УДК 537.8

Deformation electromagnetic field in the Minkowski space

Yu.A. Spirichev
Research & Design Institute of Radio-Electronic Engineering
Zarechny, Penza region, Russia

Abstract: The work is dedicated to the development of the classical theory of the electromagnetic field (EMF). On the basis of EMF representation by an antisymmetric tensor field of the second rank, the symmetric tensor of EMF is constructed. This tensor describes the deformation of EMF in Minkowski space. Coupling equations of its components supplement the system of Maxwell's equations. The new equations describe connection between volumetric and shear deformations of EMF. Coupling equations between strain tensor components and tensor components received. It is shown that members of calibration condition of Lorentz are components of a spherical tensor of volumetric deformation of EMF. It is shown that the electric charges produce volumetric deformation of EMF. The wave equation of tensor waves of volumetric deformation of EMF is received.

Keywords: electromagnetic field, the vector potential, Minkowski space, the deformation of the electromagnetic field, energy of deformation field, forceof deformation field, tensor wave, the Minkowski space.

Деформация электромагнитного поля в пространстве Минковского

Ю.А. Спиричев
Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники,
г. Заречный, Пензенская обл., Россия
yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена развитию классической теории электромагнитного поля (ЭМП). На основе представления ЭМП антисимметричным тензорным полем второго ранга, построен симметричный тензор ЭМП. Этот тензор описывает деформациюЭМП в пространстве Минковского. Уравнения связи его компонентов дополняют систему уравнений Максвелла. Новые уравнения описывают связь между объемными и сдвиговыми деформациями ЭМП. Получены уравнения связи между компонентами тензора деформации и компонентами тензора ЭМП. Показано, что члены калибровочного условия Лоренца являются компонентами

шарового тензора объемной деформации ЭМП. Показано, что электрические заряды производят объемную деформацию ЭМП. Получено волновое уравнение тензорных волн объемной деформации ЭМП.

Ключевые слова: электромагнитное поле, вектор потенциал, пространство Минковского, деформация электромагнитного поля, энергия деформации поля, силы деформации поля, тензорные волны, пространство Минковского.

Оглавление

1 Введение

Ковариантный антисимметричный 4-тензор электромагнитного поля (ЭМП) [1] и уравнения связи между его компонентами можно рассматривать, как описание четырехмерных вращений ЭМП в пространстве Минковского. Тогда, антисимметричному 4-тензору вращения ЭМП, записанному через частные производные вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$:

$$\mathbf{F}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

можно сопоставить симметричный 4-тензор деформации

$$\mathbf{F}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu),$$

который будет описывать четырехмерные деформации ЭМП в этом пространстве. Здесь и далее ЭМП понимается, как поле вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$. В существующей теории ЭМП 4-деформации поля не рассматриваются, а их уравнения отсутствуют. Однако возможность существования в природе таких деформаций предполагает существование деформационных сил и потенциальной энергии деформации ЭМП. Эти силы и энергия должны проявлять себя в физических эффектах. Из симметричного 4-тензора деформации следуют два вида деформации ЭМП, это четырехмерная продольная деформация растяжения/сжатия и четырехмерная поперечная деформация сдвига. Четырехмерную деформацию сдвига можно представить в виде трехмерной пространственно-временной и трехмерной пространственной деформаций сдвига ЭМП. Каждому виду деформации соответствуют свои силы и потенциальная энергия. Система уравнений 4-вращения и 4-деформации ЭМП представляет собой полную систему уравнений, описывающую его состояние и эволюцию в пространстве Минковского. Решения уравнений пространственно-временных деформаций ЭМП могут раскрыть его новые физические свойства.

В настоящей работе получены уравнения связи между компонентами симметричного 4-тензора второго ранга, описывающими пространственно-временные деформации ЭМП и уравнения связи между компонентами 4-тензора деформации и 4-тензора ЭМП, а также рассмотрены некоторые следствия из этих уравнений.

2 Симметричный 4-тензор деформации поля 4-вектора-потенциала ЭМП

Ковариантный антисимметричный 4-тензор ЭМП в матричном представлении, где векторы электрического и магнитного поля записаны через частные производные вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$ (μ=0,1,2,3) [1] имеет вид:

$$\mathbf{F}_{[\mu\nu]}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & (\partial_0A_1-\partial_1A_0) & (\partial_0A_2-\partial_2A_0) & (\partial_0A_3-\partial_3A_0)\\ -(\partial_0A_1-\partial_1A_0) & 0 & (\partial_1A_2-\partial_2A_1) & (\partial_1A_3-\partial_3A_1)\\ -(\partial_0A_2-\partial_2A_0) & -(\partial_1A_2-\partial_2A_1) & 0 & (\partial_2A_3-\partial_3A_2)\\ -(\partial_0A_3-\partial_3A_0) & -(\partial_1A_3-\partial_3A_1) & -(\partial_2A_3-\partial_3A_2) & 0\end{pmatrix} \quad (1)$$

где $\mathbf{E}_k$ (k=x,y,z) - вектор напряженности электрического поля;

$\mathbf{B}_k$ - вектор магнитной индукции;

∂_μ - оператор частной производной.

Ковариантный симметричный 4-тензор в матричном представлении, имеет вид:

$$\mathbf{F}_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\partial_0A_0 & (\partial_0A_1+\partial_1A_0) & (\partial_0A_2+\partial_2A_0) & (\partial_0A_3+\partial_3A_0)\\ (\partial_0A_1+\partial_1A_0) & 2\partial_1A_1 & (\partial_1A_2+\partial_2A_1) & (\partial_1A_3+\partial_3A_1)\\ (\partial_0A_2+\partial_2A_0) & (\partial_1A_2+\partial_2A_1) & 2\partial_2A_2 & (\partial_2A_3+\partial_3A_2)\\ (\partial_0A_3+\partial_3A_0) & (\partial_1A_3+\partial_3A_1) & (\partial_2A_3+\partial_3A_2) & 2\partial_3A_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}G_t & K_x & K_y & K_z\\ K_x & G_x & L_z & L_y\\ K_y & L_z & G_y & L_x\\ K_z & L_y & L_x & G_z\end{pmatrix} \quad (2)$$

где $\mathbf{G}_\mu$ (μ=t,x,y,z) – 4-вектор продольной деформации поля;

$\mathbf{K}_k$ (k=x,y,z) – 3-вектор поперечной пространственно-временной деформации поля;

$\mathbf{L}_k$ (k=x,y,z) – 3-вектор поперечной пространственной деформации поля.

Тензоры (1) и (2) являются результатом альтернирования и симметрирования тензора

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\partial_0A_0 & \partial_0A_1 & \partial_0A_2 & \partial_0A_3\\ \partial_1A_0 & \partial_1A_1 & \partial_1A_2 & \partial_1A_3\\ \partial_2A_0 & \partial_2A_1 & \partial_2A_2 & \partial_2A_3\\ \partial_3A_0 & \partial_3A_1 & \partial_3A_2 & \partial_3A_3\end{pmatrix} \quad (3)$$

Симметричный 4-тензор (2) можно разложить на шаровой 4-тензор:

$$\mathbf{G}_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\partial_0A_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\partial_1A_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\partial_2A_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\partial_3A_3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}G_t & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_x & 0 & 0\\ 0 & 0 & G_y & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_z\end{pmatrix} \quad (4)$$

и 4-тензор-девиатор:

$$\mathbf{D}_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & (\partial_0A_1+\partial_1A_0) & (\partial_0A_2+\partial_2A_0) & (\partial_0A_3+\partial_3A_0)\\ (\partial_0A_1+\partial_1A_0) & 0 & (\partial_1A_2+\partial_2A_1) & (\partial_1A_3+\partial_3A_1)\\ (\partial_0A_2+\partial_2A_0) & (\partial_1A_2+\partial_2A_1) & 0 & (\partial_2A_3+\partial_3A_2)\\ (\partial_0A_3+\partial_3A_0) & (\partial_1A_3+\partial_3A_1) & (\partial_2A_3+\partial_3A_2) & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & K_x & K_y & K_z\\ K_x & 0 & L_z & L_y\\ K_y & L_z & 0 & L_x\\ K_z & L_y & L_x & 0\end{pmatrix} \quad (5)$$

По аналогии с упругой средой, шаровой 4-тензор $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$ (4) определяет объемные деформации растяжения/сжатия, а 4-тензор-девиатор $\mathbf{D}_{(\mu\nu)}$ (5) определяет деформации сдвига поля вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$. Полярный 3-вектор $\mathbf{K}_k$ определяет деформацию сдвига в трех плоскостях с временной и двумя пространственными осями координат, а 3-вектор $\mathbf{L}_k$ определяет деформацию сдвига в трех плоскостях с пространственными осями координат.

3 Уравнения 4-деформации ЭМП

а) Уравнения 4-деформации из условия неразрывности ЭМП

Для получения уравнений связи между компонентами 4-тензора $\mathbf{F}_{(\mu\nu)}$ (2), учитывая его симметрию, из его 16 компонентов достаточно рассмотреть только 10 независимых компонентов. Записав частные производные по времени и пространству этих 10 компонентов, получим 40 исходных соотношений, из которых далее найдем искомые дифференциальные уравнения связи между компонентами 4-тензора деформации. Для удобства представления здесь и далее однотипные соотношения сгруппированы, а электромагнитные постоянные опущены.

$$\partial_0(\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0) = \partial_t K_x \quad (6) \qquad \partial_0(\partial_0 A_2 + \partial_2 A_0) = \partial_t K_y \quad (10) \qquad \partial_0(\partial_0 A_3 + \partial_3 A_0) = \partial_t K_z \quad (14)$$
$$\partial_1(\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0) = \partial_x K_x \quad (7) \qquad \partial_1(\partial_0 A_2 + \partial_2 A_0) = \partial_x K_y \quad (11) \qquad \partial_1(\partial_0 A_3 + \partial_3 A_0) = \partial_x K_z \quad (15)$$
$$\partial_2(\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0) = \partial_y K_x \quad (8) \qquad \partial_2(\partial_0 A_2 + \partial_2 A_0) = \partial_y K_y \quad (12) \qquad \partial_2(\partial_0 A_3 + \partial_3 A_0) = \partial_y K_z \quad (16)$$
$$\partial_3(\partial_0 A_1 + \partial_1 A_0) = \partial_z K_x \quad (9) \qquad \partial_3(\partial_0 A_2 + \partial_2 A_0) = \partial_z K_y \quad (13) \qquad \partial_3(\partial_0 A_3 + \partial_3 A_0) = \partial_z K_z \quad (17)$$

$$\partial_0(\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1) = \partial_t L_z \quad (18) \qquad \partial_0(\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2) = \partial_t L_x \quad (22) \qquad \partial_0(\partial_1 A_3 + \partial_3 A_1) = \partial_t L_y \quad (26)$$
$$\partial_1(\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1) = \partial_x L_z \quad (19) \qquad \partial_1(\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2) = \partial_x L_x \quad (23) \qquad \partial_1(\partial_1 A_3 + \partial_3 A_1) = \partial_x L_y \quad (27)$$
$$\partial_2(\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1) = \partial_y L_z \quad (20) \qquad \partial_2(\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2) = \partial_y L_x \quad (24) \qquad \partial_2(\partial_1 A_3 + \partial_3 A_1) = \partial_y L_y \quad (28)$$
$$\partial_3(\partial_1 A_2 + \partial_2 A_1) = \partial_z L_z \quad (21) \qquad \partial_3(\partial_2 A_3 + \partial_3 A_2) = \partial_z L_x \quad (25) \qquad \partial_3(\partial_1 A_3 + \partial_3 A_1) = \partial_z L_y \quad (29)$$

$$2\partial_0(\partial_0 A_0) = \partial_t G_t \quad (30) \qquad 2\partial_0(\partial_1 A_1) = \partial_t G_x \quad (34) \qquad 2\partial_0(\partial_2 A_2) = \partial_t G_y \quad (38) \qquad 2\partial_0(\partial_3 A_3) = \partial_t G_z \quad (42)$$
$$2\partial_1(\partial_0 A_0) = \partial_x G_t \quad (31) \qquad 2\partial_1(\partial_1 A_1) = \partial_x G_x \quad (35) \qquad 2\partial_1(\partial_2 A_2) = \partial_x G_y \quad (39) \qquad 2\partial_1(\partial_3 A_3) = \partial_x G_z \quad (43)$$
$$2\partial_2(\partial_0 A_0) = \partial_y G_t \quad (32) \qquad 2\partial_2(\partial_1 A_1) = \partial_y G_x \quad (36) \qquad 2\partial_2(\partial_2 A_2) = \partial_y G_y \quad (40) \qquad 2\partial_2(\partial_3 A_3) = \partial_y G_z \quad (44)$$
$$2\partial_3(\partial_0 A_0) = \partial_z G_t \quad (33) \qquad 2\partial_3(\partial_1 A_1) = \partial_z G_x \quad (37) \qquad 2\partial_3(\partial_2 A_2) = \partial_z G_y \quad (41) \qquad 2\partial_3(\partial_3 A_3) = \partial_z G_z \quad (45)$$

По аналогии со сплошной средой будем полагать неразрывность поля вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$. Тогда можно получить 18 скалярных уравнений связи, соответствующих условиям неразрывности поля вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$ или совместности его четырехмерных деформаций. Эти уравнения аналогичны известным в трехмерной теории сплошных сред условиям неразрывности Сен-Венана [2].

Используя известное тензорное тождество [2] для тензора второго ранга

$$F_{ik,jl} + F_{jl,ik} = F_{il,jk} + F_{jk,il},$$

получим уравнения связи между его компонентами. Из соотношений (30) – (45) следуют уравнения связи:

$$\partial_x\partial_x G_t + \partial_t\partial_t G_x = 2\partial_x\partial_t K_x \quad (46) \qquad \partial_z\partial_z G_y + \partial_y\partial_y G_z = 2\partial_y\partial_z L_x \quad (49)$$
$$\partial_t\partial_t G_y + \partial_y\partial_y G_t = 2\partial_y\partial_t K_y \quad (47) \qquad \partial_x\partial_x G_z + \partial_z\partial_z G_x = 2\partial_x\partial_z L_y \quad (50)$$
$$\partial_t\partial_t G_z + \partial_z\partial_z G_t = 2\partial_z\partial_t K_z \quad (48) \qquad \partial_y\partial_y G_x + \partial_x\partial_x G_y = 2\partial_y\partial_x L_z \quad (51)$$

Из соотношений (6) – (29) следуют уравнения связи:

$$\partial_z(\partial_y K_z - \partial_z K_y) = \partial_t(\partial_y G_z - \partial_z L_x) \quad (52)$$
$$\partial_x(\partial_z K_x - \partial_x K_z) = \partial_t(\partial_z G_x - \partial_x L_y) \quad (53)$$
$$\partial_y(\partial_x K_y - \partial_y K_x) = \partial_t(\partial_x G_y - \partial_y L_z) \quad (54)$$
$$\partial_x(\partial_y K_x - \partial_x K_y) = \partial_t(\partial_y G_x - \partial_x L_z) \quad (55)$$
$$\partial_y(\partial_z K_y - \partial_y K_z) = \partial_t(\partial_z G_y - \partial_y L_x) \quad (56)$$
$$\partial_z(\partial_x K_z - \partial_z K_x) = \partial_t(\partial_x G_z - \partial_z L_y) \quad (57)$$

$$\partial_t(\partial_z K_y + \partial_y K_z) = \partial_z \partial_y G_t + \partial_t \partial_t L_x \quad (58)$$
$$\partial_t(\partial_z K_x + \partial_x K_z) = \partial_z \partial_x G_t + \partial_t \partial_t L_y \quad (59)$$
$$\partial_t(\partial_y K_x + \partial_x K_y) = \partial_y \partial_x G_t + \partial_t \partial_t L_z \quad (60)$$
$$\partial_x(\partial_y L_y + \partial_z L_z - \partial_x L_x) = \partial_y \partial_z G_x \quad (61)$$
$$\partial_y(\partial_z L_z + \partial_x L_x - \partial_y L_y) = \partial_x \partial_z G_y \quad (62)$$
$$\partial_z(\partial_x L_x + \partial_y L_y - \partial_z L_z) = \partial_y \partial_x G_z \quad (63)$$

Левые части уравнений (52) – (57) являются компонентами ротора вектора $\mathbf{K}_k$. Прибавив к уравнениям (52) - (54) соответственно уравнения (55) - (57), получим три уравнения, левая часть которых представляет собой компоненты ротора от ротора вектора $\mathbf{K}_k$:

$$(\nabla\times\nabla\times K)_y = \partial_t(\partial_y G_z - \partial_z L_x + \partial_y G_x - \partial_x L_z) = \partial_t(\partial_y G_z + \partial_y G_x - (\nabla\otimes L)_y)$$
$$(\nabla\times\nabla\times K)_z = \partial_t(\partial_z G_x - \partial_x L_y + \partial_z G_y - \partial_y L_x) = \partial_t(\partial_z G_x + \partial_z G_y - (\nabla\otimes L)_z)$$
$$(\nabla\times\nabla\times K)_x = \partial_t(\partial_x G_y - \partial_y L_z + \partial_x G_z - \partial_z L_y) = \partial_t(\partial_x G_y + \partial_x G_z - (\nabla\otimes L)_x)$$

где $\nabla\otimes\mathbf{L}_k = (\partial_y L_z + \partial_z L_y)_x + (\partial_x L_z + \partial_z L_x)_y + (\partial_x L_y + \partial_y L_x)_z$. Для сокращения записи здесь введен трехмерный векторный дифференциальный оператор $\nabla\otimes$ трехмерной сдвиговой деформации. С помощью этого оператора вектор $\mathbf{L}_k$ можно в сжатом виде записать как $\mathbf{L}_k = \nabla\otimes\mathbf{A}_\mu$. Сложив три последних уравнения**,** получим уравнение, которое объединяет уравнения (52) – (57) в одно:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{K}_k = \nabla\otimes\partial_t(\mathbf{G}_\mathrm{k} - \mathbf{L}_k) \quad (64)$$

Сложив уравнения (58) – (60), получим уравнение:

$$\partial_t(\nabla\otimes\mathbf{K}_k - \partial_t\mathbf{L}_k) = \overleftrightarrow{\Delta} G_t \quad (65)$$

где $\overleftrightarrow{\Delta} G_t = \partial_z\partial_y G_t + \partial_z\partial_x G_t + \partial_y\partial_x G_t$. Для сокращения записи здесь введен трехмерный дифференциальный оператор $\overleftrightarrow{\Delta}$.

б) Уравнения 4-деформации из условия равновесия ЭМП

Взяв частные производные по времени и пространству компонентов тензора $\mathbf{F}_{(\mu\nu)}$ (2) по столбцам, далее сложив производные компонентов построчно и приравняв суммы к нулю, получим четыре уравнения равновесия поля вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$ для свободного от зарядов и токов пространства-времени:

$$\partial_t G_t + \partial_x K_x + \partial_y K_y + \partial_z K_z = 0 \quad (66)$$
$$\partial_t K_x + \partial_x G_x + \partial_y L_z + \partial_z L_y = 0 \quad (67)$$
$$\partial_t K_y + \partial_x L_z + \partial_y G_y + \partial_z L_x = 0 \quad (68)$$
$$\partial_t K_z + \partial_x L_y + \partial_y L_x + \partial_z G_z = 0 \quad (69)$$

Эти уравнения связи также можно получить и из соотношений (6) – (29).
Уравнение (66) можно записать в сжатом виде:

$$\nabla\cdot\mathbf{K}_k = -\partial_t G_t \quad (70)$$

Сложив уравнения (67) – (69), их сумму можно записать в сжатом виде:

$$\partial_t\mathbf{K}_k + \nabla\otimes\mathbf{L}_k + \nabla G_k = 0 \quad (71)$$

4 Уравнения связи компонентов тензора 4-деформаций с компонентами тензора ЭМП

В трехмерной теории сплошных сред существуют уравнения связи между компонентами симметричного тензора деформации и антисимметричного тензора вращения среды, известные, как уравнения Бельтрами [3]. Аналогичные уравнения можно записать для компонентов 4-тензоров (1) и (2). Из соотношений (30) – (45) следуют уравнения связи между компонентами шарового тензора объемной 4-деформации $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$ и компонентами векторов электрического и магнитного поля:

$$\partial_t\partial_t G_x - \partial_x\partial_x G_t = 2\partial_x\partial_t E_x \quad (72) \qquad \partial_z\partial_z G_y - \partial_y\partial_y G_z = 2\partial_y\partial_z B_x \quad (75)$$

$$\partial_t\partial_t G_y - \partial_y\partial_y G_t = 2\partial_y\partial_t E_y \quad (73) \qquad \partial_x\partial_x G_z - \partial_z\partial_z G_x = 2\partial_x\partial_z B_y \quad (76)$$

$$\partial_t\partial_t G_z - \partial_z\partial_z G_t = 2\partial_z\partial_t E_z \quad (74) \qquad \partial_y\partial_y G_x - \partial_x\partial_x G_y = 2\partial_y\partial_x B_z \quad (77)$$

Другие уравнения связи между компонентами 4-тензоров $\mathbf{F}_{(\mu\nu)}$ и $\mathbf{F}_{[\mu\nu]}$ можно получить из соотношений (6) – (45):

$$\partial_x K_z + \partial_x E_z = \partial_t L_y + \partial_t B_y \quad (78) \qquad \partial_z K_x + \partial_z E_x = \partial_t L_y - \partial_t B_y \quad (81)$$

$$\partial_y K_x + \partial_y E_x = \partial_t L_z + \partial_t B_z \quad (79) \qquad \partial_x K_y + \partial_x E_y = \partial_t L_z - \partial_t B_z \quad (82)$$

$$\partial_z K_y + \partial_z E_y = \partial_t L_x + \partial_t B_x \quad (80) \qquad \partial_y K_z + \partial_y E_z = \partial_t L_x - \partial_t B_x \quad (83)$$

$$\partial_z L_y + \partial_z B_y = \partial_x G_z \quad (84) \qquad \partial_y L_z - \partial_y B_z = \partial_x G_y \quad (87)$$

$$\partial_x L_z + \partial_x B_z = \partial_y G_x \quad (85) \qquad \partial_z L_x - \partial_z B_x = \partial_y G_z \quad (88)$$

$$\partial_y L_x + \partial_y B_x = \partial_z G_y \quad (86) \qquad \partial_x L_y - \partial_x B_y = \partial_z G_x \quad (89)$$

$$\partial_y K_x - \partial_y E_x = \partial_x K_y - \partial_x E_y \quad (90) \qquad \partial_y L_y - \partial_y B_y = \partial_z L_z + \partial_z B_z \quad (93)$$

$$\partial_z K_x - \partial_z E_x = \partial_x K_z - \partial_x E_z \quad (91) \qquad \partial_x L_x - \partial_x B_x = \partial_y L_y + \partial_y B_y \quad (94)$$

$$\partial_z K_y - \partial_z E_y = \partial_y K_z - \partial_y E_z \quad (92) \qquad \partial_z L_z - \partial_z B_z = \partial_x L_x + \partial_x B_x \quad (95)$$

$$\partial_x K_x + \partial_x E_x = \partial_t G_x \quad (96) \qquad \partial_t K_x - \partial_t E_x = \partial_x G_t \quad (99)$$

$$\partial_y K_y + \partial_y E_y = \partial_t G_y \quad (97) \qquad \partial_t K_y - \partial_t E_y = \partial_y G_t \quad (100)$$

$$\partial_z K_z + \partial_z E_z = \partial_t G_z \quad (98) \qquad \partial_t K_z - \partial_t E_z = \partial_z G_t \quad (101)$$

Сложив уравнения (78) – (83), получим уравнение:

$$\nabla \otimes (\mathbf{K}_k + \mathbf{E}_k) = 2\partial_t \mathbf{L}_k \quad (102)$$

Сложив уравнения (84) – (89), получим уравнение:

$$\nabla \otimes (\mathbf{L}_k - G_k) = \nabla \times \mathbf{B}_k \quad (103)$$

Из уравнений (84) – (86) вычтем соответственно уравнения (87) – (89) и, сложив разности, получим уравнение:

$$\nabla \times (\mathbf{L}_k + G_k) = \nabla \otimes \mathbf{B}_k \quad (104)$$

Сложив уравнения (90) – (92), получим уравнение:

$$\nabla \times (\mathbf{K}_k - \mathbf{E}_k) = 0 \quad (105)$$

Сложив уравнения (96) – (98), получим уравнение:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}_k + \mathbf{E}_k) = \partial_t G_k \quad (106)$$

Сложив уравнения (99) – (101), получим уравнение:

$$\partial_t (\mathbf{K}_k - \mathbf{E}_k) = \nabla G_t \quad (107)$$

В результате получены 30 скалярных уравнений связи между компонентами 4-тензора деформаций $\mathbf{F}_{(\mu\nu)}$ и тензора ЭМП $\mathbf{F}_{[\mu\nu]}$.

5 Физический смысл калибровки Лоренца

В теории ЭМП, при рассмотрении его в потенциалах, для упрощения получаемых уравнений, применяют калибровку Лоренца:

$$\nabla\cdot\mathbf{A}_k+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\partial_x A_x+\partial_y A_y+\partial_z A_z+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

Из этого выражения видно, что его члены представляют собой диагональные компоненты шарового 4-тензора растяжения/сжатия $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$, описывающие объемную деформацию ЭМП, а их сумма является первым инвариантом 4-тензора $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$. Таким образом, применение калибровки Лоренца к уравнениям ЭМП исключает из них объемную 4-деформацию ЭМП. Диагональные компоненты антисимметричного тензора ЭМП равны нулю, следовательно, каждый из членов калибровки Лоренца должен быть также принят равным нулю. Это более жесткое условие, чем условие, налагаемое калибровкой Лоренца. Поскольку компоненты шарового 4-тензора объемной 4-деформации $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$ не входят в антисимметричный тензор ЭМП, следовательно, объемная 4-деформация ЭМП не изменяет электрическое и магнитное поле и может быть исключена при их рассмотрении.

6 Деформация ЭМП в уравнении закона Гаусса

Запишем уравнение закона Гаусса в потенциалах:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}_k=\partial_0(\partial_1 A_1+\partial_2 A_2+\partial_3 A_3)-(\partial_1\partial_1 A_0+\partial_2\partial_2 A_0+\partial_3\partial_3 A_0)=\rho$$

где ρ – плотность электрических зарядов. Члены, стоящие в первых скобках, представляют собой диагональные компоненты 4-тензора $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$, т.е. являются компонентами объемной деформации поля вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$. Тогда уравнение закона Гаусса можно записать в виде:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}_k=\partial_0\mathbf{G}_k-(\partial_1\partial_1 A_0+\partial_2\partial_2 A_0+\partial_3\partial_3 A_0)=\rho$$

Отсюда следует, что электрические заряды, как источники электрического поля, производят объемную деформацию ЭМП и для создания этой деформации должны существовать соответствующие сила и потенциальная энергия объемной деформации. Эта сила деформации должна действовать и на другие заряды, также деформирующие поле. В существующей теории ЭМП силы взаимодействия зарядов, возникающие за счет деформации ЭМП, не учитываются и не рассматриваются. Особенностью этих взаимодействий является то, что поскольку объемная деформация не влияет на величину электрического поля, то эти взаимодействия не относятся к электрическим взаимодействиям зарядов.

7 Продольные волны объемной деформации

Из полученных уравнений можно найти уравнение продольных волн объемной деформации ЭМП. Возьмем частную производную по времени от обеих частей уравнения (66), затем подставив в него выражения $\partial_t\mathbf{K}_k$ из уравнений (67) – (69) и $\mathbf{L}_k$ из уравнений (49) – (51), получим уравнение:

$$\partial_t\partial_t G_t-(\partial_x\partial_x G_x+\partial_y\partial_y G_Y+\partial_z\partial_z G_Z+\partial_x\partial_x G_y+\partial_y\partial_y G_x+\partial_x\partial_x G_z+\partial_z\partial_z G_x+\partial_y\partial_y G_z+\partial_z\partial_z G_y)=0$$

или в сжатом виде:

$$\Delta\mathbf{G}_k-\partial_t\partial_t G_t=0 \qquad (108)$$

Выполнив сложение уравнений (72) – (74), получим уравнение:

$$\partial_t\partial_t G_x + \partial_t\partial_t G_y + \partial_t\partial_t G_z - \partial_{xx} G_t - \partial_{yy} G_t - \partial_{zz} G_t = 2\partial_{xt} E_x + 2\partial_{yt} E_y + 2\partial_{zt} E_z = 2\partial_t \nabla \cdot \mathbf{E}_k$$

или в сжатом виде

$$\Delta G_t - \partial_t\partial_t \mathbf{G}_k = -2\partial_t \nabla \cdot \mathbf{E}_k = -2\partial_t \rho \qquad (109)$$

Выполнив сложение уравнений (108) и (109), получим волновое уравнение для компонентов шарового тензора $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$:

$$\Delta \mathbf{G}_\mu - \partial_t\partial_t \mathbf{G}_\mu = -2\partial_t \rho \qquad (110)$$

Это волновое уравнение говорит о возможном существовании в природе продольных тензорных волн объемной 4-деформации ЭМП, источником которых является изменяющаяся во времени плотность электрических зарядов. Особенностью этих волн является отсутствие в них компоненты магнитного поля. Это обусловлено тем, что компонентами шарового тензора $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$ являются компоненты 4-дивергенции вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$. Так как дивергенция ротора равна нулю, то ротор вектора потенциала $\mathbf{A}_\mu$ и, соответственно, магнитное поле в этих волнах равны нулю.

8 Выводы

Из симметричного 4-тензора ЭМП получено 22 скалярных уравнения, описывающие 4-деформации ЭМП в четырехмерном пространстве-времени Минковского. Эти уравнения вместе с восемью известными скалярными уравнениями Максвелла, описывающими 4-вращения ЭМП в этом пространстве, образуют полную систему из 30 скалярных уравнений ЭМП, описывающую его 4-вращения и 4-деформации. При этом, уравнения связи векторов $\mathbf{E}_k$ электрического и $\mathbf{B}_k$ магнитного поля описывают 4-вращения, а уравнения связи тензора $\mathbf{G}_{(\mu\nu)}$ и векторов $\mathbf{K}_k$ и $\mathbf{L}_k$ объемные и сдвиговые 4-деформации ЭМП. Существование 4-деформаций ЭМП, предполагает кроме электрических и магнитных сил существование соответствующих этим деформациям еще трех видов сил. Поскольку при 4-деформациях ЭМП запасается потенциальная энергия, то в природе должны существовать и соответствующие им виды потенциальной энергии.

Таким образом, новая система уравнений ЭМП дополняет существующую систему уравнений ЭМП и описывает новый класс качеств и взаимодействий ЭМП, обусловленных его 4-деформациями в пространстве-времени Минковского.

Получены 30 скалярных уравнений связи между компонентами тензора 4-деформации и векторами электрического и магнитного поля.

Показано, что члены калибровочного условия Лоренца являются компонентами шарового 4-тензора объемной 4-деформации ЭМП.

Показано, что электрические заряды создают объемную 4-деформацию ЭМП.

Получено волновое уравнение продольных тензорных волн объемной 4-деформации ЭМП. Показано, что у этих волн отсутствует магнитная компонента.

Литература

1. Савельев, И. В. Основы теоретической физики : в 3 т. / И. В. Савельев. ---М. : Наука, 1975. ---Т. 1. ---416 с.
2. Демидов, С. П. Теория упругости / С. П. Демидов. ---М. : Высшая школа, 1979. ---432 с.
3. Лейбензон, Л. С. Курс теории упругости / Л. С. Лейбензон. ---М. : ОГИЗ, 1947. ---465 с.