Fluctuations in the Schwarzschild sphere

Vitaly Kuyukov

Sayano-Shushensky branch of Siberian Federal University

Russia, The Republic Of Khakassia, Abakan,655017

Email: vitalik.kayukov@mail.ru

1.Сфера Шварцшильда.

Черной дырой называют область в пространства - времени, в которой гравитационное притяжение настолько сильно, что даже свет неспособен покинуть эту область.

Граница этой области называется горизонтом событий , а её характерный размер — *гравитационным радиусом*. В простейшем случае сферически симметричной чёрной дыры он равен радиусу Шварцшильда $r_g=2GM/c^2$.

Согласно теореме Биркгофа , гравитационное поле любого сферически симметричного распределения материи вне её даётся решением Шварцшильда.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2) \quad (1.1)$$

Координаты t, r, θ, φ в которых записано выражение (1), носит название координат Шварцшильда, а системы отчета, образуемая ими - системы отчета Шварцшильда. В малой окрестности каждой точке пространства можно ввести для обычных измерений длин локальную систему координат:

$$dx^1 = dx\sqrt{g_{11}} = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}},$$

$$dx^2 = rd\theta,$$

$$dx^3 = r\sin\theta\ d\varphi$$

Физическое время τ , текущее в данной точке *r* пространства, определяется выражением

$$dx^0 = c\ d\tau = dt\sqrt{g_{00}} = dt\sqrt{1-\frac{r_g}{r}},$$

Временная координата τ будет идти медленнее удалённой t ($r\to\infty$, $\theta=const$, $\varphi = const$) в $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}$ раз за счёт гравитационного замедления времени.

Как видно из приведённой формы метрики (1.1), коэффициенты при t и r ведут себя патологически при $r\to r_g$, где и располагается горизонт событий чёрной дыры Шварцшильда — в такой записи решения Шварцшильда имеют координатную сингулярность. Эти патологии являются, однако, лишь эффектом выбора координат (подобно тому, как в сферической системе координат при ϑ = 0 любое значение φ описывает одну и ту же точку). Пространство Шварцшильда $\mathcal{M}$ можно, как говорят, «продолжить за горизонт», и если там тоже считать пространство везде пустым, то при этом возникает ***бо́льшее*** пространство-время $\tilde{\mathcal{M}}$, которое называется максимально продолженным пространством Шварцшильда.

2. Квантовые колебания гравитационного радиуса.

Возможные проявления квантовой природы физических полей и частиц, в полной мере применимы при рассмотрении квантовых эффектов в черных дырах. Качественно оценить значение флуктуационных процессов в черных дырах можно с помощью простых рассуждений. Предположим , что в области пространства-времени с характерным размером L произошла флуктуация метрики и ее значение g отклонилось от среднего значения <g> на величину δg. При этом кривизна в этой области изменится на величину $\frac{\delta g}{L^2 g}$, а значения действия S для гравитационного поля испытывает изменение порядка

$$\delta S \sim \frac{\delta g}{g} \cdot L^2 \cdot \frac{c^2}{G} \qquad (2.1)$$

Вероятность подобной флуктуации значительна только в том случае, когда $\delta S \sim \hbar$. Поэтому для величин флуктуации метрики в пространственно-временной области размером L получается следующая оценка

$$\frac{\delta g}{g} \sim \frac{L_p^2}{L^2} \qquad (2.2)$$

Где квадрат планковской длины $L_p^2 = \frac{G\hbar}{c^3}$ ≈2,56 10^{-70} $см^2$. Таким образом, флуктуации метрики, достигающие значения δg =1 на планковских масштабах, малы и, вообще говоря несущественны для значительно больших масштабов. Можно ожидать, что описанные квантово-гравитационные флуктуации приведут к своеобразному квантовому «дрожанию» горизонта событий.   Для сферической черной дыры с массой M амплитуда колебания δr гравитационного радиуса имеет на основании (2.2) следующий вид:

$$\delta r \sim \frac{L_p^2}{r_g} \quad (2.3)$$

Величина амплитуды колебания δr крайне мала для черных дыр с размерами $r_g >> L_p$. Однако не стоит сбрасывать этот эффект, потому что он приводит к интересным результатам. Под действием квантовых флуктуаций вакуума на поверхности горизонта событий появляются колебания δr радиуса Шварцшильда r_g. Эти колебания могут стать причиной распространения гравитационных волн на горизонте событий. Эти волны можно определить как отклонения от среднего значения гравитационного радиуса

$$u(t, r, \theta, \varphi) = r_g - \langle r_g \rangle \qquad (2.4)$$

Волны $u(t, r, \theta, \varphi)$ на поверхности черной дыры не должны гаснуть, так как постоянно действуют квантовые флуктуации вакуума на сфере Шварцшильда (2.3) . Под действием эти флутуаций колебания гравитационного радиуса будут появляться в любой точке на сфере $A = 4\pi r_g^2$.

3.Волновое уравнение сферы Шварцшильда.

Рассмотрим задачу о нахождении волнового уравнения колебаний сферы Шварцшильда.

Метрику $g^{ik}(t,\ r,\ \theta,\varphi)$ на горизонте событий будем рассматривать на границе:

$$\theta=\{0;\pi\},\quad \varphi=\{0;2\pi\},\quad r=r_g=\frac{2GM}{c^2},\qquad (3.1)$$

Горизонт событий в вакуумных решениях уравнений ОТО:

$$R_{ik}=0,\qquad ds^2=g^{jk}dx_i dx_k=0\qquad (3.2)$$

Флуктуации метрики g^{ik} на сфере горизонта событий будем рассматривать как малые возмущения h^{ik} (2.2) :

$$g^{ik}=g^{ik(0)}+h^{ik}\ ,\quad \frac{\partial h^{ik}}{\partial x^{\mu}}=0\qquad (3.3)$$ где $g^{ik(0)}$ -- статическая

метрика пространства-времени на горизонте событий.

Тогда условия (3.2) и (3.3) дают рассматривать гравитационные волны на сфере Шварцшильда:

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h^{ik}=0$$

Где $\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(r^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$ - Оператор Лапласа в сферических координатах Шварцшильда, $\frac{\partial}{\partial\rho}=\sqrt{1-\frac{2GM}{rc^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial r}$

На горизонте событий $r=r_g=\frac{2GM}{c^2}$ радиальная часть оператора Лапласа $\frac{\partial}{\partial\rho}=0.$

Уравнение колебания горизонта событий или сферы Шварцшильда будет:

$$\left(\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{r_g^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h^{ik}=0\quad (3.4)$$

Решением этого уравнения (3.4) будут собственные значения углового оператора Лапласа для колебаний сферы. Причем образуются стоячие колебания на горизонте событий черной дыры. Поэтому метрику колебаний определим как независимую от времени:

$$h^{ik}=h^{ik}(\ \theta,\varphi)\cdot e^{-j\omega t}$$

Где ω - собственная частота колебаний сферы Шварцшильда с точки зрения удаленного внешнего наблюдателя.

В этом случае уравнение колебания сферы Шварцшильда имеет вид с учетом граничных условий (3.1) :

$$\left(\left(\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)-\frac{r_g^2\omega^2}{c^2}\right)h^{ik}(\theta,\varphi)=0 \quad (3.5)$$

Решению этого уравнения (3.5) соответствуют собственные значения колебаний сферы в виде выражения:

$$\frac{r_g^2\omega^2}{c^2}=n(n+1)$$

При n=0,1,2,…N.

4. Квантовые энергии сферы Шварцшильда.

Решению уравнения (3.5) соответствуют собственные значения:

$$\frac{r_g^2\omega^2}{c^2}=n(n+1) \quad (4.1)$$

Отсюда собственные частоты колебаний сферы Шварцшильда при $r_g=\frac{2GM}{c^2}$ будут:

$$\omega_n=\frac{\sqrt{n(n+1)}c^3}{2GM} \quad (4.2)$$

Квантовые флуктуации вакуума действуют наиболее сильно на поверхности горизонта событий, где энергия нулевых колебаний определяется по формуле:

$$\mathrm{E}=\sum_m\frac{\hbar\omega}{2} \quad (4.3)$$

Где m-количество квантовых осцилляторов на сфере Шварцшильда.

Энергия (4.3) соответствующая колебаниям горизонта событий будет иметь вид:

$$\mathrm{E}_{n,m}=\sum_m\frac{\sqrt{n(n+1)}\,\hbar c^3}{4GM} \quad (4.4)$$

Получаем уровни энергии (4.4) для горизонта событий черной дыры . Следовательно, сфера Шварцшильда или горизонт событий не просто геометрический объект, а квантовая система, обладающая квантовыми состояниями .

При n>>1 энергия сферы Шварцшильда: $\mathrm{E}_{n,m} = \sum_m \frac{n\,\hbar c^3}{4GM}$

Горизонт событий при переходе из одного энергетического состояния в другое излучает или поглощает энергию в виде:

$$\Delta\,\mathrm{E}_{ik} = \mathrm{E}_i - \mathrm{E}_k = \sum_m \frac{(i-k)\hbar c^3}{4GM} \quad ; \quad i,k>>1 \qquad (4.5)$$

При переходе (4.5) изменяется энергия черной дыры $\Delta\mathrm{E} = \Delta\mathrm{M}\ c^2 = \sum_m \frac{(i-k)\,\hbar c^3}{4GM}$

Соответственно изменяется размер черной дыры, то есть площадь горизонта событий:

$$\Delta A = 8\pi L_p^2 \cdot \sum_m (i-k) \quad \text{где } L_p^2 = \frac{G\hbar}{c^2} \qquad (4.6)$$

Вычислим вероятность перехода сферы Шварцшильда, как физической системы из одного макросостояния (i) в другое (k) при излучении энергии (4.5) . Для этого воспользуемся формулой спонтанного квантового излучения для макросистемы (без внешних воздействий на горизонт событий):

$$\frac{N_i}{N_k} = e^{-b\cdot t} \qquad (4.7)$$

N_k - число квантовых осцилляторов на сфере Шварцшильда в состоянии k ,

b $= \sum_m B_{ik}$, B_{ik} - коэффициент квантового перехода.

Воспользуемся золотым правилом Ферми для расчета квантового перехода:

$$B_{ik} = \frac{2\pi}{\hbar} |i < H_* > k|^2\, \rho \qquad (4.8)$$

где $i < H_* > k -$ возмущение гамильтониана квантовой системы H, $\rho = \frac{\Delta n}{\Delta E}$ - количество состояний n квантовой системы на единицу энергии E.

На сфере Шварцшильда действуют квантовые флуктуации физического вакуума, поэтому возмущение гамильтониана квантового осциллятора на горизонте событий определяется принципом неопределенности гейзенберга:

$$|i < H_* > k| = \Delta\mathrm{E} = \frac{\hbar}{t}$$

Тогда коэффициент B_{ik} запишется в следующем виде:

$$B_{ik} = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta E^2\ \frac{\Delta n}{\Delta E} = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta E \cdot \Delta n \qquad (4.9)$$

Воспользуемся формулами (4.7) и (4.9), определим вероятность перехода сферы Шварцшильда из макросостояния (i) в другое(k):

$$\frac{N_i}{N_k} = e^{-b\cdot t} = e^{-\sum_m B_{ik}\cdot t} = e^{-\sum_m \frac{2\pi}{\hbar}\Delta E\cdot\Delta n\cdot t} = e^{-\sum_m 2\pi\cdot\Delta n} \quad (4.10)$$

Изменение энтропии системы (сферы Шварцшильда) при переходе (i) → (k) определим по формуле Больцмана:

$$\Delta S = k\cdot\ln\left(\frac{N_i}{N_k}\right) = -k\cdot\sum_m 2\pi\cdot\Delta n \quad (4.11)$$

В нашем случае количество состояний n уменьшается при излучении энергии на величину $i - k = -\Delta n$.

Тогда формулы (4.6) и (4.11) для энтропии горизонта событий дают формулу Бекенштейна для черной дыры:

$$\Delta S = k\cdot\sum_m 2\pi(i-k) = \frac{k\,\Delta A}{4L_p^2}$$

Литература:

1.В.Фролов и И.Новиков, книга Физика Черных Дыр, Москва «Наука» 1986.

2. Б.Пальцев, пособие Сферические Функции, УДК 517.586

.