Собственные характеристики системы отсчёта как 4-инварианты

В. В. Войтик*

19 сентября 2013 г.

Аннотация

В статье предлагаются и проверяются инвариантные уравнения для собственных характеристик жёсткой системы отсчёта. Из этих условий следуют закон движения собственной тетрады и уравнения обратной задачи кинематики, т. е. дифференциальные уравнения, решающие задачу восстановления параметров движения жёсткой системы отсчёта по известным собственному ускорению и угловой скорости. В частности показано, что при совершении буста движущаяся система отсчёта имеющая прецессию Томаса относительно новой лабораторной системы будет иметь комбинацию двух вращений: новой собственной прецессии Томаса и вращения Вигнера, которые в совокупности дают первоначальную частоту прецессии Томаса.

Ключевые слова: *прецессия Томаса, вращение Вигнера, обратная задача кинематики, собственное ускорение, собственная угловая скорость, тетрадный формализм.*

Введение

В предыдущей статье [1] были выведены уравнения обратной задачи кинематики. Данные уравнения следуют из зависимости характеристик жёсткой системы отсчёта s от параметров движения, которые в свою очередь в существенной степени основываются на известном преобразовании в жёсткую неинерциальную систему отсчёта предложенным Нэлсоном [2], [3]. Данное

*Башкирский Государственный Педагогический Университет, Октябрьской Революции 3-а, Уфа, 450077, Россия, voytik1@yandex.ru

преобразование, несомненно, является верным по следующим причинам. Во-первых, метрика, следующая из этого преобразования, удовлетворяет принципу общей форминвариантности [4], т.е. как раз является метрикой жёсткой ускоренной и вращающейся системы отсчёта (см. [2], [5, с. 404, формула (13.71) с поправкой на отсутствие в СТО кривизны пространства-времени]. Во-вторых, собственные ускорение и угловая скорость неинерциальной системы s в этой метрике совпадают с независимо вычисленным ядром генератора инфинитезимального преобразования Лоренца, которое связывает две мгновенно сопутствующие s инерциальные системы отсчёта в моменты t и $t + \Delta t$ соответственно, как указано в [6, с.231, задача 3.26].

Тем не менее, хотя нет причин сомневаться в справедливости этого преобразования, но, поскольку это преобразование ещё исследуется, может показаться, что уравнения обратной задачи кинематики ещё недостаточно обоснованы. Сами же эти уравнения необходимы для определения закона движения неинерциальной системы отсчёта имеющей заданные характеристики. Поэтому, для более надёжного подтверждения важно вывести их другим способом. Такой способ будет показан в п. 2, но предварительно, в п.1 данной статьи приведены некоторые полезные формулы касающиеся кинематики вращений и, в частности, собственного вращения Вигнера [7]- [9, формула (20)], которое возникает у движущейся системы отсчёта при совершении буста.

Наиболее общее возможное движение жёсткой неинерциальной системы отсчёта требуется определять инвариантно, в 4-мерном виде. Например, для прямолинейного движения равноускоренной системы отсчёта условие её равноускоренности можно сформулировать в виде одного равенства - постоянства квадрата 4-вектора ускорения $d\Lambda^{0i}/dt \cdot d\Lambda^{0}{}_{i}/dt$, где t - есть собственное время начала отсчёта, а Λ^{0i} - есть вектор 4-скорости [10, с. 41, задача к п. 7]. Для наиболее же общего криволинейного движения произвольной жёсткой системы отсчёта одного такого требования явно недостаточно. Эти условия должны связывать компоненты 4-векторов, которыми обладает движущаяся система отсчёта с собственными инвариантами данной системы отсчёта. Поэтому уравнения для 4-ускорения $d\Lambda^{0i}/dt = a^i$ и 4-тензора вращения [5, формула (6.20)], которые на первый взгляд в качестве этих условий можно было бы использовать, в данном случае бесполезны. Одно из искомых условий (для частного случая системы отсчёта, вращающейся с частотой собственной прецессии Томаса) было дано в [11, формула (5.29)]. Полностью инвариантные условия движения будут даны в п. 2. Забегая вперёд укажем, что данные условия фактически являются требованием 4-скалярности компонент характеристик данной системы отсчёта. Если эти условия справедливы, то форминвариантность данных уравнений при бусте возможно проверить. Соответствующее доказательство приводится в п. 3, а получившиеся результаты обсуждаются в п. 4.

Кроме того в п. 5 будет рассмотрен закон вращения собственной тетрады системы отсчёта, который обсуждался в [5, формула (6.11)], [12, формулы (4), (6)].

1. Кинематика поворотов и вращение Вигнера

Напомним предварительно некоторые сведения из кинематики поворотов. При повороте системы координат вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$ компоненты вектора $\mathbf{r}(s)$ в начальной системе s и составляющие этого же вектора $\mathbf{r}(s')$ в конечной системе s' связаны равенством

$$r^{\alpha}(s) = a^{\beta\alpha} r'^{\beta}(s'), \tag{1}$$

где матрица $a^{\beta\alpha}$ в координатах: ось поворота $\mathbf{n}$, угол поворота ϕ имеет вид

$$a^{\beta\alpha} = \delta^{\alpha\beta}\cos\phi + n^{\beta}n^{\alpha}(1-\cos\phi) - e^{\alpha\beta\gamma}n^{\gamma}\sin\phi\,. \tag{2}$$

Во избежание недоразумений подчеркнём, что здесь и далее принята пассивная точка зрения на повороты, согласно которой вращается система координат, а сам вектор остаётся неизменным. При этом для любой матрицы поворота $a^{\beta\alpha}$ справедливы соотношения ортогональности

$$a^{\beta\alpha}a^{\gamma\alpha} = a^{\alpha\beta}a^{\alpha\gamma} = \delta^{\beta\gamma} \tag{3}$$

и равенства «уничтожения»

$$e^{\alpha\mu\nu}a^{\mu\beta}a^{\nu\gamma} = e^{\mu\beta\gamma}a^{\alpha\mu}, \quad e^{\alpha\mu\nu}a^{\beta\mu}a^{\gamma\nu} = e^{\mu\beta\gamma}a^{\mu\alpha}. \tag{4}$$

Матрица вращения $a^{\beta\alpha}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{da^{\alpha\beta}}{dt} = -e^{\alpha\mu\nu}\omega'^{\mu}a^{\nu\beta}\,, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\omega}'$ есть угловая скорость в системе s'

$$\omega'^{\nu} = \frac{1}{2}\,e^{\alpha\lambda\nu}a^{\lambda\beta}\frac{da^{\alpha\beta}}{dt}\;. \tag{6}$$

Рассмотрим сейчас движение инерциальной системы отсчёта s' со скоростью $\mathbf{v}(t)$ относительно лабораторной системы отсчёта S. Если инерциальная система s' ориентирована таким образом, что преобразование пространственно-временных координат из S в s' является чистым бустом, то условно говорится о том, что система s' ориентирована «без поворота» относительно S. Перейдём теперь в новую лабораторную систему отсчёта S^*, которая двигается со скоростью $\mathbf{u}$ «без поворота» относительно S. Хорошо известно, что в новой лабораторной системе начало отсчёта системы s' двигается со скоростью (здесь и далее $c = 1$)

$$\mathbf{v}^* = \frac{\sqrt{1-u^2}\ \mathbf{v} - \mathbf{u}}{1 - \mathbf{uv}} + \frac{(1 - \sqrt{1-u^2})(\mathbf{uv})\mathbf{u}}{u^2(1 - \mathbf{uv})}\ . \tag{7}$$

Однако оказывается, что преобразование из S^* в s' не является чистым бустом. Другими словами это означает, что, чтобы получить систему координат s', оси новой системы отсчёта s ориентированные «без поворота» относительно S^* (которая двигается со скоростью $\mathbf{v}(t)$ из (7)) требуется ещё повернуть на некоторый угол ϕ_W вокруг некоторого единичного вектора $\mathbf{n}$. Довольно длинный расчёт, который мы здесь опустим, утверждает, что этот собственный поворот равен (см. [9, формула (20)])

$$\mathbf{n}\ \mathrm{tg}\,\frac{\phi_W}{2} = \mathbf{n}\ \frac{\sin\phi_W}{1+\cos\phi_W} = \frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)\left(1+\sqrt{1-v^2}\right) - \mathbf{uv}}\ . \tag{8}$$

Этот поворот называется вращением Вигнера. Если $\mathbf{u}$ мало, то

$$\mathbf{n}\ \phi_W = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\ \mathbf{u}\times\mathbf{v}. \tag{9}$$

Матрицу поворота Вигнера обозначим $b_W^{\beta\alpha}$, так, что (1) выглядит в виде

$$r^\alpha(s) = b_W^{\beta\alpha}\ r'^\beta(s'), \tag{10}$$

Для малого угла ϕ_W матрица поворота (2) есть

$$b_W^{\beta\alpha} = \delta^{\beta\alpha} - e^{\alpha\beta\gamma} n^\gamma \phi_W = \delta^{\beta\alpha} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}(v^\alpha u^\beta - v^\beta u^\alpha). \tag{11}$$

По определению (6) угловая скорость вращения Вигнера есть

$$\omega_W'^\nu = \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\nu}\, b_W^{\mu\beta}\, \frac{d\, b_W^{\alpha\beta}}{dt}\ . \tag{12}$$

Подставляя сюда (11) получим, что она равна

$$\boldsymbol{\omega}'_W = \frac{d\,(\mathbf{n}\ \phi_W)}{dt} = \frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{v^4\sqrt{1-v^2}}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\,\mathbf{u}\times\mathbf{v} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2}\,\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{v}}. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь общий случай движения инерциальной системы, когда она (обозначим её k) имела другую ориентацию относительно системы S, чем система «без поворота» s'. Другими словами, пусть компоненты вектора $\mathbf{r}(s')$ в начальной системе s' и составляющие этого же вектора $\mathbf{r}(k)$ в системе k связаны равенством

$$r^{\beta}(s') = a^{\gamma\beta} r^{\gamma}(k). \tag{14}$$

Подставив (14) в (10) получим, что результирующая матрица поворота между начальной системой s и конечной системой k есть

$$a^{*\gamma\alpha} = a^{\gamma\beta} b_W^{\beta\alpha}\,. \tag{15}$$

Таким образом, параметры системы отсчёта k, которая двигается со скоростью $\mathbf{v}$ и имеет ориентацию $a^{\gamma\alpha}$ относительно S, при чистом бусте со скоростью $\mathbf{u}$ преобразуются по законам (7), (15).

2. Инвариантные условия движения неинерциальной системы отсчёта.

Рассмотрим теперь следующие 4 величины состоящие из 4 компонент, где первый индекс у каждого символа отвечает за его номер, а второй - за его компоненту.

$$\Lambda^{0i} = (\Lambda^{00}, \Lambda^{0\alpha}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,, \frac{v^{\alpha}}{\sqrt{1-v^2}} \right), \tag{16}$$

$$\Lambda^{\alpha i} = (\Lambda^{\alpha 0}, \Lambda^{\alpha\beta}) = \left(\frac{v^{\gamma} a^{\alpha\gamma}}{\sqrt{1-v^2}}\,, a^{\alpha\beta} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}} v^{\beta} v^{\mu} a^{\alpha\mu} \right), \tag{17}$$

где v^{α} - есть 3-вектор скорости начала отсчёта неинерциальной системы, $a^{\alpha\beta}$ - есть матрица поворота, а греческие индексы, как обычно, пробегают значения 1,2,3. Нетрудно проверить, что данные величины удовлетворяют соотношениям ортонормированности

$$\Lambda^{0i}\Lambda^{0}{}_{i} = 1, \;\; \Lambda^{0i}\Lambda^{\alpha}{}_{i} = 0, \;\; \Lambda^{\alpha i}\Lambda^{\beta}{}_{i} = -\,\delta^{\alpha\beta}. \tag{18}$$

С математической точки зрения Λ^{0i} , $\Lambda^{\alpha i}$ являются коэффициентами в общем преобразовании Лоренца из некой лабораторной системы отсчёта S: $(T, \mathbf{R})$ в инерциальную систему s' : $(t, \mathbf{r}')$

$$T = \Lambda^{\alpha 0} r'^{\alpha} + \Lambda^{00} t, \quad R^{\beta} = \Lambda^{\alpha\beta} r'^{\alpha} + \Lambda^{0\beta} t.$$

Если рассматривать r'^{α} и t как параметры, то из определения величин $\Lambda^{\alpha i} = dX^i/dr'^{\alpha}$ и $\Lambda^{0i} = dX^i/dt$ видно, что они являются 4-векторами. Кроме того, при любом непрерывном преобразовании из общей группы Лоренца величины $\Lambda^{\alpha i}$, Λ^{0i} $(i = 0, 1, 2, 3)$ преобразуются в величины той же математической формы (16), (17). Как хорошо известно, нулевой вектор Λ^{0i} является временоподобным вектором 4-скорости начала системы s'. Его смысл заключается в том, что он является единичным и касательным к мировой линии начала отсчёта неинерциальной системы s'. 4-вектор же $\Lambda^{\alpha i}$ представляет собой пространственноподобный орт α-й оси системы координат s'. Составим теперь произведения

$$W'^{\gamma} = \Lambda^{0}{}_{i}\frac{d\Lambda^{\gamma i}}{dt} \ , \tag{19}$$

$$\Omega'^{\gamma} = -\frac{1}{2}\, e^{\alpha\mu\gamma}\Lambda^{\mu}{}_{i}\frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dt} \ . \tag{20}$$

В мгновенно сопутствующей инерциальной системе отсчёта эти произведения равны $W'^{\gamma} = a^{\gamma\beta}\dot{v}^{\beta}$ и $\Omega'^{\gamma} = e^{\alpha\mu\gamma}a^{\mu\beta}\dot{a}^{\alpha\beta}/2$, т.е. являются собственным ускорением и собственной угловой скоростью s'. В силу 4-векторности величин $\Lambda^{\alpha i}$, Λ^{0i}, данные уравнения будут выполняться в любой системе отсчёта. Это означает, что уравнения (19), (20) являются искомыми кинематическими, релятивистски инвариантными условиями движения данной неинерциальной системы с известными характеристиками. Продифференцируем (16), (17) и подставим данные значения в (20). После раскрытия скобок, переобозначения индексов, приведения подобных членов и использования равенств (4) и (6) получим окончательно

$$\Omega'^{\gamma} = a^{\gamma\alpha}\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{\mu}\dot{v}^{\nu} + \omega'^{\gamma}. \tag{21}$$

Действуя аналогично нетрудно получить из (19)

$$W'^{\gamma} = a^{\gamma\alpha}\left[\frac{\dot{v}^{\alpha}}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v^2)}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})v^{\alpha}\right]. \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) после замены $v^{\alpha} = a^{\beta\alpha}v'^{\beta}$ сводятся к уравнениям обратной задачи кинематики, как показано в [1].

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{d\,\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{W}' - (\mathbf{W}'\mathbf{v}')\mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{v}', \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega}' - \frac{1-\sqrt{1-v'^2}}{v'^2}\mathbf{v}' \times \mathbf{W}'. \tag{24}$$

3. Проверка форминвариантности характеристик системы отсчёта

Для полной уверенности формулы собственного ускорения и собственной угловой скорости (19), (20) необходимо проверить. По своему смыслу эти формулы фактически являются требованием неизменности характеристик системы отсчёта s' от бустов. Следовательно можно записать, что в новой лабораторной системе отсчёта S^* и в старой системе S собственное ускорение и угловая скорость системы s' должны быть при подстановке (7), (15) равными. К сожалению такая прямая подстановка в равенства (21), (22) (где все величины считаются со звёздочками) формул (7), (15) приводит к громоздким вычислениям. Между тем заметим, что произвольный буст можно рассматривать как композицию множества произвольных бесконечно малых бустов. Поэтому, чтобы показать в общем случае справедливость равенств (21), (22) достаточно доказать их выполнение для инфинитезимального преобразования Лоренца. Для такого преобразования из (7) видно, что

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}(1+\mathbf{uv}) - \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{v}}^* = \dot{\mathbf{v}}(1+\mathbf{uv}) + \mathbf{v}(\mathbf{u}\dot{\mathbf{v}}). \tag{25}$$

При подстановке в выражение

$$W'^{\gamma} = a^{*\gamma\alpha}\left[\frac{\dot{v}^{*\alpha}}{\sqrt{1-v^{*2}}} + \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}(1-v^{*2})}(\mathbf{v}^*\dot{\mathbf{v}}^*)v^{*\alpha}\right]$$

формул (25), а также (15) и (11), после некоторых алгебраических преобразований получим, что математическая форма величины $\mathbf{W}'$ не изменилась

$$W'^{\gamma} = a^{\gamma\alpha}\left[\frac{\dot{v}^{\alpha}}{\sqrt{1-v^{2}}} + \frac{1-\sqrt{1-v^{2}}}{v^{2}(1-v^{2})}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})v^{\alpha}\right].$$

Аналогично вышесказанному, подставляя (6) и (15) в (21), дифференцируя и учитывая ортогональность матрицы Вигнера, которая аналогична уравнению (3) получим, что

$$\Omega'^{\gamma} = a^{*\gamma\alpha}\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{*\mu}\dot{v}^{*\nu} + \omega'^{*\gamma} =$$

$$= (a^{\gamma\beta}b_W^{\beta\alpha})\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{*\mu}\dot{v}^{*\nu} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma}(a^{\mu\nu}b_W^{\nu\lambda})\frac{d}{dt}(a^{\alpha\beta}b_W^{\beta\lambda}) =$$

$$= (a^{\gamma\beta}b_W^{\beta\alpha})\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{*\mu}\dot{v}^{*\nu} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma}\left[a^{\mu\nu}a^{\alpha\beta}b_W^{\nu\lambda}\dot{b}_W^{\beta\lambda} + a^{\mu\nu}\dot{a}^{\alpha\beta}(b_W^{\nu\lambda}b_W^{\beta\lambda})\right] =$$

$$= (a^{\gamma\beta}b_W^{\beta\alpha})\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{*\mu}\dot{v}^{*\nu} + \frac{1}{2}\ (e^{\alpha\mu\gamma}a^{\mu\nu}a^{\alpha\beta})b_W^{\nu\lambda}\dot{b}_W^{\beta\lambda} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma}a^{\mu\nu}\dot{a}^{\alpha\beta}\delta^{\nu\beta}.$$

Далее во втором слагаемом учтём первое из равенств "уничтожения"(4) и после этого равенство (12)

$$\Omega'^{\gamma} = (a^{\gamma\beta}b_W^{\beta\alpha})\frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu}v^{*\mu}\dot{v}^{*\nu} + \frac{1}{2}\ e^{\tau\beta\nu}a^{\gamma\tau}b_W^{\nu\lambda}\dot{b}_W^{\beta\lambda} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma}a^{\mu\beta}\dot{a}^{\alpha\beta} =$$

$$= (a^{\gamma\beta} b_W^{\beta\alpha}) \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{*\mu} \dot{v}^{*\nu} + \omega_W'^{\tau} a^{\gamma\tau} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma} a^{\mu\beta} \dot{a}^{\alpha\beta} =$$

$$= a^{\gamma\beta} \left[b_W^{\beta\alpha} \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{*\mu} \dot{v}^{*\nu} + \omega_W'^{\beta} \right] + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma} a^{\mu\beta} \dot{a}^{\alpha\beta}. \qquad (26)$$

Рассмотрим отдельно выражение стоящее в правой части (26) в квадратных скобках. Подставляя сюда (11), (13), (25) получим после некоторых вычислений, что

$$b_W^{\beta\alpha} \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{*\mu} \dot{v}^{*\nu} + \omega_W'^{\beta} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\ e^{\beta\mu\nu} v^{\mu} \dot{v}^{\nu} + \frac{(1-\sqrt{1-v^2})^2}{v^4\sqrt{1-v^2}} k^{\beta},$$

где вектор $\mathbf{k}$, компонента которого входит в правую часть этого равенства, равен

$$\mathbf{k} = v^2 \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{u} + (\mathbf{u}\mathbf{v})\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}} - (\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})\mathbf{v} \times \mathbf{u} + [\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{u})]\, \mathbf{v}.$$

Заметим, что

$$\mathbf{k}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{k}\mathbf{v} = \mathbf{k}\mathbf{u} = 0.$$

Если векторы $\dot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ не лежат в одной плоскости, то это возможно только в том случае, когда сам вектор $\mathbf{k}$ тождественно равен нулю. Если же данные векторы компланарны, то $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = 0$. В этом случае все оставшиеся векторные слагаемые в $\mathbf{k}$ лежат на одной оси и длину вектора $\mathbf{k}$ можно посчитать по определению векторного и скалярного произведения. Пусть угол между $\dot{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{u}$ есть φ_1 , а между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ есть φ_2 . Тогда выбирая положительным направление вектора $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}$ имеем

$$|\mathbf{k}| = v^2 \dot{v} u \left[-\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin\varphi_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right] = 0.$$

Следовательно, в любом случае $\mathbf{k} = 0$ и

$$b_W^{\beta\alpha} \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{*\mu} \dot{v}^{*\nu} + \omega_W'^{\beta} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\ e^{\beta\mu\nu} v^{\mu} \dot{v}^{\nu}. \qquad (27)$$

Тем самым отсюда следует, что величина угловой скорости (26) форминвариантна

$$\Omega'^{\gamma} = a^{*\gamma\alpha} \frac{1-\sqrt{1-v^{*2}}}{v^{*2}\sqrt{1-v^{*2}}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{*\mu} \dot{v}^{*\nu} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma} a^{*\mu\lambda} \dot{a}^{*\alpha\lambda} =$$

$$= a^{\gamma\alpha} \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\ e^{\alpha\mu\nu} v^{\mu} \dot{v}^{\nu} + \frac{1}{2}\ e^{\alpha\mu\gamma} a^{\mu\lambda} \dot{a}^{\alpha\lambda}.$$

4. Обсуждение форминвариантности собственной угловой скорости

Пусть в некоторой лабораторной системе S начало жёсткой системы отсчёта s' движется поступательно ($a^{*\beta\alpha} = \delta^{\beta\alpha}$, т.е. «без поворота» относительно S) со скоростью $\mathbf{v}$. Данная система отсчёта обладает собственной угловой скоростью равной частоте прецессии Томаса

$$\mathbf{\Omega}_T = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\ \mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}}.$$

Произведём последовательные (в близкие моменты времени) бусты в мгновенно сопутствующие s' инерциальные системы отсчёта. В этом случае новая прецессия Томаса системы s' (первый член в левой части (27)) будет мала (из-за малой относительной скорости) и вся собственная прецессия Томаса будет относиться на счёт вращения Вигнера. Этот вывод нетрудно доказать. Действительно, пусть в момент $T + \Delta T$ скорость системы s' относительно S стала $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$. Перейдём в систему отсчёта двигающуюся со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Сделав замену в (8)

$$\mathbf{u} \to \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \to \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$$

и учитывая, что угол поворота Вигнера ϕ_W мал, в результате получим, что он равен

$$\mathbf{n}\,\phi_W = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}\,\mathbf{v}\times\Delta\mathbf{v}.$$

Очевидно, этот угол совпадает с собственной частотой прецессии Томаса умноженной на промежуток собственного времени. Это обстоятельство иногда рассматривается как подтверждение того, что прецессия Томаса и вращение Вигнера являются разными названиями одного и того же физического явления. Данное мнение является разумеется ошибочным, поскольку для произвольного (и даже для очень малого) буста проводить различие между вращением Вигнера и прецессией Томаса совершенно необходимо.

Это обстоятельство можно пояснить также на примере уравнения (27), если произвести буст из S не в мгновенно сопутствующую систему отсчёта, а в произвольную со скоростью $\mathbf{u}$. В новой лабораторной системе отсчёта S^* начало отсчёта s' имеет уже скорость $\mathbf{v}^*$, связанную с $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ формулой (7), а оси координат s' испытывают дополнительное вигнеровское вращение (8). Следовательно, угловая скорость собственного вращения s' в новой системе складывается согласно формуле (27) из двух составляющих: новой собственной прецессии Томаса (первый член в левой части) и вигнеровского вращения (второй член в левой части).

Таким образом, собственное вращение Вигнера не следует смешивать с собственной прецессией Томаса; это хотя и тесно связаные между собой, но неэквивалентные понятия. Суть открытия Томаса заключается в том, что если жёсткая система отсчёта s' движется таким образом, что в каждый момент лабораторного времени её координатные оси совпадают с осями мгновенно сопутствующей ей инерциальной системой отсчёта ориентированной «без поворота» относительно лабораторной системы, то система s' обладает собственной прецессией, которая и является прецессией Томаса. Собственное же вращение Вигнера дополнительно к прецессии Томаса, как видно из уравнения (27), определяется матрицей $b^{\alpha\beta}$ и появляется при любом бусте.

В том случае, когда система s' в первоначальной лабораторной системе двигалась прямолинейно и равноускоренно без собственного вращения, её собственная прецессия Томаса равна нулю. Тогда из (27) следует, что в новой лабораторной системе вращение Вигнера и прецессия Томаса системы s' должны быть противонаправлены и компенсировать друг друга. Независимая проверка этого утверждения будет произведена в другой статье.

5. Закон движения собственной тетрады

Найдём теперь закон движения собственной тетрады. Если продифференцировать компоненты $\Lambda^{\alpha 0}$ из (17), заменить в получившемся выражении производные $\dot{a}^{\alpha\beta}$ согласно уравнению (5) и в итоге учесть выражение для ω'^{α} из (21), то получим, что

$$\frac{d\Lambda^{\alpha 0}}{dt} = \frac{a^{\alpha\nu}\dot{v}^{\nu}}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2(1-v^2)}(e^{\alpha\mu\nu}a^{\nu\gamma}a^{\mu\lambda})e^{\lambda\psi\varphi}v^{\gamma}v^{\psi}\dot{v}^{\varphi} +$$

$$+\frac{a^{\alpha\nu}v^{\nu}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{\sqrt{1-v^2}^{3}} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega'^{\gamma}\frac{v^{\nu}a^{\beta\nu}}{\sqrt{1-v^2}}\ .$$

Далее, в первом и втором члене правой части этого равенства учтём равенство "уничтожения"(4), и везде подставим вместо производных $\dot{v}^{\nu}$ их значения согласно уравнению

$$\dot{v}^{\varphi} = \sqrt{1-v^2}a^{\lambda\varphi}W'^{\lambda} - \frac{\sqrt{1-v^2}(1-\sqrt{1-v^2})}{v^2}(v^{\alpha}a^{\beta\alpha}W'^{\beta})v^{\varphi},$$

которое следует из (22). После всех вычислений получим, что

$$\frac{d\Lambda^{\alpha 0}}{dt} = W'^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega'^{\gamma}\frac{v^{\nu}a^{\beta\nu}}{\sqrt{1-v^2}}\ . \qquad (28)$$

Действуя аналогично, для производной компоненты $\Lambda^{\alpha\mu}$ из (17) можно найти её следующее значение

$$\frac{d\Lambda^{\alpha\mu}}{dt} = W'^{\alpha}\frac{v^{\nu}a^{\alpha\mu}}{\sqrt{1-v^2}} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega'^{\gamma}a^{\beta\mu} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega'^{\gamma}\frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2\sqrt{1-v^2}}v^{\mu}v^{\nu}a^{\beta\nu}. \tag{29}$$

Уравнения (28) и (29) записываются в единой форме как

$$\frac{d\Lambda^{\alpha i}}{dt} = W'^{\alpha}\Lambda^{0i} + e^{\alpha\beta\gamma}\Omega'^{\gamma}\Lambda^{\beta i}. \tag{30}$$

Аналогично предыдущим вычислениям, дифференцируя компоненты (16) получим, что

$$\frac{d\Lambda^{0i}}{dt} = W'^{\alpha}\Lambda^{\alpha i}. \tag{31}$$

Умножая (30), (31) на Λ_i^{μ} и воспользовавшись свойством ортогональности (18) можно убедиться в справедливости равенств (19), (20).

Заключение

Цель настоящей статьи заключалась в том, чтобы показать, что уравнения обратной задачи кинематики справедливы сами по себе, независимо от истинности преобразования Лоренца – Мёллера – Нэлсона [2], [3]. Способом достижения этой цели была формулировка (в п. 2) инвариантных условий движения (19), (20) для произвольной жёсткой неинерциальной системы отсчёта обладающей заданными характеристиками. Оказалось, что уравнения обратной задачи кинематики являются прямым следствием этих условий. Проверяя (19), (20) для малых бустов (п. 3) было показано (п. 4), что если в одной лабораторной системе неинерциальная жёсткая система s' имела только собственную прецессию Томаса, то в новой лабораторной системе такая система s' будет иметь комбинацию (27) двух вращений: новой собственной прецессии Томаса и вращения Вигнера, которые в совокупности дают первоначальную частоту прецессии Томаса.

Также в статье был получен закон движения собственной тетрады (30), (31). Данные формулы полезны, например, при обсуждении с точки зрения теории относительности движения спиновых частиц в поле.

Благодарность

Автор выражает большую признательность профессору Н. Г. Мигранову, за плодотворные обсуждения и поддержку.

Список литературы

[1] V. Voytik. The equations of the inverse kinematics problem and scheme of its solution, arXiv:1308.3977 [gr-qc]

[2] R.A. Nelson. Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference, *J. Math. Phys.*, **28**(1987),pp. 2379-2383.

[3] R.A. Nelson. Erratum: Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference, *J. Math. Phys.*, **35**(1994), pp. 6224- 6225.

[4] V.V. Voytik. The general form-invariance principle. *Grav. and Cosm.*, v. 17, No. 3, 218–223, 2011

[5] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер. Гравитация. т.1, М.: Мир, (1977), 480 с.

[6] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Современная электродинамика. Часть 1. Микроскопическая теория, Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005

[7] H.P. Stapp. Relativistic Theory of Polarization Phenomena, *Phys.Rev.* 103, 2, pp.425-434, (1956)

[8] В.И. Ритус. *ЖЭТФ*, 40, 352 (1961)

[9] В.И. Ритус. О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса, *УФН*, т. 177, №1, с. 105-112, 2007

[10] Л.Д. Ландау, Е. М. Лифщиц. Теория поля, М., Наука, 1988

[11] R. G. Littlejohn. Physics 209 Fall 2002 Notes 5 Thomas Precession, http://bohr.physics.berkeley.edu/classes/221/0708/notes/thomprec.pdf

[12] B. Mashhoon, U. Muench. Length measurement in accelerated systems, *Annalen Phys.*, 11(2002), pp. 532-547.