FOURIER SERIES WITH CONJUGATION POINT

O.E. YAREMKO

Penza State University

st. Lermontov, 37, 440038, Penza, Russia

yaremki@mail.ru

Abstract.

Fourier's formula for 2π-periodic functions with conjugation point are studied. In the case of a **periodic function**, conjugation point the Fourier transform can be simplified to the calculation of a discrete set of complex amplitudes, called **Fourier series** coefficients. **A study on main property of Fourier series**.

Keywords: Fourier's formula, Fourier series.

В работе приводится решение задачи Штурма – Лиувилля для $2\pi$ - периодической функции на сегменте $(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, где в точке $x=\pi$ заданы условия сопряжения. Вводятся прямое и обратное преобразования Фурье на сегменте с точкой сопряжения.

Пусть кусочно-непрерывная, абсолютно интегрируемая, имеющая ограниченную вариацию $2\pi$ - периодическая функция

$$u(x)=\theta(x)\theta(\pi-x)u_1(x)+\theta(x-\pi)\theta(2\pi-x)u_2(x),$$

где $\theta(x)$ - единичная функция Хевисайда, удовлетворяет сепаратной системе дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)u_j=0,\quad j=1,2,\quad x\in I_1^+,\quad I_1^+=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi), \qquad (1)$$

граничным условиям

$$u_1(0)=u_2(2\pi),\quad ku_1'(0)=u_2'(2\pi),\quad k>0, \qquad (2)$$

и условиям сопряжения

$$u_1(\pi)=u_2(\pi),\quad ku_1'(\pi)=u_2'(\pi),\quad k>0. \qquad (3)$$

Требуется найти нетривиальные решения задачи (1)–(3). Получили задачу Штурма – Лиувилля на собственные значения.

Из системы уравнений (1) следует представление для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$:

$$u_1(x) = c_1\, e^{i\lambda x} + c_2\, e^{-i\lambda x}, \quad 0 < x < \pi,$$

$$u_2(x) = d_1\, e^{i\lambda x} + d_2\, e^{-i\lambda x}, \quad \pi < x < 2\pi.$$

Из условий (2)–(3) получим систему для определения коэффициентов $c_j$, $d_j$, $j = 1, 2$,

$$\begin{cases} c_1 e^{i\lambda\pi} + c_2 e^{-i\lambda\pi} = d_1 e^{i\lambda\pi} + d_2 e^{-i\lambda\pi}, \\ k\left(c_1 e^{i\lambda\pi} - c_2 e^{-i\lambda\pi}\right) = d_1 e^{i\lambda\pi} - d_2 e^{-i\lambda\pi}, \\ c_1 + c_2 = d_1 e^{2i\lambda\pi} + d_2 e^{-2i\lambda\pi}, \\ k\left(c_1 - c_2\right) = d_1 e^{2i\lambda\pi} - d_2 e^{-2i\lambda\pi}. \end{cases} \tag{4}$$

Для существования ненулевого решения однородной системы (4) потребуем, чтобы определитель основной матрицы обращался в нуль.

$$\begin{vmatrix} e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} & -e^{i\lambda\pi} & -e^{-i\lambda\pi} \\ ke^{i\lambda\pi} & -ke^{-i\lambda\pi} & -e^{i\lambda\pi} & e^{-i\lambda\pi} \\ 1 & 1 & -e^{2i\lambda\pi} & -e^{-2i\lambda\pi} \\ k & -k & -e^{2i\lambda\pi} & e^{-2i\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0$$

Из полученного уравнения находим собственные значения $\lambda = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = d_1 + d_2, \\ k\left(c_1 - c_2\right) = d_1 - d_2. \end{cases}$$

Если $d_1 = 0, d_2 = 1,$ то $c_1 = \dfrac{k-1}{2k}, c_2 = \dfrac{k+1}{2k},$ и

$$\begin{cases} u_{1,n}(x) = \dfrac{k-1}{2k} e^{i\lambda x} + \dfrac{k+1}{2k} e^{-i\lambda x}, \quad 0 < x < \pi, \\ u_{2,n}(x) = e^{-i\lambda x}, \quad \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ представимы в виде рядов:

$$u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nx + \frac{1}{k} b_n \sin nx \right)$$

$$u_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{5}$$

где коэффициенты $a_n$ и $b_n$ вычисляются по следующим формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{k+1}\left(\int_0^{\pi} k\, u_1(t)\cos nt\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} u_2(t)\cos nt\, dt\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2k}{k+1}\left(\int_0^{\pi} u_1(t)\sin nt\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} u_2(t)\sin nt\, dt\right) \tag{6}$$

Ряды (6) сходятся абсолютно и равномерно при $x\in I_1^+$.

Замечание. Формулы (5)-(6) могут быть получены также методом операторов преобразования [].

Покажем это. Применим к задаче (1)-(3) операторы преобразования $\Pi: u(x)\to\tilde{u}(x)$ вида

$$\tilde{u}(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{k+1}u_1(x)-\dfrac{k-1}{k+1}u_2(2\pi-x), & 0<x<\pi,\\ u_2(x), \quad \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

Получим задачу Штурма – Лиувилля:

найти нетривиальное решение уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\right)\tilde{u}=0, \quad x\in(0,2\pi),$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{u}(0)=\tilde{u}(2\pi), \quad \tilde{u}'(0)=\tilde{u}'(2\pi),$$

где $\tilde{u}=\tilde{u}(x)$ - непрерывная, абсолютно интегрируемая, имеющая ограниченную вариацию $2\pi$ - периодическая функция.

Собственные значения полученной задачи $\lambda=n$, $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$, а функция $\tilde{u}=\tilde{u}(x)$ раскладывается в ряд

$$\tilde{u}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{7}$$

где $a_n$ и $b_n$ - коэффициенты Фурье,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\cos nt\, dt, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\sin nt\, dt.$$

Подействуем на функцию $\tilde{u}(x)$ , представленную в виде (7), обратным оператором преобразования $\Pi^{-1}:\tilde{u}(x)\longrightarrow u(x)$

$$u(x)=\begin{cases} u_1(x)=\dfrac{k+1}{2k}\tilde{u}(x)+\dfrac{k-1}{2k}\tilde{u}(2\pi-x), & 0<x<\pi, \\ u_2(x)=\tilde{u}(x), & \pi<x<2\pi. \end{cases}$$

$$u_1(x)=\frac{k+1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+$$

$$+\frac{k-1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n(2\pi-x)+b_n\sin n(2\pi-x))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+\frac{1}{k}b_n\sin nx\right),\quad 0<x<\pi,$$

$$u_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad \pi<x<2\pi,$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\cos nt\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{2k}{k+1}u_1(t)-\frac{k-1}{k+1}u_2(2\pi-t)\right)\cos nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\cos nt\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{k+1}\left(\int_0^{\pi}k\,u_1(t)\cos nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\cos nt\,dt\right),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(t)\sin nt\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(\frac{2k}{k+1}u_1(t)-\frac{k-1}{k+1}u_2(2\pi-t)\right)\sin nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\sin nt\,dt\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2k}{k+1}\left(\int_0^{\pi}u_1(t)\sin nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\sin nt\,dt\right).$$

Таким образом, для функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ и коэффициентов $a_n$, $b_n$ получены формулы вида (5)-(6).

Сформулируем теорему разложения по собственным функциям для оператора Фурье.

Т е о р е м а 1. Пусть функция

$$u(x)=\theta(x)\theta(\pi-x)\,u_1(x)+\theta(x-\pi)\theta(2\pi-x)\,u_2(x)$$

определенная на $I_1^+=(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$, кусочно-непрерывна, абсолютно интегрируема, имеет ограниченную вариацию. Тогда для всех $x\in I_1^+$ справедливы формулы разложения по собственным функциям

$$\frac{1}{2}\left[u_1(x-0)+u_1(x+0)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^{\pi}k\,u_1(t)\cos nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^{\pi}u_1(t)\sin nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx\right],\quad 0<x<\pi,$$

$$\frac{1}{2}\left[u_2(x-0)+u_2(x+0)\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^{\pi}k\,u_1(t)\cos nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\cos nt\,dt\right)\cos nx+\right.$$

$$\left.+k\left(\int_0^{\pi}u_1(t)\sin nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\sin nt\,dt\right)\sin nx\right],\quad \pi<x<2\pi.$$

Можно ввести прямое $F_1$ и обратное $F_1^{-1}$ преобразования Фурье на интервале $I_1^+$ по правилам:

$$u_n\equiv F_1[u]=\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{2}{k+1}\left(\displaystyle\int_0^{\pi}k\,u_1(t)\cos nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\cos nt\,dt\right),\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{2k}{k+1}\left(\displaystyle\int_0^{\pi}u_1(t)\sin nt\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}u_2(t)\sin nt\,dt\right),\end{cases}$$

$$u \equiv F_1^{-1}[u_n] = \begin{cases} u_1(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nx + \dfrac{1}{k} b_n \sin nx \right), & 0 < x < \pi, \\ u_2(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos nx + b_n \sin nx \right), & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

С целью применения полученных преобразований Фурье для решения задач математической физики получим основное тождество преобразования Фурье для дифференциального оператора $L$

$$L = \theta(x)\theta(\pi - x)\,\frac{d^2}{dx^2} + \theta(x-\pi)\theta(2\pi - x)\,\frac{d^2}{dx^2}.$$

Т е о р е м а 2. Пусть функция

$$u(x) = \theta(x)\theta(\pi - x)\,u_1(x) + \theta(x-\pi)\theta(2\pi - x)\,u_2(x)$$

дважды непрерывно-дифференцируема на $I_1^+$, удовлетворяет граничным условиям (2) и условиям сопряжения (3) на $I_1^+$, тогда

$$F_1[L(u)] = -n^2 \cdot F_1[u].$$

## REFERENCES


1. О.В.Бесов, В.П.Ильин, С.М.Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения.-М.Наука,1996.-480 с.

2. ]Баврин И.И., Яремко О.Э. Операторный метод в теории интегральных преобразований для кусочно-однородных сред. М.:Доклады РАН,2001.№3.-с.295-298.

3. Баврин И.И., Яремко О.Э. О локализации средних Рисса спектральных разложений в кусочно- однородном полупространстве . М.:Доклады РАН,т.387, №5, 2002,с.586-588.

4. И. И. Баврин, О. Э. Яремко. Операторы преобразования и краевые задачи теории гармонических и бигармонических функций М.:Доклады РАН,т.393, №4, 2003,с.439-444.

5. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики.-М.: МЦМО, 2001.-304 с.

6. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. - М.: Изд-во иностр. лит. - 1960.- T.I.- 278 с.