Algoritmo de Legendre y Triángulo de Pascal

Germán Andrés Paz
(2000) Rosario, Santa Fe, Argentina
germanpaz_ar@hotmail.com

10 de julio de 2013

Abstract

En este documento se muestra la relación que existe entre el Triángulo de Pascal y el algoritmo de Legendre para calcular la cantidad exacta de números primos menores que un número dado.

1 La Fórmula $P(n) = n - C(n) - 2$

Para empezar, si n es un entero mayor que 1, $P(n)$ la cantidad de números primos menores que n y $C(n)$ la cantidad de números compuestos menores que n, se tiene que

$$P(n) = n - C(n) - 2.$$

Por lo tanto, si conocemos el valor de $C(n)$ podemos averiguar el valor de $P(n)$. El problema reside ahora en cómo calcular el valor exacto de $C(n)$.

Supongamos que n es en realidad un entero mayor que 4. Por debajo de $\sqrt{n}$ siempre existirá al menos un número primo. De acuerdo con el algoritmo de Legendre, para calcular $C(n)$ necesitaremos trabajar con los números primos menores que $\sqrt{n}$.

2 Cálculo de $C(n)$

Supongamos que n es un entero mayor que 4 tomado al azar, y que existen m números primos menores que $\sqrt{n}$. Para calcular el valor exacto de $C(n)$ tenemos que seguir estos pasos:

1. Hallar todos los primos menores que $\sqrt{n}$.

2. Para cada primo menor que $\sqrt{n}$ se calcula la cantidad de compuestos divisibles por él que hay por debajo de n (esto es algo muy fácil de realizar). Luego se suman las cantidades obtenidas. Al resultado de esta suma lo llamaremos $T_1(n)$ o "Total Uno de n".

3. Se realizan todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos menores que $\sqrt{n}$ que sean posibles y se expresan dichas combinaciones en forma de multiplicaciones. De estas multiplicaciones obtenemos una serie de productos. Al calcular para todo producto la cantidad de números naturales divisibles por él que hay por debajo de n (lo cual es fácil de realizar) obtenemos una serie de cantidades. Al sumar estas cantidades obtenemos el valor de $T_2(n)$ (Total Dos de n).

4. Se calcula $T_3(n)$. Para ello se aplica la misma regla que para calcular $T_2(n)$, con la diferencia de que en este caso las combinaciones sin repetición con las que se trabajará serán de orden tres.

5. De igual forma se calcula $T_4(n)$. En este caso las combinaciones sin repetición serán de orden cuatro.

6. Siguiendo la misma regla, se calcula $T_5(n)$, $T_6(n)$, $T_7(n)$, etc., hasta que finalmente llegamos a calcular $T_m(n)$.

7. Luego, si m es impar se tiene que

$$C(n) = T_1(n) - T_2(n) + T_3(n) - T_4(n) + ... + T_m(n),$$

mientras que si m es par se tiene que

$$C(n) = T_1(n) - T_2(n) + T_3(n) - T_4(n) + ... + T_{m-1}(n) - T_m(n).$$

Observación 2.1. Como se puede ver, los *totales de* n de subíndice impar siempre suman, mientras que los *totales de* n de subíndice par siempre restan.

Observación 2.2. En cada *total de* n ($T_m(n)$) el subíndice indica de qué orden son las combinaciones sin repetición de los números primos menores que $\sqrt{n}$ con las que se debe trabajar para obtener el valor del mencionado *total de* n.

3 Relación Entre el Algoritmo de Legendre y el Triángulo de Pascal

La relación entre el algoritmo de Legendre y el Triángulo de Pascal surge a partir de los siguientes dos puntos:

- Es correcto decir que si n es un número natural que tiene por lo menos un número primo por debajo de su raíz cuadrada y c es un número compuesto menor que n, y c es divisible como máximo por x de los números primos menores que $\sqrt{n}$, entonces c "aparecerá" en un *total y de n* ($T_y(n)$) una cantidad de veces igual al coeficiente binomial $\binom{x}{y}$.

- Es correcto decir que si a es un entero positivo impar cualquiera, entonces se tiene que

$$\binom{a}{1} - \binom{a}{2} + \binom{a}{3} - \binom{a}{4} + \cdots + \binom{a}{a} = 1.$$

  Por otra parte, si b es un entero positivo par cualquiera se tiene que

$$\binom{b}{1} - \binom{b}{2} + \binom{b}{3} - \binom{b}{4} + \cdots + \binom{b}{b-1} - \binom{b}{b} = 1.$$

  Observación 3.1. Este último punto conforma una de las propiedades del Triángulo de Pascal. Las combinaciones sin repetición de orden impar siempre suman, mientras que las de orden par siempre restan, y de esta forma siempre se obtiene 1.

Estos dos puntos aseguran que al utilizar el algoritmo de Legendre para calcular $C(n)$, todo número compuesto menor que n quedará incluido una vez y solamente una vez en $C(n)$. En otras palabras, estos dos puntos aseguran que al utilizar el algoritmo de Legendre siempre se obtenga el valor correcto y exacto de $C(n)$ y por lo tanto de $P(n)$.

Nota 3.2. En este documento se utilizó la notación $P(n)$ en lugar de la notación $\pi(n)$, puesto que aquí se explica cómo calcular la cantidad de primos **menores que** n, y no la cantidad de primos **menores o iguales que** n. De igual manera, se utilizó la notación $C(n)$ para representar la cantidad de compuestos **menores que** n, y no la cantidad de compuestos **menores o iguales que** n.

Nota 3.3. En este documento se utilizó la expresión "número natural" para referirse únicamente a los números enteros positivos.

– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –