

Mechanisms of interaction between gravitational waves.

by **Ernesto López González Eng**,
Col. Coop. San Saturio. Math Department, Madrid, Spain
ernesto_lopez@colegiosansaturio.com
June 2013, revised January 2015

Abstract

Background In a previous work ("Matter as gravitational waves." 2012) it was set out that matter could be considered to be formed by gravitational pulsations in a hexadimensional space with anisotropic curvature, since solutions to Einstein's field equations presented many of the characteristics of a particle then. However no way that would allow the interaction between waves was provided.

Results It is shown that standing waves change propagation medium through three non-linear mechanisms: by changing the refractive index, deforming and dragging on propagation medium. Mechanical analogies of all these effects have been provided and later they have been related to Schwarzschild and Kerr metrics. As a demonstration of these ideas particle-pulse's acceleration is calculated for the "weak gravitational fields" case. The solution agrees with Newton's theory. Finally a new interpretation of Michelson-Morley experiment is provided.

keywords: *Quantum Mechanics, General Relativity, extra dimensions, inertia, Michelson-Morley.*

Mecanismos de interacción entre ondas gravitatorias

by **Ernesto López González Eng**,
Col. Coop. San Saturio. Departamento de Matemáticas, Madrid, España.
ernesto_lopez@colegiosansaturio.com
Junio 2013, revisado Enero 2015

Resumen

Antecedentes En un trabajo anterior ("La materia como ondas gravitatorias". 2012) se exponía la hipótesis de que la materia podía considerarse formada por pulsaciones gravitatorias en un espacio hexadimensional con curvatura anisotrópica, ya que las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein presentaban entonces muchas de las características propias de una partícula. Sin embargo no se proporcionaba ningún mecanismo que permitiese la interacción entre ondas.

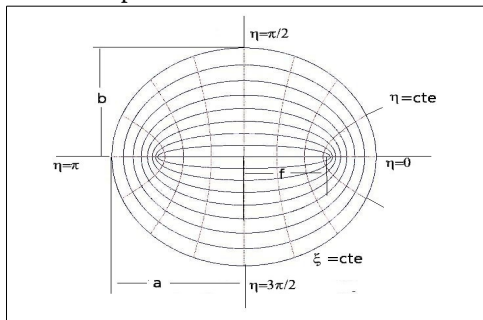
Resultados Se muestra que las ondas estacionarias modifican el medio de propagación mediante tres mecanismos de carácter no lineal: la alteración del índice de refracción, la deformación del medio de propagación y el arrastre del medio de propagación. De todos estos efectos se han proporcionado ejemplos mecánicos y posteriormente han sido relacionados con las métricas de Schwarzschild y Kerr. Como demostración de estas ideas se calcula la aceleración que presentaría una partícula-pulsación inmersa en un campo gravitatorio débil. La solución coincide con la teoría de Newton. Finalmente se proporciona una nueva interpretación del experimento de Michelson-Morley.

Palabras clave: *Mecánica cuántica, Relatividad General, dimensiones extras, inercia, Michelson-Morley.*

1. Antecedentes.

En los modelos cosmológicos que presentan curvatura anisotrópica (Einstein-Rosen, Taub, etc.) las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein para un espacio-tiempo carente de masa predicen la existencia de ondas gravitatorias que a su vez modifican la curvatura del espacio-tiempo. El hecho de que las soluciones de onda en un espacio hexadimensional con curvatura anisotrópica comparten muchas de las características de una partícula material motivó la redacción de un artículo (La materia como ondas gravitatorias.2012) en el que se exponía esta hipótesis.

En concreto se exploró un espacio formado por 3 dimensiones espaciales extendidas, 2 dimensiones espaciales compactadas (que formarían aproximadamente una elipse del orden de $3 \cdot 10^{-6}$ m) y una dimensión temporal. Estas dimensiones se pueden describir mediante un sistema de coordenadas cilíndrico-elípticas: las dimensiones extendidas mediante coordenadas cartesianas x,y,z y el plano de las dimensiones compactadas mediante coordenadas elípticas:



Las curvas con $\xi = cte$ representan elipses confocales, mientras que las curvas con $\eta = cte$ representan hipérbolas perpendiculares a las elipses anteriores.. La dimensión ξ se relacionó con el inverso de la masa de las partículas elementales y la dimensión η se identificó con la coordenada imaginaria del espacio-tiempo de Minkonwnski. Es de destacar que debido a la afirmación anterior la concepción del tiempo, aún manteniendo su carácter dimensional perdería su interpretación geométrica.

Debido a la dificultad para resolver las ecuaciones de campo de Einstein en estas condiciones se utilizó la aproximación para campo débil conocida como gravitomagnetismo. El campo gravitomagnético es prácticamente análogo al campo electromagnético, salvo por dos detalles, el primero es que el campo gravitatorio no puede ser negativo y el segundo es que dos corrientes paralelas de masa se repelen en vez de atraerse. Al linearizar es posible obtener la siguiente ecuación de onda:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E}_g + k^2 \vec{E}_g = 0$$

La primera diferencia provoca que para la misma frecuencia la onda gravitomagnética presente una longitud de onda que es la mitad de la electromagnética equivalente, por tanto el número de onda k debe definirse como

$$k = \frac{\pi}{\lambda}$$

Debido a la topología del espacio anterior las ondas gravitatorias no pueden desplazarse libremente, sino que deben ajustarse a unas condiciones de frontera muy estrictas. El fenómeno físico más parecido se encuentra en la transmisión de las ondas electromagnéticas a través de ondas guía elípticas, aunque en este caso el confinamiento se debe a la curvatura del espacio y no a unas paredes metálicas. La ecuación de onda hexadimensional sería $(\nabla_{6D}^2 + k^2) \cdot H = 0$. El laplaciano en coordenadas cilíndrico-elípticas es separable y toma la forma $H(\xi, \eta, x, y, z) = D(\xi, \eta) \cdot F(x, y, z)$ y como es habitual en los cálculos de ondas guía podemos descomponer el número de onda en 2: $k^2 = \beta^2 + k_c^2$ donde β se denomina “constante de propagación” y k_c es el “número de ondas de corte” y representa la frecuencia mínima para que una onda pueda propagarse por la guía.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\nabla_{\xi, \eta}^2 D(\xi, \eta) + k_c^2 D(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)} = 0 \\ \frac{\nabla_{3D}^2 F(x, y, z) + \beta^2 F(x, y, z)}{F(x, y, z)} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Se postuló que k_c imaginario e igual a $k_c = \frac{m_0 c}{\hbar} i$, lo que

permite solucionar las ecuaciones para el caso de una partícula con movimiento uniforme. La solución para el plano de las dimensiones compactadas es una onda estacionaria que se expresa mediante las funciones de Mathieu de orden $\frac{1}{2}$. En el caso más sencillo, que se identifica con el electrón el parámetro q toma el valor de aproximadamente -10^{12} . Si descomponemos D en $D(\xi, \eta) = G(\xi) \cdot N(\eta)$ las soluciones son conocidas:

$$N(\eta) = \left| se_{\frac{1}{2}}(\eta, -10^{12}) \right| \quad N \text{ es el valor absoluto de la}$$

función angular par de Mathieu de orden $\frac{1}{2}$ (también conocida como seno elíptico). La periodicidad de esta función es de 4π , pero al tratarse del valor absoluto su periodicidad se reduce a 2π .

La solución radial vendrá dada por:

$$\text{Si } 0 < \xi < \xi_0$$

$$G(\xi) = I_{o1/2}(2k_c \xi, -10^{12}) = I_{o1/2}\left(\frac{2k_c \xi}{\xi_0}, -10^{12}\right)$$

o función radial evanescente de Mathieu de primer tipo y orden $\frac{1}{2}$.

$$\text{Si } \xi > \xi_0$$

$$G(\xi) = K_{o1/2}(2k_c \xi, -10^{12}) = K_{o1/2}\left(\frac{2k_c \xi}{\xi_0}, -10^{12}\right)$$

o función radial evanescente de Mathieu de segundo tipo y orden $\frac{1}{2}$.

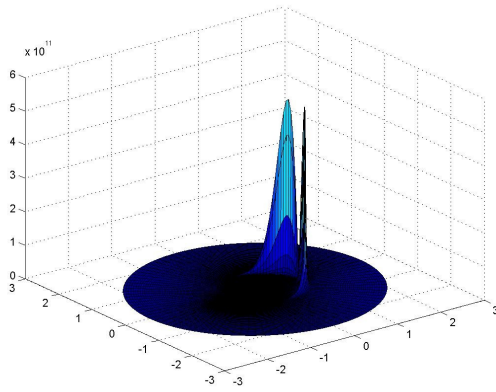


Ilustración 1: Solución para las dimensiones compactadas

La solución para las dimensiones extendidas proviene de la ecuación $\frac{\nabla_{3D}^2 F}{F} + \beta^2 = 0$

Si consideramos un movimiento uniforme a lo largo del eje Z se propone la siguiente solución:

$$\text{Si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \lambda_{\text{compton}} \rightarrow F = C_4 \text{Sen}(\beta z)$$

$$\text{Si } \sqrt{x^2 + y^2} > \lambda_{\text{compton}} \rightarrow F = C_5 \text{Sen}(\beta z) \cdot \log C_6 \sqrt{x^2 + y^2}$$

Es decir, el producto de una onda plana por un potencial bidimensional en el plano perpendicular al movimiento.

Si observamos una partícula de frente nos aparece como una fuente de campo gravitatorio y eléctrico. Pero visto transversalmente al movimiento aparece como una onda.

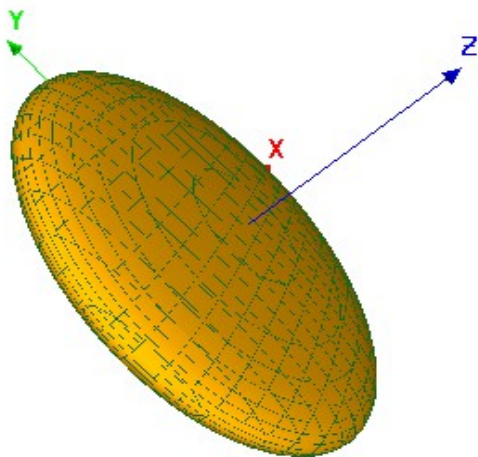


Ilustración 2: Orbital que representa un electrón libre con movimiento uniforme a lo largo del eje z.

Es de observar que únicamente se trata de una isosuperficie. La partícula se extiende en el plano XY, pero se encuentra comprimida por efecto del movimiento en el eje Z.

Esta solución sugiere la posibilidad de que las partículas elementales sean en realidad ondas gravitatorias, pero para que esto pueda ser creíble deberían poseer al menos otras dos características, la posibilidad de interactuar entre ellas y la posesión de masa inercial.

En cuanto a la posesión de masa inercial se demostró que la energía de una onda que se desplace por una guía-onda es igual a:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}}, \text{ donde } E_0 \text{ representa la energía a la}$$

frecuencia de corte y v_g la velocidad de grupo. Solo nos queda por tanto estudiar los posibles mecanismos de interacción entre ondas gravitatorias.

2. Mecanismos de interacción entre ondas.

Aunque normalmente se considera que las ondas no interactúan entre sí en el mismo sentido en el que interactúan 2 partículas, por ejemplo, la realidad es que la existencia de efectos no lineales puede modificar el medio en el que se transmiten las ondas, especialmente en el caso de ondas estacionarias. Para poder profundizar más en estos conceptos acudiremos a analogías mecánicas. Observemos las ondas estacionarias que se producen en una cuerda tensa.

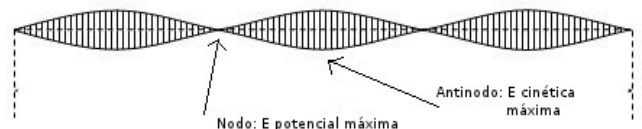


Ilustración 3: Ondas estacionarias en una cuerda

La expresión de la Energía cinética es:

$$E_c = 1/2 \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = 1/2 \mu (\omega A \text{sen}(kx) \cos(\omega t))^2$$

mientras que la energía potencial es:

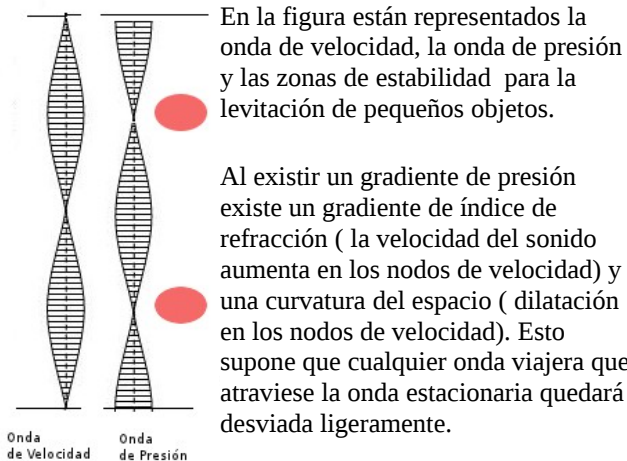
$$E_p = 1/2 T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 1/2 T (K \text{Acos}(kx) \text{sen}(\omega t))^2$$

Es fácil ver que se encuentran desfasados $\pi/2$. En los antinodos la energía cinética es máxima, pero su energía potencial es cero, es decir la cuerda no se deforma, sin embargo en los nodos la energía cinética se anula, mientras que la energía potencial se hace máxima. Esto producirá en la cuerda dos efectos:

- Variación de la longitud media (Se estira) → **Curvatura del espacio.**
- Variación de la tensión media (Aumenta) → **Variación velocidad de transmisión de las ondas.**

Otra analogía que puede considerarse es el sonido (onda longitudinal) donde también es posible observar dos ondas desfasadas entre sí $\pi/2$, la de presión y la de velocidad. En los nodos de la onda de velocidad la presión media es máxima, mientras que en los antinodos de la onda de

velocidad la presión media es mínima. Este efecto permite la levitación acústica.



En el caso de las ondas gravitatorias y debido a que la solución presenta energía negativa los efectos serán contrarios, es decir:

- Disminución de la velocidad de propagación de las ondas.
- Contracción del espacio.

La solución de Schwarzschild para las ecuaciones de campo de Einstein nos proporciona los 2 efectos:

- Contracción del espacio: $r' = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} r$
- Ralentización del tiempo $t' = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}} t$

donde $r_0 = \frac{2Gm}{r}$

La ralentización del tiempo supone de hecho la creación de un gradiente de índice de refracción, ya que cuanto más lento avanza el tiempo menos velocidad efectiva presenta la luz en relación a un punto situado en el infinito. En realidad si se acepta que todo está formado por ondas no podemos distinguir entre una ralentización del tiempo o una disminución de la velocidad de propagación de las perturbaciones.

Es de observar que este efecto no implicaría una variación de la velocidad de luz en el vacío absoluto, sino una disminución de la velocidad de la luz al atravesar una partícula-pulsación, al igual que la velocidad de la luz disminuye al atravesar diferentes medios.

Supongamos una partícula-pulsación inmóvil en un campo gravitatorio. Si utilizamos la aproximación de rayo podemos calcular su trayectoria con relativa facilidad; Si consideramos que debido a su inmovilidad la curvatura del espacio no debe ser tenida en cuenta podemos estimar ahora el índice de refracción aparente debido a la dilatación

gravitatoria del tiempo, que será igual al cociente entre la velocidad del tiempo en el infinito y la velocidad del tiempo en el punto a estudiar:

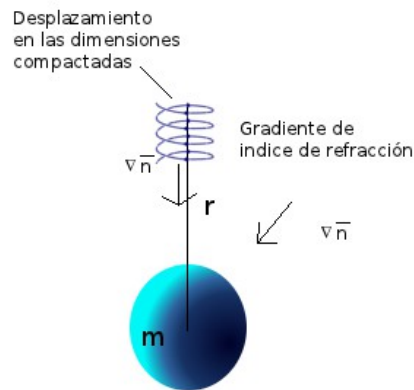


Ilustración 4: Pulsación en campo gravitatorio débil

$$n(r) = \frac{c}{v} = \frac{t}{t'} = \frac{t}{t \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}$$

Una vez conocida la ley que rige n en función de r resulta sencillo calcular el radio de curvatura que presentará cualquier tipo de radiación al transmitirse en dicho medio.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dR} \ln(n) = \frac{1}{n} \frac{dn}{dN} = \frac{1}{n} \nabla \vec{n} \cdot \vec{N} \quad \text{donde}$$

$\rho \equiv$ radio de curvatura, $N \equiv$ Normal al rayo.

Debido a la simetría esférica del problema el gradiente de n será:

$$\nabla \vec{n} = \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1/2} = \frac{-1}{2} \frac{r_0}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-3/2}$$

Sustituyendo nos queda:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}} \left[\frac{-1}{2} \frac{r_0}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-3/2} \right] \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \vec{N}$$

simplificando y teniendo en cuenta que por definición

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 r}{ds^2} \quad \text{podemos escribir:}$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{-1}{2} \frac{r_0}{r^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \vec{N}$$

Para el caso de una partícula inmóvil en la superficie de la Tierra se pueden hacer las siguientes simplificaciones:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} \simeq 1, \quad \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \vec{N} \simeq 1$$

Luego nos queda:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{-1}{2} \frac{r_0}{r^2}$$

Si tenemos en cuenta que el rayo avanza a la velocidad de la luz es posible escribir:

$$s = ct; \frac{ds}{dt} = c; \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

y aplicando la regla de la cadena para convertir la derivada con respecto al arco en derivada con respecto al tiempo

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{dr}{ds} \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 r}{ds^2} \cdot c^2$$

Sustituyendo:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \frac{1}{c^2} = \frac{-1}{2} \frac{2GM}{c^2 r^2} \rightarrow \boxed{\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{GM}{r^2} = g}$$
 obteniéndose

la ecuación de Newton.

Es destacable que en el caso de partículas no estáticas sería necesario tener en cuenta la contracción del espacio.

Otro posible efecto no lineal consiste en el arrastre del fluido en la dirección de propagación de la onda (p.e. streaming acústico)

Este arrastre proporciona una explicación intuitiva de las fuerzas que aparecen entre corrientes de masa paralelas.

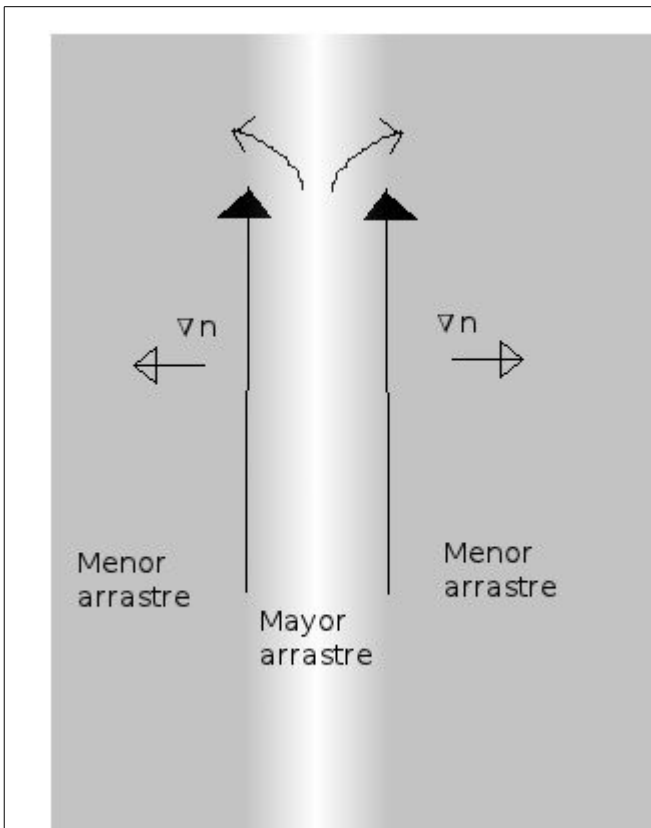


Ilustración 5: Fuerza aparente de repulsión

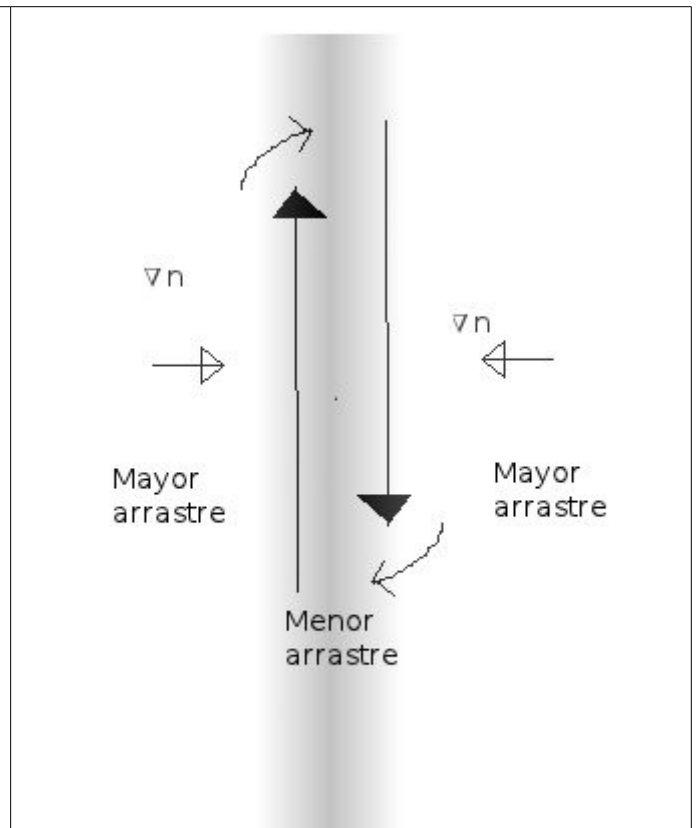


Ilustración 6: Fuerza aparente de atracción

La solución de Kerr a las ecuaciones de campo de Einstein proporciona una expresión analítica para este efecto, el cual es conocido en relatividad como “frame-dragging” o arrastre de marco.

La velocidad angular de arrastre del espacio-tiempo en el plano ecuatorial de una masa en rotación es:

$$\omega = \frac{\Phi}{t} = \frac{2mra}{(r^2 + a^2)^2} \quad \text{donde} \quad m \equiv \text{masa}, r \equiv \text{radio}, a \equiv \frac{J}{mc}$$

La velocidad lineal de arrastre será por tanto

$$v = \omega \cdot r = \frac{2mr^2 a}{(r^2 + a^2)^2} \approx \frac{\text{Constante}}{r^2}$$

De hecho en la métrica de Kerr viene implícito uno de los postulados de esta tesis, en efecto si consideramos la solución de luz estacionaria para un electrón nos quedaría:

$$r = \frac{Gm}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{Gm}{c^2} \right)^2 - a^2}$$

Como $a \gg \frac{Gm}{c^2}$ entonces podemos escribir:

$$r = ai = \frac{J}{mc} i = \frac{\hbar/2}{mc} i = \frac{\hbar}{2mc} i = \xi_0 i$$

Es de observar que el carácter imaginario del radio puede interpretarse como una dirección perpendicular a todas las demás.

3. Conclusiones.

Se ha mostrado como las pulsaciones gravitatorias que se desplacen en un espacio-tiempo hexadimensional de curvatura anisotrópica presentan todas las características de una partícula elemental:

- Vistas frontalmente aparecen como **fuentes de campo gravitatorio y eléctrico**.
- Vistas transversalmente al movimiento aparecen como **ondas planas**.
- Al tratarse de ondas guiadas por la curvatura de las dimensiones compactadas su velocidad de grupo es dependiente de su energía mediante la siguiente relación:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_g}{c}\right)^2}} .$$

Es decir, el guiado provoca la aparición de la **masa inercial**.

- Pueden interactuar entre ellas mediante tres mecanismos, la alteración del índice de refracción aparente (**dilatación del tiempo**), la contracción del espacio (**curvatura del espacio**) y el arrastre del medio de propagación (**arrastre de marco**). De todos estos efectos se han proporcionado ejemplos mecánicos y posteriormente han sido relacionados con las métricas de Schwarzschild y Kerr.

Como demostración de estas ideas se calcula la aceleración que presentaría una partícula-pulsación inmersa en un campo gravitatorio débil, cuyo valor coincide con la teoría de Newton.

Es notable que aunque al considerar a la materia como ondas gravitatorias no se presupone la existencia de un medio sobre el que propagarse estas ondas(ya queramos llamarlo espacio-tiempo o éter) sí que permite reinterpretar el experimento de Michelson-Morley en el sentido en que al postular que toda la materia y por tanto también la Tierra está formada por ondas gravitatorias no debería existir el llamado “viento de eter”, siendo la velocidad de la luz no ya la velocidad máxima posible en cada lugar y momento, sino la única velocidad posible cada lugar y momento.