UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
"FRANCISCO GARCÍA SALINAS"
UNIDAD ACADÉMICA DE FÍSICA

"ESTUDIO DE LAS MATRICES DE BARUT, MUZINICH Y WILLIAMS PARA ESPÍN 1"

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA:
MARÍA DE GUADALUPE CALDERA CABRAL

ASESOR
DR. VALERI V. DVOEGLAZOV

15 de Abril de 2013
Zacatecas, Zac.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por no lanzarme un rayo cada vez que dude y escucharme aunque tuviera otras cosas importantes que hacer.

Agradezco enormemente a mi familia, a mi papá José Germán Caldera Perales, a mi mamá María del Refugio Cabral Álvarez y a mis hermanas María Libertad Caldera Cabral y Gabriela Alejandra Caldera Cabral por siempre creer que podía hacerlo y por todo su apoyo incondicional.

Un enorme agradecimiento a mi novio César David Palacios García por todo lo que ha hecho por mí, por todo el apoyo, la paciencia y por creer en mí siempre. Muchas gracias flaco, sin ti no lo hubiera logrado.

Un agradecimiento muy especial a mi asesor Valeri V. Dvoeglazov por haberme enseñando tantas cosas, tanto en clase como en la realización de esta tesis, así como toda la paciencia que tuvo conmigo.

Y finalmente pero no menos importantes, a mis amigos de la carrera, en especial a Diana Madera y Polet Castañeda por aguantarme durante toda la carreta y creer en mí, así como mis amigos de la preparatoria, en espacial a Rubi y Luz, que siempre estuvieron ahí para distraerme cada vez que quería ponerme a trabajar.

Gracias.

"Además, ¿sabemos acaso lo que es la verdad? si yo le digo que aquel trozo de ventana es azul, digo una verdad. Pero es una verdad parcial, y por lo tanto una especie de mentira."

Alejandra, Sobre héroes y tumbas de Ernesto Sábato.

Resumen

En la presente tesis se presentan las fórmulas de las trazas de las matrices $\gamma_{\mu\nu}$ de Barut-Muzinich-Williams para espín 1, las cuales son análogas de las matrices de espín 1/2 de Dirac. Estas se introducen en las ecuaciones relativistas de Weinberg-Tucker-Hammer para 2(2S+1). Además se comprobó que existe el mapeo entre el formalismo vector-tensor y el formalismo 2(2S +1). Las fórmulas de las trazas pueden ser utilizadas en el cálculo de las amplitudes de dispersión, secciones eficaces y los espectros de estados ligados de energía para bosones.

Índice General

Capitulo 3

Productos y Trazas de Matrices Covariantes γ^{μ} y $\gamma^{\mu\nu}$ en el Caso de Espín 1/2 y Espín 1

Introducción

La dinámica cuántica de partículas es un área que describe los fenómenos que resultan de las interacciones en distancias interatómicas o intermoleculares. La electrodinámica cuántica es una descripción detallada de la interacción entre fotones y partículas cargadas de tipo fermiónico. La teoría cuántica comparte ciertos rasgos con la descripción clásica, particularmente esto puede ser visto en la integración de Feynman con integrales de camino. De acuerdo con la descripción de la óptica clásica la luz viaja sobre todos los caminos permitidos, y su interferencia determina los frentes de onda que se propagan de acuerdo con el principio de Fermat. Similarmente, en la descripción cuántica de los fotones (y los fermiones), estos pasan por cada camino posible permitido por aberturas o sistemas ópticos. En ambos casos el observador detecta simplemente el resultado de la superposición de todas las ondas consideradas por medio del método de integrales de camino.

La QED (Quantum Electrodynamics, Electrodinámica Cuántica) es una teoría física que tiene mejor acuerdo con experimentos, además QED fue la primera teoría cuántica del campo en la cual las dificultades para construir una descripción completa de campos y de creación y aniquilación de partículas cuánticas, fueron resueltas satisfactoriamente Matemáticamente, podemos decir que la electrodinámica cuántica tiene la estructura de una teoría de norma abeliana con el grupo de norma U(1). El campo de norma que intermedia la interacción entre campos de espín-1/2 con carga es el campo electromagnético.

El resultado de interacción de un sistema de partículas cargadas y fotones puede ser calculado mediante un cálculo perturbativo. En concreto la comparación con los experimentos realizables frecuentemente requiere el cálculo de los elementos de la matriz S que permiten encontrar las secciones eficaces de dispersión para una partícula y compáralas con los resultados experimentales.

Cada uno de los términos perturbativos admite una representación gráfica conocida como diagramas de Feynman. De hecho, la electrodinámica cuántica fue históricamente la primera teoría donde se usaron diagramas de Feynman como ayuda en el cálculo perturbativo. La forma de cada uno de los términos perturbativos y, por lo tanto, la representación gráfica asociada depende de la forma del lagrangiano que caracteriza dicha teoría (ver más adelante).

Los resultados de los cálculos de matrices γ^{μ} en el caso de espín $1/2$ han sido desarrollados y se usan siempre. Nuestro objetivo en la Tesis es desarrollar métodos de cálculos matriciales en el caso cuántico como la interacción de dos partículas bosónicas de espín 1. Las ecuaciones de Weinberg-Tucker-Hammer sin masa, son equivalentes a las ecuaciones de Maxwell en la elección bien definida de las condiciones iniciales y de contorno, lo que demuestra su coherencia. Además, nuestros resultados son aplicables también en el caso másico.

La presente tesis contiene 3 Capítulos, así como una Introducción y las correspondientes Conclusiones. El primer Capítulo es una introducción a las herramientas matemáticas que empleamos en el presente trabajo así como una revisión general de la mecánica cuántica relativista. El Capítulo 2 presenta el formalismo para las partículas de nuestro interés, partículas con espín 1, y se mencionan sus propiedades y las reglas matemáticas para poder hacer cálculos de sus amplitudes y espectros de energía. El Capítulo 3 discutimos las matrices γ^{μ} y matrices $\gamma^{\mu\nu}$para espín ½ y espín 1, respectivamente sus trazas y productos. Los métodos de cálculo están relacionados con los artículos de Caianeallo, Fubuni, Chisholm, Kahane. Ellos sirven para cálculos de matrices S de dispersión. En este mismo capítulo se presenta los cálculos realizados usando el programa Wolf Mathematica con matrices espín 1 para trazas. Finalmente en la conclusión enlistamos los resultados, así como presentamos la Conclusión del trabajo.

Capítulo 1

Funciones de Campo para Partículas Relativistas

En esta parte damos una introducción a la notación y los conceptos básicos que serán necesarios a lo largo de la tesis. La exposición se presenta de acuerdo con la referencia [1].

1.1 Notación Relativista.

Cualquier teoría fundamental de la naturaleza, tiene que ser coherente con la relatividad, así como con la teoría cuántica. Por lo tanto, comenzamos estableciendo una notación para las teorías relativistas. Suponemos que el lector está familiarizado con la relatividad especial.

Consideremos dos componentes en el espacio tiempo (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy,\ z + dy,\ t + dt)$. Podemos generalizar la noción de la distancia entre dos puntos en el espacio de Minkowski, este es llamado intervalo ds. A fin de que ds es igual para todos los observadores inerciales, debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y rotaciones, y así viene dada por

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2). \tag{1.1}$$

Por supuesto, podríamos haber definido $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$; pero escogemos (1.1) para una conveniencia que utilizaremos más adelante. Con la definición, eventos que están separados por el intervalo de temporaloide (timelike) tiene $ds^2 > 0$; los que están separados por el intervalo de espacialoide (spacelike) $ds^2 < 0$; y los que están separados por el intervalo *nulo* (lightlike) $ds^2 = 0$. En la física y las matemáticas, el espacio de Minkowski o espacio-tiempo de Minkowski (llamado así por el matemático alemán-polaco Herman Minkowski) es el ajuste matemático en el que la teoría de Lorentz, Poincarê y Einstein de la relatividad especial es más convenientemente formulado.

En el espacio 3-dimensional de coordenadas (x, y, z) son considerados como los componentes de un 3-vector, y $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ es invariante bajo rotaciones. Esta forma cuadrática es la suma de los cuadrados, y así definida positiva. El intervalo invariante ya no es definido positivo. Definimos

$$\begin{gathered} x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \\ x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z). \end{gathered} \tag{1.2}$$

Y haciendo que la regla de que el invariante se consigue mediante la suma sobre *un índice superior* y *un índice inferior*:

$$ds^2 = \textstyle\sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.3}$$

Un 4-vector como x^{μ}, con el índice arriba es llamado *vector contravariante* y uno como x_{μ}, con el índice abajo es llamado *vector covariante*. El producto interno entre un vector contravariante y un vector covariante es un invariante (escalar). Para simplificar la notación, nosotros adoptamos *la convención de suma*: un índice que parece una vez en la parte superior y una vez en la parte inferior es convencionalmente una suma de 0 a 3:

$$\sum_{\mu=0}^{3} V^{\mu} V_{\mu} \rightarrow V^{\mu} V_{\mu}. \tag{1.4}$$

La relación entre x^{μ} y x_{μ} (o entre cualquier vector contravariante y su homólogo) puede ser dado introduciendo un *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} x_{\mu} &= g_{\mu\nu} x^{\nu} \\ &= g_{\mu 0} x^{0} + g_{\mu 1} x^{1} + g_{\mu 2} x^{2} + g_{\mu 3} x^{3}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

donde la convención de sumatoria es utilizada. Por inspección de (1.2), tenemos que $x^{0} = x_{0}, x^{1} = -x_{1}$ etc., entonces de (1.5) está claro que $g_{\mu\nu}$ puede ser escrito como la matriz diagonal

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

donde las filas y columnas corresponden a las componentes 0, 1, 2 y 3. Su inversa se escribe

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

De hecho, tiene los mismos valores de $g_{\mu\nu}$ en el espacio de Minkowsky (en coordenadas cartesianas), pero esta igualdad no se cumple en el espacio de Riemann.

Está claro que $g_{\mu\nu}$ contiene toda la información acerca de la geometría del espacio, en este caso, el espacio-tiempo de Minkowski. En relatividad general, juega un rol activo desde que la geometría del espacio no se fija de antemano, pero depende de qué es la materia en él. Las ecuaciones de campo de Einstein, por ejemplo, son ecuaciones para $g_{\mu\nu}(x)$.

Observando los operadores diferenciales, definimos

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\partial_{0}, \partial_{1}, \partial_{2}, \partial_{3}) &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\partial^{\mu} = g^{\mu\nu} \partial_{\nu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \tag{1.9}$$

dando el operador diferencial invariante de Lorentz de segundo orden

$$\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{1.10}$$

llamado el operador de D'Alembert.

El 4-vector de energía-momento de la partícula es

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right), \qquad p_{\mu} = \left(\frac{E}{c}, -\boldsymbol{p}\right) \tag{1.11}$$

dando el invariante

$$p^2 = p^{\mu}p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = m^2c^2 \tag{1.12}$$

cuando $c = 1$

$$p^2 = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2 \tag{1.13}$$

También se puede usar la notación $p \cdot x$ por $p_{\mu}x^{\mu}$:

$$p \cdot x = p_{\mu}x^{\mu} = Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}. \tag{1.14}$$

1.2 Ecuación de Klein-Gordon

Ahora estamos en condiciones de escribir una ecuación de onda para una partícula de espín cero, una partícula escalar. Como su espín es cero solo tiene una componente, que denotamos por ϕ. La ecuación de onda se obtiene de la ecuación (1.12) mediante la sustitución de los operadores diferenciales para E y $\mathbf{p}$, es decir.

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\ p \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}. \tag{1.15}$$

La ecuación (1.12) entonces nos queda

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} = 0,$$

que se convierte, en unidades $\hbar = c = 1$ usando (1.10),

$$(\Box + m^2)\phi = 0. \tag{1.16}$$

Esta se conoce como la Ecuación de Klein-Gordon. Tengamos en cuenta que sustituyendo (1.15) bajo la aproximación no relativista de (1.12), $E = p^2/2m$ (aquí E es la energía cinética solamente) se obtiene la ecuación de Schrödinger para una partícula libre:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{1.17}$$

De esto se deduce que la ecuación de Schrödinger es la aproximación no relativista de la ecuación de Klein-Gordon.

La densidad de probabilidad en el caso no relativista es bien definida positiva

$$\rho = \phi^*\phi > 0. \tag{1.18}$$

Y la corriente de probabilidad es

$$\boldsymbol{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\phi^*). \tag{1.19}$$

Obedecen a una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi^*\phi) - \frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*)$$
$$= \phi^*\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{i}{2m}\nabla^2\phi\right) + \phi\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi^2\right) = 0,$$

sin embargo, las expresiones correspondientes para la ecuación de Klein-Gordon muestran que la densidad no está definida positivamente. Esto es gracias a que para ser debidamente relativista, ρ no puede transformarse como un escalar a (1.18), sino lo que define a la componente temporal en el 4-vector corriente, cuya componente espacial es **j**, esta dada por (1.19). Entonces ρ está dada por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right). \tag{1.20}$$

Y j^μ forma el 4-vector:

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \frac{i\hbar}{m}\phi^*(\overleftrightarrow{\partial_o}, \overleftrightarrow{\nabla})\phi = \frac{i\hbar}{m}\phi^*\overleftrightarrow{\partial^\mu}\phi, \tag{1.21}$$

donde por definición

$$A\overleftrightarrow{\partial^\mu}B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[A\partial^\mu B - (\partial^\mu A)B]. \tag{1.22}$$

Y usando (1.8), tenemos la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\phi^*\Box\phi - \phi\Box\phi^*\right) = 0, \tag{1.23}$$

Donde ϕ^* también obedece a la ecuación de Klein-Gordon. Entonces ρ y **j** son la densidad de probabilidad y de corriente que queremos. Sin embargo, esto inmediatamente presenta un problema, porque ρ, dada por la ecuación (1.20), a diferencia de la expresión (1.18) para la ecuación de Schrödinger, no es positivo definida. Como la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden, ϕ y $\partial\phi/\partial t$ pueden ser fijados de forma arbitraria en un momento dado, entonces ρ puede ser tomado en valores negativos, y su interpretación como una densidad de probabilidad tiene que ser abandonada. La interpretación de la ecuación de Klein-

Gordon como una ecuación para una partícula, como función de onda ϕ, por lo tanto también tiene que ser abandonada. Sin embargo, está bien conocida la interpretación de ρ como densidad de carga eléctrica.

Vale la pena notar aquí que ϕ se ha supuesto que es compleja. Si se toma como ϕ reales, entonces ρ en (1.20) se anula, y lo mismo ocurre con $\mathbf{j}$. La interpretación correcta de que ϕ es compleja es por la descripción de partículas cargadas, ϕ real corresponde a partículas eléctricamente neutras, y ρ y $\mathbf{j}$ son entonces la carga y las densidades de corriente, en lugar de la densidad de probabilidad y la densidad de probabilidad de corriente

Existe otro problema con la ecuación de Klein-Gordon, y esa es la solución de (1.12), considerada como una ecuación de E, es

$$E = \pm(m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2)^{1/2}; \tag{1.24}$$

entonces las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon contienen términos de energías negativas como también energías positivas. Para una partícula libre, cuya energía es una constante, esta dificultad puede ser evitada, pues podemos elegir que la partícula tenga energía positiva, y los estados de energía negativa pueden ser ignorados. Pero una de las partículas que interactúan puede intercambiar energía con su entorno, y no habría nada para detener que bajen en cascada hasta infinitos estados de energía negativa, que emiten una cantidad infinita de energía en el proceso. Esto, por supuesto, no sucede, por lo que plantea un problema para la ecuación de Klein-Gordon de una partícula. La interpretación de ϕ como un campo cuántico, aclara este problema así como el anterior.

Ahora pasemos de partículas escalares a partículas con espín, empezando con partículas de espín $\frac{1}{2}$, que son descritas por la ecuación de Dirac.

1.3 Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac, a diferencia de la ecuación de Klein-Gordon, es de primer orden, y es válida para partículas con espín $1/2$; como la ecuación de Klein-Gordon expresa nada más que la relación relativista entre la energía, el momento y la masa; debe disponer de las partículas de cualquier espín. La ecuación de Dirac (y las ecuaciones de Maxwell y Proca, que se derivaran a continuación) puede ser derivada de las propiedades de transformación de espinores en el grupo de Lorentz.

Conocemos que la forma explícita de las matrices de Pauli ($\boldsymbol{\sigma}$) es:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

Sabemos que la correspondencia entre SU(2) y O(3) implica que los grupos deben tener una estructura similar, y por lo tanto que sus generadores tienen las mismas relaciones de conmutación. De hecho, puede ser fácilmente comprobado que las matrices de Pauli se obedecen:

$$\begin{gathered} \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}, \\ [\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\varepsilon^{ijk}\sigma^k, \end{gathered} \tag{1.26}$$

donde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1; & \text{si (ijk) es una permutación par de (123)} \\ -1; & \text{si (ijk) es una permutación impar de (123)} \\ 0; & \text{de otra forma} \end{cases} \tag{1.27}$$

A continuación daremos una introducción al Grupo de Lorentz y SL(2,C), análoga a la correspondencia entre SU(2) y el grupo rotación. Las transformaciones de "empuje" (en ingles boost) de Lorentz puras son aquellas que conectan dos sistemas (o marcos) de referencia inerciales, que se mueven con velocidad relativa v. Supongamos que los ejes de los sistemas son paralelos entre sí. Si el movimiento relativo es a lo largo de el eje x, las ecuaciones que los relacionan son

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1.28}$$

Poniendo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c$, $x^0 = ct$, $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$, estas son expresadas como

$$x^{0\prime} = \gamma(x^0 + \beta x^1), \qquad x^{1\prime} = \gamma(\beta x^0 + x^1), \qquad x^{2\prime} = x^2, \qquad x^{3\prime} = x^3. \tag{1.29}$$

Observando que $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, podemos parametrizar

$$\gamma = \cosh\phi\,, \qquad \gamma\beta = \operatorname{senh}\phi.$$

La transformación en términos de la variable ϕ, con $\tanh\phi = v/c = \beta$. Así, tenemos

$$\begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \operatorname{senh}\phi & 0 & 0 \\ \operatorname{senh}\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Llamaremos a esta matriz, la matriz de empuje L. El generador K_x de esta transformación de empuje a lo largo de el eje x está definida de acuerdo con la formula

$$K_x = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial\phi}\bigg|_{\phi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

De manera similar, los otros generadores son

$$K_y = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial\psi}\bigg|_{\psi=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K_z = \frac{1}{i}\frac{\partial B}{\partial\theta}\bigg|_{\theta=0} = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.32}$$

En la notación matricial de 4×4, los generadores de rotación de grupo SO(3) pueden escribirse

$$S_x = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ S_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ S_z = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.33}$$

La transformación de Lorentz más general está compuesta de empujes en las tres direcciones, y rotaciones alrededor de los tres ejes, y tiene los seis generadores (1.31) – (1.33). Sus relaciones de conmutación pueden calcularse, siendo estas

$$\begin{gathered} [K_x, K_y] = -iS_z \text{ y permutaciones cíclicas,} \\ [S_x, K_x] = 0, \text{ etc.} \\ [S_x, K_y] = iK_z \text{ y permutaciones cíclicas.} \end{gathered} \tag{1.34}$$

Una de las consecuencias interesantes de estas relaciones es que *las transformaciones de Lorentz puras no forman un grupo*, ya que los generadores K no forman un álgebra cerrada bajo la conmutación. Por lo tanto, el conmutador de dos empujes infinitesimales en diferentes direcciones x, y contiene, en virtud de las previas ecuaciones, una rotación alrededor del eje z (u otros ejes) y este es el origen de la precesión de Thomas.

La manera en que se transforman los espinores de Pauli está dada si notamos que las relaciones de conmutación anteriores satisfacen

$$\mathbf{K} = \pm i\frac{\sigma}{2}. \tag{1.35}$$

Así que debería haber dos tipos de espinores, correspondientes a los dos signos posibles de **K.**

Introduzcamos la operación de paridad (inversión del espacio), bajo la cual la velocidad en los empujes de Lorentz cambia de signo: $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Entonces los generadores **K** cambian de signo, $\mathbf{K} \to -\mathbf{K}$, igual que las componentes de un vector, mientras que **S** no cambian de signo $\mathbf{S} \to +\mathbf{S}$. Comportándose pues como un *vector axial o pseudovector,* que es como efectivamente se transforma el momento angular bajo la paridad.

Se sigue que las representaciones $(s, 0)$ y $(0, s)$ se intercambian,

$$(s, 0) \leftrightarrow (0, s) \text{ bajo paridad,} \tag{1.36}$$

y por lo tanto

$$\xi \leftrightarrow \eta \tag{1.37}$$

donde

$$\begin{gathered} \xi \to exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} - i\boldsymbol{\phi})\right]\xi = M\xi, \\ \eta \to exp\left[i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot(\boldsymbol{\theta} + i\boldsymbol{\phi})\right]\eta = N\eta \end{gathered} \tag{1.38}$$

Si consideramos la paridad, entonces, no es suficiente considerar los 2-espinores ξ y η separadamente, sino el 4-espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1.39}$$

Bajo las transformaciones de Lorentz, ψ se transforma de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-i\boldsymbol{\phi})} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+i\boldsymbol{\phi})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(\Lambda) & 0 \\ 0 & \overline{D}(\Lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{1.40}$$

Con

$$\overline{D}(\Lambda) = \Theta_{1/2} D^{*}(\Lambda) \Theta_{1/2}{}^{-1}, \tag{1.41}$$

donde Λ denota una transformación de Lorentz general, que podemos escribir como

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.42}$$

Bajo paridad, ψ se transforma como

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

El 4-espinor ψ define un espacio vectorial para la representación irreductible del grupo de Lorentz, si consideramos espinores de cierta paridad. Nótese, sin embargo, que la representación (1.40) no es unitaria; esto es porque la matríz $\exp(\sigma \cdot \phi)$ no es unitaria. En general, en mecánica cuántica, uno está interesado solamente en representaciones unitarias de un grupo de simetría, ya que son sólo estas las que conservan la probabilidad en una transición entre dos estados. Este problema está relacionado con el hecho de que el grupo de Lorentz, a diferencia del grupo de rotaciones es *no compacto*. Esto corresponde a grandes rasgos a la observación de que las velocidades, que son los parámetros de los empujes de Lorentz, toman valores dentro de un conjunto semi-abierto que corresponde a una línea de $v/c = 0$ a $v/c = 1$, mientras que los ángulos en un rotación abarcan desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$ (estos puntos son tales que línea ha sido circundada). El espacio grupal del grupo de rotaciones es finito, pero el del grupo de Lorentz es infinito, así que el grupo de Lorentz es *no compacto*. Hay, además un teorema de las representaciones unitarias de grupos no compactos son infinito-dimensionales. Otro grupo importante es el grupo de Poincairé. Lo que se tiene actualmente es la proposición hecha por Wigner de que el grupo fundamental en física de partículas no es del grupo de Lorentz (homogéneo) considerado arriba sino del grupo de Lorentz *inhomogéneo*, comúnmente llamado *grupo de Poincaré*, que consiste de empujes de Lorentz, rotaciones, y también translaciones espaciales y temporales. Un análisis de este grupo da un entendimiento más profundo.

Particularicemos ahora las transformaciones (1.40) al caso de boosts puro de Lorentz $(\theta = 0)$, y al mismo tiempo renombramos los 2-espinores ζ y η:

$$\xi \rightarrow \phi_R, \ \eta \rightarrow \phi_L, \tag{1.44}$$

R y L por izquierda y derecha (en ingles right y left) respectivamente. Tenemos así

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) \rightarrow e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}\phi_R(\mathbf{0}) = [\cosh(\phi/2) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{senh}(\phi/2)]\phi_R(\mathbf{0}), \tag{1.45}$$

donde **n** es un vector unitario en la dirección del empuje de Lorentz. Supóngase que el espinor original $\phi_R(\mathbf{0})$, se refiere a una partícula en reposo, y el transformado $\phi_R(\boldsymbol{p})$, a un sistema de referencia en el que la partícula tiene el momento lineal **p**. Si $\gamma = \cosh\phi$, $\gamma\beta = \mathrm{senh}\,\phi$, tenemos

$$\cosh(\phi/2) = [(\gamma+1)/2]^{1/2}, \ \mathrm{senh}(\phi/2) = [(\gamma+1)/2]^{1/2},$$

de manera que (1.45) se escribe

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} + \sigma\cdot\mathbf{p}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}\right]\phi_R(\mathbf{0}), \tag{1.46}$$

ya que para una partícula con energía total $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, masa m y momento **p**, tenemos $\gamma = {}^{E}/_{m}$ $(c = 1)$ la ecuación (1.46) se escribe

$$\phi_R(\boldsymbol{p}) = \frac{E+m+\sigma\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\phi_R(\mathbf{0}^\mu). \tag{1.47}$$

De manera similar encontramos

$$\phi_L(\boldsymbol{p}) = \frac{E+m-\sigma\cdot\mathbf{p}}{\sqrt{2m(E+m)}}\phi_L(\mathbf{0}). \tag{1.48}$$

Ahora, cuando una partícula está en reposo, no se puede definir si su espín es derecho o izquierdo, así que $\phi_R(\mathbf{0}) = \pm\phi_L(\mathbf{0})$. Esta fórmula es la *Relación de Ryder* [1],[2],[3]. Entonces a continuación de (1.47) y (1.48) se tiene que

$$\phi_R(\mathbf{p}) = \pm\frac{E+\sigma\cdot\mathbf{p}}{m}\phi_L(\mathbf{p}). \tag{1.49}$$

De la misma manera

$$\phi_L(\mathbf{p}) = \pm\frac{E-\sigma\cdot\mathbf{p}}{m}\phi_R(\mathbf{p}). \tag{1.50}$$

Podemos reescribir estas ecuaciones como

$$\begin{gathered}\mp m\phi_R(\mathbf{p}) + (E+\sigma\cdot\mathbf{p})\phi_L(\mathbf{p}) = 0\\ (E-\sigma\cdot\mathbf{p})\phi_R(\mathbf{p})\mp m\phi_L(\mathbf{p}) = 0\end{gathered} \tag{1.51}$$

O en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mp m & E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & \mp m \end{pmatrix} = 0] \tag{1.52}$$

Definiendo el 4-espinor como en la fórmula (1.39):

$$\psi(p) = \begin{pmatrix} \phi_R(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \tag{1.53}$$

y las matrices de 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5.$$

tenemos la ecuación (1.52) se convierte en:

$$\left(\gamma^0 E + \gamma^i p_i - m\right)\psi(p) = 0 \tag{1.55}$$

(Notar que $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$, $p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right)$, entonces, $\gamma^0 E + \gamma^i p_i = \gamma^0 E - \boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{p}$)

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)\psi(p) = 0. \tag{1.56}$$

Esta es la ecuación de Dirac para partículas masivas de espín $1/2$ en el espacio de momento lineal.

En el caso de partículas sin masa tenemos, por ejemplo de (1.51), que la ecuación se descompone en dos ecuaciones, cada una para un espinor de 2 componentes $(m = 0)$

$$\begin{aligned} (E + \sigma\cdot\mathbf{p})\phi_L(\mathbf{p}) &= 0, \\ (E - \sigma\cdot\mathbf{p})\phi_R(\mathbf{p}) &= 0. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Estas son conocidas como las *ecuaciones de Weyl.* Ya que para una partícula sin masa, $E = |\mathbf{p}|$, estas ecuaciones son ($\widehat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$)

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{p}}\phi_L = -\phi_L, \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot\widehat{\mathbf{p}}\phi_R = \phi_R.$$

El operador $\sigma\cdot\mathbf{p}$ mide la componente de helicidad en la dirección del momento. Por lo tanto los espinores de Weyl son eigenestados de la helicidad, y el espinor izquierdo (derecho) tiene helicidad negativa (positiva). Tradicionalmente ha sido supuesto que los neutrinos son partículas sin masa, y por lo tanto descritos por las ecuaciones de Weyl (una de ellas). Pero experimentos recientes (de oscilaciones entre sabores de neutrinos) indican que pueden tener masa. La forma de deducir la ecuación de Dirac dada anteriormente, difiere de la que siguió Dirac originalmente [4]. El propósito de Dirac fue encontrar una ecuación que no tuviera los problemas de la ecuación de Klein-Gordon, además que sea de primer orden en derivadas parciales, temporales y espaciales.

1.4 Predicción de las antipartículas

Vimos que la ecuación de Klein-Gordon sufre de dos defectos: la densidad de probabilidad no siempre es positiva, y pueden ocurrir estados de energía negativa. Por esta razón la ecuación de Klein-Gordon fue descartada y Dirac buscó una ecuación que la reemplazara. Esta ecuación a diferencia de la de Klein-Gordon, es de primer orden:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0. \tag{1.58}$$

Las matrices γ^μ deben ser las matrices 4 x 4, la ecuación (1.54) (sustituimos p_μ por $i\partial_\mu$en la ecuación (1.55)).

Aplicando el operador $i\gamma^\mu \partial_\mu$ otra vez a esta ecuación:

$$\left[-\left(\gamma^\mu \partial_\mu\right)(\gamma^\upsilon \partial_\upsilon) - i\left(\gamma^\mu \partial_\mu\right)m\right]\psi = 0,$$
$$-\left(\gamma^\mu \gamma^\upsilon \partial_\mu \partial_\upsilon + m^2\right)\psi = 0.$$

Ahora, $\partial_\mu \partial_\upsilon = \partial_\upsilon \partial_\mu$ así $\gamma^\mu \gamma^\upsilon$ puede ser reemplazado por la combinación simétrica.

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\upsilon + \gamma^\upsilon \gamma^\mu) = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+, \tag{1.59a}$$

para obtener

$$\tfrac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu \partial_\upsilon \psi + m^2\psi = 0. \tag{1.59b}$$

Por otra parte, la relatividad requiere que la relación energía-momento-masa se satisfaga, y por tanto que cada componente de ψ satisfaga la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\psi(x) = 0. \tag{1.60}$$

lo que está en concordancia con (1.59b).

Se sigue entonces que el coeficiente ante $\partial_\mu \partial_\nu$ es $g^{\mu\nu}$, véase la ecuación (1.7), así

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{1.61}$$

Esta es la relación general que los coeficientes γ^μ deben satisfacer. Tomando sucesivamente $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = i$ y $\mu \neq \nu$, vemos que se cumple

$$(\gamma^0)^2 = 1, \qquad \left(\gamma^i\right)^2 = -1, \qquad \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu \quad (\nu \neq \mu). \tag{1.62}$$

Es claro que si las cuatro γ^μ's satisfacen (1.61), también lo hace

$$\gamma'^\mu = S\gamma^\mu S^{-1} \tag{1.63}$$

donde S es la matríz lineal de 4 x 4, y la ecuación de Dirac será pues satisfecha por

$$\psi' = S\psi. \tag{1.64}$$

Construyamos ahora una corriente de probabilidad j^μ, para la ecuación de Dirac análoga a (1.21) de la ecuación de Klein-Gordon, y veamos si la densidad es positiva. Tomando la ecuación de Dirac en la forma (1.58).

Ahora tomamos el hermitiano conjugado de esta ecuación, notando de (1.54) que $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Entonces,

$$\psi^\dagger\left(-i\gamma^0\,\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\,\overleftarrow{\partial}_i - m\right) = 0. \tag{1.65}$$

Aquí $\psi^\dagger$ es un vector fila, y $\overleftarrow{\partial}_0$ y $\overleftarrow{\partial}_i$ operan sobre él de la izquierda. Esto no tiene forma covariante pero multiplicamos en la derecha por γ_0, y usamos (1.62) para obtener

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0, \tag{1.66}$$

donde

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, \tag{1.67}$$

se llama el espinor adjunto de ψ de Dirac. Las ecuaciones (1.58) y (1.66) pueden ser usadas ahora para mostrar que la corriente es

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{1.68}$$

La corriente se conserva:

$$\partial_\mu j^\mu = \left(\partial_\mu\overline{\psi}\right)\gamma^\mu\psi + \overline{\psi}\gamma^\mu\left(\partial_\mu\psi\right) = \left(im\overline{\psi}\right)\psi + \overline{\psi}(-im\psi) = 0. \tag{1.69}$$

La densidad j^0 es pues

$$\overline{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

es positiva; j^0 podría servir entonces como densidad de probabilidad para la partícula considerada, y la ecuación de Dirac resuelve el problema que la ecuación de Klein-Gordon no resolvía, vemos ahora la otra dificultad que enfrentamos con la ecuación de Klein-Gordon, la de los estados de energía negativos. Sin embargo aquí parece que no se resuelve del todo. De hecho, es fácil ver en (1.56) que una partícula de Dirac en reposo se rige por

$$\begin{aligned} \gamma^0 E\psi &= m\psi, \\ E\psi &= m\gamma^0\psi. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Los eigenvalores de γ^0son claramente +1 (dos veces) y -1 (dos veces), así que hay dos soluciones de energía positiva (+m) y dos de energía negativa (-m). De hecho, puede mostrarse calculando el determinante de (1.56) que los eigenvalores de E son

$$E = +(m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{dos veces,}$$
$$E = -(m^2 + p^2)^{1/2} \quad \text{dos veces.}$$

Por cada valor de **p**, hay dos posibles soluciones de energía, correspondientes a estados de una partícula de espín ½, y dos soluciones adicionales de energías negativas. Este resultado catastrófico fue transformado por Dirac en un triunfo. Aquí se tiene el mismo problema que se mencionó en la ecuación de Klein-Gordon. La ecuación de Dirac es correcta para electrón libre, pero si tomamos en cuenta la interacción con otra partícula o campo (digamos el campo electromagnético), el problema de los estados de energía negativa permanece. Un electrón en un estado de energía positiva puede saltar a estados de energía negativa, y luego caer a $E \to -\infty$, emitiendo una cantidad infinita de energía en el proceso (digamos radiación electromagnética). La solución de Dirac a este problema radica en el hecho de que los electrones son fermiones que tienen espín ½ y por lo tanto obedecen el *principio de exclusión* de Pauli. Dirac supuso que los estados de energía negativas ya están completamente llenos, y el principio de exclusión evita que ningún electrón entre en el "mar" de estados de energías negativa. Este "mar de Dirac" es el *vacio físico;* de manera que en la teoría de Dirac, el vacio no es "nada", ¡sino un mar infinito de electrones, protones, neutrinos, neutrones y demás partículas de espín ½ con energías negativas! Esta ingeniosa teoría hace una predicción importante. Supóngase que hay una vacante en el mar de electrones; un "hueco" con energía $-|E|$. Un electrón con energía E puede llenar este hoyo, emitiendo energía $2h\nu$, y dejando un vacío:

$$\mathrm{e}^- + \text{ hueco} \to \text{energía.} \tag{1.71}$$

El hueco aparece en nuestro mundo como si tuviera la carga efectiva +e y energía positiva, y es llamado *positrón*, la *antipartícula* del electrón. Esta teoría de Dirac predijo la existencia de las antipartículas para todas las partículas de espin ½, que en su momento, fueron encontradas. Se puede pensar pues que los bosones también tengan antipartículas, pero para ver esto se requiere tratar ϕ, la "función de onda" de Klein-Gordon, como un campo cuantizado. La predicción y descubrimiento de antipartículas es uno de los episodios más destacados en la historia de la física de partículas, e inspira confianza considerable en la ecuación de Dirac. De hecho la ecuación de Dirac ha tenido destacados logros en sus predicciones y aplicaciones. Debe notarse sin embargo que la ecuación de Dirac no es la ecuación de *una sola partícula*, ya que describe tanto partículas como antipartículas. La única filosofía consistente con esto es considerar el espinor ψ como un *campo* cuántico.

1.5 Álgebra de las matrices covariantes γ.

Las matrices gamma son números hipercomplejos que obedecen al álgebra de Clifford. Ellas actúan en el espacio de espinores que facilitan los cálculos de interacciones de partículas con espín en el espacio-tiempo. En particular, son fundamentales para la ecuación de Dirac para partículas relativistas con espín.

Tenemos que la representación estándar de γ^0 es:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.72}$$

Esto se obtiene de la representación espinorial

$$\gamma^0 = S\gamma^0 S^{-1}, \tag{1.73}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

Usando (1.74) podemos obtener:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

La matriz de transferencia a la representación de Majorana [5] de la representación de Weyl está dada por

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - i\Theta & 1 + i\Theta \\ -1 - i\Theta & 1 - i\Theta \end{pmatrix} \qquad U^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - i\Theta & -1 - i\Theta \\ 1 + i\Theta & 1 - i\Theta \end{pmatrix}$$

donde

$$\Theta_{[s=1/2]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices γ están dadas por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i\Theta_{[1/2]} \\ -i\Theta_{[1/2]} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1\Theta_{[1/2]} & 0 \\ 0 & -i\sigma_1\Theta_{[1/2]} \end{pmatrix},$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_3\Theta_{[1/2]} & 0 \\ 0 & -i\sigma_3\Theta_{[1/2]} \end{pmatrix},$$
$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -i\Theta_{[1/2]} & 0 \\ 0 & i\Theta_{[1/2]} \end{pmatrix}. \tag{1.76}$$

Es apropiado notar algunas propiedades de las trazas, muy importantes en los cálculos de amplitudes. Como estamos trabajando con matrices γ^μ y estas son matrices de 4 x 4, tenemos

$$Tr\ 1 = 4 \tag{1.77}$$

y empleando la propiedad cíclica de la traza, tenemos

$$\begin{aligned} Tr\ (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) &= Tr(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a) \\ &= \frac{1}{2}\ Tr\ a_\mu b_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= a \cdot b\ Tr\ 1 = 4a \cdot b. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Mostramos ahora que la traza de número impar de matrices γ es cero. Para hacerla, usamos el hecho de que γ^5, definida en (1.54), tiene las propiedades de

$$(\gamma^5)^2 = 1, \qquad [\gamma^5, \gamma^\mu]_+ = 0. \tag{1.79}$$

Adoptemos, por conveniencia, que el producto escalar lo vamos a denotar con un "gorro"

$$a_\mu \gamma^\mu = a \cdot \gamma \equiv \hat{a}.$$

Entonces tenemos

$$Tr\, \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} = Tr\, \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} \gamma^5 \gamma^5 = Tr\, \gamma_5 \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} \gamma^5, \tag{1.80}$$

ahora movemos la γ_5 de la izquierda pasado por cada a, con un consecuente cambio de signo cada vez, obteniendo eventualmente

$$Tr\, \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} = (-1)^n\, Tr \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} \gamma_5 \gamma_5,$$

así que comparando con (1.80)

$$Tr\, \widehat{a_1} \dots \widehat{a_n} = 0, \;\; n \text{ impar}. \tag{1.81}$$

Finalmente, en caso de los productos usamos

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\mu \gamma^\nu + 2 g^{\mu\nu}$$

en los primero dos factores de $Tr\, (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d)$ obtenemos

$$Tr\, (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) = -Tr\, (\gamma \cdot b)(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) + 2a \cdot b Tr\, (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d).$$

Repitendo el procedimiento

$$Tr\, (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(\gamma \cdot c)(\gamma \cdot d) = 4(ab)(cd) - 4(ac)(bd) + 4(ad)(bc) \tag{1.82}$$

puesto que

$$Tr\, \left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta\right) = 4\left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}\right).$$

Las fórmulas de trazas son útiles cuando se calculan secciones transversales de dispersión.

1.6 Construcción de los espinores de Dirac.

Primero es útil saber las propiedades de las transformaciones de Lorentz de expresiones bilineales como $\overline{\psi}\psi$, $\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}^\mu\psi$, etc. Empecemos mostrando que $\overline{\psi}\psi$, es cantidad escalar.
Trabajemos en la base (1.40)

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi_R \\ \phi_L \end{pmatrix}. \tag{1.83}$$

Y sabemos que bajo una transformación de Lorentz (incluyendo la rotación) (θ, ϕ), tenemos, de (1.53),

$$\phi_R \to \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{i\phi})\right]\phi_R, \qquad \phi_L \to \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{i\phi})\right]\phi_L, \tag{1.84}$$

Por lo que

$$\phi_R^\dagger \to \phi_R^\dagger \exp\left[\frac{-i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{i\phi})\right], \qquad \phi_L^\dagger \to \phi_L^\dagger \exp\left[\frac{-i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{i\phi})\right]\phi_L, \tag{1.85}$$

Es evidente que

$$\psi^\dagger\psi = \phi_R^\dagger\phi_R + \phi_L^\dagger\phi_L, \tag{1.86}$$

no es invariante del grupo de Lorentz, esto se puede verificar por aplicación directa de la ecuación (1.84) y (1.85). Sin embargo, el espinor adjunto $\overline{\psi}$ tiene componentes

$$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = (\phi_R^\dagger\phi_L^\dagger)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (\phi_L^\dagger\phi_R^\dagger), \tag{1.87}$$

de manera que

$$\overline{\psi}\psi = \phi_L^\dagger\phi_R + \phi_R^\dagger\phi_L, \tag{1.88}$$

es invariante (i.e un escalar) bajo transformaciones de Lorentz. El objeto $\overline{\psi}\psi \to \overline{\psi}\psi$, es un verdadero escalar, i.e no cambia de signo bajo tranformaciones de Lorenz.

Vemos que

$$\begin{aligned}\overline{\psi}\gamma^5\psi &= (\phi_L^\dagger\phi_R^\dagger)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}\\ &= \phi_L^\dagger\phi_R - \phi_R^\dagger\phi_L.\end{aligned} \tag{1.89}$$

Es claro de (1.84), (1.85) y (1.88) que ésta es invariante bajo transformaciones de Lorentz, pero cambia de signo bajo paridad. Por ésta razón es llamada una cantidad *pseudoescalar*. Ahora considérese una cantidad $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, la cual sospechamos que se transforma en un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz. Sus componentes espaciales y temporales son

$$\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma^0}\psi = \phi_R^\dagger\psi_R + \phi_L^\dagger\psi_L, \tag{1.90}$$

$$\begin{aligned}\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi &= (\phi_L^\dagger\phi_R^\dagger)\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_R\\ \phi_L\end{pmatrix}\\ &= -\phi_L^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi_L + \phi_R^\dagger\boldsymbol{\sigma}\psi_R.\end{aligned} \tag{1.91}$$

Bajo rotaciones espaciales ($\boldsymbol{\theta} \neq 0,\ \boldsymbol{\phi} = 0$) tenemos

$$\begin{gathered}\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma^0}\psi \to \overline{\psi}\gamma^0\psi,\\ \overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \to -\phi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\sigma}e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\phi_L + \phi_R^\dagger e^{-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\sigma}e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}}\phi_R,\end{gathered} \tag{1.92}$$

y si $\boldsymbol{\theta}$ es infinitesimal,

$$\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi \to -\phi_L^\dagger\left(1-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\phi_L + \phi_R^\dagger\left(1-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(1+\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\theta}\right)\phi_R =$$

$$-\phi_L^\dagger(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\sigma})\phi_L+\phi_R^\dagger(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\sigma})\phi_R=\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi-\boldsymbol{\theta}\times\left(\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi\right). \tag{1.93}$$

La ecuación (1.93) describe el comportamiento de un vector bajo rotaciones: para θ infinitesimal.

Construyamos ahora espinores correspondientes a un estado arbitrario de movimiento de una partícula de Dirac. A continuación vamos a trabajar en la *representación estándar*, en la que γ^0 es diagonal. De (1.70), es claramente la representación apropiada para describir partículas en reposo. Las soluciones de ondas planas de ecuación de Dirac para una partícula en reposo se denotan como:

$$\begin{aligned}&\psi(x)\approx u(0)e^{-imt}, \text{ energía “positiva”}\\&\psi(x)\approx v(0)e^{imt}, \text{ energía “negativa”},\end{aligned} \tag{1.94}$$

con dos espinores de las dos energías “positivas” y dos para las energías “negativas”

$$u_\uparrow(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ u_\downarrow(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ v_\uparrow(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ v_\downarrow(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.95}$$

En la representación estándar,

$$\psi=S\begin{pmatrix}\phi_R\\\phi_L\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi_R+\phi_L\\\phi_R-\phi_L\end{pmatrix}. \tag{1.96}$$

Para un empuje de Lorentz a un marco en movimiento, tenemos de (1.40) con $\theta=0$,

$$\begin{pmatrix}\phi_R\\\phi_L\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\phi'_R\\\phi'_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}&0\\0&e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\phi}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_R\\\phi_L\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\phi_R\\\phi_L\end{pmatrix}, \tag{1.97}$$

así en la representación estándar de la matriz de empuje es

$$M_{RS}=SM_{RE}S^{-1}=\begin{pmatrix}\cosh(\phi/2)&\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh(\phi/2)\\\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}\sinh(\phi/2)&\cosh(\phi/2)\end{pmatrix}, \tag{1.98}$$

y como

$$\cosh(\phi/2)=\left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2},\qquad \mathrm{senh}(\phi/2)=\left(\frac{E-m}{2m}\right)^{1/2},\qquad \tanh(\phi/2)=\frac{|\mathbf{p}|}{E+m}$$

con $|\mathbf{p}|=(E^2-m^2)^{1/2}$, obtenemos

$$M = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ 0 & 1 & \frac{p_x + ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x - ip_y}{E+m} & 1 & 0 \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} & \frac{-p_z}{E+m} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.99}$$

El operador de campo es

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_\alpha \left[u_\alpha(\boldsymbol{p}) a_\alpha(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + v_\alpha(\boldsymbol{p}) b_\alpha{}^\dagger(\boldsymbol{p}) e^{ipx}\right], \tag{1.100}$$

donde $\alpha = \uparrow, \downarrow$, y $u^{(\alpha)}(\boldsymbol{p})$ y $v^{(\alpha)}(\boldsymbol{p})$ se obtienen multiplicando M por los espinores de reposo (1.95), dando

$$u_\uparrow = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \end{pmatrix}, \qquad u_\downarrow = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_l}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \tag{1.101}$$

$$v_\uparrow = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_\downarrow = \left(\frac{E+m}{2m}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{E+m} \\ \frac{p_l}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.102}$$

donde $p_{r,l} = p_x \pm ip_y$.

La normalización de los espinores u es

$$\bar{u}_\uparrow u_\uparrow = \left(\frac{E+m}{2m}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_l}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_r}{E+m} \end{pmatrix} = 1.$$

y similarmente pura $u_\downarrow$. En forma general podemos escribir las condiciones de ortonormalización:

$$\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})u^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = \delta_{\alpha\alpha'}$$
$$\overline{v}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = -\delta_{\alpha\alpha'}$$
$$\overline{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = 0$$

$$u^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p})u^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = v^{(\alpha)\dagger}(\mathbf{p})v^{(\alpha')}(\mathbf{p}) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\alpha'}. \tag{1.103}$$

1.7 Algunos comentarios sobre los operadores de espín.

Como ya hemos dichos, la ecuación de Dirac describe partículas con espín 1/2, y de la manera como la derivamos parece que se garantiza esto. Pero para completar la descripción necesitamos encontrar un *operador de espín* S_i $(i = 1,2,3)$ con las relaciones de conmutación correctas

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k. \tag{1.105}$$

Y su cuadrado debe ser un invariante del grupo, i.e. debe conmutar con todos los generadores:

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = S^2 = s(s+1), \tag{1.106}$$

donde s es el espín de la partícula. Adicionalmente, el hecho de que hay dos soluciones a las ecuaciones $\gamma^\mu p_\mu u = mu$ significa que $\mathbf{S}$ debe conmutar con $\gamma^\mu p_\mu$

$$[\mathbf{S}, \gamma^\mu p_\mu] = 0. \tag{1.107}$$

Podemos intentar como primera suposición

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \tag{1.108}$$

Este tiene los eigenvalores correctos para las soluciones tanto de energía positiva como de negativa $s = \pm\frac{1}{2}$, y obedecen las relaciones de conmutación (1.105), pero no obedece (1.107) por que

$$[\Sigma, \gamma^\mu] \neq 0.$$

Esto puede verse calculando directamente uno o dos conmutadores, u observando que, si definimos

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \tag{1.109}$$

entonces, en la representación estándar

$$\sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} = \epsilon_{ijk} \Sigma_k, \tag{1.110}$$

y tenemos

$$[\Sigma_i, \gamma_\mu] = i\epsilon_{ijk}(\gamma_j g_{k\mu} - \gamma_k g_{j\mu}).$$

El operador relativista de espín, no es, entonces $\frac{1}{2}\Sigma$, porque el conmutador (1.107) no es igual a cero. (Para una partícula solamente en reposo, sin embargo, $\gamma^\mu p_\mu = E\gamma^0$, y entonces $\frac{1}{2}\Sigma$ es un buen operador de espín $\boldsymbol{S}$).

En lugar de operador de espín se debe introducir el operador de Pauli-Lubauski (véase Ref. [1]).

Capítulo 2

Partículas de Espín 1

A continuación analizaremos partículas con espín más alto. Suponemos que los fotones no tienen masa y son descritos por ecuaciones de Maxwell, y las partículas masivas de espín 1 son descritos por la ecuación de Proca [6], de Weinberg-Tucker-Hammer [2][7][8][9][10] o a través otros formalismos.

2.1 Las ecuaciones de Maxwell y Proca

Las ecuaciones de Maxwell describen los campos eléctricos y magnéticos, los cuales son tomados como "objetos" continuos (a primera vista no tienen nada que ver con las partículas). En el tiempo en que fueron descubiertas, no se tenía en cuenta la MC (Mecánica Cuántica), ni de TRE (Teoría de la Relatividad Especial). Sin embargo, resulta que son covariantes bajo transformaciones de Lorentz. Esta fue una observación hecha por Einstein y fue causa del nacimiento de la TRE. En lo siguiente, se busca una notación que exprese la covariancia explícitamente. Las ecuaciones de Maxwell (en unidades racionalizadas de Heaviside y de Lorentz, de manera que $e^2/4\pi\hbar c = \alpha = 1/137$ y con $c = \hbar = 1$) son

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \ div\mathbf{B} = 0, \qquad &&\text{(b)}\ \ rot\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \\ &\text{(c)}\ \ div\mathbf{E} = \rho, \qquad &&\text{(d)}\ \ rot\mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

(a) nos dice que no hay cargas magnéticas. (b) es la ley de Faraday, que se interpreta generalmente como que un campo magnético cambiante produce un campo eléctrico. (c) es la ley de Gauss: la carga eléctrica es una fuente de campo eléctrico. (d) es la ley de Ampere con un término adicional de corriente de desplazamiento debido a Maxwell: la corriente eléctrica y/o campos eléctricos cambiantes generan campos magnéticos. Las ecuaciones (a) y (b) son ecuaciones homogéneas, (c) y (d) son las inhomogéneas. Ahora introduciendo el 4-vector potencial

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \tag{2.2}$$

con

$$\mathbf{B} = rot\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi. \tag{2.3}$$

Las ecuaciones (a) y (b) quedan *automáticamente satisfechas*, ya que $div(rot)\boldsymbol{A} = 0$ y $rot(grad)\phi = 0$. Obsérvese que los miembros derechos de las ecuaciones (2.3) son las componentes de un rotacional 4-dimensional, definido por

$$F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.4}$$

Este tiene componentes (recuérdese que $\partial^i = -\partial_i$)

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\phi\right)_i = -E^i \tag{2.5}$$

y

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -\epsilon^{ijk} B^k, \tag{2.6}$$

donde ϵ^{ijk} es el símbolo de Levi-Civita (L-C) totalmente antisimétrico (1.27). Las ecuaciones (2.4) y (2.5) pueden escribirse en la forma matricial, donde las filas y las columnas corresponden a los números 0, 1, 2, 3:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

$F^{\mu\nu}$ es llamado el *tensor de campo electromagnético*. Bajo transformaciones de Lorentz se transforma como un tensor antisimétrico de segundo rango.

$$F^{\mu\nu} \to \Lambda^{\mu}{}_{\propto}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Resumiendo: Si escribimos los campos eléctricos y magnéticos en términos del tensor $F^{\mu\nu}$, entonces el enunciado de que $F^{\mu\nu}$ es un rotacional 4-dimensional significa que las primeras dos ecuaciones de Maxwell (homogéneas) satisfacen automáticamente, y $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^{\nu}F^{\alpha\beta} = 0$ donde $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ es tensor de Levi-Civita del espacio de Minkowski.

Consideremos ahora las ecuaciones inhomogéneas (c) y (d). Ambas están contenidas en la ecuación covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.8}$$

Con

$$j^\nu = (\rho, \mathbf{j}). \tag{2.9}$$

Si se hace $\nu = 0$ da

$$\begin{gathered} \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho, \\ \text{div}\, \mathbf{E} = \rho \end{gathered} \tag{2.10}$$

lo cual es (c), y si se hace $\nu = 1$ da

$$\begin{gathered} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = j^i, \\ -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} B^3 - \frac{\partial}{\partial x_3} B^2 = j^1 \end{gathered} \tag{2.11}$$

que es la primera componente (d) de la ecuación (2.1). Otras componentes de la ecuación se pueden obtener haciendo $v = 2$ y 3.

Sumando y restando (2.1b) y (2.1d) obtenemos (suponiendo que la corriente es cero, y multiplicando la segunda ecuación por i)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})-\nabla\times(\mathbf{B}-i\mathbf{E})=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})-\nabla\times(\mathbf{B}+i\mathbf{E})=0 \tag{2.12}$$

Lo que podemos reinscribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})+i\nabla\times(\mathbf{E}+i\mathbf{B})=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})-i\nabla\times(\mathbf{E}-i\mathbf{B})=0. \tag{2.13}$$

El producto vectorial puede ser escrito usando el tensor de Levi.Civita por ejemplo

$$[\nabla\times\mathbf{D}]^i=\varepsilon^{ijk}\partial_j D^k \tag{2.14}$$

Entonces tenemos en coordenadas:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^i-i\varepsilon^{jik}\partial_j(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^k=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^i+\mathrm{i}\varepsilon^{jik}\partial_j(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^k=0. \tag{2.15}$$

Ahora usando la representación cartesiana de la forma $\left(S^i\right)^{jk}=-i\varepsilon^{ijk}$, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^i+\left(S^j\right)^{ik}\partial_j(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^k=0, \tag{2.16}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^i-\left(S^j\right)^{ik}\partial_j(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^k=0. \tag{2.17}$$

Multiplicamos por i las ecuaciones (2.16) y (2.17):

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^i=-i(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\nabla})^{ik}(\mathbf{E}+i\mathbf{B})^k,$$
$$i\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^i=+i(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\nabla})^{ik}(\mathbf{E}-i\mathbf{B})^k. \tag{2.18}$$

Después de sustitución (de acuerdo con la mecánica cuántica, véase (1.15)) de operadores de energía y momento obtenemos las formas hamiltónicas de las ecuaciones de Maxwell:

$$\widehat{\mathcal{H}}_{(1)}=-i(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\nabla})=(\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}),$$
$$\widehat{\mathcal{H}}_{(2)}=+i(\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\nabla})=-(\mathbf{S}\cdot\widehat{\mathbf{p}}), \tag{2.19}$$

que significa que son también las ecuaciones cuánticas[11].

Aunque (2.3) especifica los campos eléctrico y magnético en términos de $\mathbf{A}$ y ϕ, no son los únicos, bajo una *transformación de calibración de norma*

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \nabla\chi,\ \phi \to \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{2.20}$$

que tiene la forma covariante,

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\chi, \tag{2.21}$$

donde χ es una función escalar arbitraria. $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ permanecen sin cambio; lo mismo con $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} \to F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\chi = F^{\mu\nu}; \tag{2.22}$$

sí las derivadas parciales conmutan.

Sustituyendo (2.4) en (2.8) vemos que A^μ satisface

$$\Box A^\nu - \xi\, \partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right) = j^\nu. \tag{2.23}$$

donde trabajamos con el parámetro de calibración ξ

Podemos ahora hacer uso de (2.21) y escoger un χ tal que el A^μ satisfaga la condición de *calibración de Lorentz*:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \tag{2.24}$$

Con esta elección de calibración la ecuación (2.23) se convierte en

$$\Box A^\mu = j^\mu, \tag{2.25}$$

la cual representa las bien conocidas ecuaciones

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \rho, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{j}. \tag{2.26}$$

Sus soluciones dan los potenciales de Liénard-Wiechert. En el *vacío*, la ecuación (2.25) es

$$\Box A^\mu = 0, \tag{2.27}$$

que significa que cuando la naturaleza cuántica del campo electromagnético está completamente explotada, parecería corresponder a partículas sin masa (que por lo tanto viajan a la velocidad de la luz).

Ahora tenemos que las ecuaciones de Maxwell están en forma covariante. Las ecuaciones homogéneas (2.1a) y (2.1b) están resumidas en la ecuación (2.4). Las ecuaciones inhomogéneas (2.1c) y (2.1d) están resumidas en la ecuación (2.8). Ahora mostraremos que hay una forma hábil de combinar las ecuaciones (2.3) y (2.4), tal que no se necesita hacer referencia al vector potencial A^{μ}. De (2.4) se sigue que

$$\partial^{\lambda}F^{\mu\nu} + \partial^{\mu}F^{\nu\lambda} + \partial^{\nu}F^{\lambda\mu} = 0. \tag{2.28}$$

Definimos ahora el *tensor dual* $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ por

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{2.29}$$

Sus elementos son

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Para la antisimetría de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, se sigue que la ecuación

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.31}$$

reproduce (2.28); alternativamente (2.30) da las ecuaciones de Maxwell (2.1a) y (2.1b). En conclusión, las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en la forma compacta

$$\begin{gathered} \partial_{\mu}F^{\mu\nu} = j^{\upsilon}, \\ \partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \end{gathered} \tag{2.32}$$

la última ecuación significa ausencia de monopolos magnéticos.

Las partículas masivas de espín 1 obedecen ecuaciones que generalizan las ecuaciones de Maxwell (sin fuentes). Son conocidas como las *ecuaciones de Proca*:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu};\;\; \partial_{\mu}F^{\mu\nu} + m^2A^{\nu} = 0 \tag{2.33}$$

Tomando la divergencia de la segunda ecuación tenemos

$$m^2\partial_{\upsilon}A^{\nu} = 0, \tag{2.34}$$

y como $m^2 \neq 0$, encontramos que $\partial_{\upsilon}A^{\nu} = 0$; la condición de Lorentz, siempre es válida para partículas masivas de espín 1 descritos por la ecuación de Proca. Se pierde la libertad de transformaciones de calibración que tenían las ecuaciones de Maxwell. De hecho, como $F^{\mu\nu}$es un invariante de calibración, se sigue de (2.33) que *las ecuaciones para partículas masivas espín 1 no son invariantes de calibración*.

Juntando las dos ecuaciones en (2.33) obtenemos

$$(\square + m^2)A^{\mu} = 0. \tag{2.35}$$

porque probamos:

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0. \tag{2.36}$$

Sin embargo la restricción (2.36) no siempre es necesaria en las teorías de multiespín [12]. La ecuación (2.35) muestra, como es de esperarse, que tenemos partículas de masa m (es compatible con la teoría de relatividad, $E^2 - p^2 = m^2$). La ecuación (2.36) es una condición impuesta a las cuatro componentes de A^μ, así que hay solo tres componentes independientes, lo que es apropiado para una partícula masiva de espín 1^2.

Haciendo un recuento general de las ecuaciones de onda tenemos

$$
\begin{aligned}
&(\Box + m^2)\phi = 0, && \text{(Klein-Gordon)}\\
&(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, && \text{(Dirac)}\\
&(\Box + m^2)\psi = 0, && \\
&\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, && \text{(Maxwell)}\\
&\Box A^\mu = 0, && \\
&\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, && \text{(Proca)}\\
&(\Box + m^2)A^\mu = 0. &&
\end{aligned}
$$

Cada componente de campo de espín ½ y espín 1 satisfacen una ecuación de Klein-Gordon (con $m = 0$ para el fotón), que es después de todo, solamente un requerimiento de la relatividad $(E^2 - p^2 = m^2)$ y la teoría cuántica $\left(E \to i\frac{\partial}{\partial t},\ p \to -i\nabla\right)$. Vimos anteriormente que la ecuación de Dirac podría derivarse considerando la transformación de espinores bajo el grupo de Lorentz, y puede mostrarse que las ecuaciones de Maxwell y Proca pueden obtenerse de la misma manera. Entonces estas ecuaciones para campos de espín diferente de cero, podemos considerar como simplemente una relación entre las componentes de espín. La ecuación de Klein-Gordon es simplemente la construcción a la que tienen que obedecer todas las componentes de las ecuaciones relativistas.

Una observación final: en nuestra derivación de la ecuación de Dirac, nos basamos en la suposición de que las componentes de campo de espín ½ forman un *espacio vectorial lineal*, adecuándolo como base para construir una representación del grupo de Lorentz. Después tendremos que someter los campos a la segunda cubanización que nos da más información sobre las propiedades físicas de los campos cuánticos, por ejemplo investigando las relaciones de conmutación que deben mantenerse entre ellos (entre amplitudes de estados correspondientes)

2.2 Teoria de Weinberg con $2(2S+1)$ componentes

2.2.1 Principios básicos para la construcción de campos cuánticos

Nuestro objetivo principal de este capítulo es presentar las explícitas reglas de construcción de teoría de campos para los cálculos de perturbación.

El tratamiento se basa en tres postulados principales.

(1). *Teoría de Perturbación*. Asumimos que la matriz S puede ser calculada por la fórmula de Dyson:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n T\{H'(t_1) \dots H'(t_n)\} \tag{2.37}$$

Ahora dividimos el hamiltoniano H en una parte del hamiltoniano de partículas libres H_0 y un hamiltoniano de interacción H'. Definimos $H'(t)$ como el hamiltoniano de interacción en la representación de interacción [13]:

$$H'(t) = exp(iH_0 t)H' exp(-iH_0 t)$$

(2). *Invariancia de Lorentz de la Matriz S*. Requerimos que S sea invariante bajo transformaciones adecuadas ortocronas de Lorentz. Esto ciertamente impone una restricción más fuerte en H_0 y H' de que sólo se transforman como las energías. Una condición suficiente y necesaria por la invariancia de S es:

$$H'(t) = \int d^3x \mathcal{H}(x,t), \tag{2.38}$$

donde:

(a) $\mathcal{H}(x)$ es un escalar. Esto es, que a todas las transformaciones de Poincaré $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ les corresponde un operador unitario $U[\Lambda, a]$ de tal manera que

$$U[\Lambda, a]\mathcal{H}(x)U^{-1}[\Lambda, a] = \mathcal{H}(\Lambda x + a). \tag{2.39}$$

(b) Para $(x - y)$ género espacio (spacelike) el conmutador

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)]_- = 0, \tag{2.40}$$

lo que permite excluir las señales superluminales.

La necesidad de (a) es vista si usamos (2.38) para reescribir (2.37) como

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \dots d^4x_n T\{\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n)\} \tag{2.41}$$

Pero (a) es ciertamente no suficiente, porque las θ-funciones $\theta(x_i - x_j)$ de Heaviside implícitas en la definición del producto tiempo-ordenado no son escalares a menos que su argumento es de tipo temporal (timelike) o nulo (lightlike). La condición (b) garantiza que ningún θ siempre aparece con un argumento tipo espacio (spacelike).

(3). *Interpretación de Partícula*. Requerimos que $\mathcal{H}(x)$ sea construido a partir de los operadores de creación y aniquilación para las partículas libres descrito por H_0. La única manera conocida para asegurarse de que tal $\mathcal{H}(x)$ satisface a las constricciones (2.39) y (2.40), es que deben formar el hamiltoniano como una función de uno o más campos

$\psi_n(x)$, que son combinaciones lineales de los operadores de creación y aniquilación, y que tienen las propiedades siguientes:

(a) Los campos se transforman de acuerdo con

$$U[\Lambda, a]\psi_n(x)U^{-1}[\Lambda, a] = \sum_m D_{nm}[\Lambda^{-1}]\psi_m(\Lambda x + a), \tag{2.42}$$

donde $D_{nm}[\Lambda]$ es alguna representación of Λ.

(b) Para $(x - y)$ de género espacial (space-like)

$$[\psi_n(x), \psi_m(y)]_\pm = 0 \tag{2.43}$$

donde $[\psi_n(x), \psi_m(y)]_\pm$ puede ser un conmutador o anticomutador. La condición (2.42) nos permite satisfacer a (2.39) mediante el acoplamiento de $\psi_n(x)$ en varias condición invariantes, mientras que (2.43) garantiza la validez de (2.40), siempre y cuando que $\mathcal{H}(x)$ contenga un número par de factores de campo de fermiones.

Vamos a introducir el tensor t como:

$$t_{\sigma\sigma'}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2s}} \begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = s, s-1, \cdots, -s \\ \mu_1\mu_2\cdots\mu_{2s} = 0,1,2,3 \end{pmatrix}$$

con las propiedades:

(a) t es simétrico para todo $\mu's$.

(b) t no tiene traza para todo $\mu's$, i.e.,

$$g_{\mu_1\mu_2} t_{\sigma\sigma'}{}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2s}} = 0$$

(c) t es un tensor, en el sentido de que

$$D^{(s)}[\Lambda]t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2s}}D^{(s)}[\Lambda]^\dagger = \Lambda_{\nu 1}{}^{\mu 1}\Lambda_{\nu 2}{}^{\mu 2}\cdots\Lambda_{\nu 2s}{}^{\mu 2s}t^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{2s}}$$

donde $D^{(s)}[\Lambda]$ es la matriz $2S + 1$-dimensional correspondiente a Λ en la representación $(S, 0)$ del grupo de Lorentz.

A continuación se muestran en la Tabla I. los propagadores para los campos con $(2S + 1)$ componentes para espín $s \leqq 3$.

TABLA I. La matriz escalar $\Pi(p) = (-1)^{2S}t^{\mu_1\mu_2\cdots}p_{\mu 1}p_{\mu 2}$ ... para espines $S \leqq 3$. En cada caso **S** es usualmente la matriz representación $2S + 1$-dimensional del momento angular. El propagador de una partícula de espín S es $S(q) = -i(-im)^{-2s}\Pi(p)/p^2 + m^2 - i\epsilon$.

$$\Pi^{(0)}(\mathrm{p}) = 1$$
$$\Pi^{(1/2)}(p) = p^0 - 2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})$$
$$\Pi^{(1)}(p) = p + 2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} -)p^0$$
$$\Pi^{(3/2)}(p) = -p^2(p^0 - \mathbf{2p}\cdot\mathbf{S}) + \frac{1}{6}[(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][3q^0 - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S}]$$
$$\Pi^{(2)}(p) = (-p^2)^2 - 2p^2(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} - p^0) + \frac{2}{3}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} - 2p^0]$$
$$\Pi^{(5/2)}(p) = (-p^2)^2(p^0 - \mathbf{2p}\cdot\mathbf{S}) - \frac{1}{6}p^2[(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][3p^0 - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S}] + \frac{1}{120}[(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{9p^2}][5p^0 - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{S}]$$
$$\Pi^{(3)}(p) = (-p^2)^2 + 2(-p^2)(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S}{-}p^0) - \frac{2}{3}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} - 2p^0] + \frac{4}{45}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})[(\mathbf{p}\cdot\mathbf{S})^2 - \mathbf{p^2}][\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} - \mathbf{4p^2}][\mathbf{p}\cdot\mathbf{S} - 3p^0]$$

2.2.2 Componentes de Campo 2(2S+1)

Cualquier interacción con conservación de paridad debe implicar tanto el campo $\xi_\sigma(x)$ con $(S,0)$ y el campo $\eta_\sigma(x)$ con $(0,S)$. Esto es, por lo tanto, conveniente para unir estas dos transformadas $(2S+1)$-componentes de campo en una sola forma de campo con $2(2S+1)$ componentes:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix}\xi(x)\\ \eta(x)\end{bmatrix}. \tag{2.44}$$

Los campos con $(2S+1)$ componentes pueden satisfacer solamente la ecuación de Klein-Gordon.

Esta transformación de campo de acuerdo con la representación $(S,0)\oplus(0,S)$ i.e,

$$U[\Lambda,a]\psi_\alpha(x)U^{-1}[\Lambda,a] = \textstyle\sum_\beta \mathfrak{D}_{\alpha\beta}{}^{(s)}[\Lambda^{-1}]\psi_\beta\,(\Lambda x), \tag{2.45}$$

donde

$$\mathfrak{D}^{(s)}[\Lambda] = \begin{bmatrix} D^{(s)}[\Lambda] & 0\\ 0 & \overline{D}^{(s)}[\Lambda]\end{bmatrix}, \tag{2.46}$$

las representaciones $D^{(s)}[\Lambda]$ y $\overline{D}^{(s)}[\Lambda]$ que son definidas usando

$$\mathbf{S} \to \mathbf{S}^{(S)}, \qquad \mathbf{K} \to -i\mathbf{S}^{(S)}, \qquad \text{para } (s,0)$$
$$\mathbf{S} \to \mathbf{S}^{(S)}, \qquad \mathbf{K} \to +i\mathbf{S}^{(S)}, \qquad \text{para } (0,s)$$

respectivamente como el caso de la ecuación (1.35). La representación $\mathfrak{D}^{(s)}$ se puede definir especificando los generadores de rotaciones representados por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(s)} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}^{(s)} \end{bmatrix}, \tag{2.47}$$

y que los generadores de empuje están representados por

$$\boldsymbol{K}^{(s)} = -i\gamma_5 I \otimes \boldsymbol{S^i} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \mathbf{S}^{(s)} & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}^{(s)} \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

donde γ_5 es la matriz de dimensión $2(2S+1)$

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

La representación $(S,0)\oplus(0,S)$ de la ecuación (2.46) difiere de las representaciones $(S,0)$ y $(0,S)$ en el importante aspecto de que $\mathfrak{D}^{\dagger}$ es equivalente de $\mathfrak{D}^{-1}$ en sentido que:

$$\mathfrak{D}^{(S)}[\Lambda]^{\dagger} = \beta\mathfrak{D}^{(S)}[\Lambda^{-1}]\beta, \tag{2.50}$$

donde

$$\beta = \gamma_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \;\; \beta^2 = 1 \tag{2.51}$$

El campo $\psi(x)$ por supuesto satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\square^2 + m^2\right)\psi_{\alpha}(x) = 0, \tag{2.52}$$

Sin embargo, $\psi(x)$ es campo con $2(2S+1)$ componentes. Entonces esto tiene una oportunidad de también satisfacer alguna otra ecuación de campo homogéneo y lo hace. Tenemos que proponer un método para calcular $t^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2s}}$ [2],[14] (como en el caso de la ecuación de Dirac, véase la sección 1.3) y obtener la ecuación (2.55) en caso de $S=1$. La fórmula que conecta $\Pi^{(s)}(p)$ y la representación $D^{(s)}[L(\mathbf{p})]$ es

$$\Pi^{(s)}(p) = m^{2s}D^{(s)}[K(\mathbf{p})]^2 = m^{2s}\exp\left(-2\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{S}^{(s)}\right).$$

También podemos definir

$$\overline{\Pi}^{(s)}(p) = m^{2s}\overline{D}^{(s)}[L(-\mathbf{p})]^2 = m^{2s}\exp\left(2\boldsymbol{p}\cdot\mathbf{S}^{(s)}\right),$$

donde

$$\overline{\Pi}^{(s)}(p) \equiv (-1)^{2s}\overline{t}^{\mu1\mu2\ldots\mu2s}p_{\mu1}p_{\mu2}\ldots p_{\mu2s.}$$

$$\overline{t}^{\mu1\mu2\ldots\mu2s} = \pm t^{\mu1\mu2\ldots\mu2s}$$

nosotros podemos fácilmente demostrar que los campos $(S,0)$ y $(0,S)$ son relacionados por

$$\overline{\Pi}(-i\partial)\xi(x) = m^{2s}\eta(x), \tag{2.53}$$
$$\Pi(-i\partial)\eta(x) = m^{2s}\xi(x), \tag{2.54}$$

Este es el mismo procedimiento que se siguió anteriormente para derivar la ecuación de Dirac (véase la ecuación (1.40) y lo que se encuentra a continuación). En la forma matricial con $2(2S+1)$ componentes este conjunto de (2.53) y (2.54) ecuaciones se lee

$$\left[\gamma^{\mu 1\mu 2\ldots\mu 2j}\partial_{\mu 1}\partial_{\mu 2}\ldots\partial_{\mu 2s.} + m^{2j}\right]\psi(x) = 0, \tag{2.55}$$

donde las matrices γ generalizadas, $\gamma^{\mu 1\mu 2\ldots}$, se definen por

$$= -i^{2j}\begin{bmatrix} 0 & t^{\mu 1\mu 2\ldots\mu 2s} \\ \bar{t}^{\mu 1\mu 2\ldots\mu 2s} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Véase el caso particular para espín 1 en la sección 2.3 en la ecuación (2.69).

2.2.3 Partículas sin masa. Un Teorema de campos generales de Weinberg.

Como primer paso, vamos a tratar de construir el *campo de aniquilación* $\psi_n{}^{(+)}(x,h)$ (donde n es el número de componentes), como una combinación lineal de los operadores de aniquilación $a(p,h)$, con helicidad fija h. Donde requerimos que la transformación como es costumbre en las translaciones.

$$i\left[P_\mu, \psi_n{}^{(+)}(x;h)\right] = \partial_\mu \psi_n{}^{(+)}(x;h). \tag{2.57}$$

Esto es análogo de la ecuación de Heisenberg en la mecánica cuántica.

Transformando esta ecuación de acuerdo con cierta representación irreductible $D[\Lambda]$ del grupo de Lorentz *homogéneo* ortocrono:

$$U[\Lambda]\psi_n{}^{(+)}(x,h)U[\Lambda]^{-1} = \sum_m D_{nm}[\Lambda^{-1}]\psi_m{}^{(+)}(\Lambda x,h). \tag{2.58}$$

Es bien sabido que las distintas representaciones $D[\Lambda]$ pueden ser catalogadas escribiendo a las matrices **S** y $\boldsymbol{K}$, que representan el generador de rotación **S** y el generador de boost **K** como

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}; \;\; \boldsymbol{K} = -i(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}). \tag{2.59}$$

Así definiendo $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Como $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{K}$ satisfacen ciertas reglas de conmutación, las $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ satisfacen las reglas de conmutación desacoplados:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = i\boldsymbol{A}; \quad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} = i\boldsymbol{B}, \\ \left[A^i, A^j\right] = i\varepsilon^{ijk}A^k \\ \left[A_i, B_j\right] = 0. \end{gathered} \tag{2.60}$$

La representación general (A, B) irreducible de dimensión $(2A+1)(2B+1)$-dimensional es convencionalmente definida por eigenvalores (enteros y semienteros) de

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{ab,a'b'} &= \delta_{bb'} \mathbf{S}_{aa'}{}^{(A)}, \\ \boldsymbol{B}_{ab,a'b'} &= \delta_{aa'} \mathbf{S}_{bb'}{}^{(B)}, \end{aligned} \tag{2.61}$$

donde a y b corren desde $-A$ hasta $+A$ y desde $-B$ hasta $+B$, respectivamente, y $S^{(S)}$ es la representación de dimensión $2S+1$ del operador de momento angular [15].

$$\begin{aligned} \left[S_1{}^{(s)} \pm iS_2{}^{(s)}\right]_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} &= \delta_{\sigma',\sigma\pm1}[(s \mp \sigma)(s \pm \sigma + 1)]^{1/2}, \\ \left[S_3{}^{(s)}\right]_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma\delta_{\sigma',\sigma}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

En el artículo [2] están probados varios teoremas sobre como construir los campos cuánticos. “Para partículas masivas de espín S, el campo $\psi^{(+)}(x)$ puede ser construido a partir del $(2S+1)$-operador de aniquilación $a(\mathbf{p}, \sigma)$ que satisfagan la ley de transformación (2.58), para cualquier representación (A, B) que “contiene” S, i.e., de tal manera que

$$S = A + B,\ \ A + B - 1, \cdots |A + B|. \tag{2.63}$$

Podríamos esperar que el mismo sea cierto para la masa cero, *pero esto no es así*. Sólo se puede utilizar para la construcción de campos que se transforman de acuerdo a las representaciones de (A, B) un operador de una partícula sin masa $a(\mathbf{p}, h)$ con helicidad h de tal manera que

$$B - A = h \tag{2.64}$$

Por ejemplo, una circulación a la izquierda de fotones polarizados izquierdos con $h = -1$ puede estar asociada con los campos $(1,0), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), (2,1), \cdots$ pero *no* con el vector potencial $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Al menos hasta que ampliemos nuestra noción de que es lo que entendemos por una transformación de Lorentz”. Se verá que la constricción (2.64) surge por la estructura no-semi-simple del grupo pequeño del grupo de Lorentz. Sin embargo, nuevos análisis de teorías de norma muestran la posibilidad de usar 4-potencial en teorías de norma, lo que da buenas coincidencias entre la teoría y lo experimental.

Sin embargo para no involucrarse más en estos problemas no vamos a usar vectores de polarización en nuestros calculos. En lugar de ellos usamos tensores antisimétricos de segundo rango o bien, funciones de Weinberg con 2(2S+1) componentes, S=1.

2.3 Matrices covariantes $\gamma^{\mu\nu}$.

Las matrices análogas de las de Dirac tienen también "2s” índices vectoriales. Las Γ-matrices para cualquier espín se han introducido por Barut, Muzinich y Williams [14]. Nosotros ahora trabajamos en la métrica Euclidiana, por lo tanto algunos signos y coeficientes han sido cambiados. La métrica Euclidiana utilizada está dada por, $x_\mu = (\mathbf{x}, x_4 = it)$, y la notación $\partial_\mu = (\boldsymbol{\nabla}, -i\partial/\partial t), \partial_\mu^2 = \boldsymbol{\nabla}^2 - \partial_t^2$. Para el caso de espín $S = 1$, tienen tener la siguiente forma:

$$\hat{S}_{44} = -1, \quad \hat{S}_{i4} = iS_i, \tag{2.65}$$

$$\hat{S}_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij} = S_i S_j + S_j S_i - \delta_{ij}. \tag{2.66}$$

Usándolos podemos escribir matrices covariantes 6x6

$$\Gamma^{(1)} \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.67}$$

$$\Gamma^{(2)} \equiv \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.68}$$

$$\Gamma^{(3)}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{S}^{\dagger}_{\alpha\beta} \\ -\hat{S}_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.69}$$

$$\Gamma^{(4)}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{4,\alpha\beta} = i\gamma_5 \gamma_{\alpha\beta}, \tag{2.70}$$

$$\Gamma^{(5)}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{5,\alpha\beta} = i\left[\gamma_{\alpha\lambda,}\gamma_{\beta\lambda}\right]_-,$$

$$\Gamma^{(6)}_{\alpha\beta,\mu\nu} \equiv \gamma_{6,\alpha\beta} = \left[\gamma_{\alpha\mu,}\gamma_{\beta\nu}\right]_+ + 2\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \left[\gamma_{\alpha\nu,}\gamma_{\beta\mu}\right]_+ - 2\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} = -\frac{1}{12}\left[\gamma_{5,\alpha\beta,}\gamma_{5,\mu\nu}\right]_+ + 4\left(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\right) - 4\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_{5,} \tag{2.71}$$

2.4 El caso del campo de espín 1. La ecuación de Weinberg-Tucker-Hammer

2.4.1 El mapeo entre las teorías de Proca y de Weinberg.

Empezaremos haciendo un mapeo entre el tensor antisimétrico y formulación de Weinberg [16]. Abordemos la ecuación de Proca para $S = 1$ para una partícula masiva,

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu \tag{2.72}$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.73}$$

Expresando A_ν de (2.72) introduciendo en (2.73), y multiplicando por m^2 se puede reescribir el conjunto de ecuaciones como la ecuación para las componentes $F^{\mu\nu}$ que se consideran como las “componentes físicas”

$$m^2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\alpha F_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha F_{\alpha\mu} \tag{2.74}$$

Esto se puede representar en la forma $\left(F_{44} = 0, F_{4i} = iE_i \text{ y } F_{jk} = \epsilon_{jki} B_i\right)$:

$$\begin{gathered}(m^2 + p_4^2)E_i + p_i p_j E_j + i\epsilon_{ijk} p_4 p_j B_k = 0 \\ (m^2 + \mathbf{p}^2)B_i - p_i p_j B_j + i\epsilon_{ijk} p_4 p_j E_k = 0,\end{gathered} \tag{2.75}$$

o bien

$$\begin{gathered}[m^2 + p_4^2 + \mathbf{p}^2 - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2]_{ij} E_j + p_4 (\mathbf{S}\ \cdot\mathbf{p})_{ij} B_j = 0 \\ [m^2 + (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})^2]_{ij} B_j + p_4 (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij} E_j = 0.\end{gathered} \tag{2.76}$$

Sumando y restando las dos ecuaciones de (2.76) obtenemos

$$\begin{gathered}m^2(\mathbf{E} + i\mathbf{B})_i + p_\alpha p_\alpha \mathbf{E}_i - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij}^2 (\mathbf{E} - i\mathbf{B})_j + p_4 (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij} (\mathbf{B} + i\mathbf{E})_j = 0 \\ m^2(\mathbf{E} - i\mathbf{B})_i + p_\alpha p_\alpha \mathbf{E}_i - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij}^2 (\mathbf{E} + i\mathbf{B})_j + p_4 (\mathbf{S}\cdot\mathbf{p})_{ij} (\mathbf{B} - i\mathbf{E})_j = 0\end{gathered} \tag{2.77}$$

con $(S_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$ siendo matrices de espín con $S = 1$. Las ecuaciones son equivalentes con la ecuación de Hammer-Tucker [10].

$$\left(\gamma_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + p_\alpha p_\alpha + 2m^2\right)\psi_{(S=1)} = 0, \tag{2.78}$$

si $\psi_{(S=1)}$ esta presentada en la forma de columna ($\mathbf{E} + \mathbf{iB}\ \ \mathbf{E} - \mathbf{iB}$). Las matrices $\gamma_{\alpha\beta}$ son las matrices covariantes definidas de Barut, Muzinich y Williams para espín $S = 1$ [14].

Generalizada la ecuación (2.78) puede ser escrita como:

$$\left(\gamma_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + a p_\alpha p_\alpha + b m^2\right)\psi = 0 \tag{2.79}$$

con

$$\frac{b}{a+1} = 1, \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{b}{a-1} = 1$$

para tener las soluciones con $p^2 = m^2$

El conjunto de ecuaciones de Weinberg, Tucker-Hammer está escrito en la forma:

$$\begin{gathered}\left(\gamma_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + p_\alpha p_\alpha + 2m^2\right)\psi_1 = 0. \\ \left(\gamma_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - p_\alpha p_\alpha - 2m^2\right)\psi_2 = 0.\end{gathered} \tag{2.80}$$

La segunda ecuación también puede ser relacionada con el formalismo tensorial (si trabajamos con el tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$)

Comparando la estructura de la ecuación de Weinberg $(a = 0, b = 1)$ con los “dobles”, uno puede convencerse de que el primero puede estar representado en una forma tensorial

$$m^2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\alpha F_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha F_{\alpha\mu} + \tfrac{1}{2}\left(m^2 - \partial_\lambda^2\right)F_{\mu\nu} \tag{2.81}$$

Entonces, después de la aplicación de la ecuación de Klein-Gordon, la ecuación de Weinberg es equivalente a las ecuaciones tensoriales de Proca (y a los de Hammer-Tucker) en el caso libre.

2.4.2 Varias representaciones de matrices para espín 1.

Los operadores de polarización [15] son ampliamente utilizados para describir un estado de polarización [i.e. espín] de una partícula los llamados operadores de la polarización. Los *operadores de polarización* $T_{LM}(S)(M = -L, -L+1, \dots L-1, L$ y $L = 0,1, \dots, 2S; L$ y $y\ M$ son enteros) son matrices que actúan sobre las funciones de espín y se transforman bajo rotaciones del sistema de coordenadas de acuerdo a la representación D^L [17].

Si $S = 1$, el operador de espín $\hat{S}$ y los operadores de polarización $\hat{T}_{LM}(L = 0,1,2;\ -L \leq M \leq L)$ son matrices de 3×3, El operador de polarización $\hat{T}_{00}$ es proporcional a la matriz de unidad.

$$\hat{T}_{00} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{I}. \tag{2.82}$$

Los operadores $\hat{T}_{1M}$ son proporcionales a las componentes de las matrices espín $\hat{S}_M$ (véase (2.78))

$$\hat{T}_{1M} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{S}_M,\ (M = 0, \pm 1). \tag{2.83}$$

Los operadores $\hat{T}_{2M}$ $(M = 0, \pm 1, \pm 2)$ pueden ser expresados en términos de las componentes esféricas de las matrices de espín como

$$\hat{T}_{2M} = \sum_{\mu,\nu} C^{2M}_{1\mu 1\nu}\hat{S}_\mu \hat{S}_\nu\ . \tag{2.84}$$

con $C^{2M}_{1\mu 1\nu}$ son los coeficientes de Clebsch y Gordon.

Los operadores de polarización $\hat{T}_{2M}$ son equivalentes a algún tensor simétrico $\hat{Q}_{ik}$ (las traza es igual a cero).

$$\hat{Q}_{ik} = \frac{1}{2}\left(\hat{S}_i\hat{S}_K + \hat{S}_K\hat{S}_i - \frac{4}{3}\delta_{ik}\hat{I}\right),\ (i, k = x, y, z) \tag{2.85}$$

$$\hat{Q}_{ik} = \hat{Q}_{ki}, \quad \sum_i \hat{Q}_{ii} = 0. \tag{2.86}$$

$\hat{Q}_{ik}$es llamado el tensor cuadripolar. Cuenta con 5 componentes linealmente independientes. Las relaciones entre $\hat{T}_{2M}$ y $\hat{Q}_{ik}$ están dadas por

$$\hat{T}_{2\pm 2} = \frac{1}{2}\left(\hat{Q}_{xx} - \hat{Q}_{yy} \pm 2i\hat{Q}_{xy}\right), \tag{2.87}$$

$$\hat{T}_{2\pm 1} = \mp\left(\hat{Q}_{xz} \pm i\hat{Q}_{yz}\right), \tag{2.88}$$

$$\hat{T}_{20} = \sqrt{\frac{3}{2}}\hat{Q}_{zz}. \tag{2.89}$$

La forma explícita de las matrices espín depende de la representación usada para funciones de base de espín. Vamos a considerar una representación de base esférica y una cartesiana. Estas son representaciones que son usadas frecuentemente.

(a) Representación de base esférica (S^I)

Las componentes cartesianas del operador de espín $\hat{S}$ están das por

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{S}_y = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.90}$$

Las componentes esféricas de $\hat{S}$ son

$$\hat{S}_{+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \hat{S}_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.91}$$

Los elementos de la matriz de los operadores de espín $\hat{S}_\mu$ en la representación de base esférica están dados por

$$\left(\hat{S}_\mu\right)_{\sigma'\sigma} = \sqrt{2}C^{1\sigma'}_{1\sigma 1\mu}\ \ (\mu, \sigma, \sigma' = \pm 1{,}0) \tag{2.92}$$

donde *C* son los mismos coeficientes de Clebsch y Gordon.

(b) Representación de base cartesiana (S^{II})

Las componentes cartesianas del operador de espín $\hat{S}$ en la representación de base cartesiana están dadas por (comparar con (1.27), $\left(S^i\right)^{jk} = -i\epsilon^{ijk}$)

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.93}$$

La transformación entre las representaciones de la base esférica y de la base cartesiana esta dado por

$$U\hat{\boldsymbol{S}}^{\boldsymbol{II}}U^{-1} = \hat{\boldsymbol{S}}^I,\ \ U\hat{\boldsymbol{S}}^{II} = \hat{\boldsymbol{S}}^I U \tag{2.94}$$

donde

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.95}$$

El uso de una u otra representación depende del tipo de problema a resolver.

2.4.3 Productos de Espín

Los productos de las componentes cartesianas de las matrices $\hat{S}$ se pueden expresar de la siguiente manera (*i, k* , *l* como siempre toma valores como *x, y, z*) [15, formulas (38-42)][18].

(a)

$$\hat{S}_i\hat{S}_k = \frac{2}{3}\delta_{ik}\hat{I} + \frac{i}{2}\varepsilon_{ikl}\hat{S}_l + \hat{Q}_{ik}. \tag{2.96}$$

En particular,

$$\begin{gathered} \hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = 2\hat{I}, \\ \left[\hat{S}_i, \hat{S}_k\right]_- \equiv \hat{S}_i\hat{S}_k - \hat{S}_k\hat{S}_i = i\varepsilon_{ikl}\hat{S}_l, \\ \left[\hat{S}_i, \hat{S}_k\right]_+ \equiv \hat{S}_i\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_i = \frac{4}{3}\delta_{ik}\hat{I} + 2\hat{Q}_{ik}. \end{gathered} \tag{2.97}$$

(b)

$$\begin{aligned} \hat{S}_i\hat{S}_k\hat{S}_l &= \frac{i}{3}\varepsilon_{ikl}\hat{I} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\hat{S}_l + \delta_{ik}\hat{S}_i\right) + i\varepsilon_{ilm}\hat{Q}_{km} \\ &= \frac{i}{3}\varepsilon_{ikl}\hat{I} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\hat{S}_l + \delta_{ik}\hat{S}_i\right) + \frac{i}{2}\left(\varepsilon_{ikm}\hat{Q}_{lm} + \varepsilon_{ilm}\hat{Q}_{km} + \varepsilon_{klm}\hat{Q}_{im}\right). \end{aligned} \tag{2.98}$$

De la ecuación (2.98) uno puede obtener la relación de Duffin y Kemmer

$$\hat{S}_i\hat{S}_k\hat{S}_l + \hat{S}_l\hat{S}_k\hat{S}_i = \delta_{ik}\hat{S}_l + \delta_{kl}\hat{S}_i. \tag{2.99}$$

Otros casos particulares de la ecuación (2.98):

$$\hat{S}_i\hat{S}_k\hat{S}_i = \delta_{ik}\hat{S}_i \ \text{(sin sumar sobre } i\text{)}; \ \textstyle\sum_i \hat{S}_i\hat{S}_k\hat{S}_i = \hat{S}_k, \tag{2.100}$$

$$\hat{S}_i\hat{S}_k\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_k\hat{S}_i = \hat{S}_i + \delta_{ik}\hat{S}_k \ \text{(sin sumar sobre } k\text{)} \tag{2.101}$$

$$\begin{gathered} \hat{S}_x\hat{S}_y\hat{S}_z + \hat{S}_y\hat{S}_z\hat{S}_x + \hat{S}_z\hat{S}_x\hat{S}_y = i\hat{I}, \\ \hat{S}_x\hat{S}_z\hat{S}_y + \hat{S}_z\hat{S}_y\hat{S}_x + \hat{S}_y\hat{S}_x\hat{S}_z = -i\hat{I}, \\ \hat{S}_x\hat{S}_z\hat{S}_z = \hat{S}_y\hat{S}_y\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hat{S}_x - i\hat{Q}_{yz}, \\ \hat{S}_x\hat{S}_y\hat{S}_y = \hat{S}_z\hat{S}_z\hat{S}_x = \frac{1}{2}\hat{S}_x + i\hat{Q}_{yz}, \end{gathered} \tag{2.102}$$

$$\hat{S}_y\hat{S}_x\hat{S}_x = \hat{S}_z\hat{S}_z\hat{S}_y = \frac{1}{2}\hat{S}_y - i\hat{Q}_{xz},$$
$$\hat{S}_y\hat{S}_z\hat{S}_z = \hat{S}_x\hat{S}_x\hat{S}_y = \frac{1}{2}\hat{S}_y + i\hat{Q}_{xz},$$
$$\hat{S}_z\hat{S}_y\hat{S}_y = \hat{S}_x\hat{S}_x\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hat{S}_z - i\hat{Q}_{xy},$$

donde $\hat{I}$ es la matriz de unidad

Usando las formas explicitas de matrices de espín y de momento cuadripolar es muy fácil deducir estas formulas.

Capítulo 3

Productos y Trazas de Matrices Covariantes γ^{μ} y $\gamma^{\mu\nu}$ en el caso de espín 1/2 y espín 1

3.1 Formalismo general de Caianiello, Fubini y Chisholm para trazas de matrices $\boldsymbol{\gamma^{\mu}}$.

En la teoría relativista de perturbaciones, un problema técnico recurrente es la evaluación de un producto de trazas de las matrices γ. Las matrices que se producen en los rastros pueden ser:

a) Las matrices individuales γ_{μ} $(\mu = 0, \cdots, 3)$, quizá formando productos escalares relativistas $\gamma_{\mu} p^{\mu} = \gamma_0 p_o - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}$ con 4-momento p^{μ} relativistas;

b) La matriz $\gamma_5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$; ó

c) Productos escalar relativistas $\gamma_{\alpha} \cdots \gamma^{\alpha}$.

El problema de la eliminación de productos escalares $\gamma_{\alpha} \cdots \gamma^{\alpha}$ cuando ambos términos se encuentran dentro de una traza se resolvió en Refs. [19][20][21][22]. Se ha demostrado que si $S \equiv \gamma_a \gamma_b \cdots \gamma_d \gamma_e$ es una cadena impar que contiene un número impar de matrices γ_{μ} $(\mu = 0, \cdots, 3)$.

$$S_{\mathrm{R}} \equiv \gamma_{\tau} \cdots \gamma_{\sigma} \gamma_{\varrho},$$

es una cadena invertida, formada por escrito las matrices en orden inverso, entonces

$$\gamma^{\alpha} S \gamma_{\alpha} = -2 S_{\mathrm{R}}. \tag{3.1}$$

Para una cadena par buscamos $S\gamma_{\omega}$. De ello se deduce que

$$\gamma^{\alpha} S \gamma_{\omega} \gamma_{\alpha} = 2[\gamma_{\omega} S + S_R \gamma_{\omega}]. \tag{3.2}$$

Estas fórmulas también son ciertas para las cadenas de S, que contienen un número *impar* de γ_{μ} y *cualquier* número de γ_5, la cadena invertida que es definida por invertir el orden de *todas* las matrices γ. Esto se deduce ya que la inserción de $\gamma_5 \equiv -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ no modifica la "paridad"‡ de una cadena y porque $(\gamma_5)_R \equiv -i\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = \gamma_5$. Definimos las cadenas pares e impares generalmente para hacerlos que contienen números pares e impares de γ_{μ} $(\mu = 0, \cdots, 3)$ con independencia de los factores γ_5.

‡En este caso la paridad se entiende en el sentido de números de γ-matrices dentro de producto.

Esto da la solución al problema de la eliminación de productos escalares $\gamma_\alpha \cdots \gamma^\alpha$ cuando las matrices se producen en diferentes trazas, por lo que tenemos que expresar

$$\mathrm{Tr}[\gamma_\alpha S]\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha S'], \tag{3.3}$$

en términos de las cadenas S y S' solamente. Ahora S y S' son matrices de 4×4 y pueden ser expresadas en la forma

$$S = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i X_i \tag{3.4a}$$

y

$$S' = \sum_{i=1}^{16} \Gamma_j Y_j, \tag{3.4b}$$

donde las matrices $\Gamma_1, \cdots \Gamma_{16}$ son varias de las matrices I, γ_μ, $\sigma_{\mu\nu}$, $\gamma_\mu\gamma_5$ y γ_5. Por conveniencia tomamos $\Gamma_1 = -i\gamma_1$, $\Gamma_2 = -i\gamma_2$, $\Gamma_3 = -i\gamma_3$y $\Gamma_4 = \gamma_0$, entonces

$$\gamma_\alpha \cdots \gamma^\alpha = \sum_{k=1}^{4} \Gamma_k \cdots \Gamma_k. \tag{3.5}$$

Usando (3.4) y (3.5) y la propiedad $\mathrm{Tr}\left[\Gamma_i \Gamma_j\right] = 4\delta_{ij}$, entonces (3.3) se convierte en

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{4} \mathrm{Tr}[\Gamma_k \sum_{i=1}^{16} \Gamma_i X_i]\mathrm{Tr}\left[\Gamma_k \sum_{j=1}^{16} \Gamma_j Y_j\right] = 16 \sum_{k=1}^{4} X_k\, Y_k = \\ = 4\mathrm{Tr}\left[\left(\sum_{i=1}^{4} \Gamma_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{4} \Gamma_j Y_j\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En (3.6), la segunda suma es S'; Si podemos encontrar un operador P de tal manera que

$$P(S) = P\left(\sum_{i=1}^{16} \Gamma_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \Gamma_i X_i, \tag{3.7}$$

entonces (3.3) y (3.6) se reducen a $4\mathrm{Tr}[P(S)S']$, que es de la forma deseada.

Si la cadena S en (3.3) es una cadena par, el producto es cero; por lo que solo vamos a considerar con cadenas impares S. Para ellas, solo las matrices Γ que representan a γ_μ y $\gamma_\mu\gamma_5$ se presentan en la suma (3.4a); el operador P en (3.7) debe eliminar los términos que contiene $\gamma_\mu\gamma_5$. Si definimos el operador Q como

$$Q(\Gamma) = \gamma_\alpha \Gamma \gamma^\alpha,$$

entonces $Q(\gamma_\mu) = -2\gamma_\mu$, mientras que $Q(\gamma_\mu\gamma_5) = 2\gamma_\mu\gamma_5$. Finalmente si tomamos $P = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}Q$ la ecuación (3.1) se cumple para las cadenas impares S. Sin embargo por (3.3), $Q(S) = -2S_R$ para cadenas impares; por lo tanto

$$P(S) = \frac{1}{2}(S + S_R). \tag{3.8}$$

Así que desde (3.3), (3.6), (3.7) y (3.8), tenemos el resultado final que para las trazas no es cero

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha S]\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha S'] = 2\mathrm{Tr}[(S + S_R)S']. \tag{3.9}$$

Una fórmula análoga sostiene que $\gamma_\alpha S$ no se presente dentro de una traza, aunque $\gamma_\alpha S'$ si.

Cuando sólo un producto escalar $\gamma_\alpha \cdots \gamma^\alpha$ se presente en cálculos, los resultados (3.9) probablemente no son necesarios aplicarlos, véase los productos de γ en la sección 1.5 del capítulo 1. Pero si más de un producto escalar se produce, empieza a ser difícil calcular manualmente, entonces la fórmula (3.9) sirve mucho para el propósito de calcular los elementos de la matriz en altos órdenes, las amplitudes y secciones transversales.

Desde los tiempos cuando aparecieron los artículos de Caianiello, Fubini, Chishlom ya era posible introducir los algoritmos desarrollados en computadora Refs [21][22].

En el caso particular de espín ½ tenemos que:

$$\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\alpha = -2\gamma^\mu.$$

Desarrollando el programa:

In[1]:= $\gamma[0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\gamma[1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma[2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\gamma[3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

In[5]:= $\mathbf{Do}\left[\mathbf{Print}\left[\mathbf{A}[\mu] = \gamma[0].\gamma[\mu].\gamma[0] - \sum_{\alpha=1}^{3}\gamma[\alpha].\gamma[\mu].\gamma[\alpha]\right],\ \{\mu, 0, 3\}\right]$

```
{{-2, 0, 0, 0}, {0, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 2}}

{{0, 0, 0, -2}, {0, 0, -2, 0}, {0, 2, 0, 0}, {2, 0, 0, 0}}

{{0, 0, 0, 2 i}, {0, 0, -2 i, 0}, {0, -2 i, 0, 0}, {2 i, 0, 0, 0}}

{{0, 0, -2, 0}, {0, 0, 0, 2}, {2, 0, 0, 0}, {0, -2, 0, 0}}
```

```
In[6]:= Do [Print[B[μ] = -2 γ[μ]], {μ, 0, 3}]
{{-2, 0, 0, 0}, {0, -2, 0, 0}, {0, 0, 2, 0}, {0, 0, 0, 2}}
{{0, 0, 0, -2}, {0, 0, -2, 0}, {0, 2, 0, 0}, {2, 0, 0, 0}}
{{0, 0, 0, 2 i}, {0, 0, -2 i, 0}, {0, -2 i, 0, 0}, {2 i, 0, 0, 0}}
{{0, 0, -2, 0}, {0, 0, 0, 2}, {2, 0, 0, 0}, {0, -2, 0, 0}}
In[7]:= Do[Print[TrueQ[A[μ] == B[μ]]], {μ, 0, 3}]
True
True
True
True
```

3.2 Productos y trazas de matrices $\gamma^{\mu\nu}$.

Debido que no existe una relación análoga a $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$ en el caso de espín 1, en lugar de esto existen las relaciones tales como [10]:

$$\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}=-\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}+\frac{2}{3}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}+\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}\right)-\frac{1}{12}i\left(\gamma_{5,\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}+\gamma_{5,\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}+\gamma_{5,\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}+\gamma_{5,\nu\beta}\delta_{\mu\alpha}\right)+\frac{1}{6}\left(\gamma_{6,\mu\alpha,\nu\beta}+\gamma_{6,\nu\alpha,\mu\beta}\right), \tag{3.10}$$

$$\left[\gamma_{\mu\nu},\gamma_{\alpha\beta}\right]_{+}+\left[\gamma_{\mu\alpha},\gamma_{\nu\beta}\right]_{+}+\left[\gamma_{\mu\beta},\gamma_{\alpha\nu}\right]_{+}=2\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\gamma\beta}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\nu\beta}+\delta_{\mu\alpha}\delta_{\gamma\beta}\right). \tag{3.11}$$

Las trazas de productos de cualquier número de las matrices Γ depende sólo de las trazas de productos con $\gamma_{\mu\nu}$ y γ_5. La traza de dos matrices $\gamma_{\mu\nu}$ sigue de (3.10) como

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\right)=4\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\gamma\beta}+\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\right)-2\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

Sin embargo, no es fácil aplicarlos de manera absolutamente similar al método de Caianiello y Fubini.

Por eso, nosotros procedemos a encontrar los productos explícitamente (como en la Sección anterior para el caso de S=1/2). Dichas relaciones para espín 1 están calculadas:

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\beta\mu}=3\delta_{\alpha\beta}-\frac{i}{2}\gamma_{5,\alpha\beta}, \tag{3.13}$$

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{5}\gamma_{\beta\mu}=-3\gamma_{5}\delta_{\alpha\beta}-\frac{i}{4}\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\gamma_{5,\sigma\tau}, \tag{3.14}$$

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\sigma\tau}\gamma_{\beta\mu}=2\gamma_{\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}+\gamma_{\alpha\beta}\delta_{\sigma\tau}-\gamma_{\alpha\sigma}\delta_{\tau\beta}-\gamma_{\alpha\tau}\delta_{\sigma\beta}-\gamma_{\beta\sigma}\delta_{\alpha\tau}-\gamma_{\beta\tau}\delta_{\alpha\sigma}-i\epsilon_{\alpha\beta\sigma\mu}\gamma_{4,\tau\mu}-i\epsilon_{\alpha\beta\tau\mu}\gamma_{4,\sigma\mu}, \tag{3.15}$$

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{4,\sigma\tau}\gamma_{\beta\mu}=-2\gamma_{4,\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta}-\gamma_{4,\alpha\beta}\delta_{\sigma\tau}+\gamma_{4,\alpha\sigma}\delta_{\tau\beta}+\gamma_{4,\alpha\tau}\delta_{\sigma\beta}+\gamma_{4,\beta\sigma}\delta_{\alpha\tau}+\gamma_{4,\beta\tau}\delta_{\alpha\sigma}-i\epsilon_{\alpha\beta\sigma\mu}\gamma_{\tau\mu}-i\epsilon_{\alpha\beta\tau\mu}\gamma_{\sigma\mu}, \tag{3.16}$$

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{5,\sigma\tau}\gamma_{\beta\mu} = 2\gamma_{5,\sigma\tau}\delta_{\alpha\beta} + 2\gamma_{5,\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau} + 2\gamma_{5,\tau\beta}\delta_{\alpha\sigma} - 2\gamma_{5,\sigma\beta}\delta_{\alpha\tau} - 2\gamma_{5,\alpha\tau}\delta_{\sigma\beta} + \\ +12\left(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\tau\beta} - \delta_{\alpha\tau}\delta_{\sigma\beta}\right) + 12i\epsilon_{\alpha\sigma\tau\beta}\gamma_5, \tag{3.17}$$

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{6,\sigma\tau,\rho\phi}\gamma_{\beta\mu} = 0. \tag{3.18}$$

Donde $\gamma_5, \gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{4,\sigma\tau}, \gamma_{5,\alpha\beta}, \gamma_{6,\sigma\tau,\rho\phi}$ están definidas en la sección 2.3. Las formulas (3.13)-(3.18) son el resultado principal de la Tesis.

Realizamos los programas en Wolfram Mathematica 7, para demostrar cada una de estas ecuaciones. Los programas se anexan a continuación.

Programas realizados en MATHEMATICA 7

Matrices Gamma

$$\gamma[1,1]=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma[1,2]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma[1,3]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma[1,4]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma[2,1]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\gamma[2, 2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[2, 3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[2, 4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[3, 1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[3, 2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[3, 3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[3,4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[4,1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[4,2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[4,3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma[4,4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma 5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{ijkl} = \frac{(i-j)\,(i-k)\,(i-l)\,(j-k)\,(j-l)\,(k-l)}{12}$$

Nota : Se debe aclarar que para acortar la versión impresa del programa solo se muestra el primer valor obtenido en cada ecuación

Ecuación 3.13

$$\gamma_{\mu\alpha}\,\gamma_{\beta\mu} = 3\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\,\gamma_{5,\alpha\beta}$$

$$\gamma_{5,\alpha\beta} = i\,[\gamma_{\alpha\lambda},\ \gamma_{\lambda\beta}]_{-} = \sum_{\lambda=1}^{4} (i\,\gamma[\alpha,\lambda].\gamma[\beta,\lambda] - i\,\gamma[\beta,\lambda].\gamma[\alpha,\lambda])$$

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[A[\alpha,\beta] = \sum_{\mu=1}^{4}\gamma[\mu,\alpha].\gamma[\beta,\mu]\right],\ \{\alpha, 4\},\ \{\beta, 4\}\right]$$

```
{{3, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 3, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 3, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 3, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 3}}
```

```
Do[
 Print[δ[α, β] = {{KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[α, β], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β]}}], {α, 4}, {β, 4}]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[\gamma 51[\alpha,\beta] = \sum_{\lambda=1}^{4} (i\,\gamma[\alpha,\lambda].\gamma[\beta,\lambda] - i\,\gamma[\beta,\lambda].\gamma[\alpha,\lambda])\right],\ \{\alpha, 4\},\ \{\beta, 4\}\right]$$

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[B[\alpha,\beta] = 3\,\delta[\alpha,\beta] - \frac{i}{2}\,\gamma 51[\alpha,\beta]\right],\ \{\alpha, 4\},\ \{\beta, 4\}\right]$$

```
{{3, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 3, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 3, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 3, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 3}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β] == B[α, β]]], {α, 4}, {β, 4}]
```

```
True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True
```

Ecuación 3.14

$$\gamma_{\mu\alpha}\,\gamma_5\,\gamma_{\beta\mu} = 3\,\gamma_5\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\tau}\,\gamma_{5,\alpha\beta}$$

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[A[\alpha,\beta] = \sum_{\mu=1}^{4}\gamma[\mu,\alpha].\gamma5.\gamma[\beta,\mu]\right],\ \{\alpha,4\},\ \{\beta,4\}\right]$$

```
{{3, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 3, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 3, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, -3, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, -3, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, -3}}
```

```
Do[
 Print[δ[α, β] = {{KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[α, β], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β]}}], {α, 4}, {β, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[B[\alpha,\beta] = -3\,\gamma5.\delta[\alpha,\beta] - \frac{i}{4}\sum_{\tau=1}^{4}\sum_{\sigma=1}^{4}\frac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\sigma)\,(\alpha-\tau)\,(\beta-\sigma)\,(\beta-\tau)\,(\sigma-\tau)}{12}\sum_{\lambda=1}^{4}\left(i\,\gamma[\sigma,\lambda].\gamma[\tau,\lambda] - i\,\gamma[\tau,\lambda].\gamma[\sigma,\lambda]\right)\right],\ \{\alpha,4\},\ \{\beta,4\}\right]$$

```
{{0, 3, 0, 0, 0, 0}, {-3, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, -3, 0}, {0, 0, 0, 3, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β] == B[α, β]]], {α, 4}, {β, 4}]
```

```
True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True

True
```

Ecuación 3.15

$\gamma_{\mu\alpha}\,\gamma_{\sigma\tau}\,\gamma_{\beta\mu} = 2\,\gamma_{\sigma\tau}\,\delta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}\,\delta_{\sigma\tau} - \gamma_{\alpha\sigma}\,\delta_{\tau\beta} - \gamma_{\alpha\tau}\,\delta_{\sigma\beta} - \gamma_{\beta\sigma}\,\delta_{\alpha\tau} - \gamma_{\beta\tau}\,\delta_{\alpha\sigma} - i\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\mu}\,\gamma_{4,\sigma\mu}$

$$\text{Do}\left[\text{Print}\left[A[\alpha, \beta, \sigma, \tau] = \sum_{\mu=1}^{4} \gamma[\mu, \alpha].\gamma[\sigma, \tau].\gamma[\beta, \mu]\right], \{\alpha, 4\}, \{\beta, 4\}, \{\sigma, 4\}, \{\tau, 4\}\right]$$

```
{{0, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1},
 {-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}}
```

```
Do[
 Print[δ[α, β] = {{KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[α, β], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β]}}], {α, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[σ, τ] = {{KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ]}}], {σ, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[τ, β] = {{KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β]}}], {τ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[σ, β] = {{KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β]}}], {σ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[α, τ] = {{KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ]}}], {α, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[α, σ] = {{KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ]}}], {α, 4}, {σ, 4}]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

$$\mathbf{Do}\Big[\mathbf{Print}\Big[\mathbf{B}[\alpha, \beta, \sigma, \tau] = \mathbf{2}\,\gamma[\sigma, \tau].\delta[\alpha, \beta] + \gamma[\alpha, \beta].\delta[\sigma, \tau] - \gamma[\alpha, \sigma].\delta[\tau, \beta] - \gamma[\alpha, \tau].\delta[\sigma, \beta] - \gamma[\beta, \sigma].\delta[\alpha, \tau] - \gamma[\beta, \tau].\delta[\alpha, \sigma] + \sum_{\mu=1}^{4} \frac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\sigma)\,(\alpha-\mu)\,(\beta-\sigma)\,(\beta-\mu)\,(\sigma-\mu)}{12}\,\gamma\mathbf{5}.\gamma[\tau, \mu] + \sum_{\mu=1}^{4} \frac{(\alpha-\beta)\,(\alpha-\tau)\,(\alpha-\mu)\,(\beta-\tau)\,(\beta-\mu)\,(\tau-\mu)}{12}\,\gamma\mathbf{5}.\gamma[\sigma, \mu]\Big], \{\alpha, 4\}, \{\beta, 4\}, \{\sigma, 4\}, \{\tau, 4\}\Big]$$

```
{{0, 0, 0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1},
 {-1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β, σ, τ] == B[α, β, σ, τ]]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
True
True
True
True, etc.
```

Ecuación 3.16

$$\gamma_{\alpha\beta}\,\gamma_{4,\sigma\tau}\,\gamma_{\beta\mu} = -2\,\gamma_{4,\sigma\tau}\,\delta_{\alpha\beta} - \gamma_{4,\alpha\beta}\,\delta_{\sigma\tau} + \gamma_{4,\alpha\sigma}\,\delta_{\tau\beta} + \gamma_{4,\alpha\tau}\,\delta_{\sigma\beta} + \gamma_{4,\beta\sigma}\,\delta_{\alpha\tau} + \gamma_{4,\beta\tau}\,\delta_{\alpha\sigma} - i\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\mu}\,\gamma_{\tau\mu} - i\,\epsilon_{\alpha\beta\tau\mu}\,\gamma_{\sigma\mu}$$

$$\mathbf{Do}\Big[\mathbf{Print}\Big[\mathbf{A}[\alpha, \beta, \sigma, \tau] = i \sum_{\mu=1}^{4} \gamma[\mu, \alpha].\gamma\mathbf{5}.\gamma[\sigma, \tau].\gamma[\beta, \mu]\Big], \{\alpha, 4\}, \{\beta, 4\}, \{\sigma, 4\}, \{\tau, 4\}\Big]$$

```
{{0, 0, 0, -i, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, i, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, i},
 {i, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, -i, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -i, 0, 0, 0}}
```

```
Do[
 Print[δ[α, β] = {{KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[α, β], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β]}}], {α, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[σ, τ] = {{KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, τ]}}], {σ, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[τ, β] = {{KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β]}}], {τ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[σ, β] = {{KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β]}}], {σ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[α, τ] = {{KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ]}}], {α, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[α, σ] = {{KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ]}}], {α, 4}, {σ, 4}]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
Do[Print[B[α, β, σ, τ] = -2 ⅈ γ5.γ[σ, τ].δ[α, β] - ⅈ γ5.γ[α, β].δ[σ, τ] +
    ⅈ γ5.γ[α, σ].δ[τ, β] + ⅈ γ5.γ[α, τ].δ[σ, β] + ⅈ γ5.γ[β, σ].δ[α, τ] +
    ⅈ γ5.γ[β, τ].δ[α, σ] - ⅈ Sum[(α - β) (α - σ) (α - μ) (β - σ) (β - μ) (σ - μ)/12 γ[τ, μ], {μ, 1, 4}] -
    ⅈ Sum[(α - β) (α - τ) (α - μ) (β - τ) (β - μ) (τ - μ)/12 γ[σ, μ], {μ, 1, 4}]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

$$B[\alpha,\beta,\sigma,\tau] = -2 i \gamma 5.\gamma[\sigma,\tau].\delta[\alpha,\beta] - i\gamma 5.\gamma[\alpha,\beta].\delta[\sigma,\tau] + i\gamma 5.\gamma[\alpha,\sigma].\delta[\tau,\beta] + i\gamma 5.\gamma[\alpha,\tau].\delta[\sigma,\beta] + i\gamma 5.\gamma[\beta,\sigma].\delta[\alpha,\tau] + i\gamma 5.\gamma[\beta,\tau].\delta[\alpha,\sigma] - i\sum_{\mu=1}^{4}\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\sigma)(\alpha-\mu)(\beta-\sigma)(\beta-\mu)(\sigma-\mu)}{12}\gamma[\tau,\mu] - i\sum_{\mu=1}^{4}\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)(\beta-\tau)(\beta-\mu)(\tau-\mu)}{12}\gamma[\sigma,\mu]$$

```
{{0, 0, 0, -ⅈ, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, ⅈ, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, ⅈ},
 {ⅈ, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, -ⅈ, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -ⅈ, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β, σ, τ] == B[α, β, σ, τ]]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
True
True
True
True, etc.
```

Ecuación 3.17

$$\gamma_{\mu\alpha}\,\gamma_{5,\sigma\tau}\,\gamma_{\beta\mu} = 2\,\gamma_{5,\sigma\tau}\,\delta_{\alpha\beta} + 2\,\gamma_{5,\alpha\sigma}\,\delta_{\beta\tau} + 2\,\gamma_{5,\tau\beta}\,\delta_{\alpha\sigma} - 2\,\gamma_{5,\sigma\beta}\,\delta_{\alpha\tau} - 2\,\gamma_{5,\alpha\tau}\,\delta_{\sigma\beta} + 12\,i\,(\delta_{\alpha\sigma}\,\delta_{\tau\beta} - \delta_{\alpha\tau}\,\delta_{\sigma\beta}) + 12\,i\,\epsilon_{\alpha\sigma\tau\beta}\,\gamma_5$$

```
Do[Print[γ51[σ, τ] = Sum[(ⅈ γ[σ, λ].γ[τ, λ] - ⅈ γ[τ, λ].γ[σ, λ]), {λ, 1, 4}]], {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do [Print[A[α, β, σ, τ] = Sum[γ[μ, α].γ51[σ, τ].γ[β, μ], {μ, 1, 4}]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[γ51[α, σ] = Sum[(ⅈ γ[α, λ].γ[σ, λ] - ⅈ γ[σ, λ].γ[α, λ]), {λ, 1, 4}]], {α, 4}, {σ, 4}]

Do[Print[γ51[τ, β] = Sum[(ⅈ γ[τ, λ].γ[β, λ] - ⅈ γ[β, λ].γ[τ, λ]), {λ, 1, 4}]], {τ, 4}, {β, 4}]

Do[Print[γ51[σ, β] = Sum[(ⅈ γ[σ, λ].γ[β, λ] - ⅈ γ[β, λ].γ[σ, λ]), {λ, 1, 4}]], {σ, 4}, {β, 4}]

Do[Print[γ51[α, τ] = Sum[(ⅈ γ[α, λ].γ[τ, λ] - ⅈ γ[τ, λ].γ[α, λ]), {λ, 1, 4}]], {α, 4}, {τ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[
 Print[δ[α, β] = {{KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[α, β], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, β]}}], {α, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[β, τ] = {{KroneckerDelta[β, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[β, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[β, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[β, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[β, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[β, τ]}}], {β, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[α, σ] = {{KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, σ]}}], {α, 4}, {σ, 4}]
Do[Print[δ[α, τ] = {{KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[α, τ]}}], {α, 4}, {τ, 4}]
Do[Print[δ[σ, β] = {{KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β]}}], {σ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[τ, β] = {{KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, β]}}], {τ, 4}, {β, 4}]
Do[Print[δ[σ, β] = {{KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0, 0},
    {0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β], 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, β]}}], {σ, 4}, {β, 4}]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
Do[Print[B[α, β, σ, τ] = 2 γ51 [σ, τ].δ[α, β] + 2 γ51 [α, σ].δ[β, τ] + 2 γ51 [τ, β].δ[α, σ] -
    2 γ51 [σ, β].δ[α, τ] - 2 γ51 [α, τ].δ[σ, β] + 12 i (δ[α, σ].δ[τ, β] - δ[α, τ].δ[σ, β]) +
    12 i ((α - σ) (α - τ) (α - β) (σ - τ) (σ - β) (τ - β) / 12) γ5], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β, σ, τ] == B[α, β, σ, τ]]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}]
```

```
True
True
True
True
True, etc.
```

Ecuación 3.18

$$\gamma_{\mu\alpha}\, \gamma_{6,\sigma\tau,\rho\phi}\, \gamma_{\beta\mu} = 0$$

$$\gamma_{6,\sigma\tau,\rho\phi} = -\frac{1}{12}\left[i\gamma_{5,\sigma\tau},\ \gamma_{5,\rho\phi}\right]_{-} + 4\left(\delta_{\sigma\rho}\,\delta_{\tau\phi} - \delta_{\sigma\phi}\,\delta_{\tau\rho}\right) - 4\,\epsilon_{\sigma\tau\rho\phi}\,\gamma_5$$

```
Do[Print[𝔤51[σ, τ] = Sum[(ⅈ 𝔤[σ, λ].𝔤[τ, λ] - ⅈ 𝔤[τ, λ].𝔤[σ, λ]), {λ, 1, 4}]], {σ, 4}, {τ, 4}]

Do[Print[𝔤51[ρ, ϕ] = Sum[(ⅈ 𝔤[ρ, λ].𝔤[ϕ, λ] - ⅈ 𝔤[ϕ, λ].𝔤[ρ, λ]), {λ, 1, 4}]], {ρ, 4}, {ϕ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[
 Print[δ[σ, ρ] = {{KroneckerDelta[σ, ρ], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[σ, ρ], 0, 0, 0, 0},
    {0, 0, KroneckerDelta[σ, ρ], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, ρ], 0, 0}, {0, 0, 0,
     0, KroneckerDelta[σ, ρ], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, ρ]}}], {σ, 4}, {ρ, 4}]
Do[Print[δ[τ, ϕ] = {{KroneckerDelta[τ, ϕ], 0, 0, 0, 0, 0},
     {0, KroneckerDelta[τ, ϕ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[τ, ϕ], 0, 0, 0},
     {0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ϕ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ϕ], 0},
     {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ϕ]}}], {τ, 4}, {ϕ, 4}] Do[
  Print[δ[σ, ϕ] = {{KroneckerDelta[σ, ϕ], 0, 0, 0, 0, 0}, {0, KroneckerDelta[σ, ϕ], 0, 0, 0, 0},
     {0, 0, KroneckerDelta[σ, ϕ], 0, 0, 0}, {0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, ϕ], 0, 0},
     {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, ϕ], 0}, {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[σ, ϕ]}}],
  {σ, 4}, {ϕ, 4}] Do[Print[δ[τ, ρ] = {{KroneckerDelta[τ, ρ], 0, 0, 0, 0, 0},
     {0, KroneckerDelta[τ, ρ], 0, 0, 0, 0}, {0, 0, KroneckerDelta[τ, ρ], 0, 0, 0},
     {0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ρ], 0, 0}, {0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ρ], 0},
     {0, 0, 0, 0, 0, KroneckerDelta[τ, ρ]}}], {τ, 4}, {ρ, 4}]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
Do[Print[𝔤6[σ, τ, ρ, ϕ] =
   -1/12 (𝔤51[σ, τ].𝔤51[ρ, ϕ] + 𝔤51[ρ, ϕ].𝔤51[σ, τ]) + 4 (δ[σ, ρ].δ[τ, ϕ] - δ[σ, ϕ].δ[τ, ρ]) -
    4 ((σ - τ) (σ - ρ) (σ - ϕ) (τ - ρ) (τ - ϕ) (ρ - ϕ))/12 𝔤5], {σ, 4}, {τ, 4}, {ρ, 4}, {ϕ, 4}]
```

Nota : Se debe aclarar que solo se muestra la primera linea no todas las lineas son igual a cero

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do [Print[A[α, β, σ, τ, ρ, τ] = Sum[𝔤[μ, α].𝔤6[σ, τ, ρ, ϕ].𝔤[β, μ], {μ, 1, 4}]],
  {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}, {ρ, 4}, {ϕ, 4}]
```

```
{{0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0}}
```

```
Do[Print[TrueQ[A[α, β, σ, τ, ρ, τ] == M0]], {α, 4}, {β, 4}, {σ, 4}, {τ, 4}, {ρ, 4}, {ϕ, 4}]
```

```
True
True
True
True
True, etc.
```

Conclusiones

En esta tesis constó de 3 capítulos. El primer capítulo se realizo una introducción a las herramientas matemáticas empleadas en el presente trabajo así como una revisión general de la mecánica cuántica relativista, obtuvimos la ecuación de la ecuación de Klein-Gordon la cual describe un campo escalar libre, explicando que la misma tiene varios problemas si tratamos de interpretar la variable dinámica ϕ como una función de onda, ya que aparecen varias incongruencias, tales como: la energía no esté acotada inferiormente, lo que daría lugar a partículas inestables, la densidad de probabilidad asociada a esta función de onda no es definida positiva, por lo que el cuadrado del módulo del campo de Klein y Gordon, a diferencia de lo que sucede con una función de onda Schödinger no puede ser interpretado como una probabilidad. La densidad de probabilidad conservada en la evolución temporal puede ser negativa. Por lo que no admitía una interpretación en términos de probabilidades positivas. Esa última fue la razón de la búsqueda de otras relaciones relativistas. Finalmente, la ecuación de Klein y Gordon tampoco tiene en cuenta adecuadamente el espín de ciertas partículas, por lo que no podía representar adecuadamente partículas como los electrones que tienen espín ½. Sin embargo sirve como restricción relativista para cualquier ecuación. La ecuación de Dirac resuelve estas incongruencias con la predicción de las antipartículas y nos introduce a la teoría de grupo de Lorentz con mayor facilidad, así como la deducción de las matrices γ^{μ} deben ser matrices 4 x 4. Las matrices gamma se pueden interpretar como las matrices de la acción de un conjunto de vectores de la base ortogonal de vectores contravariantes en el espacio de Minkowski, los vectores columna en la que la matriz actual se convierten en espinores de espacio y así llegar al cálculo de trazas las cuales, son útiles cuando se calculan secciones transversales de dispersión. A continuación se realizo la construcción de los espinores de Dirac y algunos comentarios sobre los operadores de espín.

El capítulo dos presenta el formalismo para las partículas de nuestro interés, partículas con espín 1, por lo que fue necesario empezar con las ecuaciones de Maxwell y Proca. Además de que uno de los objetivos principales en el capítulo fue presentar las explícitas reglas de construcción de campos para los cálculos de perturbación, en un formalismo que sea muy parecido para los campos de varios espines basado en tres postulados principales: 1) Teoría de Perturbación 2) Invariancia de Lorentz de la Matriz S. 3) Interpretación de Partícula. Se mencionan sus propiedades y las reglas matemáticas para poder hacer cálculos de sus amplitudes y espectros de energía. Además representamos las ecuaciones de Maxwell en su forma hamiltoniana, lo que indica que dichas ecuaciones en su esencia también son cuánticas.

El tercer capítulo discutimos las matrices γ^{μ} y matrices $\gamma^{\mu\nu}$ para espín ½ y espín 1, sus trazas y productos así como los métodos de sus cálculos. Nuestros resultados facilitan los cálculos de matrices S de dispersión para procesos con bosones (descritos por la ecuación de Weinberg-Tucker-Hammer) en manera parecida a los cálculos hechos para tales procesos como $e^{+}e^{-}, ep, pp$ etc. (dispersión de fermiones). Así como el estudio y desarrollo de los productos matriciales que aparecen en expresiones deducidas de los diagramas de Feymann para bosones, mediante los programas en Mathematica para matrices espín 1.

Este estudio tiene una importancia significativa física, no solamente matemática. Encontrar las matrices de espín 1 y las fórmulas de las trazas son importantes en estudios de secciones eficaces, las cuales son utilizadas en problemas sobre interacciones entre campos, además pueden ser utilizadas en el cálculo de las amplitudes de dispersión y los espectros de estados ligados de energía para bosones. La comparación con los experimentos realizables frecuentemente requiere el cálculo de los elementos de la matriz S que permiten encontrar las secciones eficaces de dispersión para una partícula y compáralas con los resultados experimentales. Así los programas realizados en Mathematica para dichas matrices pueden utilizados a futuro en problemas o experimentos de esta índole.

Referencias

[1] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[2] S. Weinberg, *Feynman Rules for Any Spin*, Phys. Rev pp. B1318 -1332 (1964); *Feynman Rules for any spin II. Massless Particles*, Phys. Rev (1964) pp. B885 - B888.

[3] V. V. Dvoeglazov, *Significance of the Spinorial Basis in Relativistic Quantum Mechanics*, FIZIKA, (1997) pp. 111-122.

[4] P. Dirac, *The Quantum Theory of Electron*, Proc. Roy. Soc. London 117 (1928) pp. 610- 624.

[5] E. Majorana, *Teoria Simmetrica dell' Electrone e del Positrone*, Nuovo Cimento 14 (1937) pp.171-184.

[6] A. Proca, *Theóre Non Relativiste des Particules á Spin Entire.* J. Phys. Radiu 9 (1938) p. 61.

[7] A. Sankaranarayanan and R.H. Good Jr, *Spin-One Wave Equation*, Nuovo Cimento 36 (1965) pp.1303-.

[8] D. Shay and R.H Good Jr., *Spin-One Particle in a External Electromagnetic Field.* Phys. *Rev*. 179 (1969) pp.1410-1417.

[9] C.L Hammer and R. H. Tucker, *A Method of Quantization for Relativistic Fields*, Journal of Mathematical Physics (1971) pp. 1327-1333.

[10] R. H. Tucker and C.L. Hammer, *New Quantum Electrodynamics for Vector Mesons*, Phys. Rev. D3 (1971) pp. 2448-2460.

[11] V.V. Dvoeglazov, *Generalized Maxwell Equation from the Einstein Postulate*, J. Phys. A. 33 (2000) pp. 5011-5016.

[12] S. Kruglov, *Bosonic Fields with Two Mass and Spin States*. Int. J. Mod.Phys. A16 (2001) pp. 4925-4938.

[13] C. Itzykson y J.B. Zuber , *Quantum Field Theory*, London, McGraw-Hill (2005).

[14] A. Barut, I. Muzinich and D.N. Williams, *Phys*, *Rev*. 130 (1963) pp.442-.

[15] D.A Varshalovich, A.N Moskalev y V.K Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*. World Scientific Publishing Company (1988) pp. 36-60.

[16] V.V. Dvoeglazov, *Quantized (1,0)+(0,1) Fields*, Int, J..Theor. Phys.37 (1998) pp. 1915-1944.

[17] E. P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectr.* New York and London.Academic Press (1959).

[18] D.L. Weaver, *Solving Spin-1 Problems using Spin ½ Methods* Am. J. Phys. 46(7), (1978) p.721-724.

[19] E.R. Caianiello and S. Fubini, *On the Algorithm of Dirac Spurs*, Il Nuovo Cimento 12, (1952) pp. 1218-1226.

[20] J.S.R Chisholm, *Relativistic Scalar Products of Alpha Matrices*, Nuovo Cimento (1963) pp. 426-428.

[21] J. Kahane,*Algorithm for Reducing Contracted Products of* γ*- Matrices* J Math. Phys. 9 (1968) pp. 1732-1738

[22] J.S.R Chisholm, *Generalisation of the Kahane Algorithm for Scalar Products of* γ*-Matrices*, Comp. Phys. Comm. 4 (1972) pp. 205-207.