Cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de un número dado

Datos del autor

Nombres y apellido: Germán Andrés Paz

Lugar de nacimiento: Rosario (Código Postal 2000), Santa Fe, Argentina

Correo electrónico: germanpaz_ar@hotmail.com

=========0=========

Índice

Introducción

Este trabajo explica la solución al problema de cómo calcular la cantidad de números primos que hay por debajo de un número natural dado. Georg Riemann, quien fue uno de los grandes matemáticos del siglo pasado, descubrió que este problema estaba muy relacionado con el comportamiento de una función que recibe el nombre de función *Zeta de Riemann*.

En este trabajo no se ha hecho nada relacionado con la función *Zeta de Riemann*, es decir, no se ha trabajado con la misma. Sin embargo, se le ha dado una solución al problema mencionado anteriormente trabajando siempre con números naturales. Cabe aclarar que algunas veces el número 0 es considerado un número natural, y otras veces no. Por esta razón y también debido a la poca importancia que el 0 tendrá en los cálculos que se realizarán, en este trabajo se optó por no considerar a este número un número natural.

No se explicará directamente al principio cómo es que se calcula la cantidad de números primos que hay por debajo de un determinado número, sino que primero se desarrollarán temas relacionados con este problema, los cuales llevarán a la solución del mismo. Además, se podrá ver que el procedimiento para calcular cuántos números primos hay por debajo de un número natural dado es más complejo cuanto más grande es ese número natural.

Por otra parte, en este trabajo se utilizará una simbología especial para representar distintas cantidades. Por ejemplo, la letra P significará "cantidad de números primos" y la letra C significará "cantidad de números compuestos", y para simbolizar la cantidad de números primos o la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número determinado, se escribirá a ese número encima de la letra P o encima de la letra C. Así, la cantidad de números primos que hay, por ejemplo, por debajo de 10 se simbolizará por $\overset{10}{P}$, y la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10 se simbolizará por $\overset{10}{C}$. También se utilizarán los símbolos T_1, T_2, T_3, T_4, etcétera, los cuales significan, respectivamente, "total uno", "total dos", "total tres", "total cuatro", etcétera.

Se llamará "total uno de un número natural" a la suma de las cantidades que se obtienen al calcular para todo número primo que esté por debajo de la raíz cuadrada de ese número natural la cantidad de números compuestos divisibles por él que hay por debajo del mencionado número natural. Así, el "total uno de 10", por ejemplo, será (teniendo en cuenta que los números primos que están por debajo de $\sqrt{10}$ son el 2 y el 3) la suma de la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10 y la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10. Para simbolizar al *total uno* de un número determinado, se escribirá a ese número encima del símbolo T_1. Así, el "total uno de 10", por ejemplo, se simbolizará por $\overset{10}{T_1}$.

Es bastante difícil explicar a qué se llamará "total dos", "total tres", "total cuatro", etcétera "de un número natural". Sin embargo, en *Cálculo de la cantidad de* *números compuestos que hay por debajo de un número dado* (página 29) se podrá ver claramente qué cantidades representarán los símbolos T_2, T_3, T_4, etcétera. Para simbolizar al *total dos* de un cierto número, se escribirá a ese número encima del símbolo T_2. Así, el “total dos de 17”, por ejemplo, se simbolizará por $\overset{17}{T_2}$. Y la misma regla se seguirá para los demás “totales”: la letra T significará “total”, el subíndice que esta letra tenga dirá si el total es un total uno, un total dos, un total tres, un total cuatro, etcétera, y el número que dicha letra tenga encima será el número al que pertenece el total.

La fórmula $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$: el primer paso hacia la solución

Para comenzar, veamos la siguiente tabla de los números naturales del 1 al 10. En la misma se pueden ver los números primos que están por debajo de 10 (en rojo) y los números compuestos que están por debajo de 10 (en verde).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Ahora, contemos cuántos números primos y cuántos números compuestos hay por debajo del 10 y veamos cuáles son esos números primos y esos números compuestos.

Por debajo del 10 hay:

- cuatro números primos, los cuales son el 2, el 3, el 5 y el 7.
- cuatro números compuestos, los cuales son el 4, el 6, el 8 y el 9.

Puede ser lógico pensar que **si a 10 se le resta la cantidad de números compuestos que tiene por debajo, se obtiene como resultado la cantidad de números primos que tiene por debajo**. Veamos si esto es cierto o falso. Llamemos $\overset{10}{P}$ a la cantidad de números primos que hay por debajo de 10 y $\overset{10}{C}$ a la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10. Tenemos, entonces, lo siguiente:

$$\overset{10}{P} = \overset{10}{C} = 4$$

El enunciado en negrita que aparece anteriormente sería correcto si $10 - \overset{10}{C}$ fuera igual a $\overset{10}{P}$, pero

$$10 - \overset{10}{C} \neq \overset{10}{P}$$

porque

$$10 - 4 \neq 4$$

ya que

$$6 \neq 4$$

Por lo tanto, el enunciado en letra negrita que aparece anteriormente es incorrecto. Lo que ocurre es que al efectuar $10 - \overset{10}{C}$ “quedan incluidos” en la cantidad de números primos que hay por debajo de 10 ($\overset{10}{P}$) **dos** números que no son números primos menores que 10. Estos dos números son el 1 y el 10.

$$\begin{array}{cccccccccc} \downarrow & & & & & & & & & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & \cancel{4} & 5 & \cancel{6} & 7 & \cancel{8} & \cancel{9} & 10 \end{array}$$

- El número 1 no es ni primo ni compuesto.
- El 10 ni es un número primo, ni es menor que 10.

La expresión $10 - \overset{10}{C} = \overset{10}{P}$ es, por lo tanto, incorrecta. En cambio, sí es correcto decir que $10 - \overset{10}{C} - \boldsymbol{2}$ es igual a $\overset{10}{P}$. Como se puede ver, se le resta $\boldsymbol{2}$ a $10 - \overset{10}{C}$ para obtener $\overset{10}{P}$ porque, como se dijo antes, **dos** números que no son números primos menores que 10 son los que quedan incluidos en la cantidad de números primos que hay por debajo de 10 ($\overset{10}{P}$) al efectuar $10 - \overset{10}{C}$.

Se tiene entonces que $10 - \overset{10}{C} - 2 = \overset{10}{P}$. Dicho de otra forma, tenemos que

$$\overset{10}{P} = 10 - \overset{10}{C} - 2$$

Esta ecuación es correcta, porque

$$4 = 10 - 4 - 2$$

ya que

$$4 = 4$$

El número 10 es tan sólo uno de los infinitos números naturales que existen, y esto que ocurre con este número puede ser aplicado a cualquier otro número natural distinto de 1; es decir, si *n* es un número natural mayor que 1∗, $\overset{n}{P}$ la cantidad de números primos que hay por debajo de *n* y $\overset{n}{C}$ la cantidad de números compuestos que hay por debajo de *n*, se tiene una ecuación muy importante:

$$\overset{n}{\mathrm{P}} = \mathrm{n} - \overset{n}{\mathrm{C}} - 2$$

Como se puede ver, esta fórmula es una forma indirecta de calcular la cantidad de números primos que hay por debajo de *n* ($\overset{n}{P}$), ya que para averiguar $\overset{n}{P}$ hace falta conocer primero el valor de $\overset{n}{C}$. Por lo tanto, cuando se quiera calcular la cantidad de números primos que hay por debajo de un número cualquiera, habrá que calcular primero la cantidad de números compuestos que hay por debajo de ese número y luego, recurriendo a la fórmula $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$, se podrá averiguar cuál es la cantidad de números primos que hay por debajo de ese número. Pero, ¿cómo calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de cualquier número? Ése es un tema que veremos más adelante en *Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número dado*.

∗ Aclaración: *n* tiene que ser mayor que 1 porque el 1 es el único número natural con el cual no se cumple la igualdad $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$, puesto que $\overset{1}{\mathrm{P}} = 0$, mientras que $1 - \overset{1}{\mathrm{C}} - 2 = -1$.

Los números naturales y sus divisores

Como ya se sabe, todo número natural es divisible por sí mismo. Además, se sabe que los números naturales distintos de 1 se clasifican en números primos (aquellos números naturales que sólo son divisibles por sí mismos y por 1) y números compuestos (aquellos números naturales que son divisibles por al menos un número natural distinto de sí mismos y de 1), y que el número 1 no es ni primo ni compuesto.

Ahora, tengamos en cuenta estas dos cosas:

1 • Todo número compuesto puede ser expresado como producto de factores primos (y estos factores son únicos). Esto significa que todo número compuesto es igual, además de ser igual al resultado de su multiplicación por 1, al resultado de multiplicar a un cierto número primo por sí mismo varias veces (por ejemplo, 4 = 2 * 2; 8 = 2 * 2 * 2; 9 = 3 * 3; ...) o a un producto de factores primos que no son todos iguales (por ejemplo, 6 = 2 * 3; 10 = 2 * 5; 12 = 2 * 2 * 3; ...).

2 • Si un número natural es igual al producto de dos o más números naturales, ese número natural es, obviamente, divisible por todos y cada uno de esos números naturales.

De estos dos puntos se deduce que todo número compuesto es divisible por al menos un número primo. En otras palabras, todo número compuesto tiene al menos un divisor primo. Esto quiere decir que de los divisores de un número compuesto los más importantes son los divisores primos.

Ahora, podemos aplicar lo dicho en el punto dos a los números primos (porque los números primos son números naturales), es decir, podemos afirmar que si un número natural es igual al producto de dos o más números primos, ese número natural es, obviamente, divisible por todos y cada uno de esos números primos. Si tenemos en cuenta esto y que ningún número primo es, como ya se sabe, múltiplo de otro número primo, podemos decir que si multiplicamos a cualquier número primo por sí mismo varias veces, siempre obtenemos, como resultado de esa multiplicación, un número compuesto cuyo único divisor primo es ese número primo. Multiplicar a un número por sí mismo varias veces significa elevar ese número a cualquier número natural distinto de 1, por lo que lo dicho anteriormente se puede decir así:

Si elevamos cualquier número primo a cualquier número natural distinto de 1, siempre obtenemos, como resultado de esa potencia, un número compuesto cuyo único divisor primo es ese número primo.

Para entender mejor todas estas explicaciones, consideremos un número primo cualquiera y llamémoslo *p*. Si elevamos *p* a cualquier número natural distinto de 1, obtenemos, como resultado de esa potencia, un número compuesto cuyo único divisor primo es *p*.

A continuación, algunos ejemplos con números.

Números compuestos cuyo único divisor primo es...

... 2 $\longrightarrow$ 2^2; 2^3; 2^4; ... $\longrightarrow$ o sea $\longrightarrow$ 4; 8; 16; ...
... 3 $\longrightarrow$ 3^2; 3^3; 3^4; ... $\longrightarrow$ o sea $\longrightarrow$ 9; 27; 81; ...
... 5 $\longrightarrow$ 5^2; 5^3; 5^4; ... $\longrightarrow$ o sea $\longrightarrow$ 25; 125; 625; ...

Como se puede ver, con el cuadrado de cada número primo empieza la lista infinita de números compuestos cuyo único divisor primo es ese número primo. Ésta es una importante conclusión que nos servirá, al igual que lo explicado anteriormente, para poder establecer un procedimiento que nos permita saber si un determinado número natural es primo o compuesto. Dicho procedimiento será explicado a continuación en *¿Cómo saber si un número natural es primo o compuesto?*

¿Cómo saber si un número natural es primo o compuesto?

Es necesario tener en cuenta dos cosas que ya fueron dichas en el tema anterior:

1 • Todo número compuesto es divisible por al menos un número primo.

Sería incorrecto decir simplemente que un número natural que tiene un divisor primo es un número compuesto, ya que todo número primo tiene un divisor primo que es él mismo. Entonces, teniendo en cuenta esto y el hecho de que el número 1 no tiene ningún divisor primo por debajo y no es ni primo ni compuesto, podemos decir que un número natural distinto de 1 es primo si no tiene ningún divisor primo por debajo.

2 • Con el cuadrado de cada número primo empieza la lista infinita de números compuestos cuyo único divisor primo es ese número primo.

Este segundo punto nos dice que los cuadrados de los números primos son números importantes que deben ser tenidos en cuenta.

Ahora, tengamos en cuenta los dos puntos de arriba, sobre todo el punto dos, para poder elaborar explicaciones que nos permitan llegar a una conclusión importante de este tema.

El primer número primo es el 2, razón por la cual el primer número compuesto, el 4 ($4 = 2^2$), es múltiplo de 2. La lista de números compuestos comienza, entonces, con el 4, y se prolonga hasta el infinito.

El segundo número primo es el 3. Todo número compuesto menor que 3^2 ($3^2 = 9$) es, al menos, divisible por el número primo 2, ya que recién con el 3^2 empieza la lista infinita de números compuestos cuyo único divisor primo es el 3, lo que significa que recién a partir del 3^2 un número natural puede ser compuesto sin ser necesariamente divisible por 2. Teniendo en cuenta esto y el hecho de que la lista infinita de números compuestos comienza con el 4 ($4 = 2^2$), es correcto decir que para saber si un número natural mayor que 2^2 y menor que 3^2 es primo, hay que dividirlo por 2. Si ese número natural es divisible por 2, es compuesto; si no es divisible por 2, es primo. Esto significa que un número natural ubicado entre 2^2 y 3^2 es primo si no es divisible por 2.

Además, se puede observar que todo número natural ubicado entre 2^2 y 3^2 tiene por debajo, obviamente, al cuadrado del número primo 2.

1	2	3	$\mathbf{2^2}$	5	6	7	8	$\mathbf{3^2}$
			(4)					(9)

El tercer número primo es el 5. Todo número compuesto menor que 5^2 ($5^2 = 25$) es, al menos, divisible por el número primo 2 o por el número primo 3, ya que recién con el 5^2 empieza la lista infinita de números compuestos cuyo único divisor primo es el 5, lo que significa que recién a partir del 5^2 un número natural puede ser compuesto y, al mismo tiempo, no ser divisible ni por 2 ni por 3. Teniendo en cuenta esto y el hecho de que un número natural ubicado entre 2^2 y 3^2 es primo si no es divisible por 2, es correcto decir que para saber si un número natural ubicado entre 3^2 y 5^2 es primo, hay que dividirlo por 2 y por 3. Si ese número natural es divisible por al menos uno de los números primos 2 y 3, es compuesto; de lo contrario, si no es divisible ni por 2 ni por 3, es primo. Esto significa que un número natural ubicado entre 3^2 y 5^2 es primo si no es divisible ni por 2 ni por 3.

Además, se puede observar que todo número natural ubicado entre 3^2 y 5^2 tiene por debajo, obviamente, a los cuadrados de los números primos 2 y 3.

1 2 3 2^2 5 6 7 8 $\mathbf{3^2}$ 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 $\mathbf{5^2}$
(4) **(9)** **(25)**

El cuarto número primo es el 7. Todo número compuesto menor que 7^2 ($7^2 = 49$) es, al menos, divisible por uno de los números primos 2, 3 y 5, ya que recién con el 7^2 empieza la lista infinita de números compuestos cuyo único divisor primo es el 7, lo que significa que recién a partir del 7^2 un número natural puede ser compuesto y, al mismo tiempo, no ser divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5. Teniendo en cuenta esto, el hecho de que un número natural ubicado entre 2^2 y 3^2 es primo si no es divisible por 2 y el hecho de que un número natural ubicado entre 3^2 y 5^2 es primo si no es divisible ni por 2 ni por 3, es correcto decir que para saber si un número natural ubicado entre 5^2 y 7^2 es primo, hay que dividirlo por 2, por 3 y por 5. Si ese número natural es divisible por al menos uno de los números primos 2, 3 y 5, es compuesto; de lo contrario, si no es divisible por ninguno de estos números primos, es primo. Esto significa que un número natural ubicado entre 5^2 y 7^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5.

Además, se puede observar que todo número natural ubicado entre 5^2 y 7^2 tiene por debajo, obviamente, a los cuadrados de los números primos 2, 3 y 5.

1 2 3 $\mathbf{2^2}$ 5 6 7 8 $\mathbf{3^2}$ 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 $\mathbf{5^2}$ 26 27 28 29
(4) **(9)** **(25)**

30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 $\mathbf{7^2}$
(49)

En conclusión, pudimos ver que **todo número natural mayor que 4 que no es el cuadrado de ningún número primo, es primo si no es divisible por ninguno de los números primos cuyos cuadrados están por debajo de él**.

Es correcto afirmar que si el cuadrado de un número natural *a* está por debajo de otro número natural *b*, entonces *a* está por debajo de $\sqrt{b}$, como se demuestra a continuación.

Se tiene que

$$a^2 < b$$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros de la inecuación de arriba, se tiene que

$$\sqrt{a^2} < \sqrt{b}$$

lo que significa que

$$a < \sqrt{b}$$

Como los números primos son números naturales, podemos aplicar esto al enunciado en negrita de la página doce reformulándolo de la siguiente manera:

Un número natural mayor que 4 que no es el cuadrado de ningún número primo es primo si no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de su raíz cuadrada.

Decir que un número natural no es el cuadrado de ningún número primo es lo mismo que decir que su raíz cuadrada no es igual a ningún número primo. El enunciado de arriba nos dice, entonces, que un número natural mayor que 4 es primo si su raíz cuadrada no es ningún número primo y si no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de dicha raíz cuadrada (debe cumplir con ambas condiciones para ser primo).

Supongamos que *n* es un número natural mayor que 4. De acuerdo con lo dicho anteriormente, si quisiéramos averiguar si *n* es primo o no, tendríamos que calcular $\sqrt{n}$. Si $\sqrt{n}$ es un número primo, se sabe de entrada que *n* es compuesto; si $\sqrt{n}$ no es ningún número primo, tendríamos que dividir a *n* por todos y cada uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$. Si *n* es divisible por al menos uno de esos números primos, *n* es compuesto; si *n* no es divisible por ninguno de esos números primos, *n* es primo. Sin embargo, que $\sqrt{n}$ no sea un número primo puede significar que $\sqrt{n}$ sea un número compuesto, y un número natural cuya raíz cuadrada es un número compuesto es compuesto, puesto que el cuadrado de todo número compuesto es un número compuesto. Entonces, si $\sqrt{n}$ es un número compuesto, se sabe de entrada que n es compuesto, por lo cual, en este caso, no hará falta dividir a n por ninguno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ para saber si n es primo o no.

Por otra parte, la raíz cuadrada de todo número natural mayor que 4 puede ser un número primo o compuesto o un número decimal, y tanto los números primos como los números compuestos son números enteros. Esto significa que la raíz cuadrada de todo número natural mayor que 4 puede ser un número entero o un número decimal (al igual que las raíces cuadradas de los números naturales 1, 2, 3 y 4). Por lo tanto, si tenemos en cuenta todo lo explicado en los párrafos anteriores, podemos decir que un número natural mayor que 4 es primo si su raíz cuadrada no es un número entero y si no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de dicha raíz cuadrada. Si la raíz cuadrada de un número natural no es un número entero, entonces la misma es un número decimal, por lo cual lo que acabamos de decir se puede decir así:

Un número natural mayor que 4 es primo si su raíz cuadrada es un número decimal y si no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de dicha raíz cuadrada.

Aunque este enunciado sólo habla de números naturales mayores que 4, también podría ser aplicado al número 4, ya que si se aplicara a este número natural, según el mismo el 4 sería un número compuesto, lo cual es correcto. No obstante, este enunciado no podría ser aplicado ni al 1, ni al 2, ni al 3, ya que estos números naturales no tienen ningún número primo por debajo de sus raíces cuadradas ($\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{2} = 1{,}41...$; $\sqrt{3} = 1{,}73...$).

Entonces, como conclusión final de este tema decimos lo siguiente:

Un número natural mayor que 3 es primo si su raíz cuadrada es un número decimal y si no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de dicha raíz cuadrada.

Por consiguiente, si x es un número natural mayor que 3 y queremos saber si x es primo o compuesto, tenemos que calcular $\sqrt{x}$.

- Si $\sqrt{x}$ es un número entero, x es compuesto.

- Si $\sqrt{x}$ es un número decimal, tenemos que dividir a x por todos y cada uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{x}$.

_ Si x es divisible por al menos uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{x}$, *x* es compuesto.

_ Si *x* no es divisible por ninguno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{x}$, *x* es primo.

Ejemplos

• ¿El número 9 es primo o compuesto?

Calculamos $\sqrt{9}$.

Como $\sqrt{9}$ es un número entero ($\sqrt{9} = 3$), el 9 es compuesto.

• ¿El número 15 es primo o compuesto?

Calculamos $\sqrt{15}$.

Como $\sqrt{15}$ es un número decimal ($\sqrt{15} = 3,87\ldots$), tenemos que dividir al 15 por todos y cada uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{15}$ (estos números primos son el 2 y el 3).

Como el 15 es divisible por al menos uno de esos números primos (es divisible por 3), el 15 es compuesto.

• ¿El número 31 es primo o compuesto?

Calculamos $\sqrt{31}$.

Como $\sqrt{31}$ es un número decimal ($\sqrt{31} = 5,56\ldots$), tenemos que dividir al 31 por todos y cada uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{31}$ (estos números primos son el 2, el 3 y el 5).

Como el 31 no es divisible por ninguno de esos números primos, el 31 es primo.

Lista infinita de números primos

Conocemos ya el procedimiento que nos permite ver si un cierto número natural mayor que 3 es primo o compuesto. Podemos aplicar dicho procedimiento a la construcción de una lista ordenada de números primos infinitamente grande, es decir, tan grande como se quiera.

Para realizar dicha lista sólo hace falta saber que el 2 y el 3 son números primos. Estos dos números forman una pequeña lista de partida a la que llamaremos "lista inicial" o "LI".

La LI es tomada como base para construir una lista más extensa y ésta, a su vez, para construir otra todavía más extensa, y así sucesivamente.

Lista inicial ⟶ 2; 3

Ahora, sabemos que un número natural ubicado entre 2^2 y 3^2, o sea, entre 4 y 9, es primo si no es divisible por 2.

Escribamos a continuación los números naturales ubicados entre 2^2 y 3^2 y dividamos a todos y cada uno de ellos por 2, para ver cuáles de ellos no son divisibles por este número primo.

Números naturales entre 2^2 y 3^2

- **5** ⟶ 5/2 = 2,5
- **6** ⟶ 6/2 = 3
- **7** ⟶ 7/2 = 3,5
- **8** ⟶ 8/2 = 4

Como se puede ver, los números naturales ubicados entre 2^2 y 3^2 que no son divisibles por 2 son el 5 y el 7 (porque su división por 2 da como resultado un número decimal). Éstos son números primos que se agregan a la LI, la cual queda conformada, entonces, por los números primos 2, 3, 5 y 7.

Lista inicial extendida ⟶ 2; 3; 5; 7

Ahora, un número natural ubicado entre 3^2 y 5^2, o sea, entre 9 y 25, es primo si no es divisible ni por 2 ni por 3, y un número natural ubicado entre 5^2 y 7^2, o sea, entre 25 y 49, es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5.

Escribamos a continuación los números naturales ubicados entre 3^2 y 5^2 y dividamos a todos y cada uno de ellos por 2 y por 3, para ver cuáles de ellos no son divisibles por ninguno de estos dos números primos. Escribamos, además, los números naturales ubicados entre 5^2 y 7^2 y dividamos a todos y cada uno de ellos por 2, por 3 y por 5, para ver cuáles de ellos no son divisibles por ninguno de estos tres números primos.

Números naturales entre 3^2 y 5^2

- **10** ⟶ 10/2 = 5; 10/3 = 3,33...
- **11** ⟶ 11/2 = 5,5; 11/3 = 3,66...
- **12** ⟶ 12/2 = 6; 12/3 = 4
- **13** ⟶ 13/2 = 6,5; 13/3 = 4,33...
- **14** ⟶ 14/2 = 7; 14/3 = 4,66...
- **15** ⟶ 15/2 = 7,5; 15/3 = 5
- **16** ⟶ 16/2 = 8; 16/3 = 5,33...
- **17** ⟶ 17/2 = 8,5; 17/3 = 5,66...
- **18** ⟶ 18/2 = 9; 18/3 = 6
- **19** ⟶ 19/2 = 9,5; 19/3 = 6,33...
- **20** ⟶ 20/2 = 10; 20/3 = 6,66...
- **21** ⟶ 21/2 = 10,5; 21/3 = 7
- **22** ⟶ 22/2 = 11; 22/3 = 7,33...
- **23** ⟶ 23/2 = 11,5; 23/3 = 7,66...
- **24** ⟶ 24/2 = 12; 24/3 = 8

Números naturales entre 5^2 y 7^2

- **26** ⟶ 26/2 = 13; 26/3 = 8,66...; 26/5 = 5,2
- **27** ⟶ 27/2 = 13,5; 27/3 = 9; 27/5 = 5,4
- **28** ⟶ 28/2 = 14; 28/3 = 9,33...; 28/5 = 5,6
- **29** ⟶ 29/2 = 14,5; 29/3 = 9,66...; 29/5 = 5,8
- **30** ⟶ 30/2 = 15; 30/3 = 10; 30/5 = 6
- **31** ⟶ 31/2 = 15,5; 31/3 = 10,33...; 31/5 = 6,2
- **32** ⟶ 32/2 = 16; 32/3 = 10,66...; 32/5 = 6,4
- **33** ⟶ 33/2 = 16,5; 33/3 =11; 33/5 = 6,6
- **34** ⟶ 34/2 = 17; 34/3 = 11,33...; 34/5 = 6,8
- **35** ⟶ 35/2 = 17,5; 35/3 = 11,66...; 35/5 = 7
- **36** ⟶ 36/2 = 18; 36/3 = 12; 36/5 = 7,2
- **37** ⟶ 37/2 = 18,5; 37/3 = 12,33...; 37/5 = 7,4
- **38** ⟶ 38/2 = 19; 38/3 = 12,66...; 38/5 = 7,6
- **39** ⟶ 39/2 = 19,5; 39/3 = 13; 39/5 = 7,8

- **40** ⟶ 40/2 = 20; 40/3 = 13,33...; 40/5 = 8
- **41** ⟶ 41/2 = 20,5; 41/3 = 13,66...; 41/5 = 8,2
- **42** ⟶ 42/2 = 21; 42/3 = 14; 42/5 = 8,4
- **43** ⟶ 43/2 = 21,5; 43/3 = 14,33...; 43/5 = 8,6
- **44** ⟶ 44/2 = 22; 44/3 = 14,66...; 44/5 = 8,8
- **45** ⟶ 45/2 = 22,5; 45/3 = 15; 45/5 = 9
- **46** ⟶ 46/2 = 23; 46/3 = 15,33...; 46/5 = 9,2
- **47** ⟶ 47/2 = 23,5; 47/3 = 15,66...; 47/5 = 9,4
- **48** ⟶ 48/2 = 24; 48/3 = 16; 48/5 = 9,6

Como se puede ver, los números naturales ubicados entre 3^2 y 5^2 que no son divisibles ni por 2 ni por 3 son el 11, el 13, el 17, el 19 y el 23, y los números naturales ubicados entre 5^2 y 7^2 que no son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5 son el 29, el 31, el 37, el 41, el 43 y el 47. Por lo tanto, el 11, el 13, el 17, el 19, el 23, el 29, el 31, el 37, el 41, el 43 y el 47 son números primos que se agregan a la LI, la cual queda conformada, entonces, por los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 y 47.

Lista inicial extendida ⟶ 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47

Ahora, se sabe lo siguiente:

- Un número natural ubicado entre 7^2 y 11^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7.
- Un número natural ubicado entre 11^2 y 13^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11.
- Un número natural ubicado entre 13^2 y 17^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13.
- Un número natural ubicado entre 17^2 y 19^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17.
- Un número natural ubicado entre 19^2 y 23^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19.
- Un número natural ubicado entre 23^2 y 29^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23.

- Un número natural ubicado entre 29^2 y 31^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23, ni por 29.

- Un número natural ubicado entre 31^2 y 37^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23, ni por 29, ni por 31.

- Un número natural ubicado entre 37^2 y 41^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23, ni por 29, ni por 31, ni por 37.

- Un número natural ubicado entre 41^2 y 43^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23, ni por 29, ni por 31, ni por 37, ni por 41.

- Un número natural ubicado entre 43^2 y 47^2 es primo si no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5, ni por 7, ni por 11, ni por 13, ni por 17, ni por 19, ni por 23, ni por 29, ni por 31, ni por 37, ni por 41, ni por 43.

Con estos datos podemos seguir ampliando la lista de números primos, lo cual no se hará a continuación, pero todo el que quiera puede continuar de manera indefinida.

Más adelante nos daremos cuenta de cuál es la utilidad de este procedimiento para construir una lista ordenada de números primos tan grande como se quiera.

<u>Números naturales divisibles por *a* que hay por debajo de *b*</u>

Tanto este tema como el siguiente explican cosas que parecen ser obvias, pero que, como se verá luego, son de gran importancia para el cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de un número dado, razón por la cual serán igualmente explicadas aquí.

A continuación veremos cómo se calcula la cantidad de números naturales divisibles por un cierto número natural que hay por debajo de un determinado número natural.

Si *a* y *b* son números naturales y queremos saber cuántos números naturales divisibles por *a* hay por debajo de *b*, debemos hacer lo que se explica a continuación:

• Efectuamos b/a.

_ Si el resultado de *b/a* es un número entero, restamos *1* a dicho resultado.
_ Si el resultado de *b/a* es un número decimal, tomamos la parte entera de dicho resultado.

Ejemplos con números

1 • Queremos saber cuántos números naturales divisibles por 2 hay por debajo de 10.

• Efectuamos 10/2.

10/2 = 5 (número entero)

_ Como el resultado de *10/2* es un número entero, restamos *1* a dicho resultado.

5 – 1 = **4**

Obtenemos como resultado que por debajo de 10 hay **cuatro** números naturales divisibles por 2. Este resultado es correcto, pues dichos números naturales son el 2, el 4, el 6 y el 8.

2 • Queremos saber cuántos números naturales divisibles por 2 hay por debajo de 15.

• Efectuamos 15/2.

15/2 = 7,5 (número decimal)

_ Como el resultado de *15/2* es un número decimal, tomamos la parte entera de dicho resultado.

Obtenemos como resultado que por debajo de 15 hay **siete** números naturales divisibles por 2. Este resultado es correcto, pues dichos números naturales son el 2, el 4, el 6, el 8, el 10, el 12 y el 14.

<u>Números compuestos divisibles por *p* que hay por debajo de *n*</u>

A continuación veremos cómo se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por un cierto número primo que hay por debajo de un determinado número natural mayor que el mismo. Calcular dicha cantidad no es más que calcular la cantidad de números naturales distintos del mencionado número primo y divisibles por él que hay por debajo del mencionado número natural mayor que él.

De lo anterior se deduce que si *p* es un número primo y *n* un número natural mayor∗ que *p* y queremos saber cuántos números compuestos divisibles por *p* hay por debajo de *n*, debemos, en primer lugar, calcular la cantidad de números naturales divisibles por *p* que hay por debajo de *n*, y luego, restarle *1* al resultado que obtengamos, pues la cantidad a calcular excluye al propio *p*.

Entonces, conociendo ya el procedimiento que nos permite calcular la cantidad de números naturales divisibles por un cierto número natural que hay por debajo de un determinado número natural y teniendo en cuenta lo explicado en el párrafo anterior, podemos definir el procedimiento que nos permitirá calcular la cantidad de números compuestos divisibles por un cierto número primo que hay por debajo de un determinado número natural mayor que el mismo.

Si *p* es un número primo y *n* un número natural mayor que *p*, para calcular la cantidad de números compuestos divisibles por *p* que hay por debajo de *n*, tendremos que utilizar el siguiente procedimiento:

• Efectuamos n/p.

_ Si el resultado de *n/p* es un número entero, le restamos *2* al mismo.
_ Si el resultado de *n/p* es un número decimal, tomamos la parte entera de dicho resultado y le restamos *1*.

∗ Aclaración: *n* debe ser mayor que *p*, porque si *n* fuera igual o menor que *p*, al utilizar el procedimiento explicado arriba se obtendría como resultado – *1* (un número negativo), lo cual no tendría sentido.

Ejemplos con números

1 • Queremos saber cuántos números compuestos divisibles por 2 hay por debajo de 10.

• Efectuamos 10/2.

10/2 = 5 (número entero)

_ Como el resultado de *10/2* es un número entero, restamos *2* a dicho resultado.

5 – 2 = **3**

Obtenemos como resultado que por debajo de 10 hay **tres** números compuestos divisibles por 2. Este resultado es correcto, ya que dicho números compuestos son el 4, el 6 y el 8.

2 • Queremos saber cuántos números compuestos divisibles por 2 hay por debajo de 15.

• Efectuamos 15/2.

15/2 = *7*,5 (número decimal)

_ Como el resultado de *15/2* es un número decimal, tomamos la parte entera de dicho resultado y le restamos *1*.

7 – 1 = **6**

Obtenemos como resultado que por debajo de 15 hay **seis** números compuestos divisibles por 2. Este resultado es correcto, pues dichos números compuestos son el 4, el 6, el 8, el 10, el 12 y el 14.

Combinatoria

La solución al problema de cómo calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado está relacionada con la Combinatoria, ya que más adelante se podrá ver que para calcular dicha cantidad (algo fundamental para poder determinar, mediante la fórmula $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$, la cantidad de números primos que hay por debajo de ese número natural), una de las cosas que se tendrán que hacer es realizar combinaciones∗ con los números primos que estén por debajo de la raíz cuadrada de dicho número natural.

La **combinación** es uno de los principales conceptos estudiados por la Combinatoria. Al realizar **combinaciones**, se forman subconjuntos con los elementos de un conjunto finito dado, y dos de estos subconjuntos son distintos entre sí si difieren en la naturaleza y/o en el número de sus elementos, y no si difieren en el orden en que dichos elementos aparecen dentro de cada uno de ellos. De esto se deduce que dos combinaciones serán distintas si difieren en el número y/o en la naturaleza de sus elementos.

Resumiendo, si se tiene un conjunto de *n* elementos, se llama *combinación de orden r* formada a partir de este conjunto a toda reunión de *r* elementos tomados de entre los *n*, sin importar el orden en que dichos elementos aparecen. Si en una combinación hay al menos un elemento repetido, dicha combinación es una *combinación con repetición*; si los elementos de una combinación son todos distintos entre sí, la misma es una *combinación sin repetición*. El número de **combinaciones sin repetición** de orden *r* de un conjunto de *n* elementos se simboliza por $\overset{n}{\underset{r}{C}}$, y se calcula a partir de la siguiente fórmula:

$$\overset{n}{\underset{r}{C}} = n! / [r!\ (n - r)!]$$

A continuación se darán ejemplos en los cuales se realizarán todas las **combinaciones sin repetición** posibles de todos los órdenes posibles (salvo de orden uno) de los elementos de distintos conjuntos, y se explicará, además, cómo se realizaron las mismas. Como en una combinación no importa el orden en que aparezcan sus elementos, consideraremos a los mismos de menor a mayor, para una mejor comprensión. El conjunto del ejemplo uno tiene dos elementos; el del ejemplo dos, tres elementos; y el del ejemplo tres, cuatro elementos.

∗ Aclaración: más precisamente, se tendrán que realizar todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de los números primos que estén por debajo de la raíz cuadrada de ese número.

Ejemplo 1

Si se tiene un conjunto de dos elementos, siendo los mismos los números primos **2** y **3**, sólo se puede realizar una combinación sin repetición (que será, obviamente, de orden dos) de ellos:

- 2 ; 3

2 ; 3

Dicha combinación se realizó, simplemente, colocando juntos a los dos elementos.

Ejemplo 2

Si se tiene un conjunto de tres elementos, siendo los mismos los números primos **2**, **3** y **5**, se pueden realizar:

1 • tres combinaciones sin repetición de orden dos de estos tres elementos:

- 2 ; 3
- 2 ; 5
- 3 ; 5

2 ; 3 ; 5

Como se puede ver, para realizar las combinaciones anteriormente mencionadas, se colocó, en primer lugar, al primer elemento del gráfico (el número *2*) junto al segundo (el número *3*). Luego, se colocó al primer elemento del gráfico junto al tercero (el número *5*). Por último, se colocó al segundo elemento del gráfico junto al tercero.

2 • y una sola combinación sin repetición de orden tres de los elementos:

_ 2 ; 3 ; 5

2 ; 3 ; 5

Dicha combinación se realizó, simplemente, colocando juntos a los tres elementos.

Ejemplo 3

Si se tiene un conjunto de cuatro elementos, siendo los mismos los números primos 2, 3, 5 y 7, se pueden realizar:

1 • seis combinaciones sin repetición de orden dos de estos cuatro elementos:

_ 2 ; 3
_ 2 ; 5
_ 2 ; 7

_ 3 ; 5
_ 3 ; 7
_ 5 ; 7

2 ; 3 ; 5 ; 7

Como se puede ver, para realizar las combinaciones anteriormente mencionadas, se hizo lo siguiente:

a. En primer lugar, se colocó al primer elemento del gráfico (el número *2*) junto al segundo (el número *3*).

b. En segundo lugar, se colocó al primer elemento del gráfico junto al tercero (el número *5*).

c. En tercer lugar, se colocó al primer elemento del gráfico junto al cuarto (el número *7*).

d. Después, se colocó al segundo elemento del gráfico junto al tercero.

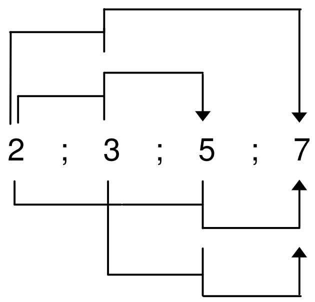
e. Luego, se colocó al segundo elemento del gráfico junto al cuarto.

f. Finalmente, se colocó al tercer elemento del gráfico junto al cuarto.

2 • cuatro combinaciones sin repetición de orden tres de los elementos:

_ 2 ; 3 ; 5
_ 2 ; 3 ; 7

_ 2 ; 5 ; 7
_ 3 ; 5 ; 7



Como se puede ver, para realizar las combinaciones mencionadas anteriormente, se hizo lo siguiente:

a. Se colocó al primer elemento del gráfico (el número *2*) junto al segundo (el número *3*), y a este último, a su vez, junto al tercero (el número *5*).

b. Se colocó al primer elemento del gráfico junto al segundo, y a este último, a su vez, junto al cuarto (el número *7*).

c. Se colocó al primer elemento del gráfico junto al tercero, y a este último, a su vez, junto al cuarto.

d. Se colocó al segundo elemento del gráfico junto al tercero, y a este último, a su vez, junto al cuarto.

3 • y una sola combinación sin repetición de orden cuatro de los elementos:

2 ; 3 ; 5 ; 7

Dicha combinación se realizó, simplemente, colocando juntos a los cuatro elementos.

El fin de todas estas explicaciones es mostrar el mecanismo mediante el cual se realizan las combinaciones sin repetición de los elementos de un conjunto finito dado. Comprender dichas explicaciones es importante, puesto que, como se podrá ver más adelante, para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural mayor que 9, una de las cosas que se tendrán que hacer es realizar combinaciones **sin repetición** de los números primos que estén por debajo de la raíz cuadrada de dicho número natural.

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número dado

En *Lista infinita de números primos* pudimos ver, por ejemplo, que un número natural ubicado entre 2^2 y 3^2 es primo si no es divisible por 2, lo que implica que dicho número natural es compuesto si es divisible, al menos, por 2. Esto significa que la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 3^2 depende de la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de dicho número. Además, como ya sabemos, el 2 es el único número primo cuyo cuadrado está por debajo de 3^2. Dicho de otra forma, el 2 es el único número primo que está por debajo de $\sqrt{3^2}$, o sea, de 3.

También vimos, por ejemplo, que un número natural ubicado entre 3^2 y 5^2 es primo si no es divisible ni por 2 ni por 3, lo que implica que dicho número natural es compuesto si es divisible, al menos, por 2 o por 3. Esto significa que la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 5^2 depende de la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de dicho número y de la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo del mismo. Además, como ya sabemos, el 2 y el 3 son los únicos números primos cuyos cuadrados están por debajo de 5^2. Dicho de otra forma, el 2 y el 3 son los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{5^2}$, o sea, de 5.

De todo esto se deduce que para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un cierto número natural, hay que trabajar con los números primos cuyos cuadrados están por debajo del mismo. En otras palabras, para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un cierto número natural, hay que trabajar con los números primos que están por debajo de su raíz cuadrada (si no se sabe cuáles son esos números primos, se puede recurrir a la tabla de números primos del 2 al 1000 de las páginas 89, 90 y 91, o bien se puede utilizar el procedimiento explicado en *Lista infinita de números primos* para construir una lista de números primos tan grande como se quiera).

La forma en que se debe trabajar con dichos números primos será explicada a continuación con ejemplos de cálculo para números naturales tomados al azar. Se calculará la cantidad de números compuestos que hay por debajo de todos y cada uno de estos números naturales y, al mismo tiempo, se explicará el porqué del procedimiento utilizado en cada caso. Además, a medida que se avanza en el tema, se irán sacando conclusiones, cada una de las cuales correspondiente a números naturales que tienen la misma cantidad de números primos por debajo de sus raíces cuadradas. Estas conclusiones nos llevarán a una conclusión final de este trabajo. La misma determinará cómo se calcula la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un determinado número natural, lo cual nos permitirá, empleando la fórmula $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$, calcular la cantidad de números primos que hay por debajo del mismo. Sin embargo, es necesario aclarar que dicho número natural deberá ser mayor que 4, ya que, como se dijo antes, para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, hay que trabajar con los números primos que están por debajo de su raíz cuadrada, y los números naturales **1**, **2**, **3** y **4** no tienen ningún número primo por debajo de sus raíces cuadradas ($\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{2} = 1{,}41...$; $\sqrt{3} = 1{,}73...$ y $\sqrt{4} = 2$).

Resumiendo, este trabajo explica, en realidad, cómo se calcula la cantidad de números primos que hay por debajo de cualquier número natural mayor que 4.

Ejemplos de cálculo: explicación y justificación

Como se dijo antes, para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, hay que saber cuáles son los números primos que están por debajo de la raíz cuadrada de ese número natural y, además, trabajar con ellos.

- Teniendo en cuenta esto, veamos si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **6**.

  Se tiene que

$$\sqrt{6} = 2{,}44...$$

Debajo de 2,44... hay un solo número primo: el **2**. Por lo tanto, para saber cuántos números compuestos propiamente dichos hay por debajo de 6, sólo habrá que averiguar la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 6.

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 6

$$6/2 = 3 \text{ (número entero)} \longrightarrow 3 - 2 = \mathbf{1}$$

Se obtuvo como resultado que por debajo de **6** hay **un solo número compuesto divisible por 2**, lo que significa, de acuerdo con lo dicho antes, que por debajo de **6** hay **un solo número compuesto propiamente dicho**. Se demuestra fácilmente que este resultado es correcto, ya que el único número compuesto menor que 6 es el **4**.

Entonces, si llamamos $\overset{6}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 6 y $\overset{6}{T_1}$ a la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 6, tenemos que

$$\overset{6}{C} = \overset{6}{T_1} = 1$$

- Veamos ahora si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **8**. Al igual que el 6, el 8 tiene solamente un número primo por debajo de su raíz cuadrada: el **2** ($\sqrt{8}$ = 2,82...). Por consiguiente, el procedimiento que utilizaremos para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 8 será igual al utilizado para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 6. Entonces, sólo tenemos que calcular la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 8, cantidad que será igual, como se puede deducir de lo anterior, a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 8.

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 8

8/2 = 4 (número entero) $\longrightarrow$ 4 – 2 = **2**

Obtenemos como resultado que hay **dos** números compuestos divisibles por **2** por debajo de **8**. Esto significa, como se dijo antes, que por debajo de **8** hay **dos** números compuestos propiamente dichos.

Entonces, si llamamos $\overset{8}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 8 y $\overset{8}{T_1}$ a la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 8, tenemos que

$$\overset{8}{C} = \overset{8}{T_1} = 2$$

Habiendo visto estos dos ejemplos de cálculo, se puede sacar una primera conclusión.

Conclusión número uno

Si ***a*** es un número natural que tiene sólo un número primo por debajo de su raíz cuadrada (número primo que será el ***2***), para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***a*** ($\overset{\mathbf{a}}{\mathbf{C}}$), sólo habrá que calcular la cantidad de números compuestos divisibles por ***2*** que hay por debajo de ***a*** ($\overset{a}{\mathbf{T_1}}$). Se tendrá que

$$\boxed{\overset{a}{\mathbf{C}} = \overset{a}{\mathbf{T_1}}}$$

- Veamos a continuación si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **10**.

  Se tiene que

$$\sqrt{10} = 3,16...$$

Debajo de 3,16... hay sólo dos números primos: el **2** y el **3**. Por lo tanto, para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10 habrá que tener en cuenta dos cosas:

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **2** que hay por debajo de **10** y

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **3** que hay por debajo de **10**

Calculemos, pues, cada cantidad:

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10

$$10/2 = 5 \text{ (número entero)} \longrightarrow 5 - 2 = \mathbf{3}$$

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10

$$10/3 = 3{,}33...\ (\text{número decimal}) \longrightarrow \text{parte entera: } 3 \longrightarrow 3 - 1 = \mathbf{2}$$

Entonces, se tiene que por debajo de 10 hay:

_ **tres** números compuestos divisibles por **2**
_ **dos** números compuestos divisibles por **3**

Pero, ¿cuál es la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10? Un razonamiento lógico puede ser que al sumar las cantidades obtenidas anteriormente, se obtenga como resultado la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10. Sin embargo, se sabe que por debajo del **10** hay **cuatro** números compuestos (el **4**, el **6**, el **8** y el **9**), mientras que **3 + 2 = 5**. ¿A qué se debe esta diferencia? Se puede ver que por debajo del 10 hay un número compuesto que es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo: el **6**.

4	**6**	8		⟶	números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10
	6		9	⟶	números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10

Sumar la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10 y la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10 para obtener la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10 es “contar al 6 dos veces”. Por esta razón, hay que restarle *1* al resultado de la mencionada suma. Ese *1* corresponde a la cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 10.

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 10

$$10/\ (2 * 3) = 10/6 = 1{,}66...\ (\text{número decimal}) \longrightarrow \text{parte entera: } \mathbf{1}$$

Entonces, si llamamos $\overset{10}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10, $\overset{10}{T_1}$ a la suma de la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10 y la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10 y $\overset{10}{T_2}$ a la cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 10, tenemos que

$$\overset{10}{C} = \overset{10}{T_1} - \overset{10}{T_2} = 3 + 2 - 1 = \mathbf{4}$$

Hay **cuatro** números compuestos por debajo de **10**. Se demuestra fácilmente que este resultado es correcto, ya que los cuatro números compuestos menores que 10 son el **4**, el **6**, el **8** y el **9**.

Ésta es una explicación más gráfica que servirá para entender mejor por qué se usó el procedimiento anterior para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10.

$$\overset{10}{T_1}\ (= 5) \left\{ \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 8 & \\ & 6 & & 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 10} \\ \longrightarrow \text{números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 10} \end{array}$$

$$-$$

$$\overset{10}{T_2}\ (= 1) \left\{ \begin{array}{cccc} & 6 & & \end{array} \right\} \longrightarrow \text{números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 10}$$

$$=$$

$$\overset{10}{C}\ (= 4) \left\{ \begin{array}{cccc} 4 & 6 & 8 & 9 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 10}$$

A continuación se explicarán, en forma resumida, los pasos seguidos para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10.

Pasos seguidos:

a. Se calculó $\sqrt{10}$.

b. Se averiguó cuáles eran los números primos que estaban por debajo de $\sqrt{10}$.

c. Se pudo ver que esos números primos eran el **2** y el **3**.

d. Se calculó la cantidad de números compuestos divisibles por **2** que hay por debajo de 10.

e. Se calculó la cantidad de números compuestos divisibles por **3** que hay por debajo de 10.

f. Se sumaron estas dos cantidades, obteniéndose un resultado al que se lo llamó $\overset{10}{T_1}$.

g. Se calculó la cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 10, obteniéndose un resultado al que se lo llamó $\overset{10}{T_2}$.

h. Al efectuar $\overset{10}{T_1} - \overset{10}{T_2}$, se obtuvo la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10.

- Veamos ahora si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **17**. Al igual que el 10, el 17 tiene exactamente dos números primos por debajo de su raíz cuadrada: el **2** y el **3** ($\sqrt{17} = 4{,}12\ldots$). Por lo tanto, el procedimiento que utilizaremos para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 17 será igual al utilizado para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10.

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 17

$$17/2 = 8{,}5 \text{ (número decimal)} \longrightarrow \text{parte entera: } 8 \longrightarrow 8 - 1 = \mathbf{7}$$

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 17

$$17/3 = 5{,}66... \text{ (número decimal)} \longrightarrow \text{parte entera: } 5 \longrightarrow 5 - 1 = \mathbf{4}$$

En primer lugar tenemos, entonces, que

$$\overset{17}{T}_1 = 7 + 4 = 11$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 17

17/ (2 * 3) = 17/6 = 2,83... (número decimal) ⟶ parte entera: **2**

En segundo lugar, tenemos que

$$\overset{17}{T}_2 = 2$$

Entonces, si llamamos $\overset{17}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 17, tenemos que

$$\overset{17}{C} = \overset{17}{T}_1 - \overset{17}{T}_2 = 11 - 2 = 9$$

Obtuvimos como resultado que por debajo de **17** hay **nueve** números compuestos. Este resultado es correcto, siendo dichos números compuestos el **4**, el **6**, el **8**, el **9**, el **10**, el **12**, el **14**, el **15** y el **16**.

En la página siguiente veremos una explicación más gráfica del cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 17.

$$\overset{17}{T_1}\ (= 11) \left\{ \begin{array}{ccccccc} 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ & 6 & 9 & & 12 & 15 & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 17} \\ \longrightarrow \text{números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 17} \end{array}$$

$-$

$$\overset{17}{T_2}\ (= 2) \left\{ \begin{array}{cc} 6 & 12 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 17}$$

$=$

$$\overset{17}{C}\ (= 9) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 14 & 15 & 16 \end{array} \right\} \longrightarrow \text{números compuestos propiamente dichos que hay debajo de 17}$$

Habiendo visto estos dos últimos ejemplos de cálculo, podemos sacar una segunda conclusión.

Conclusión número dos

Si ***b*** es un número natural que tiene exactamente dos números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el ***2*** y el ***3***), el procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***b*** ($\overset{b}{\mathbf{C}}$) será el siguiente:

- **a.** Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***2*** que hay por debajo de ***b***.
- **b.** Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***3*** que hay por debajo de ***b***.
- **c.** Se suman estas dos cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{b}{\mathbf{T_1}}$.
- **d.** Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo

tiempo que hay por debajo de ***b***, cantidad simbolizada por $\overset{b}{\mathbf{T_2}}$.

e. Al efectuar $\overset{b}{\mathbf{T_1}} - \overset{b}{\mathbf{T_2}}$ se obtiene como resultado la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***b***, cantidad simbolizada por $\overset{b}{\mathbf{C}}$.

Explicación de por qué se debe efectuar $\overset{b}{T_1} - \overset{b}{T_2}$ para obtener $\overset{b}{C}$

- $\overset{b}{T_1}$ es una cantidad igual a la suma de:
  - la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de *b*, más
  - la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de *b*
- $\overset{b}{T_2}$ es la cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de *b*.

Los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 y el o los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 que haya por debajo de *b* "aparecerán" sólo una vez en $\overset{b}{T_1}$ y no aparecerán en $\overset{b}{T_2}$, mientras que el o los números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que haya por debajo de *b* aparecerán dos veces en $\overset{b}{T_1}$ y sólo una vez en $\overset{b}{T_2}$.

Al efectuar $\overset{b}{T_1} - \overset{b}{T_2}$, "no son restados" los números compuestos que aparecen sólo una vez en $\overset{b}{T_1}$, "quedando incluidos" los mismos sólo una vez en $\overset{b}{C}$, mientras que el o los números compuestos que aparecen dos veces en $\overset{b}{T_1}$ "son restados una vez", quedando incluidos los mismos sólo una vez en $\overset{b}{C}$. El resultado de $\overset{b}{T_1} - \overset{b}{T_2}$ es, entonces, igual a $\overset{b}{C}$, cantidad que no contiene ningún número repetido.

Se tendrá, entonces, que

$$\boxed{\overset{b}{\mathbf{C}} = \overset{b}{\mathbf{T_1}} - \overset{b}{\mathbf{T_2}}}$$

Observaciones

Es correcto afirmar que si un número natural es divisible por varios números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible, obviamente, por el producto de esos números primos.

Esto significa que si un número natural es divisible por dos números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos dos números primos. Por ejemplo, el 12 es divisible por 2 y por 3 al mismo tiempo, por lo cual es divisible por 2 * 3, es decir, por 6.

También quiere decir que si un número natural es divisible por tres números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos tres números primos. Por ejemplo, el 60 es divisible por 2, por 3 y por 5 al mismo tiempo, por lo cual es divisible por 2 * 3 * 5, es decir, por 30. Pero 60 también es divisible al mismo tiempo por el producto de 2 y 3, es decir, por 2 * 3 (2 * 3 = 6); por el producto de 2 y 5, es decir, por 2 * 5 (2 * 5 = 10); y por el producto de 3 y 5, es decir, por 3 * 5 (3 * 5 = 15). Estas **tres** multiplicaciones se obtuvieron realizando todas las combinaciones sin repetición de orden **dos** de los números primos **2**, **3** y **5** que fueran posibles ($\mathbf{C^{3}_{2} = 3}$). Entonces, se puede decir que si un número natural es divisible por tres números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos tres números primos y por los tres productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición de orden dos de dichos números primos que se pueden realizar.

También se puede decir que si un número natural es divisible por cuatro números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos cuatro números primos. Por ejemplo, el 420 es divisible por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo, por lo cual es divisible por 2 * 3 * 5 * 7, es decir, por 210. Pero 420 también es divisible al mismo tiempo por el producto de 2 y 3, es decir, por 2 * 3 (2 * 3 = 6); por el producto de 2 y 5, es decir, por 2 * 5 (2 * 5 = 10); por el producto de 2 y 7, es decir, por 2 * 7 (2 * 7 = 14); por el producto de 3 y 5, es decir, por 3 * 5 (3 * 5 = 15); por el producto de 3 y 7, es decir, por 3 * 7 (3 * 7 = 21); y por el producto de 5 y 7, es decir, por 5 * 7 (5 * 7 = 35). Estas **seis** multiplicaciones se obtuvieron realizando todas las combinaciones sin repetición de orden **dos** de los números primos **2**, **3**, **5** y **7** que fueran posibles ($\mathbf{C^{4}_{2} = 6}$). Además, el 420 también es divisible al mismo tiempo por el producto de 2, 3 y 5, es decir, por 2 * 3 * 5 (2 * 3 * 5 = 30); por el producto de 2, 3 y 7, es decir, por 2 * 3 * 7 (2 * 3 * 7 = 42); por el producto de 2, 5 y 7, es decir, por 2 * 5 * 7 (2 * 5 * 7 = 70); y por el producto de 3, 5 y 7, es decir, por 3 * 5 * 7 (3 * 5 * 7 = 105). Estas **cuatro** multiplicaciones se obtuvieron realizando todas las combinaciones sin repetición de orden **tres** de los números primos **2**, **3**, **5** y **7** que fueran posibles ($\mathbf{C^{4}_{3} = 4}$). Entonces, se puede afirmar que si un número natural es divisible por cuatro números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos cuatro números primos, por los seis productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición de orden dos de esos números primos que se pueden realizar y por los cuatro productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición de orden tres de dichos números primos que se pueden realizar.

Y así sucesivamente.

Resumiendo, cuando un número natural es divisible por dos números primos al mismo tiempo, el mismo es divisible por el producto de esos dos números primos, y cuando un número natural es divisible por más de dos números primos al mismo tiempo, el mismo no sólo es divisible por el producto de esos números primos, sino también por todos y cada uno de los demás productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de dichos números primos. En los siguientes ejemplos de cálculo, así como también en cualquier otro ejemplo de cálculo lo suficientemente complejo, se podrá ver cuál es la importancia de tener en cuenta todo esto.

El fin de estas explicaciones es hacer entender mejor el mecanismo mediante el cual se calcula la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, ya que, como veremos luego, este mecanismo se torna más complejo cuanto más grande es dicho número natural.

- Veamos ahora si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **35**.

  Se tiene que

$$\sqrt{35} = 5{,}91\ldots$$

Debajo de 5,91... hay sólo tres números primos: el **2**, el **3** y el **5**. Por lo tanto, para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 35 habrá que tener en cuenta tres cosas:

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **2** que hay por debajo de **35**

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **3** que hay por debajo de **35**

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **5** que hay por debajo de **35**

Calculemos, pues, cada cantidad:

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 35

35/2 = 17,5 (número decimal) ⟶ parte entera: 17 ⟶ 17 – 1 = **16**

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 35

35/3 = 11,66... (número decimal) ⟶ parte entera: 11 ⟶ 11 – 1 = **10**

Cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de 35

35/5 = 7 (número entero) ⟶ 7 – 2 = **5**

Si llamamos $\overset{35}{T_1}$ a la suma de las cantidades obtenidas anteriormente, tenemos que

$$\overset{35}{T}_1 = 16 + 10 + 5 = 31$$

Es obvio que por debajo de 35 hay números naturales divisibles por dos de los números primos 2, 3 y 5 al mismo tiempo, es decir, números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo (divisibles por 6), números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo (divisibles por 10) y números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo (divisibles por 15). Por lo tanto, debemos calcular cuántos de estos números naturales hay por debajo de 35.

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 35

35/ (2 * 3) = 35/6 = 5,83... (número decimal) ⟶ parte entera: **5**

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35

35/ (2 * 5) = 35/10 = 3,5 (número decimal) ⟶ parte entera: **3**

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35

35/ (3 * 5) = 35/15 = 2,33... (número decimal) ⟶ parte entera: **2**

Si llamamos $\overset{35}{T_2}$ a la suma de estas tres cantidades, tenemos que

$$\overset{35}{T}_2 = 5 + 3 + 2 = 10$$

Se podría pensar que si se efectúa $\overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2}$ se obtiene como resultado la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 35. Sin embargo, se sabe que por debajo de 35 hay veintidós números compuestos (el **4**, el **6**, el **8**, el **9**, el **10**, el **12**, el **14**, el **15**, el **16**, el **18**, el **20**, el **21**, el **22**, el **24**, el **25**, el **26**, el **27**, el **28**, el **30**, el **32**, el **33** y el **34**), mientras que $\overset{35}{T}_1 - \overset{35}{T}_2 = 21$. ¿A qué se debe esta diferencia? Para averiguarlo, recurramos a explicaciones más gráficas que se dan a continuación.

$$\overset{35}{T_1}\ (=31) \left\{ \begin{array}{l} 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 22 \quad 24 \quad 26 \quad 28 \quad 30 \quad 32 \quad 34 \\ 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15 \quad 18 \quad 21 \quad 24 \quad 27 \quad 30 \quad 33 \\ 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \end{array}$$

$$-$$

$$\overset{35}{T_2}\ (=10) \left\{ \begin{array}{l} 6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \\ 10 \quad 20 \quad 30 \\ 15 \quad 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \\ \leftarrow 6 \end{array}$$

$$= 21 \left\{ 4 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \right\} \leftarrow 7$$

Referencias

1: números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 35.
2: números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 35.
3: números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de 35.
4: números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 35.
5: números naturales divisibles por los números primos 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35.
6: números naturales divisibles por los números primos 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35.
7: números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 35 excluyendo al 30.

Como se puede ver, los números compuestos que aparecen sólo una vez en $\overset{35}{T_1}$ no aparecen en $\overset{35}{T_2}$, y los números compuestos que aparecen dos veces en $\overset{35}{T_1}$ aparecen sólo una vez en $\overset{35}{T_2}$. Al efectuar $\overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2}$, los números compuestos que aparecen sólo una vez en $\overset{35}{T_1}$ "no son restados", mientras que los números compuestos que aparecen dos veces en $\overset{35}{T_1}$ "son restados una vez". Al efectuar $\overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2}$ se obtiene, entonces, una cantidad de números compuestos no repetidos.

Sin embargo, hay un problema con el número **30**. Este número aparece tres veces en $\overset{35}{T_1}$ y también tres veces en $\overset{35}{T_2}$. Entonces, al efectuar $\overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2}$ el número **30** "desaparece", es decir, no queda incluido en la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 35. Por esta razón, hay que hacer que dicho número quede incluido en esta cantidad. Para ello, se le debe sumar *1* al resultado de $\overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2}$. Este *1* es la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3 y por 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35.

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 35

35/ (2 * 3 * 5) = 35/30 = 1,16... (número decimal) ⟶ parte entera: **1**

Si llamamos $\overset{35}{T_3}$ a esta cantidad y $\overset{35}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 35, tenemos, pues, que

$$\overset{35}{C} = \overset{35}{T_1} - \overset{35}{T_2} + \overset{35}{T_3} = 31 - 10 + 1 = 22$$

El resultado obtenido es, ahora, correcto, ya que los **veintidós** números compuestos que están por debajo de **35** son el **4**, el **6**, el **8**, el **9**, el **10**, el **12**, el **14**, el **15**, el **16**, el **18**, el **20**, el **21**, el **22**, el **24**, el **25**, el **26**, el **27**, el **28**, el **30**, el **32**, el **33** y el **34**.

- Calculemos ahora la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **45**. Al igual que el 35, el 45 tiene exactamente tres números primos por debajo de su raíz cuadrada: el **2**, el **3** y el **5** ($\sqrt{45}$ = 6,70…). Por lo tanto, el procedimiento que utilizaremos para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 45 será igual al utilizado para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 35.

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 45

45/2 = 22,5 (número decimal) ⟶ parte entera: 22 ⟶ 22 – 1 = **21**

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 45

45/3 = 15 (número entero) ⟶ 15 – 2 = **13**

Cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de 45

$$45/5 = 9 \text{ (número entero)} \longrightarrow 9 - 2 = \mathbf{7}$$

Si llamamos T_1^{45} a la suma de estas cantidades, tenemos que

$$T_1^{45} = 21 + 13 + 7 = 41$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 45

$$45/(2 * 3) = 45/6 = 7{,}5 \text{ (número decimal)} \longrightarrow \text{parte entera: } \mathbf{7}$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y por 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 45

$$45/(2 * 5) = 45/10 = 4{,}5 \text{ (número decimal)} \longrightarrow \text{parte entera: } \mathbf{4}$$

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y por 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 45

$$45/(3 * 5) = 45/15 = 3 \text{ (número entero)} \longrightarrow 3 - 1 = \mathbf{2}$$

Si llamamos T_2^{45} a la suma de estas cantidades, tenemos que

$$T_2^{45} = 7 + 4 + 2 = 13$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 45

$$45/(2 * 3 * 5) = 45/30 = 1{,}5 \text{ (número decimal)} \longrightarrow \text{parte entera: } \mathbf{1}$$

Si llamamos T_3^{45} a esta cantidad, tenemos que

$$\overset{45}{T}_3 = 1$$

Ahora, si llamamos $\overset{45}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 45, tenemos que

$$\overset{45}{C} = \overset{45}{T}_1 - \overset{45}{T}_2 + \overset{45}{T}_3 = 41 - 13 + 1 = 29$$

Obtuvimos como resultado que por debajo de **45** hay **veintinueve** números compuestos. Se comprueba fácilmente que este resultado es correcto, ya que los veintinueve números compuestos que están por debajo de 45 son los siguientes:

4; **6**; **8**; **9**; **10**; **12**; **14**; **15**; **16**; **18**; **20**; **21**; **22**; **24**; **25**; **26**; **27**; **28**; **30**; **32**; **33**; **34**; **35**;

36; **38**; **39**; **40**; **42** y **44**

Habiendo visto estos dos últimos ejemplos de cálculo, podemos sacar una tercera conclusión.

Conclusión número tres

Si ***c*** es un número natural que tiene exactamente tres números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el ***2***, el ***3*** y el ***5***), el procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***c*** ($\overset{c}{\mathbf{C}}$) será el siguiente:

- **a.** Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***2*** que hay por debajo de ***c***.
- **b.** Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***3*** que hay por debajo de ***c***.
- **c.** Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***5*** que hay por debajo de ***c***.

d. Se suman estas tres cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$.

e. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de ***c***.

f. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***c***.

g. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***c***.

h. Se suman estas tres últimas cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}}$.

i. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3 y por 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***c***, cantidad a la que simbolizaremos por $\overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{3}}$.

j. Al efectuar $\overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}} - \overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}} + \overset{c}{\mathbf{T}}_{\mathbf{3}}$ se obtiene como resultado la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***c***, cantidad simbolizada por $\overset{c}{\mathbf{C}}$.

Explicación de por qué se debe efectuar $\overset{c}{T}_1 - \overset{c}{T}_2 + \overset{c}{T}_3$ para obtener $\overset{c}{C}$

- $\overset{c}{T}_1$ es una cantidad igual a la suma de:

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de *c*, más

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de *c*, más

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de *c*

- $\overset{c}{T}_2$ es una cantidad igual a la suma de:

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de *c*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *c*, más

- la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *c*

- $\overset{c}{T}_3$ es la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3 y por 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *c*.

Los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 y el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 que haya por debajo de *c* "aparecerán" sólo una vez en $\overset{c}{T}_1$, y no aparecerán ni en $\overset{c}{T}_2$, ni en $\overset{c}{T}_3$; los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 y el o los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 que haya por debajo de *c* aparecerán dos veces en $\overset{c}{T}_1$, una sola vez en $\overset{c}{T}_2$ y no aparecerán en $\overset{c}{T}_3$; y, finalmente, cualquier número natural divisible por 2, por 3 y por 5 al mismo tiempo que haya por debajo de *c* aparecerá tres veces en $\overset{c}{T}_1$, tres veces en $\overset{c}{T}_2$ y sólo una vez en $\overset{c}{T}_3$.

Al efectuar $\overset{c}{T}_1 - \overset{c}{T}_2 + \overset{c}{T}_3$ "no son ni restados, ni sumados" los números compuestos que aparecen sólo una vez en $\overset{c}{T}_1$, "quedando incluidos" los mismos sólo una vez en $\overset{c}{C}$, mientras que los números compuestos que aparecen dos veces $\overset{c}{T}_1$ "son restados una vez", quedando incluidos los mismos sólo una vez en $\overset{c}{C}$, y cualquier número compuesto que aparece tres veces en $\overset{c}{T}_1$ "es restado tres veces y sumado una vez", quedando incluido el mismo sólo una vez en $\overset{c}{C}$. El resultado de $\overset{c}{T}_1 - \overset{c}{T}_2 + \overset{c}{T}_3$ es, entonces, igual a $\overset{c}{C}$, cantidad que no contiene ningún número repetido.

Se tendrá, entonces, que

$$\boxed{\overset{c}{\mathbf{C}} = \overset{c}{\mathbf{T}}_1 - \overset{c}{\mathbf{T}}_2 + \overset{c}{\mathbf{T}}_3}$$

- Veamos ahora si podemos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **83**.

Tenemos que

$$\sqrt{83} = 9{,}11...$$

Por debajo de 9,11… hay exactamente cuatro números primos: el **2**, el **3**, el **5** y el **7.** Por lo tanto, para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 83 habrá que tener en cuenta cuatro cosas:

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **2** que hay por debajo de **83**

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **3** que hay por debajo de **83**

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **5** que hay por debajo de **83**

→ la cantidad de números compuestos divisibles por **7** que hay por debajo de **83**

Calculemos, pues, cada cantidad:

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 83

83/2 = 41,5 (número decimal) ⟶ parte entera: 41 ⟶ 41 – 1 = **40**

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 83

83/3 = 27,66... (número decimal) ⟶ parte entera: 27 ⟶ 27 – 1 = **26**

Cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de 83

83/5 = 16,6 (número decimal) ⟶ parte entera: 16 ⟶ 16 – 1 = **15**

Cantidad de números compuestos divisibles por 7 que hay por debajo de 83

83/7 = 11,85... (número decimal) ⟶ parte entera: 11 ⟶ 11 – 1 = **10**

Si llamamos $\overset{83}{T_1}$ a la suma de las cantidades obtenidas, tenemos que

$$\overset{83}{T_1} = 40 + 26 + 15 + 10 = 91$$

Es obvio que por debajo de 83 hay números naturales divisibles por dos de los números primos 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo, es decir, números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo (divisibles por 6), números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo (divisibles por 10), números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo (divisibles por 14), números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo (divisibles por 15), números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo (divisibles por 21) y números naturales divisibles por 5 y 7 al mismo tiempo (divisibles por 35). Por lo tanto, debemos calcular cuántos de estos números naturales hay por debajo de 83.

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 3) = 83/6 = 13,83... (número decimal) ⟶ parte entera: **13**

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 5) = 83/10 = 8,3 (número decimal) ⟶ parte entera: **8**

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 7) = 83/14 = 5,92... (número decimal) ⟶ parte entera: **5**

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (3 * 5) = 83/15 = 5,53... (número decimal) ⟶ parte entera: **5**

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (3 * 7) = 83/21 = 3,95... (número decimal) ⟶ parte entera: **3**

Cantidad de números naturales divisibles por 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (5 * 7) = 83/35 = 2,37... (número decimal) $\longrightarrow$ parte entera: **2**

Si llamamos T_2^{83} a la suma de estas seis cantidades, tenemos que

$$T_2^{83} = 13 + 8 + 5 + 5 + 3 + 2 = 36$$

Por debajo de 83 también hay números naturales divisibles por tres de los números primos 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo. Precisamente, por debajo de 83 hay dos números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo (divisibles por 30), un número natural divisible por 2, 3 y 7 al mismo tiempo (divisible por 42), un número natural divisible por 2, 5 y 7 al mismo tiempo (divisible por 70) y no hay ningún número natural divisible por 3, 5 y 7 al mismo tiempo (divisible por 105). Esto se demuestra a partir de los siguientes cálculos:

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 3 * 5) = 83/30 = 2,76... (número decimal) $\longrightarrow$ parte entera: **2**

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 3 * 7) = 83/42 = 1,97... (número decimal) $\longrightarrow$ parte entera: **1**

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 5 * 7) = 83/70 = 1,18... (número decimal) $\longrightarrow$ parte entera: **1**

Cantidad de números naturales divisibles por 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (3 * 5 * 7) = 83/105 = 0,79... (número decimal) $\longrightarrow$ parte entera: **0**

Si llamamos $\overset{83}{T_3}$ a la suma de estas cuatro cantidades, tenemos que

$$\overset{83}{T_3} = 2 + 1 + 1 + 0 = 4$$

Si efectuamos $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3}$, obtenemos como resultado la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 83, cantidad simbolizada por $\overset{83}{C}$. Tenemos, entonces, que

$$\overset{83}{C} = \overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3} = 91 - 36 + 4 = 59$$

Obtuvimos como resultado que por debajo de **83** hay **cincuenta y nueve** números compuestos. Se comprueba fácilmente que este resultado es correcto, ya que los cincuenta y nueve números compuestos que están por debajo de 83 son los siguientes:

4; **6**; **8**; **9**; **10**; **12**; **14**; **15**; **16**; **18**; **20**; **21**; **22**; **24**; **25**; **26**; **27**; **28**; **30**; **32**; **33**; **34**; **35**;

36; **38**; **39**; **40**; **42**; **44**; **45**; **46**; **48**; **49**; **50**; **51**; **52**; **54**; **55**; **56**; **57**; **58**; **60**; **62**; **63**; **64**;

65; **66**; **68**; **69**; **70**; **72**; **74**; **75**; **76**; **77**; **78**; **80**; **81** y **82**

Pero, ¿qué habría pasado si por debajo de 83 hubieran existido números naturales divisibles por los cuatro números primos 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo? Dicho de otra forma, ¿que habría pasado si por debajo de 83 hubieran existido números naturales divisibles por 2 * 3 * 5 * 7 (2 * 3 * 5 * 7 = 210), lo cual es, obviamente, imposible? En este caso, se habría tenido que calcular la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83 y restar dicha cantidad al resultado de $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3}$, ya que los inexistentes números naturales menores que 83 y divisibles por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo habrían "aparecido" *cuatro* veces en $\overset{83}{T_1}$, *seis* veces en $\overset{83}{T_2}$ (al ser divisibles por los seis productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3, 5 y 7 que son posibles) y *cuatro* veces en $\overset{83}{T_3}$ (al ser divisibles por los cuatro productos que se pueden obtener expresando en forma de multiplicaciones todas las combinaciones sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3, 5 y 7 que son posibles).

Al efectuar $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3}$, dichos números naturales habrían "quedado incluidos" en la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 83 $(\overset{83}{C})$ una cantidad de veces igual a *4 – 6 + 4*, es decir, dos veces. Para hacer que queden incluidos sólo una vez en $\overset{83}{C}$, se habría tenido que "restarlos una vez". Esto significa que al resultado de $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3}$ se le habría tenido que restar la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83. Entonces, si llamamos $\overset{83}{T_4}$ a esta cantidad, lo que se habría tenido que hacer es restarle al resultado de $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3}$ el valor de $\overset{83}{T_4}$. En otras palabras, para obtener el valor de $\overset{83}{C}$ se habría tenido que efectuar $\overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3} - \overset{83}{T_4}$.

Sin embargo, no hay ningún número natural divisible por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo (divisible por 210) por debajo de 83:

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 83

83/ (2 * 3 * 5 * 7) = 83/210 = 0,39... (número decimal) ⟶ parte entera: **0**

Como a esta cantidad la llamamos $\overset{83}{T_4}$, tenemos que

$$\overset{83}{T_4} = 0$$

El valor de $\overset{83}{C}$ también puede expresarse, entonces, de la siguiente manera:

$$\overset{83}{C} = \overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3} - \overset{83}{T_4} = 91 - 36 + 4 - 0 = 59$$

Aunque $\overset{83}{T_4} = 0$, puede ser mejor expresar el valor de $\overset{83}{C}$ como se hizo arriba, es decir, diciendo que $\overset{83}{C} = \overset{83}{T_1} - \overset{83}{T_2} + \overset{83}{T_3} - \overset{83}{T_4}$, ya que de esta manera se está más seguro de que el resultado obtenido es el correcto.

- Calculemos ahora la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **100**. Al igual que el 83, el 100 tiene exactamente cuatro números primos por debajo su raíz cuadrada: el **2**, el **3**, el **5** y el **7** ($\sqrt{100} = 10$). Por consiguiente, para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 100, tendremos que utilizar un procedimiento igual al utilizado para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 83.

Cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de 100

100/2 = 50 (número entero) ⟶ 50 – 2 = **48**

Cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de 100

100/3 = 33,33... (número decimal) ⟶ parte entera: 33 ⟶ 33 – 1 = **32**

Cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de 100

100/5 = 20 (número entero) ⟶ 20 – 2 = **18**

Cantidad de números compuestos divisibles por 7 que hay por debajo de 100

100/7 = 14,28... (número decimal) ⟶ parte entera: 14 ⟶ 14 – 1 = **13**

Si llamamos $\overset{100}{T_1}$ a la suma de estas cuatro cantidades, tenemos que

$$\overset{100}{T_1} = 48 + 32 + 18 + 13 = 111$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 3) = 100/6 = 16,66... (número decimal) ⟶ parte entera: **16**

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 5) = 100/10 = 10 (número entero) ⟶ 10 – 1 = **9**

Cantidad de números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 7) = 100/14 = 7,14... (número decimal) ⟶ parte entera: **7**

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (3 * 5) = 100/15 = 6,66... (número decimal) ⟶ parte entera: **6**

Cantidad de números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (3 * 7) = 100/21 = 4,76... (número decimal) ⟶ parte entera: **4**

Cantidad de números naturales divisibles por 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (5 * 7) = 100/35 = 2,85... (número decimal) ⟶ parte entera: **2**

Si llamamos $\overset{100}{T_2}$ a la suma de estas seis cantidades, tenemos que

$$\overset{100}{T_2} = 16 + 9 + 7 + 6 + 4 + 2 = 44$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 3 * 5) = 100/30 = 3,33... (número decimal) ⟶ parte entera: **3**

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 3 * 7) = 100/42 = 2,38... (número decimal) ⟶ parte entera: **2**

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 5 * 7) = 100/70 = 1,42... (número decimal) ⟶ parte entera: **1**

Cantidad de números naturales divisibles por 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (3 * 5 * 7) = 100/105 = 0,95... (número decimal) ⟶ parte entera: **0**

Si llamamos $\overset{100}{T_3}$ a la suma de estas cuatro cantidades, tenemos que

$$\overset{100}{T_3} = 3 + 2 + 1 + 0 = 6$$

Cantidad de números naturales divisibles por 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de 100

100/ (2 * 3 * 5 * 7) = 100/210 = 0,47... (número decimal) ⟶ parte entera: **0**

Si llamamos $\overset{100}{T_4}$ a esta cantidad, tenemos que

$$\overset{100}{T_4} = 0$$

Ahora, si llamamos $\overset{100}{C}$ a la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de 100, tenemos que

$$\overset{100}{C} = \overset{100}{T_1} - \overset{100}{T_2} + \overset{100}{T_3} - \overset{100}{T_4} = 111 - 44 + 6 - 0 = 73$$

Se obtiene como resultado que por debajo de **100** hay **setenta y tres** números compuestos. Este resultado es correcto, ya que los setenta y tres números compuestos que están por debajo de 100 son los siguientes:

4; **6**; **8**; **9**; **10**; **12**; **14**; **15**; **16**; **18**; **20**; **21**; **22**; **24**; **25**; **26**; **27**; **28**; **30**; **32**; **33**; **34**;

35; **36**; **38**; **39**; **40**; **42**; **44**; **45**; **46**; **48**; **49**; **50**; **51**; **52**; **54**; **55**; **56**; **57**; **58**; **60**; **62**;

63; **64**; **65**; **66**; **68**; **69**; **70**; **72**; **74**; **75**; **76**; **77**; **78**; **80**; **81**; **82**; **84**; **85**; **86**; **87**; **88**;

90; **91**; **92**; **93**; **94**; **95**; **96**; **98** y **99**

Habiendo visto estos dos últimos ejemplos de cálculo, podemos sacar una cuarta conclusión.

Conclusión número cuatro

Si ***d*** es un número natural que tiene exactamente cuatro números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el ***2***, el ***3***, el ***5*** y el ***7***), el procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***d*** ($\overset{d}{\mathbf{C}}$) será el siguiente:

a. Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***2*** que hay por debajo de ***d***.

b. Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***3*** que hay por debajo de ***d***.

c. Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***5*** que hay por debajo de ***d***.

d. Se calcula la cantidad de números compuestos divisibles por ***7*** que hay por debajo de ***d***.

e. Se suman estas cuatro cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{d}{\mathbf{T}}_{\mathbf{1}}$.

f. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

g. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

h. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

i. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

j. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

k. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

l. Se suman estas seis cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{\mathbf{d}}{\mathbf{T}}_{\mathbf{2}}$.

m. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

n. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

ñ. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

o. Se calcula la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***.

p. Se suman estas cuatro cantidades, obteniéndose un resultado llamado $\overset{\mathbf{d}}{\mathbf{T}}_{\mathbf{3}}$.

q. Si se quiere, se puede calcular la cantidad de números naturales divisibles por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo que hay por debajo de ***d***, cantidad a la que llamamos $\overset{\mathbf{d}}{\mathbf{T}}_{\mathbf{4}}$.

Sin embargo, no es necesario calcular el valor de $\overset{d}{T}_4$, ya que siempre se tendrá que $\overset{d}{T}_4 = 0$, como se deduce a partir del hecho de que el número natural más grande que tiene exactamente cuatro números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el 2, el 3, el 5 y el 7) es el 121 ($\sqrt{121} = 11$), y el número natural más chico divisible por 2, por 3, por 5 y por 7 al mismo tiempo es el 210.

r. Como $\overset{d}{T}_4 = 0$, tanto al efectuar $\overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3$ como al efectuar $\overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3 - \overset{d}{T}_4$ se obtiene el mismo resultado, siendo el mismo la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de ***d***, cantidad simbolizada por $\overset{\mathbf{d}}{\mathbf{C}}$.

Explicación de por qué se debe efectuar $\overset{d}{T_1} - \overset{d}{T_2} + \overset{d}{T_3}$ para obtener $\overset{d}{C}$

- $\overset{d}{T_1}$ es una cantidad igual a la suma de:

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 3 que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 5 que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números compuestos divisibles por 7 que hay por debajo de *d*

- $\overset{d}{T_2}$ es una cantidad igual a la suma de:

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*

- $\overset{d}{T_3}$ es una cantidad igual a la suma de:

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 3 y 5 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 3 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

  - la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 2, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*, más

- la cantidad de números naturales divisibles por los números primos 3, 5 y 7 al mismo tiempo que hay por debajo de *d*

Los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5 ni por 7, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 ni por 7, el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 7 y el o los números compuestos divisibles por 7 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 5 que haya por debajo de *d* "aparecerán" sólo una vez en $\overset{d}{T}_1$, y no aparecerán ni en $\overset{d}{T}_2$, ni en $\overset{d}{T}_3$. Los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 5, los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 7, el o los números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 5 y cualquier número natural divisible por 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 2 ni por 3 que haya por debajo de *d* aparecerán dos veces en $\overset{d}{T}_1$, una vez en $\overset{d}{T}_2$ y no aparecerán en $\overset{d}{T}_3$. Y finalmente, el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 7, el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 5, cualquier número natural divisible por 2, 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 3 y cualquier número natural divisible por 3, 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 2 que haya por debajo de *d* aparecerán tres veces en $\overset{d}{T}_1$, también tres veces en $\overset{d}{T}_2$ y sólo una vez en $\overset{d}{T}_3$.

Al efectuar $\overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3$, "no son ni restados ni sumados" los números compuestos que aparecen sólo una vez en $\overset{d}{T}_1$, "quedando incluidos" los mismos sólo una vez en $\overset{d}{C}$, mientras que los números compuestos que aparecen dos veces en $\overset{d}{T}_1$ "son restados una vez", quedando incluidos los mismos sólo una vez en $\overset{d}{C}$, y los números compuestos que aparecen tres veces en $\overset{d}{T}_1$ "son restados tres veces y sumados una vez", quedando incluidos los mismos sólo una vez en $\overset{d}{C}$. El resultado de $\overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3$ es, entonces, igual a $\overset{d}{C}$, cantidad que no contiene ningún número repetido.

Tenemos, entonces, que

$$\overset{d}{C} = \overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3$$

Pero como en el siguiente subtema necesitaremos ver cuál es el patrón seguido por las distintas fórmulas que se irán deduciendo, diremos, más bien, que

$$\boxed{\overset{d}{C} = \overset{d}{T_1} - \overset{d}{T_2} + \overset{d}{T_3} - \overset{d}{T_4}}$$

Conclusión sobre el cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número dado

Observando atentamente los ejemplos de cálculo anteriores, se puede ver que no se describe un único procedimiento que sirva para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de cualquier número natural. Como se pudo ver, el procedimiento que se describió para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 6, por ejemplo, es distinto al procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 10, el cual es distinto al procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 35, y este procedimiento, a su vez, es distinto al procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 83. Además, a partir de los ejemplos de cálculo anteriores se puede afirmar que el procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un determinado número natural es más complejo cuanto más grande es dicho número natural.

Otra cosa importante que hay que dejar en claro es lo que dicen las conclusiones uno, dos, tres y cuatro: la **Conclusión número uno** (página 31) afirma que existe un procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de todo número natural que tenga un solo número primo por debajo de su raíz cuadrada (número primo que será el 2); la **Conclusión número dos** (página 37) afirma que existe otro procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de todo número natural que tenga exactamente dos números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el 2 y el 3); la **Conclusión número tres** (página 45) afirma que existe otro procedimiento diferente para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de todo número natural que tenga exactamente tres números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el 2, el 3 y el 5); finalmente, la **Conclusión número cuatro** (página 56) afirma que existe otro procedimiento distinto para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de todo número natural que tenga exactamente cuatro números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el 2, el 3, el 5 y el 7). Esto da a entender que se usa el mismo procedimiento de cálculo para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de números naturales que tienen exactamente la misma cantidad de números primos por debajo de sus raíces cuadradas.

Que determinados números naturales tengan la misma cantidad de números primos por debajo de sus raíces cuadradas significa, obviamente, que dichos números naturales tienen exactamente a los mismos números primos por debajo de sus raíces cuadradas y viceversa. Entonces, lo dicho anteriormente se puede decir así:

Para determinados números naturales se usará el mismo procedimiento de cálculo si los mismos tienen exactamente a los mismos números primos por debajo de sus raíces cuadradas y, por el contrario, se usarán procedimientos de cálculo distintos si dichos números naturales no tienen exactamente a los mismos números primos por debajo de sus raíces cuadradas.

Esto significa que existen infinitos procedimientos de cálculo, pues existen infinitos números primos. Sin embargo, se pudo ver, en los ejemplos de cálculo anteriores, que todos los procedimientos "siguen un patrón definido", ya que siempre que se quiere calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, se tiene que trabajar con los números primos que estén por debajo de la raíz cuadrada de dicho número natural. A medida que se trabaja con dichos números primos, se van obteniendo los denominados *totales del número natural*. Como se pudo ver en los ejemplos de cálculo anteriores, la cantidad de *totales* de un número natural que pueden obtenerse es igual a la cantidad de números primos que dicho número natural tiene por debajo de su raíz cuadrada. En dichos ejemplos de cálculo, se trabajó con *totales uno*, con *totales dos*, con *totales tres* y con *totales cuatro*.

Es importante que quede bien en claro a qué se llama *total uno* (T_1), *total dos* (T_2), *total tres* (T_3) y *total cuatro* (T_4) *de un número natural*.

- *Total uno* o T_1

Consideremos un número natural *n*. Al calcular para todo número primo que está por debajo de $\sqrt{n}$ la cantidad de números compuestos divisibles por él que hay por debajo de *n*, obtenemos una serie de cantidades. Al sumar estas cantidades, obtenemos lo que llamamos *total uno de n* o $\overset{n}{T_1}$.

- *Total* ***dos*** o T_2

Al realizar todas las **combinaciones sin repetición de orden dos** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ que sean posibles y expresar dichas combinaciones en forma de multiplicaciones, obtenemos, a partir de estas multiplicaciones, una serie de productos. Al calcular para todo producto la cantidad de números naturales divisibles por él que hay por debajo de *n*, obtenemos una serie de cantidades. Al sumar estas cantidades, obtenemos lo que llamamos *total dos de n* o $\overset{n}{T_2}$.

- *Total* ***tres*** o T_3

Al realizar todas las **combinaciones sin repetición de orden tres** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ que sean posibles y expresar dichas combinaciones en forma de multiplicaciones, obtenemos, a partir de estas multiplicaciones, una serie de productos. Al calcular para todo producto la cantidad de números naturales divisibles por él que hay por debajo de *n*, obtenemos una serie de cantidades. Al sumar estas cantidades, obtenemos lo que llamamos *total tres de n* o $\overset{n}{T_3}$.

- *Total* ***cuatro*** o T_4

Al realizar todas las **combinaciones sin repetición de orden cuatro** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ que sean posibles y expresar dichas combinaciones en forma de multiplicaciones, obtenemos, a partir de estas multiplicaciones, una serie de productos. Al calcular para todo producto la cantidad de números naturales divisibles por él que hay por debajo de *n*, obtenemos una serie de cantidades. Al sumar estas cantidades, obtenemos lo que llamamos *total cuatro de n* o $\overset{n}{T_4}$.

Como se puede ver, en la expresión $\overset{n}{T_1}$ (total uno de *n*) el subíndice *1* indica que el valor de $\overset{n}{T_1}$ es igual a la suma de las cantidades obtenidas como resultado de calcular para todo número primo que está por debajo de $\sqrt{n}$ la cantidad de números compuestos divisibles por él que hay por debajo de *n*, mientras que en las expresiones $\overset{n}{T_2}$ (total dos de *n*), $\overset{n}{T_3}$ (total tres de *n*) y $\overset{n}{T_4}$ (total cuatro de *n*), los subíndices indican de qué orden son las combinaciones sin repetición de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ con las que se trabajó para obtener los valores de estos *totales de n*. En otras palabras, en un *total de n* cuyo subíndice es distinto de *1* dicho subíndice indica de qué orden son las combinaciones sin repetición de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ con las que se trabajó para obtener el valor del mencionado *total de n*.

Además, se puede demostrar, viendo los ejemplos de cálculo anteriores, que si *b* es un número natural que tiene por lo menos un número primo por debajo de su raíz cuadrada y *a* es un número natural compuesto y es menor que *b*, y *a* es divisible como máximo por ***x*** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{b}$, entonces *a* “aparecerá” en un *total* ***y*** *de b* ($\overset{b}{T_y}$) una cantidad de veces igual a $\mathbf{C}^{\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}$.

Ejemplos

- En la explicación gráfica de la página 34 se puede ver que el *6*, al ser divisible como máximo por **dos** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{10}$ (es decir, al ser divisible por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo), “aparece” en $\overset{10}{T_1}$ una cantidad de veces igual a C^{2}_{1}, o sea, dos veces, y en $\overset{10}{T_2}$, una cantidad de veces igual a C^{2}_{2}, o sea, una sola vez.
- En la explicación gráfica de la página 42 se puede ver que el *30*, al ser divisible como máximo por **tres** de los números primos que están por debajo de $\sqrt{35}$ (es decir, al ser divisible por los números primos 2, 3 y 5 al mismo tiempo), aparece en $\overset{35}{T_1}$ una cantidad de veces igual a C^{3}_{1}, o sea, tres veces, y en $\overset{35}{T_2}$, una cantidad de veces igual a C^{3}_{2}, o sea, tres veces también.

A partir de esto se puede demostrar que son correctas las fórmulas deducidas en la **Conclusión número dos** (página 37), en la **Conclusión número tres** (página 45) y en la **Conclusión número cuatro** (página 56), mientras que para demostrar que es correcta la fórmula deducida en la **Conclusión número uno** (página 31), simplemente se puede decir que si por debajo de la raíz cuadrada de un número natural *a* hay un solo número primo (número primo que será el 2), entonces todo número compuesto que esté por debajo de *a* será divisible por 2, y, por lo tanto, la cantidad de números compuestos propiamente dichos que hay por debajo de *a* ($\overset{a}{C}$) será igual a la cantidad de números compuestos divisibles por 2 que hay por debajo de *a* ($\overset{a}{T_1}$), teniendo entonces que

$$\overset{a}{C} = \overset{a}{T_1}$$

Veamos ahora las fórmulas de las conclusiones dos, tres y cuatro.

- En la **Conclusión número dos** se dedujo que si *b* es un número natural que tiene exactamente **dos** números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el **2** y el **3**), se tiene que

$$\overset{b}{C} = \overset{b}{T_1} - \overset{b}{T_2}$$

Para demostrar que esta fórmula es correcta, se puede decir que:

→ los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 y el o los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 que hay por debajo de *b* "aparecen" C^{1}_{1} vez en $\overset{b}{T_1}$, es decir, una sola vez, y no aparecen en $\overset{b}{T_2}$.

→ el o los números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de *b* aparecen C^{2}_{1} veces en $\overset{b}{T_1}$, es decir, dos veces, y C^{2}_{2} vez en $\overset{b}{T_2}$, es decir, una sola vez.

Luego, al efectuar $\overset{b}{T_1} - \overset{b}{T_2}$, los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 y el o los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 que hay por debajo de *b* "quedan incluidos" C^{1}_{1} vez en $\overset{b}{C}$, es decir, una sola vez, y el o los números naturales divisibles por los números primos 2 y 3 al mismo tiempo que hay por debajo de *b* quedan incluidos $C^{2}_{1} - C^{2}_{2}$ vez en $\overset{b}{C}$, es decir, una sola vez también. Obtenemos, pues, una cantidad que no contiene ningún número repetido.

Obsérvese que

$$C^{1}_{1} = 1$$

$$C^{2}_{1} - C^{2}_{2} = 1$$

• En la **Conclusión número tres** se dedujo que si *c* es un número natural que tiene exactamente **tres** números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el **2**, el **3** y el **5**), se tiene que

$$\overset{c}{C} = \overset{c}{T_1} - \overset{c}{T_2} + \overset{c}{T_3}$$

Para demostrar que esta fórmula es correcta, se puede decir que:

→ los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 y el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 que hay por debajo de *c* aparecen C^{1}_{1} vez en $\overset{c}{T_1}$, es decir, una sola vez, y no aparecen ni en $\overset{c}{T_2}$, ni en $\overset{c}{T_3}$.

→ los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 y el o los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 que hay por debajo de *c* aparecen C_1^2 veces en T_1^c, es decir, dos veces; C_2^2 vez en T_2^c, es decir, una sola vez; y no aparecen en T_3^c.

→ si por debajo de *c* está el número 30 (número natural divisible por los números primos 2, 3 y 5 al mismo tiempo), este número aparece C_1^3 veces en T_1^c, es decir, tres veces; C_2^3 veces en T_2^c, es decir, tres veces también; y C_3^3 vez en T_3^c, es decir, una sola vez.

Luego, al efectuar $T_1^c - T_2^c + T_3^c$, los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 y el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 que hay por debajo de *c* quedan incluidos C_1^1 vez en C^c, es decir, una sola vez; los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 y el o los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 que hay por debajo de *c* quedan incluidos $C_1^2 - C_2^2$ vez en C^c, es decir, una sola vez también; y si por debajo de *c* está el número 30, este número queda incluido $C_1^3 - C_2^3 + C_3^3$ vez en C^c, es decir, una sola vez también. Obtenemos, pues, una cantidad que no contiene ningún número repetido.

Obsérvese que

$$C_1^1 = 1$$

$$C_1^2 - C_2^2 = 1$$

$$C_1^3 - C_2^3 + C_3^3 = 1$$

• En la **Conclusión número cuatro** se dedujo que si *d* es un número natural que tiene exactamente **cuatro** números primos por debajo de su raíz cuadrada (los cuales serán el **2**, el **3**, el **5** y el **7**), se tiene que

$$\overset{d}{C} = \overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3 - \overset{d}{T}_4$$

Para demostrar que esta fórmula es correcta, se puede decir que:

→ los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5 ni por 7, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 ni por 7, el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 7 y el o los números compuestos divisibles por 7 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 5 que hay por debajo de *d* aparecen C_1^1 vez en $\overset{d}{T_1}$, es decir, una sola vez, y no aparecen ni en $\overset{d}{T_2}$, ni en $\overset{d}{T_3}$, ni en $\overset{d}{T_4}$.

→ los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 5, los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 7, el o los números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 5 que hay por debajo de *d* y el único número natural divisible por 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 2 ni por 3 que hay por debajo de *d* (el 35) aparecen C_1^2 veces en $\overset{d}{T_1}$, es decir, dos veces; C_2^2 vez en $\overset{d}{T_2}$, es decir, una sola vez; y no aparecen ni en $\overset{d}{T_3}$, ni en $\overset{d}{T_4}$.

→ el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 7 y el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 5 que hay por debajo de *d* aparecen C_1^3 veces en $\overset{d}{T_1}$, es decir, tres veces; C_2^3 veces en $\overset{d}{T_2}$, es decir, tres veces también; C_3^3 vez en $\overset{d}{T_3}$, es decir, una sola vez; y no aparecen en $\overset{d}{T_4}$. Ahora, si por debajo de *d* está el 70 (número natural divisible por 2, 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 3) o están el 70 y el 105 (número natural divisible por 3, 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 2), entonces ocurrirá lo mismo con este/estos número/s natural/es.

→ por debajo de *d* no puede haber (y no hay) ningún número natural divisible por los números primos 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo. Si hubiera alguno (lo cual es, obviamente, imposible), el mismo debería aparecer C_1^4 veces en $\overset{d}{T_1}$, es decir, cuatro veces; C^4_2 veces en T_2^d, es decir, seis veces; C^4_3 veces en T_3^d, es decir, cuatro veces; y C^4_4 vez en T_4^d, es decir, una sola vez.

Luego, al efectuar $T_1^d - T_2^d + T_3^d - T_4^d$, los números compuestos divisibles por 2 que no lo son por 3 ni por 5 ni por 7, los números compuestos divisibles por 3 que no lo son por 2 ni por 5 ni por 7, el o los números compuestos divisibles por 5 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 7 y el o los números compuestos divisibles por 7 que no lo son por 2 ni por 3 ni por 5 que hay por debajo de *d* quedan incluidos C^1_1 vez en C^d, es decir, una sola vez; los números naturales divisibles por 2 y 3 al mismo tiempo que no lo son por 5 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 7, los números naturales divisibles por 2 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 3 ni por 5, los números naturales divisibles por 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 7, el o los números naturales divisibles por 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 2 ni por 5 que hay por debajo de *d* y el único número natural divisible por 5 y 7 al mismo tiempo que no lo es por 2 ni por 3 que hay por debajo de *d* (el 35) quedan incluidos $C^2_1 - C^2_2$ vez en C^d, es decir, una sola vez también; el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 5 al mismo tiempo que no lo son por 7 que hay por debajo de *d*, el o los números naturales divisibles por 2, 3 y 7 al mismo tiempo que no lo son por 5 que hay por debajo de *d* y el 70 o el 70 y el 105 (si es que el 70 o el 70 y el 105 se encuentran por debajo de *d*) quedan incluidos $C^3_1 - C^3_2 + C^3_3$ vez en C^d, es decir, una sola vez; y si por debajo de *d* hubiera algún número natural divisible por los números primos 2, 3, 5 y 7 al mismo tiempo (algo que es imposible), el mismo quedaría incluido $C^4_1 - C^4_2 + C^4_3 - C^4_4$ vez en C^d, es decir, una sola vez también. Obtenemos, pues, una cantidad que no contiene ningún número repetido.

Obsérvese que

$$C^1_1 = 1$$

$$C^2_1 - C^2_2 = 1$$

$$C^3_1 - C^3_2 + C^3_3 = 1$$

$$C^4_1 - C^4_2 + C^4_3 - C^4_4 = 1$$

Hasta ahora conocemos, pues, las siguientes fórmulas:

- $\mathbf{\overset{a}{C} = \overset{a}{T}_1}$
- $\mathbf{\overset{b}{C} = \overset{b}{T}_1 - \overset{b}{T}_2}$
- $\mathbf{\overset{c}{C} = \overset{c}{T}_1 - \overset{c}{T}_2 + \overset{c}{T}_3}$
- $\mathbf{\overset{d}{C} = \overset{d}{T}_1 - \overset{d}{T}_2 + \overset{d}{T}_3 - \overset{d}{T}_4}$

Como ya vimos, estas fórmulas corresponden a números naturales que tienen hasta cuatro números primos por debajo de sus raíces cuadradas.

- Ahora, ¿cuál sería la fórmula correspondiente a un número natural *e* que tiene exactamente *cinco* números primos por debajo de su raíz cuadrada, es decir, a un número natural *e* tal que los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{e}$ son el 2, el 3, el 5, el 7 y el 11? Al realizar todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de estos números primos, al expresar las combinaciones de orden distinto de 1 en forma de multiplicaciones y al realizar los cálculos correspondientes, se obtendrán cinco *totales de e*: $\overset{e}{T}_1$, $\overset{e}{T}_2$, $\overset{e}{T}_3$, $\overset{e}{T}_4$ y $\overset{e}{T}_5$. A partir de las fórmulas que hasta ahora conocemos se deduce que la fórmula correspondiente a *e* sería, en parte, $\overset{e}{C} = \overset{e}{T}_1 - \overset{e}{T}_2 + \overset{e}{T}_3 - \overset{e}{T}_4$. Pero, ¿qué habría que hacer con $\overset{e}{T}_5$? ¿Habría que sumarlo o restarlo a $\overset{e}{T}_1 - \overset{e}{T}_2 + \overset{e}{T}_3 - \overset{e}{T}_4$? Para averiguar esto, se puede decir que si los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{e}$ son el 2, el 3, el 5, el 7 y el 11, entonces se tiene que 121 < e < 170. Ahora, por debajo de *e* no puede haber (y no hay) ningún número natural divisible por los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 al mismo tiempo. Si hubiera alguno (lo cual es, obviamente, imposible), el mismo debería aparecer C^{5}_{1} veces en $\overset{e}{T}_1$, es decir, cinco veces; C^{5}_{2} veces en $\overset{e}{T}_2$, es decir, diez veces; C^{5}_{3} veces en $\overset{e}{T}_3$, es decir, diez veces también; C^{5}_{4} veces en $\overset{e}{T}_4$, es decir, cinco veces; y C^{5}_{5} vez en $\overset{e}{T}_5$, es decir, una sola vez. Si sumamos $\overset{e}{T}_5$ a $\overset{e}{T}_1 - \overset{e}{T}_2 + \overset{e}{T}_3 - \overset{e}{T}_4$, entonces dicho número natural hubiera quedado incluido en $\overset{e}{C}$ una cantidad de veces igual a $C^{5}_{1} - C^{5}_{2} + C^{5}_{3} - C^{5}_{4} + C^{5}_{5}$, es decir, una sola vez. Esto era lo que estábamos buscando que ocurriera. Entonces, ya dedujimos la fórmula correspondiente a *e*:

$$\blacksquare\ \overset{e}{C} = \overset{e}{T_1} - \overset{e}{T_2} + \overset{e}{T_3} - \overset{e}{T_4} + \overset{e}{T_5}$$

Para comprobar que esta fórmula es correcta, se la puede analizar como se hizo en páginas anteriores de este trabajo con las fórmulas que conocíamos hasta ahora.

Obsérvese que

$$C^5_1 - C^5_2 + C^5_3 - C^5_4 + C^5_5 = 1$$

- Ahora, ¿cuál sería la fórmula correspondiente a un número natural *f* que tiene exactamente *seis* números primos por debajo de su raíz cuadrada, es decir, a un número natural *f* tal que los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{f}$ son el 2, el 3, el 5, el 7, el 11 y el 13? Al realizar todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de estos números primos, al expresar las combinaciones de orden distinto de 1 en forma de multiplicaciones y al realizar los cálculos correspondientes, se obtendrán seis *totales de f*: $\overset{f}{T_1}$, $\overset{f}{T_2}$, $\overset{f}{T_3}$, $\overset{f}{T_4}$, $\overset{f}{T_5}$ y $\overset{f}{T_6}$. A partir de las fórmulas que hasta ahora conocemos se deduce que la fórmula correspondiente a *f* sería, en parte, $\overset{f}{C} = \overset{f}{T_1} - \overset{f}{T_2} + \overset{f}{T_3} - \overset{f}{T_4} + \overset{f}{T_5}$. Pero, ¿qué habría que hacer con $\overset{f}{T_6}$? ¿Habría que sumarlo o restarlo al resultado de $\overset{f}{T_1} - \overset{f}{T_2} + \overset{f}{T_3} - \overset{f}{T_4} + \overset{f}{T_5}$? Para averiguar esto, se puede decir que si los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{f}$ son el 2, el 3, el 5, el 7, el 11 y el 13, entonces se tiene que $169 < f < 290$. Ahora, por debajo de *f* no puede haber (y no hay) ningún número natural divisible por los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 al mismo tiempo. Si hubiera alguno (lo cual es, obviamente, imposible), el mismo debería aparecer C^6_1 veces en $\overset{f}{T_1}$, es decir, seis veces; C^6_2 veces en $\overset{f}{T_2}$, es decir, quince veces; C^6_3 veces en $\overset{f}{T_3}$, es decir, veinte veces; C^6_4 veces en $\overset{f}{T_4}$, es decir, quince veces; C^6_5 veces en $\overset{f}{T_5}$, es decir, seis veces; y C^6_6 vez en $\overset{f}{T_6}$, es decir, una sola vez. Si sumamos $\overset{f}{T_6}$ a $\overset{f}{T_1} - \overset{f}{T_2} + \overset{f}{T_3} - \overset{f}{T_4} + \overset{f}{T_5}$, entonces dicho número natural hubiera quedado incluido en $\overset{f}{C}$ una cantidad de veces igual a $C^6_1 - C^6_2 + C^6_3 - C^6_4 + C^6_5 + C^6_6$, es decir, tres veces. En cambio, si en lugar de sumar *restamos* $\overset{f}{T_6}$ a

$\overset{f}{T}_1 - \overset{f}{T}_2 + \overset{f}{T}_3 - \overset{f}{T}_4 + \overset{f}{T}_5$, entonces dicho número natural hubiera quedado incluido en $\overset{f}{C}$ una cantidad de veces igual a $C^{6}_{1} - C^{6}_{2} + C^{6}_{3} - C^{6}_{4} + C^{6}_{5} - C^{6}_{6}$, es decir, una sola vez. Esto era lo que estábamos buscando que ocurriera. Entonces, ya dedujimos la fórmula correspondiente a f:

$$\boxed{\blacksquare\ \overset{f}{C} = \overset{f}{T}_1 - \overset{f}{T}_2 + \overset{f}{T}_3 - \overset{f}{T}_4 + \overset{f}{T}_5 - \overset{f}{T}_6}$$

Para comprobar que esta fórmula es correcta, se la puede analizar como se hizo con las primeras cuatro fórmulas deducidas.
Obsérvese que

$$C^{6}_{1} - C^{6}_{2} + C^{6}_{3} - C^{6}_{4} + C^{6}_{5} - C^{6}_{6} = 1$$

Como se puede ver, las fórmulas siempre siguen un patrón definido, ya que los *totales* de subíndice impar siempre suman, mientras que los *totales* de subíndice par siempre restan. Esto nos permite deducir las infinitas fórmulas que existen. Entonces podemos decir, por ejemplo, que si g es un número natural que tiene exactamente *siete* números primos por debajo de su raíz cuadrada, es decir, que si g es un número natural tal que los únicos números primos que están por debajo de $\sqrt{g}$ son el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13 y el 17, se tendrá que

$$\boxed{\blacksquare\ \overset{g}{C} = \overset{g}{T}_1 - \overset{g}{T}_2 + \overset{g}{T}_3 - \overset{g}{T}_4 + \overset{g}{T}_5 - \overset{g}{T}_6 + \overset{g}{T}_7}$$

Ahora, si llamamos h a un número natural que tiene exactamente *ocho* números primos por debajo de su raíz cuadrada, es decir, a un número natural tal que los únicos números primos que están por debajo de su raíz cuadrada son el 2, el 3, el 5, el 7, el 11, el 13, el 17 y el 19, se tendrá que

$$\boxed{\blacksquare\ \overset{h}{C} = \overset{h}{T}_1 - \overset{h}{T}_2 + \overset{h}{T}_3 - \overset{h}{T}_4 + \overset{h}{T}_5 - \overset{h}{T}_6 + \overset{h}{T}_7 - \overset{h}{T}_8}$$

Y así sucesivamente.

Para comprobar que estas fórmulas y las infinitas fórmulas que existen son correctas, también se las puede analizar como se hizo anteriormente con las primeras fórmulas deducidas.

En conclusión, analizando el patrón que siguen las fórmulas que dedujimos, es correcto afirmar que si *x* es un número natural que tiene una cantidad impar *i* de números primos por debajo de su raíz cuadrada, entonces la fórmula para calcular cuántos números compuestos hay por debajo de *x* será la siguiente:

$$\boxed{\overset{x}{\mathbf{C}} = \overset{x}{\mathbf{T}}_1 - \overset{x}{\mathbf{T}}_2 + \overset{x}{\mathbf{T}}_3 - \overset{x}{\mathbf{T}}_4 + \overset{x}{\mathbf{T}}_5 - \overset{x}{\mathbf{T}}_6 + \ldots + \overset{x}{\mathbf{T}}_i}$$

Y si *y* es un número natural que tiene una cantidad par *p* de números primos por debajo de su raíz cuadrada, la fórmula para calcular cuántos números compuestos hay por debajo de *y* será la siguiente:

$$\boxed{\overset{y}{\mathbf{C}} = \overset{y}{\mathbf{T}}_1 - \overset{y}{\mathbf{T}}_2 + \overset{y}{\mathbf{T}}_3 - \overset{y}{\mathbf{T}}_4 + \overset{y}{\mathbf{T}}_5 - \overset{y}{\mathbf{T}}_6 + \ldots + \overset{y}{\mathbf{T}}_{p-1} - \overset{y}{\mathbf{T}}_p}$$

Obsérvese que también “siguen un patrón definido” las fórmulas que nos sirvieron para comprobar que son correctas las fórmulas de cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, ya que las combinaciones sin repetición de orden impar siempre suman, mientras que las combinaciones sin repetición de orden par siempre restan, y, de este modo, siempre se obtiene como resultado **1**:

$$\overset{1}{\underset{1}{C}} = \mathbf{1}$$

$$\overset{2}{\underset{1}{C}} - \overset{2}{\underset{2}{C}} = \mathbf{1}$$

$$\overset{3}{\underset{1}{C}} - \overset{3}{\underset{2}{C}} + \overset{3}{\underset{3}{C}} = \mathbf{1}$$

$$\overset{4}{\underset{1}{C}} - \overset{4}{\underset{2}{C}} + \overset{4}{\underset{3}{C}} - \overset{4}{\underset{4}{C}} = \mathbf{1}$$

$$\overset{5}{\underset{1}{C}} - \overset{5}{\underset{2}{C}} + \overset{5}{\underset{3}{C}} - \overset{5}{\underset{4}{C}} + \overset{5}{\underset{5}{C}} = \mathbf{1}$$

$$\overset{6}{\underset{1}{C}} - \overset{6}{\underset{2}{C}} + \overset{6}{\underset{3}{C}} - \overset{6}{\underset{4}{C}} + \overset{6}{\underset{5}{C}} - \overset{6}{\underset{6}{C}} = \mathbf{1}$$

Es correcto decir, entonces, que si *i* es un número natural impar cualquiera, se tiene que

$$C^{i}_{1} - C^{i}_{2} + C^{i}_{3} - C^{i}_{4} + C^{i}_{5} - C^{i}_{6} + \dots + C^{i}_{i} = 1$$

y que si *p* es un número natural par cualquiera, se tiene que

$$C^{p}_{1} - C^{p}_{2} + C^{p}_{3} - C^{p}_{4} + C^{p}_{5} - C^{p}_{6} + \dots + C^{p}_{p-1} - C^{p}_{p} = 1$$

Esto nos da seguridad de que son correctas las infinitas fórmulas de cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado que existen.

Por otra parte, cuando en una operación se tienen números positivos y números negativos, dicha operación se puede resolver directamente o bien se le puede restar a la suma de los números positivos la suma de los números negativos. Como se puede ver en todas las fórmulas deducidas, los *totales* de subíndice impar siempre suman, mientras que los *totales* de subíndice par siempre restan. Entonces, se puede decir que la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado es igual a la suma de sus *totales* de subíndice impar menos la suma de sus *totales* de subíndice par. Por lo tanto, si *n* es un número natural, S^{n}_{i} la suma de los *totales de n* de subíndice impar y S^{n}_{p} la suma de los *totales de n* de subíndice par, se tiene que

$$\boxed{C^{n} = S^{n}_{i} - S^{n}_{p}}$$

Ésta es la fórmula general del cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado.

Conclusión final

Para que quede bien en claro cómo es que se calcula la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, se muestran a continuación algunos ejemplos de cálculo con números naturales tomados al azar. Dichos ejemplos de cálculo no tendrán ningún tipo de aclaración ni de justificación, ya que el porqué de la naturaleza del cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado ya ha sido explicado anteriormente.

• **Ejemplo 1**

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **8**

→ $\sqrt{8} = 2{,}82...$
→ Único número primo por debajo de 2,82... ⟶ *2*

Cantidad de números compuestos divisibles por *2* que hay por debajo de 8

$$\downarrow$$

$$2$$

$$\overset{8}{T}_1 = 2$$

$$\overset{8}{C} = \overset{8}{T}_1 = \mathbf{2}$$

Hay **dos** números compuestos por debajo de 8.

• **Ejemplo 2**

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **16**

→ $\sqrt{16} = 4$
→ Números primos por debajo de 4 ⟶ *2* y *3*

Referencias

► = "Cantidad de números compuestos divisibles por [número primo que está a la derecha] que hay por debajo de 16"

■ = "Cantidad de números naturales divisibles por [resultado de la multiplicación que está a la derecha] que hay por debajo de 16"

❷ Única combinación sin repetición de orden dos de los números primos 2 y 3 posible (expresada en forma de multiplicación)

$$\begin{array}{ll} \blacktriangleright\ \mathit{2} \longrightarrow 6 & \\ \quad\quad + & \\ \blacktriangleright\ \mathit{3} \longrightarrow 4 & \\ \quad\quad = & \\ \overset{16}{T}_1 = 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \blacksquare\ \overbrace{2 * 3}^{❷} (= 6) \longrightarrow 2 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow \\ \quad\quad\quad\quad \overset{16}{T}_2 = 2 \end{array}$$

$$\overset{16}{C} = \overset{16}{T}_1 - \overset{16}{T}_2 = 10 - 2 = \mathbf{8}$$

Hay **ocho** números compuestos por debajo de 16.

- **Ejemplo 3**

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **36**

$\rightarrow \sqrt{36} = 6$

$\rightarrow$ Números primos por debajo de 6 $\longrightarrow$ *2*, *3* y *5*

Referencias

► = "Cantidad de números compuestos divisibles por [número primo que está a la derecha] que hay por debajo de 36"

■ = "Cantidad de números naturales divisibles por [resultado de la multiplicación que está a la derecha] que hay por debajo de 36"

❷ Todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3 y 5 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❸ Única combinación sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3 y 5 posible (expresada en forma de multiplicación)

$$\begin{array}{l} \blacktriangleright\ \mathit{2} \longrightarrow 16 \\ \quad\quad + \\ \blacktriangleright\ \mathit{3} \longrightarrow 10 \\ \quad\quad + \\ \blacktriangleright\ \mathit{5} \longrightarrow 6 \\ \quad\quad = \\ \overset{36}{T}_1 = 32 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \blacksquare\ \overbrace{2 * 3}^{❷} (= 6) \longrightarrow 5 \\ \quad\quad + \\ \blacksquare\ 2 * 5 (= 10) \longrightarrow 3 \\ \quad\quad + \\ \blacksquare\ \underbrace{3 * 5}_{❷} (= 15) \longrightarrow 2 \\ \quad\quad = \\ \overset{36}{T}_2 = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \blacksquare\ \overbrace{2 * 3 * 5}^{❸} (= 30) \longrightarrow 1 \\ \quad\quad\quad\quad \downarrow \\ \overset{36}{T}_3 = 1 \end{array}$$

$$\overset{36}{C} = \overset{36}{T}_1 - \overset{36}{T}_2 + \overset{36}{T}_3 = 32 - 10 + 1 = \mathbf{23}$$

Hay **veintitrés** números compuestos por debajo de 36.

- **Ejemplo 4**

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **52**

→ $\sqrt{52} = 7{,}21\ldots$
→ Números primos por debajo de 7,21... ⟶ *2*, *3*, *5* y *7*

Referencias

▶ = "Cantidad de números compuestos divisibles por [número primo que está a la derecha] que hay por debajo de 52"
■ = "Cantidad de números naturales divisibles por [resultado de la multiplicación que está a la derecha] que hay por debajo de 52"
❷ Todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3, 5 y 7 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)
❸ Todas las combinaciones sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3, 5 y 7 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)
❹ Única combinación sin repetición de orden cuatro de los números primos 2, 3, 5 y 7 posible (expresada en forma de multiplicación)

▶ 2 ⟶ 24
+
▶ 3 ⟶ 16
+
▶ 5 ⟶ 9
+
▶ 7 ⟶ 6
=
$\overset{52}{T}_1 = 55$

❷

■ 2 * 3 (= 6) ⟶ 8
+
■ 2 * 5 (= 10) ⟶ 5
+
■ 2 * 7 (= 14) ⟶ 3
+
■ 3 * 5 (= 15) ⟶ 3
+
■ 3 * 7 (= 21) ⟶ 2
+
■ 5 * 7 (= 35) ⟶ 1

❷

=
$\overset{52}{T}_2 = 22$

❸

■ 2 * 3 * 5 (= 30) ⟶ 1
+
■ 2 * 3 * 7 (= 42) ⟶ 1
+
■ 2 * 5 * 7 (= 70) ⟶ 0
+
■ 3 * 5 * 7 (= 105) ⟶ 0

❸

=
$\overset{52}{T}_3 = 2$

❹

■ 2 * 3 * 5 * 7 (= 210) ⟶ 0
=
$\overset{52}{T}_4 = 0$

$$C = \overset{52}{T}_1 - \overset{52}{T}_2 + \overset{52}{T}_3 - \overset{52}{T}_4 = 55 - 22 + 2 - 0 = \mathbf{35}$$

Hay **treinta y cinco** números compuestos por debajo de 52.

• Ejemplo 5

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **128**

→ $\sqrt{128} = 11{,}31...$

→ Números primos por debajo de 11,31... ⟶ 2, 3, 5, 7 y 11

Referencias

► = "Cantidad de números compuestos divisibles por [número primo que está a la derecha] que hay por debajo de 128"

■ = "Cantidad de números naturales divisibles por [resultado de la multiplicación que está a la derecha] que hay por debajo de 128"

❷ Todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❸ Todas las combinaciones sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❹ Todas las combinaciones sin repetición de orden cuatro de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❺ Única combinación sin repetición de orden cinco de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 posible (expresada en forma de multiplicación)

	❷	❸	❹	❺
► 2 ⟶ 62	■ 2 * 3 (= 6) ⟶ 21	■ 2 * 3 * 5 (= 30) ⟶ 4	■ 2 * 3 * 5 * 7 (= 210) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 5 * 7 * 11 (= 2310) ⟶ 0
+ ► 3 ⟶ 41	+ ■ 2 * 5 (= 10) ⟶ 12	+ ■ 2 * 3 * 7 (= 42) ⟶ 3	+ ■ 2 * 3 * 5 * 11 (= 330) ⟶ 0	
+ ► 5 ⟶ 24	+ ■ 2 * 7 (= 14) ⟶ 9	+ ■ 2 * 3 * 11 (= 66) ⟶ 1	+ ■ 2 * 3 * 7 * 11 (= 462) ⟶ 0	
+ ► 7 ⟶ 17	+ ■ 2 * 11 (= 22) ⟶ 5	+ ■ 2 * 5 * 7 (= 70) ⟶ 1	+ ■ 2 * 5 * 7 * 11 (= 770) ⟶ 0	
+ ► 11 ⟶ 10	+ ■ 3 * 5 (= 15) ⟶ 8	+ ■ 2 * 5 * 11 (= 110) ⟶ 1	+ ■ 3 * 5 * 7 * 11 (= 1155) ⟶ 0	
	+ ■ 3 * 7 (= 21) ⟶ 6	+ ■ 2 * 7 * 11 (= 154) ⟶ 0	❹	
	+ ■ 3 * 11 (= 33) ⟶ 3	+ ■ 3 * 5 * 7 (= 105) ⟶ 1		
	+ ■ 5 * 7 (= 35) ⟶ 3	+ ■ 3 * 5 * 11 (= 165) ⟶ 0		
	+ ■ 5 * 11 (= 55) ⟶ 2	+ ■ 3 * 7 * 11 (= 237) ⟶ 0		
	+ ■ 7 * 11 (= 77) ⟶ 1	+ ■ 5 * 7 * 11 (= 385) ⟶ 0		
	❷	❸		
= $\overset{128}{T}_1 = 154$	= $\overset{128}{T}_2 = 70$	= $\overset{128}{T}_3 = 11$	= $\overset{128}{T}_4 = 0$	= $\overset{128}{T}_5 = 0$

$$\overset{128}{C} = \overset{128}{T}_1 - \overset{128}{T}_2 + \overset{128}{T}_3 - \overset{128}{T}_4 + \overset{128}{T}_5 = 154 - 70 + 11 - 0 + 0 = \mathbf{95}$$

Hay **noventa y cinco** números compuestos por debajo de 128.

- **Ejemplo 6**

Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de **176**

→ √176 = 13,26...

→ Números primos por debajo de 13,26... ⟶ *2, 3, 5, 7, 11* y *13*

Referencias

▶ = "Cantidad de números compuestos divisibles por [número primo que está a la derecha] que hay por debajo de 176"

■ = "Cantidad de números naturales divisibles por [resultado de la multiplicación que está a la derecha] que hay por debajo de 176"

❷ Todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❸ Todas las combinaciones sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❹ Todas las combinaciones sin repetición de orden cuatro de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❺ Todas las combinaciones sin repetición de orden cinco de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 posibles (expresadas en forma de multiplicaciones)

❻ Única combinación sin repetición de orden seis de los números primos 2, 3, 5, 7, 11 y 13 posible (expresada en forma de multiplicación)

▶	❷	❸	❹	❺	❻
▶ *2* ⟶ 86	■ 2 * 3 (= 6) ⟶ 29	■ 2 * 3 * 5 (= 30) ⟶ 5	■ 2 * 3 * 5 * 7 (= 210) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 5 * 7 * 11 (= 2310) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 5 * 7 * 11 * 13 (= 30030) ⟶ 0
▶ *3* ⟶ 57	■ 2 * 5 (= 10) ⟶ 17	■ 2 * 3 * 7 (= 42) ⟶ 4	■ 2 * 3 * 5 * 11 (= 330) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 5 * 7 * 13 (= 2730) ⟶ 0	
▶ *5* ⟶ 34	■ 2 * 7 (= 14) ⟶ 12	■ 2 * 3 * 11 (= 66) ⟶ 2	■ 2 * 3 * 5 * 13 (= 390) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 5 * 11 * 13 (= 4290) ⟶ 0	
▶ *7* ⟶ 24	■ 2 * 11 (= 22) ⟶ 7	■ 2 * 3 * 13 (= 78) ⟶ 2	■ 2 * 3 * 7 * 11 (= 462) ⟶ 0	■ 2 * 3 * 7 * 11 * 13 (= 6006) ⟶ 0	
▶ *11* ⟶ 14	■ 2 * 13 (= 26) ⟶ 6	■ 2 * 5 * 7 (= 70) ⟶ 2	■ 2 * 3 * 7 * 13 (= 546) ⟶ 0	■ 2 * 5 * 7 * 11 * 13 (= 10010) ⟶ 0	
▶ *13* ⟶ 12	■ 3 * 5 (= 15) ⟶ 11	■ 2 * 5 * 11 (= 110) ⟶ 1	■ 2 * 3 * 11 * 13 (= 858) ⟶ 0	■ 3 * 5 * 7 * 11 * 13 (= 15015) ⟶ 0	
	■ 3 * 7 (= 21) ⟶ 8	■ 2 * 5 * 13 (= 130) ⟶ 1	■ 2 * 5 * 7 * 11 (= 770) ⟶ 0		
	■ 3 * 11 (= 33) ⟶ 5	■ 2 * 7 * 11 (= 154) ⟶ 1	■ 2 * 5 * 7 * 13 (= 910) ⟶ 0		
	■ 3 * 13 (= 39) ⟶ 4	■ 2 * 7 * 13 (= 182) ⟶ 0	■ 2 * 5 * 11 * 13 (= 1430) ⟶ 0		
	■ 5 * 7 (= 35) ⟶ 5	■ 2 * 11 * 13 (= 286) ⟶ 0	■ 2 * 7 * 11 * 13 (= 2002) ⟶ 0		
	■ 5 * 11 (= 55) ⟶ 3	■ 3 * 5 * 7 (= 105) ⟶ 1	■ 3 * 5 * 7 * 11 (= 1155) ⟶ 0		
	■ 5 * 13 (= 65) ⟶ 2	■ 3 * 5 * 11 (= 165) ⟶ 1	■ 3 * 5 * 7 * 13 (= 1365) ⟶ 0		
	■ 7 * 11 (= 77) ⟶ 2	■ 3 * 5 * 13 (= 195) ⟶ 0	■ 3 * 5 * 11 * 13 (= 2145) ⟶ 0		
	■ 7 * 13 (= 91) ⟶ 1	■ 3 * 7 * 11 (= 231) ⟶ 0	■ 3 * 7 * 11 * 13 (= 3003) ⟶ 0		
	■ 11 * 13 (= 143) ⟶ 1	■ 3 * 7 * 13 (= 273) ⟶ 0	■ 5 * 7 * 11 * 13 (= 5005) ⟶ 0		
		■ 3 * 11 * 13 (= 429) ⟶ 0			
		■ 5 * 7 * 11 (= 385) ⟶ 0			
		■ 5 * 7 * 13 (= 455) ⟶ 0			
		■ 5 * 11 * 13 (= 715) ⟶ 0			
		■ 7 * 11 * 13 (= 1001) ⟶ 0			
$\overset{176}{T_1} = 227$	$\overset{176}{T_2} = 113$	$\overset{176}{T_3} = 20$	$\overset{176}{T_4} = 0$	$\overset{176}{T_5} = 0$	$\overset{176}{T_6} = 0$

Ahora, se tiene que $C = \overset{176}{T_1} - \overset{176}{T_2} + \overset{176}{T_3} - \overset{176}{T_4} + \overset{176}{T_5} - \overset{176}{T_6} =$ **134**, es decir, que hay **ciento treinta y cuatro** números compuestos por debajo de 176.

Una fórmula de utilidad

La fórmula $C_r^n = n! / [r! (n-r)!]$ (ver *Combinatoria*) nos puede servir de ayuda al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado, como veremos a continuación.

Supongamos que queremos calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 500. Como ya se sabe, debemos realizar todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de los números primos que estén por debajo de $\sqrt{500}$. Por debajo de $\sqrt{500}$ ($\sqrt{500}$ = 22,36...) hay exactamente **ocho** números primos: el **2**, el **3**, el **5**, el **7**, el **11**, el **13**, el **17** y el **19**. Esto significa que debemos realizar todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19. "En medio de tantos números", podríamos confundirnos y olvidarnos de realizar combinaciones. Si esto ocurriera, nuestro cálculo podría arrojar un resultado incorrecto. Para evitar que esto suceda, podemos emplear la fórmula $C_r^n = n! / [r! (n-r)!]$:

- Una vez que realizamos las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19, las contamos. La cantidad de estas combinaciones deberá ser igual a C_2^8, es decir, a 8! / [2! (8 – 2)!] (lo cual es igual a 28).
- Una vez que realizamos las combinaciones sin repetición de orden tres de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19, las contamos. La cantidad de estas combinaciones deberá ser igual a C_3^8, es decir, a 8! / [3! (8 – 3)!] (lo cual es igual a 56).
- Y lo mismo hacemos con las combinaciones sin repetición de orden cuatro, cinco, seis, siete y ocho.

Como se puede ver, resulta conveniente utilizar la fórmula $C_r^n = n! / [r! (n-r)!]$ en casos en los que se tenga que realizar una gran cantidad de combinaciones.

Para terminar, hay que dejar en claro que **la fórmula $C_r^n = n! / [r! (n-r)!]$ no forma parte del procedimiento para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado**, sino que **sirve de ayuda** para evitar cometer errores a causa de los cuales podría obtenerse un resultado incorrecto.

Cómo evitar cálculos innecesarios

Observando detenidamente los ejemplos de cálculo de esta **Conclusión final**, se puede ver que en los ejemplos 4, 5 y 6 hay cálculos que no hubiera hecho falta realizar, cálculos cuyo resultado es *cero*, razón por la cual su omisión no habría alterado el resultado final. Por ejemplo, si miramos el ejemplo 4, podremos comprobar que para calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 52 no habría hecho falta calcular ni la cantidad de números naturales divisibles por 70 que hay por debajo de 52, ni la cantidad de números naturales divisibles por 105 que hay por debajo de 52, ni la cantidad de números naturales divisibles por 210 que hay por debajo de 52, ya que el resultado de estos tres cálculos es *cero*, lo que significa que si los mismos no se hubieran realizado, el resultado final no habría sido alterado (es decir, igualmente se habría obtenido como resultado que por debajo de 52 hay treinta y cinco números compuestos). Cabe aclarar que el objetivo de los ejemplos de esta **Conclusión final** es solamente mostrar el mecanismo del cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número dado, y es por eso que los cálculos de la *cantidad de números compuestos divisibles por ... que hay por debajo de ...* y de la *cantidad de números naturales divisibles por ... que hay por debajo de ...* no fueron realizados, sino que simplemente se mostró el resultado de los mismos. Hay que dejar en claro que la forma en que se hacen estos cálculos ya fue explicada en *Números compuestos divisibles por p que hay por debajo de n* (página 22) y en *Números naturales divisibles por a que hay por debajo de b* (página 20), respectivamente.

Además, mirando los ejemplos en los que aparecen cálculos innecesarios, se puede ver que estos cálculos siempre “aparecen” de la columna ❸ en adelante, y nunca podrían aparecer ni en la primera columna, ni en la columna ❷, por lo que se explica a continuación:

Cuando calculamos la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un determinado número natural *n*, en la primera columna tenemos a los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$, mientras que en la columna ❷ tenemos, expresadas en forma de multiplicaciones, todas las combinaciones sin repetición de orden dos de estos números primos.

Ahora, supongamos que *p* es uno de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$. Si elevamos a *p* al cuadrado, obtenemos un número compuesto divisible por *p*, y este número compuesto será menor que *n*, ya que si

$$p < \sqrt{n}$$

entonces

$$p^2 < n$$

Esto demuestra que para todo número primo que esté por debajo de $\sqrt{n}$ siempre hay por lo menos un número compuesto divisible por él por debajo de *n*. Entonces, al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de *n*, en la primera columna nunca pueden aparecer cálculos innecesarios, es decir, cálculos cuyo resultado sea *cero*.

Por otra parte, al multiplicar entre sí dos números primos que estén por debajo de $\sqrt{n}$ siempre se obtendrá como resultado un número menor que *n*. Para demostrar esto, supongamos que p_1 y p_2 son números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$ y que $p_1 < p_2$. En símbolos, tenemos que

$$p_1 < \sqrt{n}$$

y que

$$p_2 < \sqrt{n}$$

Entonces, tenemos que

$$p_1^{\ 2} < n$$

y que

$$p_2^{\ 2} < n$$

Dicho de otra forma, tenemos que

$$p_1 * p_1 < n$$

y que

$$p_2 * p_2 < n$$

Esto implica que

$$p_1 * p_2 < n$$

ya que el resultado de $p_1 * p_2$ es un número entre el resultado de $p_1 * p_1$ y el resultado de $p_2 * p_2$. Por lo tanto, al realizar todas las combinaciones sin repetición de orden dos de los números primos que están por debajo de $\sqrt{n}$, al expresar dichas combinaciones en forma de multiplicaciones y al obtener los productos de estas multiplicaciones, veremos que todos los productos son números menores que *n*, lo que significa que para todo producto siempre habrá al menos un número natural divisible por él por debajo de *n*. Entonces, al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de *n*, veremos que en la columna ❷ no habrá ningún cálculo innecesario, es decir, ningún cálculo cuyo resultado sea *cero*.

Esto significa que al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural *n*, hay que calcular $\overset{n}{T_1}$ y $\overset{n}{T_2}$ sabiendo que es imposible que se hagan cálculos innecesarios al calcular estas dos cantidades, ya que el valor de $\overset{n}{T_1}$ se obtiene a partir de los cálculos de la primera columna y el valor de $\overset{n}{T_2}$ se obtiene a partir de los cálculos de la columna ❷. Luego, calculando los demás *totales de n* es que aparecen los cálculos innecesarios.

Para tener una idea acerca de cómo evitar cálculos innecesarios, a continuación se explicará este tema analizando ejemplos de esta **Conclusión final**.

- **Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 52**

Una vez calculados los valores de $\overset{52}{T_1}$ y $\overset{52}{T_2}$, hay que calcular $\overset{52}{T_3}$ y $\overset{52}{T_4}$.

Mientras se calcula el valor de $\overset{52}{T_3}$, se puede ver que los resultados de las dos primeras multiplicaciones de tres factores (2 * 3 * 5 y 2 * 3 * 7) son números menores que 52. Estos resultados son *30* y *42*, y se comprueba que por debajo de 52 hay un número natural divisible por 30 y un número natural divisible por 42. Ahora, el resultado de la tercera multiplicación de tres factores (2 * 5 * 7) es un número natural mayor que 52, ya que 2 * 5 * 7 = 70. Como 70 es un número natural mayor que 52, es correcto decir, sin necesidad de hacer ningún cálculo, que por debajo de 52 no hay ningún número natural divisible por 70. Finalmente, la cuarta y última multiplicación de tres factores es 3 * 5 * 7. Si el resultado de **2** * 5 * 7 es un número natural mayor que 52, con más razón será el resultado de **3** * 5 * 7 un número natural mayor que 52, lo que significa que tampoco hay ningún número natural divisible por 105 (resultado de 3 * 5 * 7) por debajo de 52.

En conclusión, lo que hay que hacer para obtener el valor de $\overset{52}{T_3}$ es calcular la cantidad de números naturales divisibles por 30 que hay por debajo de 52 y la cantidad de números naturales divisibles por 42 que hay por debajo de 52, y, por supuesto, hay que sumar ambas cantidades. Tenemos, entonces, que

$$\overset{52}{\mathrm{T}_3} = 1 + 1 = 2$$

Ahora, para calcular el valor de $\overset{52}{T_4}$ hay que trabajar con una única multiplicación de cuatro factores: 2 * 3 * 5 * 7. El resultado de esta multiplicación es *210*, y el valor de $\overset{52}{T_4}$ será igual a la cantidad de números naturales divisibles por 210 que hay por debajo de 52. Como 210 es un número natural mayor que 52, es correcto decir, sin necesidad de hacer ningún cálculo, que por debajo de 52 no hay ningún número natural divisible por 210, y que, por lo tanto,

$$\overset{52}{\mathrm{T}_4} = 0$$

Como $\overset{52}{\mathrm{T}_4} = 0$, el valor de $\overset{52}{T_4}$ no tiene importancia, por lo cual para calcular $\overset{52}{\mathrm{C}}$ no hace falta efectuar $\overset{52}{T_1} - \overset{52}{T_2} + \overset{52}{T_3} - \overset{52}{T_4}$, sino, simplemente, $\overset{52}{T_1} - \overset{52}{T_2} + \overset{52}{T_3}$.

Tenemos, pues, que

$$\overset{52}{C} = \overset{52}{T}_1 - \overset{52}{T}_2 + \overset{52}{T}_3$$

- **Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 128**

Una vez calculados los valores de $\overset{128}{T_1}$ y $\overset{128}{T_2}$, hay que calcular $\overset{128}{T_3}$, $\overset{128}{T_4}$ y $\overset{128}{T_5}$.

Al calcular el valor de $\overset{128}{T_3}$, podemos ver que los resultados de las primeras cinco multiplicaciones de tres factores (2 * 3 * 5; 2 * 3 * 7; 2 * 3 * 11; 2 * 5 * 7 y 2 * 5 * 11) son números naturales menores que 128. Estos resultados son *30*, *42*, *66*, *70* y *110*, y se comprueba que por debajo de 128 hay cuatro números naturales divisibles por 30, tres números naturales divisibles por 42, un solo número natural divisible por 66, un solo número natural divisible por 70 y un solo número natural divisible por 110. Ahora, el resultado de la sexta multiplicación de tres factores (2 * 7 * 11) es un número natural mayor que 128, ya que 2 * 7 * 11 = 154, y como 154 es un número natural mayor que 128, podemos decir, sin necesidad de hacer ningún cálculo, que por debajo de 128 no hay ningún número natural divisible por 154. Luego, el resultado de la séptima multiplicación de tres factores (3 * 5 * 7) es un número natural menor que 128, ya que 3 * 5 * 7 = 105, y se comprueba que por debajo de 128 hay un solo número natural divisible por 105. Después, tenemos que el resultado de 3 * 5 * 11 (la octava multiplicación de tres factores) es un número natural mayor que 128, ya que 3 * 5 * 11 = 165. Si el resultado de 3 * **5** * 11 es un número natural mayor que 128, con más razón será el resultado de 3 * **7** * 11 un número natural mayor que 128. Y si el resultado de **3** * 7 * 11 es un número natural mayor que 128, entonces con más razón será el resultado de **5** * 7 * 11 un número natural mayor que 128. Por lo tanto, estas tres últimas multiplicaciones de tres factores (3 * 5 * 11; 3 * 7 * 11 y 5 * 7 * 11) no tienen ninguna importancia.

En conclusión, lo que hay que hacer para obtener el valor de $\overset{128}{T_3}$ es calcular la cantidad de números naturales divisibles por 30 que hay por debajo de 128, la cantidad de números naturales divisibles por 42 que hay por debajo de 128, la cantidad de números naturales divisibles por 66 que hay por debajo de 128, la cantidad de números naturales divisibles por 70 que hay por debajo de 128, la cantidad de números naturales divisibles por 110 que hay por debajo de 128 y la cantidad de números naturales divisibles por 105 que hay por debajo de 128, y, por supuesto, hay que sumar estas cantidades. Tenemos, entonces, que

$$\overset{128}{T}_3 = 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$$

Mientras calculamos el valor de $\overset{128}{T_4}$, podemos ver que el resultado de 2 * 3 * 5 * 7 (la primera de las multiplicaciones de cuatro factores) es un número natural mayor que 128, ya que 2 * 3 * 5 * 7 = 210. Como 210 es mayor que 128, podemos decir que por debajo de 128 no hay ningún número natural divisible por 210.

Además, en los ejemplos de cálculo de esta **Conclusión final** las multiplicaciones son también combinaciones sin repetición, las cuales se hicieron siguiendo un orden. Al expresar como multiplicación la primera combinación sin repetición de orden cuatro de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11 y al realizar esta multiplicación, se obtiene como resultado el menor producto que puede obtenerse multiplicando entre sí cuatro de los números primos 2, 3, 5, 7 y 11. Por lo tanto, los productos de las demás multiplicaciones de cuatro de estos números primos serán siempre números naturales mayores que 210. En efecto, estos productos serán, obviamente, números naturales mayores que 128. Por consiguiente, con dichos productos ocurrirá lo mismo que con 210. Tenemos, entonces, que

$$\overset{128}{T}_4 = 0$$

Para calcular $\overset{128}{T}_5$, trabajamos con una única multiplicación de cinco factores: 2 * 3 * 5 * 7 * 11. Si el resultado de 2 * 3 * 5 * 7 es un número natural mayor que 128, con más razón será el resultado de 2 * 3 * 5 * 7 *** 11** un número natural mayor que 128.

Tenemos, pues, que

$$\overset{128}{T}_5 = 0$$

Obsérvese que $\overset{128}{T}_4$ vale *cero* y que $\overset{128}{T}_5$, *total de 128* cuyo subíndice es mayor que 4, también vale *cero*. De esto se deduce que si un *total x de un número natural n* vale *cero*, entonces también valdrán *cero* los *totales de n* que tengan subíndice mayor que *x*. En otras palabras, si $\overset{n}{T}_x = 0$, entonces también valdrán *cero* $\overset{n}{T}_{x+1}$, $\overset{n}{T}_{x+2}$, $\overset{n}{T}_{x+3}$, etcétera.

Finalmente, como tenemos que $\overset{128}{T}_4 = \overset{128}{T}_5 = 0$, para calcular $\overset{128}{C}$ no hace falta efectuar $\overset{128}{T}_1 - \overset{128}{T}_2 + \overset{128}{T}_3 - \overset{128}{T}_4 + \overset{128}{T}_5$, sino, simplemente, $\overset{128}{T}_1 - \overset{128}{T}_2 + \overset{128}{T}_3$. Basta decir, entonces, que

$$\overset{128}{C} = \overset{128}{T}_1 - \overset{128}{T}_2 + \overset{128}{T}_3$$

- **Cálculo de la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 176**

Una vez calculados los valores de $\overset{176}{T}_1$ y $\overset{176}{T}_2$, hay que calcular $\overset{176}{T}_3$, $\overset{176}{T}_4$, $\overset{176}{T}_5$ y $\overset{176}{T}_6$.

Mientras calculamos $\overset{176}{T}_3$, podemos ver que los resultados de las primeras ocho multiplicaciones de tres factores (2 * 3 * 5; 2 * 3 * 7; 2 * 3 * 11; 2 * 3 * 13; 2 * 5 * 7; 2 * 5 * 11; 2 * 5 * 13 y 2 * 7 * 11) son números naturales menores que 176. Estos resultados son *30*, *42*, *66*, *78*, *70*, *110*, *130* y *154*, y se comprueba que por debajo de 176 hay cinco números naturales divisibles por 30, cuatro números naturales divisibles por 42, dos números naturales divisibles por 66, dos números naturales divisibles por 78, dos números naturales divisibles por 70, un solo número natural divisible por 110, un solo número natural divisible por 130 y un solo número natural divisible por 154. Ahora, los resultados de la novena y de la décima multiplicación de tres factores (2 * 7 * 13 y 2 * 11 * 13) son números naturales mayores que 176, ya que 2 * 7 * 13 = 182 y 2 * 11 * 13 = 286, por lo cual estos resultados no tienen ninguna importancia. Luego, los resultados de la undécima y de la duodécima multiplicación de tres factores (3 * 5 * 7 y 3 * 5 * 11) son números naturales menores que 176, ya que 3 * 5 * 7 = 105 y 3 * 5 * 11 = 165, y se comprueba que por debajo de 176 hay un solo número natural divisible por 105 y un solo número natural divisible por 165. Después, tenemos que los resultados de la decimotercera y de la decimocuarta multiplicación de tres factores (3 * 5 * 13 y 3 * 7 * 11) son números naturales mayores que 176, ya que 3 * 5 * 13 = 195 y 3 * 7 * 11 = 231, por lo que estos resultados no tienen importancia alguna. Ahora, si el resultado de 3 * 7 * **11** es un número natural mayor que 176, con más razón lo será el resultado de 3 * 7 * **13**. Y si el resultado de 3 * **7** * 13 es un número natural mayor que 176, con más razón lo será el resultado de 3 * **11** * 13. Ahora, como el resultado de **3** * 7 * 11 es un número natural mayor que 176, entonces también lo será el resultado de **5** * 7 * 11. Y como el resultado de 5 * 7 * **11** es un número natural mayor que 176, entonces también lo será el resultado de 5 * 7 * **13**. Y siendo el resultado de 5 * **7** * 13 un número natural mayor que 176, también lo es el resultado de 5 * **11** * 13. Finalmente, como el resultado de **5** * 11 * 13 es un número natural mayor que 176, con más razón lo será el resultado de **7** * 11 * 13.

En conclusión, lo que hay que hacer para obtener el valor de $\overset{176}{T_3}$ es calcular la cantidad de números naturales divisibles por 30 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 42 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 66 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 78 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 70 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 110 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 130 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 154 que hay por debajo de 176, la cantidad de números naturales divisibles por 105 que hay por debajo de 176 y la cantidad de números naturales divisibles por 165 que hay por debajo de 176, y, por supuesto, hay que sumar dichas cantidades. Calculando estas cantidades, se tiene que

$$\overset{176}{T_3} = 5 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$$

Mientras calculamos $\overset{176}{T_4}$, podemos ver que el resultado de 2 * 3 * 5 * 7 (la primera de las multiplicaciones de cuatro factores) es un número natural mayor que 176, ya que 2 * 3 * 5 * 7 = 210. Por esta razón, tenemos que

$$\overset{176}{T_4} = 0$$

Y como $T_4^{176} = 0$, también valdrán cero T_5^{176} y T_6^{176}. Tenemos, pues, que

$$T_4^{176} = T_5^{176} = T_6^{176} = 0$$

Como $T_4^{176} = T_5^{176} = T_6^{176} = 0$, para calcular C^{176} no hace falta efectuar $T_1^{176} - T_2^{176} + T_3^{176} - T_4^{176} + T_5^{176} - T_6^{176}$, sino, simplemente, $T_1^{176} - T_2^{176} + T_3^{176}$. Por consiguiente, tenemos que

$$C^{176} = T_1^{176} - T_2^{176} + T_3^{176}$$

Todos éstos han sido ejemplos de cómo evitar hacer cálculos innecesarios al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural dado.

Como se pudo ver anteriormente, al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural más o menos chico (como por ejemplo el 52, el 128 o el 176), no hay mucha diferencia entre hacer todos los cálculos y hacer sólo los cálculos que son necesarios, evitando aquellos que son innecesarios. Pero al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural lo suficientemente grande, se hace necesario evitar todo cálculo inútil.

Si quisiéramos calcular la cantidad de números compuestos que hay, por ejemplo, por debajo de 850, tendríamos que trabajar con **diez** números primos: el **2**, el **3**, el **5**, el **7**, el **11**, el **13**, el **17**, el **19**, el **23** y el **29** (números primos que están por debajo de $\sqrt{850}$, es decir, por debajo de 29,15...). La cantidad de todas las combinaciones sin repetición posibles de todos los órdenes posibles de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29 será igual a $C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + C_4^{10} + C_5^{10} + C_6^{10} + C_7^{10} + C_8^{10} + C_9^{10} + C_{10}^{10}$, es decir, igual a 1023.

Una vez calculados los valores de T_1^{850} y T_2^{850}, hay que calcular T_3^{850}, T_4^{850}, T_5^{850}, T_6^{850}, T_7^{850}, T_8^{850}, T_9^{850} y T_{10}^{850}. Después de calcular T_3^{850} y T_4^{850}, podemos ver que ni T_3^{850} ni T_4^{850} valen *cero*.

Ahora, para calcular T_5^{850} hay que realizar todas las combinaciones sin repetición de orden cinco de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29 que sean posibles, expresar dichas combinaciones en forma de multiplicaciones, calcular para el resultado de toda multiplicación la cantidad de números naturales divisibles por él que hay por debajo de 850 y, obviamente, sumar las cantidades obtenidas. Como el resultado de la primera de las multiplicaciones (2 * 3 * 5 * 7 * 11) es un número natural mayor que 850 (2 * 3 * 5 * 7 * 11 = 2310), tenemos que $T_5^{850} = 0$, lo cual implica que $T_5^{850} = T_6^{850} = T_7^{850} = T_8^{850} = T_9^{850} = T_{10}^{850} = 0$.

Para calcular $\overset{850}{T_5}$ se trabaja con C^{10}_{5} multiplicaciones (ya que estas multiplicaciones *son* todas las posibles combinaciones sin repetición de orden cinco de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29, y la cantidad de estas combinaciones es igual a C^{10}_{5}); para calcular $\overset{850}{T_6}$ se trabaja con C^{10}_{6} multiplicaciones; para calcular $\overset{850}{T_7}$ se trabaja con C^{10}_{7} multiplicaciones; para calcular $\overset{850}{T_8}$ se trabaja con C^{10}_{8} multiplicaciones; para calcular $\overset{850}{T_9}$ se trabaja con C^{10}_{9} multiplicaciones; y, finalmente, para calcular $\overset{850}{T_{10}}$ se trabaja con C^{10}_{10} multiplicación. Como ya sabemos de antemano que $\overset{850}{T_5} = \overset{850}{T_6} = \overset{850}{T_7} = \overset{850}{T_8} = \overset{850}{T_9} = \overset{850}{T_{10}} = 0$, tenemos que la cantidad de cálculos innecesarios a evitar al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 850 será igual a $C^{10}_{5} + C^{10}_{6} + C^{10}_{7} + C^{10}_{8} + C^{10}_{9} + C^{10}_{10}$, es decir, igual a 638, a lo que también hay que sumarle la cantidad de cálculos innecesarios que puedan hacerse al calcular $\overset{850}{T_3}$ y $\overset{850}{T_4}$.

Esta cantidad de cálculos innecesarios es, como se puede ver, demasiado grande como para no evitar hacer dichos cálculos. Evitar todo cálculo innecesario es importante, ya que de esta manera se ahorra no sólo tiempo, sino también esfuerzo.

En conclusión, evitar cálculos inútiles resulta necesario para ahorrar tiempo y esfuerzo al calcular la cantidad de números compuestos que hay por debajo de un número natural lo suficientemente grande.

Solución al problema

Para calcular la cantidad de números primos que hay por debajo de un número natural mayor que 4, se calcula la cantidad de números compuestos que hay por debajo de ese número natural empleando el procedimiento que corresponda. Luego, **la cantidad de números primos que hay por debajo de dicho número natural será igual a ese número natural, menos la cantidad de números compuestos que hay por debajo de ese número natural, menos 2**. En símbolos,

$$\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$$ (fórmula vista al principio de este trabajo)

donde n es el número natural mayor que 4, $\overset{n}{P}$ la cantidad de números primos que hay por debajo de n y $\overset{n}{C}$ la cantidad de números compuestos que hay por debajo de n.

Ejemplos

En los ejemplos de esta **Conclusión final**, se calculó la cantidad de números compuestos que hay por debajo de 8, de 16, de 36, de 52, de 128 y de 176.

Utilicemos ahora la fórmula $\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$ para averiguar cuántos números primos hay por debajo de algunos de estos números.

- **Cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de 8**

$n = 8$

$\overset{8}{C} = 2$

$\overset{8}{P} = ?$

$$\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$$

$$\overset{8}{P} = 8 - \overset{8}{C} - 2$$

$$\overset{8}{P} = 8 - 2 - 2$$

$$\boxed{\overset{8}{P} = 4}$$

Hay **cuatro** números primos por debajo de **8.** Se comprueba que este resultado es correcto, ya que los cuatro números primos que están por debajo de 8 son el **2**, el **3**, el **5** y el **7**.

- **Cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de 36**

$n = 36$

$\overset{36}{C} = 23$

$\overset{36}{P} = ?$

$$\overset{n}{P} = n - \overset{n}{C} - 2$$

$$\overset{36}{P} = 36 - \overset{36}{C} - 2$$

$$\overset{36}{P} = 36 - 23 - 2$$

$$\boxed{\overset{36}{P} = 11}$$

Hay **once** números primos por debajo de **36**. Se comprueba que este resultado es correcto, ya que los once números primos que están por debajo de 36 son el **2**, el **3**, el **5**, el **7**, el **11**, el **13**, el **17**, el **19**, el **23**, el **29** y el **31**.

- **Cálculo de la cantidad de números primos que hay por debajo de 128**

$n = 128$

$C^{128} = 95$

$P^{128} = ?$

$P^{n} = n - C^{n} - 2$

$P^{128} = 128 - C^{128} - 2$

$P^{128} = 128 - 95 - 2$

$\boxed{\mathbf{P^{128} = 31}}$

Hay **treinta y un** números primos por debajo de **128**. Se demuestra que este resultado es correcto, ya que los treinta y un números primos que están por debajo de 128 son el **2**, el **3**, el **5**, el **7**, el **11**, el **13**, el **17**, el **19**, el **23**, el **29**, el **31**, el **37**, el **41**, el **43**, el **47**, el **53**, el **59**, el **61**, el **67**, el **71**, el **73**, el **79**, el **83**, el **89**, el **97**, el **101**, el **103**, el **107**, el **109**, el **113** y el **127**.

Tabla de números primos del 2 al 1000

(Los números primos aparecen escritos en rojo)

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

401	402	403	404	405	406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500
501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520
521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550
551	552	553	554	555	556	557	558	559	560
561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580
581	582	583	584	585	586	587	588	589	590
591	592	593	594	595	596	597	598	599	600
601	602	603	604	605	606	607	608	609	610
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
711	712	713	714	715	716	717	718	719	720
721	722	723	724	725	726	727	728	729	730
731	732	733	734	735	736	737	738	739	740
741	742	743	744	745	746	747	748	749	750
751	752	753	754	755	756	757	758	759	760
761	762	763	764	765	766	767	768	769	770
771	772	773	774	775	776	777	778	779	780
781	782	783	784	785	786	787	788	789	790
791	792	793	794	795	796	797	798	799	800
801	802	803	804	805	806	807	808	809	810
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	826	827	828	829	830
831	832	833	834	835	836	837	838	839	840
841	842	843	844	845	846	847	848	849	850

851	852	853	854	855	856	857	858	859	860
861	862	863	864	865	866	867	868	869	870
871	872	873	874	875	876	877	878	879	880
881	882	883	884	885	886	887	888	889	890
891	892	893	894	895	896	897	898	899	900
901	902	903	904	905	906	907	908	909	910
911	912	913	914	915	916	917	918	919	920
921	922	923	924	925	926	927	928	929	930
931	932	933	934	935	936	937	938	939	940
941	942	943	944	945	946	947	948	949	950
951	952	953	954	955	956	957	958	959	960
961	962	963	964	965	966	967	968	969	970
971	972	973	974	975	976	977	978	979	980
981	982	983	984	985	986	987	988	989	990
991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

Agradecimientos

- P. Daniel Ruiz, ex Representante Legal del *Instituto Monseñor Juan Agustín Boneo*, Rosario, Argentina

- Sras. Alicia Abratti, Silvia Anselmo y Mabel Maas, Directoras del *English Language Institute*, Rosario, Argentina

- Sra. Rocío Marcos de Del Carlo

- Prof. José Niccolini, *Instituto Monseñor Juan Agustín Boneo*, Rosario, Argentina

- Patricio Mariano De Luca

- Sr. Carlos López