{1}{17\cdot\sqrt{\frac{\alpha^{-1}}{4\pi}}}\Big)}=481844.47\approx\frac{E_H}{E_e} \quad (5.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor E_H/E_e\rfloor=481842}\mu(n)=17$$

$$\sum_{n=1}^{\lfloor E_H/E_e\rfloor=481842}\mu(n)-\Big(\frac{3}{r_7^2}\Big)^{-1}-1\approx\ln(E_H/E_e) \quad (5.11)$$

Parametro de asimetría materia-antimateria

Proposition 5.9.

$$\frac{\frac{\alpha^{-1}+2\ln(m_{pk}/m_e)-240}{2}=\Omega_b}{\sqrt[4]{2}\cdot\Big(\frac{E_H}{E_e}\Big)\cdot\Big(\sum_{n\leq 240}\mu(n)\cdot n\Big)\cdot\sin(\frac{2\pi}{\varphi^2})}=\frac{n(B)-n(\overline{B})}{s} \quad (5.12)$$

$\frac{n(B)-n(\overline{B})}{s}=6.200682068\cdot 10^{-10}$, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

6 La Prueba Potencial Elemental De La Hipótesis De Riemann

Como se mencionó en la sección 2; esta prueba elemental se basará en la extensión analítica de la función $\zeta(s)$ de Riemann mediante la función η de Dirichlet.

$$\eta(s)=(1-2^{1-s})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \quad (6.1)$$

De (6.1) se deduce inmediatamente:

$$\zeta(s) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}}{1-2^{1-s}} \tag{6.2}$$

La función definida por (6.2) tiene singularidades cuando $s_n = 1 + \frac{2n\pi i}{\ln(2)}$; $(1-2^{1-s_n}) = 0$ Cuando $0 < \Re e(s) < 1$ no existen singularidades y la función (6.2) es la extensión analítica de $\zeta(s)$

Theorem 6.1. *Todo cero de la función $\zeta(s_1 = \frac{1}{2} + it_1) = 0$ no puede ser un cero para $s_2 = \frac{1}{2}+\alpha+it_2; 0 < \alpha < \frac{1}{2}$; siendo la parte imaginaria de s_1 y s_2 iguales: $t_1 = t_2$*

Proof. : □

Lemma 6.2. *Sea un cero de la función $\zeta(s_1) = 0$; $s = \frac{1}{2} + it$ Las sumas parciales de los términos positivos y negativos de $\zeta(s_1)$; definida por la función $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}}}{1-2^{1-s_1}}$;tienden a ser simétricas en su valor absoluto y en $\lim_{n\to\infty} S_{1+} = \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$*

Proof. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}}$ Puesto que $1 - 2^{1-s_1}$ es un valor constante; se tiene que aplicando la identidad (6.2): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} = 0$

Elegimos uno de los ceros; ya que por inducción se aplicará también a la función dependiente de $\sin(t\ln n)$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$

Sea el conjunto de todos los términos positivos de la anterior identidad: $A_+ = \{a_{1+}, a_{2+}, \cdots, a_{n+}\}$; Es decir: $sgn(a_n) = +$

Sea el conjunto de todos los términos negativos de la misma identidad: $B_- = \{b_{1-}, b_{2-} \cdots, b_{n-}\}$; Es decir: $sgn(b_n) = -$

Definimos la suma de los términos de los conjuntos A_+ , B_-: $S_{1+} + S_{1-} = \sum_{n\to\infty} a_{n+} + \sum_{n\to\infty} b_{n-} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = 0$

Efectivamente, solo si las sumas parciales cumplen: $S_{1+}(n = x) \sim |S_{1-}(n = x)|$; , siendo x un número entero positivo que acota las sumas parciales, se tendrá pasando al límite que: $\lim_{n\to\infty} S_{1+} = \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$; y por lo tanto: $\lim_{n\to\infty}(S_{1+} + S_{1-}) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}}$

Con lo que queda demostrado el lema 6.2 □

Lemma 6.3. *Sea la función $\zeta(s_2)$; definida para un $s_2 = \frac{1}{2}+\alpha+it_2$; y $Im(s_1) = Im(s_2)$, entonces se tiene que:*

$$\zeta(s_2) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}[\cos(t\ln n)-i\sin(t\ln n)]}{\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}}{(1-2^{1-s_2})=k}$$

Efectivamente, puesto que la parte imaginaria es la misma para s_1 y s_2 , los términos $\cos(t\ln n)$; $-i\sin(t\ln n)$, tienen el mismo valor y signo para cada n de $\zeta(s_1)$ y $\zeta(s_2)$

Por lo tanto $\zeta(s_2)$ se puede expresar por las sumas de los términos de los conjuntos A_+ y B_-; es decir:

$$\zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{n^{\alpha}\cdot k} + \sum_{n\to\infty} \frac{b_{n-}}{n^{\alpha}\cdot k}, \; k = 1-2^{1-s_2}$$

Ahora bien, se tiene que para todo a_{n+} se cumple: $\frac{a_{1+}}{n_1^{\alpha}} = c_{n_1+}$, y $c_{n_1+} < a_{1+}$ Y de forma general: $c_{n+} < a_{n+}$ Aplicando las reglas de las sumas de desigualdades, se tiene:

$$\sum_n c_{n+} < \sum_n a_{n+} \tag{6.3}$$

Igual resultado se obtiene para los términos negativos: $\frac{b_{1-}}{n_1^{\alpha}} = d_{n_1-}$, $|d_{1-}| < |b_{1-}|$ y de forma general: $|d_{n-}| < |b_{n-}|$

Aplicando otra vez las reglas de las sumas de desigualdades, se tiene:

$$\sum_n |d_{n-}| < \sum_n |b_{n-}| \tag{6.4}$$

Supongamos que $\zeta(s_2) = 0$ y sean las sumas parciales de los terminos positivos y negativos: $S_{2+}(x) = \sum_{n=1}^{x} c_{n+}$; $S_{2-}(x) = \sum_{n=1}^{x} d_{n-}$

Aplicando el lemma (6.2) necesariamente se tiene que cumplir: $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; y $\lim_{x\to\infty}(S_{2+}(x) + S_{2-}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_n c_{n+} + \sum_n d_{n-}) = 0$

Ahora bien, se cumple también: $S_{1+}(x) \sim |S_{1-}(x)|$; y por las desigualdades (6.3) y (6.4) se cumple igualmente: $S_{1+}(x) < S_{2+}(x)$; y $|S_{2-}(x)| < |S_{1-}(x)|$ Pero ya que: $S_{1+}(x) \sim |S_{1-}(x)|$; y $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; entonces necesariamente existe una constante $C > 1 \in \mathbb{R}$, tal que: $\frac{S_{1+}(x)}{C} \sim S_{2+}(x)$; $\frac{|S_{1-}(x)|}{C} \sim |S_{2-}(x)|$ Efectivamente, solo si se cumple:

$$\frac{S_{1+}(x)}{C} \sim S_{2+}(x)\,;\ \frac{|S_{1-}(x)|}{C} \sim |S_{2-}(x)| \tag{6.5}$$

Se puede pasar al límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C\cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = 0 \tag{6.6}$$

Pero la identidad (6.6) es imposible, puesto que a lo sumo la constante C solo puede ser igual a un solo n^α ; puesto que si: $\lim_{x\to\infty}(\frac{S_{1+}(x)}{C\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C\cdot k}) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{k\sqrt{n}\cdot n^\alpha}$ **; entonces para todo $n = 1, n = 2, \cdots n = x$; se cumpliría: $C = n^\alpha$, lo cual es imposible, ya que a lo sumo $C = n^\alpha$, para un solo n**

Por lo tanto queda demostrado el teorema 6.1

Por la ecuación funcional (2.2) de Riemann si $\zeta(s_2) \neq 0$; entonces $\zeta(1-s_2) \neq 0$; ya que:

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Theorem 6.4. ***Todo no cero de la función $\zeta(s_1 = \frac{1}{2} + it_1) \neq 0$ no puede ser un cero para $s_2 = \frac{1}{2} + \alpha + it_2$; $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; siendo la parte imaginaria de s_1 y s_2 iguales: $t_1 = t_2$***

Proof. □

Lemma 6.5. ***Sea un no cero de la función $\zeta(s_1) \neq 0$; $s = \frac{1}{2} + it$*** *Las sumas parciales de los términos positivos y negativos de $\zeta(s_1)$; definida por la función* $\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}}}{1-2^{1-s_1}}$ ***;tienden a ser no simétricas en su valor absoluto y en*** $\lim_{n\to\infty} S_{1+} \neq \lim_{n\to\infty}|S_{1-}|$

Proof. Sea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{s_1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}}$ Puesto que $1 - 2^{1-s_1}$ es un valor constante; se tiene que aplicando la identidad (6.2): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$; *o bien* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} \neq 0$

Incluso se puede admitir el caso en que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$; *y* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-i\sin(t\ln n))}{\sqrt{n}} \neq 0$

Elegimos uno de los dos casos y repetimos la elección del teorema 6.1; ya que por inducción se aplicará también a la función dependiente de $\sin(t\ln n)$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} \neq 0$

Sea el conjunto de todos los términos positivos de la anterior identidad: $A_+ = \{a_{1+}, a_{2+}, \cdots, a_{n+}\}$; Es decir: $sgn(a_n) = +$

Sea el conjunto de todos los términos negativos de la misma identidad: $B_- = \{b_{1-}, b_{2-}\cdots, b_{n-}\}$; Es decir: $sgn(b_n) = -$

Definimos la suma de los términos de los conjuntos A_+ , B_-: $S_{1+} + S_{1-} = \sum_{n\to\infty} a_{n+} + \sum_{n\to\infty} b_{n-} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}} = y$

$|y| \neq 0$

Efectivamente, solo si las sumas parciales cumplen: $S_{1+}(n = x) \nsim |S_{1-}(n = x)|$; , siendo x un número entero positivo que acota las sumas parciales, se tendrá pasando al límite que: $\lim_{n\to\infty} S_{1+} \neq \lim_{n\to\infty} |S_{1-}|$; y por lo tanto: $\lim_{n\to\infty}(S_{1+} + S_{1-}) = y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)\cos(t\ln n)}{\sqrt{n}}$

Con lo que queda demostrado el lema 6.5 □

Lemma 6.6. *Sea la función* $\zeta(s_2)$ *; definida para un* $s_2 = \frac{1}{2} + \alpha + it_2$ *; y* $Im(s_1) = Im(s_2)$*, entonces se tiene que:*

$$\zeta(s_2) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}[\cos(t\ln n) - i\sin(t\ln n)]}{\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}}{(1-2^{1-s_2}) = k}$$

Efectivamente, puesto que la parte imaginaria es la misma para s_1 *y* s_2 *, los términos* $\cos(t\ln n)$; $-i\sin(t\ln n)$ *, tienen el mismo valor y signo para cada* n *de* $\zeta(s_1)$ *y* $\zeta(s_2)$

Por lo tanto $\zeta(s_2)$ *se puede expresar por las sumas de los términos de los conjuntos* A_+ *y* B_-*; es decir:*

$$\zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{n^{\alpha}\cdot k} + \sum_{n\to\infty} \frac{b_{n-}}{n^{\alpha}\cdot k}\ ,\ k = 1 - 2^{1-s_2}$$

Ahora bien, se tiene que para todo a_{n+} *se cumple:* $\frac{a_{1+}}{n_1^{\alpha}} = c_{n_1+}$ *, y* $c_{n_1+} < a_{1+}$ *Y de forma general:* $c_{n+} < a_{n+}$ *Aplicando las reglas de las sumas de desigualdades se tiene:*

$$\sum_n c_{n+} < \sum_n a_{n+} \tag{6.7}$$

Igual resultado se obtiene para los términos negativos: $\frac{b_{1-}}{n_1^{\alpha}} = d_{n_1-}$, $|d_{1-}| < |b_{1-}|$ *y de forma general:* $|d_{n-}| < |b_{n-}|$

Aplicando otra vez las reglas de las sumas de desigualdades se tiene:

$$\sum_n |d_{n-}| < \sum_n |b_{n-}| \tag{6.8}$$

Supongamos que $\zeta(s_2) = 0$ y sean las sumas parciales de los terminos positivos y negativos: $S_{2+}(x) = \sum_{n=1}^{x} c_{n+}$; $S_{2-}(x) = \sum_{n=1}^{x} d_{n-}$

Aplicando el lemma (6.2) necesariamente se tiene que cumplir: $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; y $\lim_{x\to\infty}(S_{2+}(x) + S_{2-}(x)) = \lim_{n\to\infty}(\sum_n c_{n+} + \sum_n d_{n-}) = 0$

Ahora bien, se cumple también: $S_{1+}(x) \nsim |S_{1-}(x)|$; y por las desigualdades (6.7) y (6.8) se cumple igualmente: $S_{1+}(x) < S_{2+}(x)$; y $|S_{2-}(x)| < |S_{1-}(x)|$ Pero ya que: $S_{1+}(x) \nsim |S_{1-}(x)|$; y $S_{2+}(x) \sim |S_{2-}(x)|$; entonces necesariamente existen dos constantes $C_1 > 1 \in \mathbb{R}$, y $C_2 > 1 \in \mathbb{R}$; $C_1 \neq C_2$, tal que: $\frac{S_{1+}(x)}{C_1} \sim S_{2+}(x)$; $\frac{|S_{1-}(x)|}{C_2} \sim |S_{2-}(x)|$ Efectivamente solo si se cumple:

$$\frac{S_{1+}(x)}{C_1} \sim S_{2+}(x)\ ;\ \frac{|S_{1-}(x)|}{C_2} \sim |S_{2-}(x)| \tag{6.9}$$

Se puede pasar al límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C_1\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C_2\cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = 0 \tag{6.10}$$

Pero la identidad (6.10) es imposible, puesto que a lo sumo las constantes C_1 y C_2 solo pueden ser igual a un par n^{α} ; puesto que si: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{S_{1+}(x)}{C_1\cdot k} + \frac{S_{1-}(x)}{C_2\cdot k}\right) = \zeta(s_2)(\cos(t\ln n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(t\ln n)}{k\sqrt{n}\cdot n^{\alpha}}$ **; entonces para todo $n = 1 , n = 2 , \cdots n = x$; se cumpliría: $C_1 = n_1^{\alpha}$, y $C_2 = n_2^{\alpha}$, lo cual es imposible, ya que a lo sumo $C_1 = n_1^{\alpha}$, para un solo n_1 y $C_2 = n_2^{\alpha}$ para un solo n_2**

Por lo tanto queda demostrado el teorema 6.4

Por la ecuación funcional (2.2) de Riemann si $\zeta(s_2) \neq 0$; entonces $\zeta(1-s_2) \neq 0$; ya que:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Puesto que los teoremas 6.1 y 6.4 y la ecuación funcional de Riemann (2.2) se cumplen para todo número complejo $s = \sigma + it$; $0 < \sigma < 1$; $\sigma \neq \frac{1}{2}$; se deduce inmediatamente que los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ son todos de la forma: $s = \frac{1}{2} + it$; y por lo tanto (si no existe error en esta demostración) se cumple la hipótesis de Riemann.

Conclusiones Una vez presentada esta presunta demostración de RH,el autor continua convencido que existe un error en la misma. Pero después de un exhaustivo repaso de la prueba, repitiendo el proceso de revisión durante varios meses; no habiendo sido capaz de encontrar el error; se ha decidido publicarla, en el convencimiento de que será refutada por alguien que encuentre el error.

No obstante, incluso si se encuentra el error, consideramos de utilidad en terminos generales la mayor parte de este trabajo.

References

[1] Apostol, T. M. (2010), "Zeta and Related Functions", in Olver, Frank W. J.; Lozier, Daniel M.; Boisvert, Ronald F.; Clark, Charles W., NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, ISBN 978-0521192255, MR2723248

[2] Jonathan Borwein, David M. Bradley, Richard Crandall (2000). "Computational Strategies for the Riemann Zeta Function"J. Comp. App. Math. 121 (1–2): 247–296

[3] Hadamard, Jacques (1896). "Sur la distribution des zéros de la fonction ζ(s) et ses conséquences arithmétiques". Bulletin de la Societé Mathématique de France 14: 199–220.

[4] http://oldweb.cecm.sfu.ca/~pborwein/COURSE/MATH08/LECTURE.pdf

[5] Odlyzko, Andrew, Home page including papers on the zeros of the zeta function and tables of the zeros of the zeta function.http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/

[6] Watkins, Matthew R. (2007-07-18), Proposed proofs of the Riemann Hypothesis.http://secamlocal.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/RHproofs.htm

[7] Odlyzko, A. M.; te Riele, H. J. J. (1985), "Disproof of the Mertens conjecture", Journal für die reine und angewandte Mathematik 357: 138–160, doi:10.1515/crll.1985.357.138, MR 783538

[8] Conrey, J. Brian (2003), "The Riemann Hypothesis" (PDF), Notices of the American Mathematical Society: 341–353 Reprinted in (Borwein et al. 2008).http://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf

[9] Deligne, Pierre (1974), "La conjecture de Weil. I", Publications Mathématiques de l'IHÉS 43: 273–307, doi:10.1007/BF02684373, MR 0340258

[10] Franel, J.; Landau, E. (1924), "Les suites de Farey et le problème des nombres premiers" (Franel, 198–201); "Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel (Landau, 202–206)", Göttinger Nachrichten: 198–206

[11] Hardy, G. H. (1914), "Sur les Zéros de la Fonction ζ(s) de Riemann", C. R. Acad. Sci. Paris 158: 1012–1014, JFM 45.0716.04 Reprinted in (Borwein et al. 2008).

[12] Haselgrove, C. B.; Miller, J. C. P. (1960), Tables of the Riemann zeta function, Royal Society Mathematical Tables, Vol. 6, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-06152-0, MR 0117905

[13] Keating, Jonathan P.; Snaith, N. C. (2000), "Random matrix theory and ζ(1/2 + it)", Communications in Mathematical Physics 214 (1): 57–89, doi:10.1007/s002200000261, MR 1794265

[14] Littlewood, J. E. (1962), "The Riemann hypothesis", The scientist speculates: an anthology of partly baked idea, New York: Basic books

Angel Garc®s Doz

Firmado digitalmente porAngel Garc®s Doz
DN: cn=Angel Garc®s Doz gn=Angel Garc®s Doz c=Spain l=ES e=angel1056510@gmail.com
Motivo: I am the author of this document
Ubicaci· n:Spain
Fecha:2013-11-16 00:32+01:00