A Note on Montort's Probability Expressions in the Problem of Rational Division of Stakes

Zhang Huiming
Department of Mathematics and Statistics,Central China Normal University, Wuhan, 430079, China

Abstract: In this paper, by using three kinds of ideas of probability theory, we proof the equivalence among three kinds of probability expressions in the problem of rational division of stakes by the method of mathematical analysis. In addition, different ideas of probability theory obtain the identity. Let one of the probability expressions be a function, we find the B-function is closely relate to the derivative the probability expression function. According to Beta distribution function, we proof that probability expression function in the problem of rational division is equal to the distribution function of Beta distribution.

Key words: probability theory; mathematical analysis; problem of rational division of stakes; Beta function；Beta distribution

引言

所谓“分赌注问题（也叫点数问题）”也是指当游戏（或者说是赌博）在完成前被终止时，怎样处理两名技能相当的游戏者的赌金分配问题，其依据是游戏者的得分数或是游戏终止时的点数。意大利的帕乔里早在 1494 年出版的《算术、几何、比与比例集成》中提到了“点数问题”[1]。1654 年，法国有个叫德·梅耳的赌徒，向法国数学家帕斯卡提出了分赌注问题。帕斯卡与法国另一位大数学家费马频繁通信，交流这个问题，以求得正确的解法。后来，荷兰数学家惠更斯获悉后，也对该问题进行了深入研究[2]。

1 Montmort 提出的概率思想对分赌注问题的研究

下面我们用数学语言描述点数问题大意。甲、乙两个赌徒按某种方式下注赌博，说定先胜 t 局者将赢得全部赌注，但进行到甲胜 r 局，乙胜 s 局 $(r<t, s<t)$ 时，应故不得不中止，试问如何分配这些赌注才公平合理？有人建议用已胜局数作比例分配赌注，即以 r : s 来分配，但这种分法显然没有考虑到最终取胜的概率。若以 $n=t-r$ 及 $m=t-s$ 分别记甲及乙达到最后胜利所须再胜的局数，又设甲在每局取胜的概率为 p，我们便可以把分赌注问题归结为如下概率问题：在伯努利试验中，求出现 m 次 $\bar{A}$ (赌博失败)之前出现 n 次 A (赌博胜利)的概率.若以 $p_{甲}$ 记上述概率,则它为甲最终取胜的概率,那么赌注以 $p_{甲}:1-p_{甲}$ 分配是合理的。帕斯卡和费马在某种程度上达到这个结果[3].

考虑甲第 n 次胜利发生在 $n+k$ 次赌博（$k=0,1,\cdots,m-1$）,显然乙在 $n+k$ 次赌博中最多胜利 $m-1$ 次，故 $n+k$ 次赌博结束后，甲分得赌注。利用帕斯卡分布（第 r 次成功发生在第 k 实验的概率为 $f(k;r,p)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ ）得到:

$$p_{甲_1}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} f(n+k;n;p)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{k} p^n q^k \qquad ①$$

第二种方法求 $p_{甲}$，考虑乙第 m 次胜利发生在 $m+k$ （$k=0,1,\cdots,n-1$）次赌博,显然甲在 $m+k$ 次赌博中最多胜利 $n-1$ 次，故 $m+k$ 次赌博结束后，乙分得赌注。

$$p_{乙}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} f(m+k;m;q)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{n-1} C_{m+k-1}^{k} q^m p^k$$

当乙第 m 次胜利发生在 $m+k$ （$k=n,n+1,\cdots,\infty$）次赌博时，甲在乙达到 n 次胜利之前先取得 n 次胜利，这种情况发生的概率也是甲最终取胜的概率。第二种方法得到 $p_{甲}$：

$$p_{甲_2}=\sum_{\mathrm{k}=n}^{\infty} f(m+k;m;q)=\sum_{\mathrm{k}=n}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} q^m p^k \qquad ②$$

第三种方法求 $p_{甲}$，得到甲为了取得最终胜利当且仅当在后面的 $m+n-1$ 局中至少胜利 n 局，而乙至多能胜 $n-1$ 局，由二项分布得：

$$p_{甲_3}=\sum_{\mathrm{k}=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} p^k q^{n+m-1-k} \qquad ③$$

2 证明三种表达式的等价性

下面我们数学分析的方法证明如下三个式子确实是相等的：

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{k} p^n q^k=\sum_{\mathrm{k}=n}^{\infty} C_{m+k-1}^{k} q^m p^k=\sum_{\mathrm{k}=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{k} p^k q^{n+m-1-k}$$

即我们用三种不同方法得到的概率的表达式都是正确的（$p_{甲_1}=p_{甲_2}=p_{甲_3}$）。

首先考虑 $p_{甲_1}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{k} p^n q^k=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1} C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$，定义：

$$S(n-1)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{n-1}p^nq^k=C_{\mathrm{n}-1}^{n-1}p^nq^0+C_{\mathrm{n}}^{n-1}p^nq^1+C_{\mathrm{n+1}}^{n-1}p^nq^2+\cdots+C_{\mathrm{n+m-2}}^{n-1}p^nq^{m-1} \quad ④$$

$$S(n-2)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n-2+k}^{n-2}p^nq^k=C_{\mathrm{n}-2}^{n-2}p^nq^0+C_{\mathrm{n}-1}^{n-2}p^nq^1+C_{\mathrm{n}}^{n-2}p^nq^2+\ldots+C_{\mathrm{n+m-3}}^{n-2}p^nq^{m-1}$$ 。

...

$$S(x)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{x+k}^{x}p^nq^k$$

而 $qS(n-1)=C_{\mathrm{n}-1}^{n-1}p^nq^1+C_{\mathrm{n}}^{n-1}p^nq^2+C_{\mathrm{n+1}}^{n-1}p^nq^3+\ldots+C_{\mathrm{n+m-2}}^{n-1}p^nq^m$ ⑤

④−⑤利用 $C_{\mathrm{n}}^{r}+C_{\mathrm{n}}^{r+1}=C_{\mathrm{n+1}}^{r+1}$ 得：

$$pS(n-1)=C_{\mathrm{n}-2}^{n-2}p^nq^0+C_{n-1}^{n-2}p^nq^1+C_{\mathrm{n}}^{n-2}p^nq^2+\cdots+C_{\mathrm{n+m-3}}^{n-2}p^nq^{m-1}-C_{\mathrm{n+m-2}}^{n-1}p^nq^m$$

由 $S(n-2)$ 的表达式知： $pS(n-1)=S(n-2)-C_{\mathrm{n+m-2}}^{n-1}p^nq^m$ 两边同乘 p^n 得到递推数列：

$$p^nS(n-1)=p^{n-1}S(n-2)-p^nC_{\mathrm{n+m-2}}^{n-1}q^mp^{n-1}$$

$$p^{n-1}S(n-2)=p^{n-2}S(n-3)-p^nC_{\mathrm{n+m-3}}^{n-2}q^mp^{n-2}$$

...

$$p^2S(1)=p^1S(0)-p^nC_m^1q^mp^1$$

利用错项相消法得：

$$p^nS(n-1)=p^1S(0)-p^n\sum_{k=1}^{n-1}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k=p^1S(0)-p^n(\sum_{k=0}^{n-1}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k-C_m^0q^mp^0)$$

$$S(0)=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{0+k}^{0}p^nq^k=p^n\frac{1-q^m}{1-q}，\quad p_{甲_1}=\sum_{k=0}^{\mathrm{m}-1}C_{\mathrm{n+k-1}}^{k}p^nq^k=S(n-1)，\quad p_{乙}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k$$

$$\Leftrightarrow p^np_{甲_1}=p^{n+1}\frac{1-q^m}{1-p}-p^n(p_{乙}-C_m^0q^mp^0)\Leftrightarrow p_{甲_1}=1-q^m-(p_{乙}-q^m)\Leftrightarrow p_{甲_1}+p_{乙}=1$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k=\sum_{k=\mathrm{n}}^{\infty}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k+\sum_{k=0}^{n-1}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k=p_{甲_2}+p_{乙}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{\mathrm{m+k-1}}^{k}q^mp^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kC_{-m}^{k}q^mp^k=q^m\sum_{k=0}^{\infty}C_{-m}^{k}(-p)^k1^{-m-k}=q^m(1-p)^{-m}=1$$

于是

$$p_{甲_1}+p_{乙}=1=p_{甲_2}+p_{乙}$$

故有

$$p_{甲_1}=p_{甲_2}$$

下面利用更巧妙的方法证明 $p_{甲_1}=p_{甲_3}$ 。既然直接证明恒等困难，尝试证明式子两端关于某个自变量的函数的导数相等。令

$$f(q)=p_{甲_1}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}(1-q)^nq^k,\ g(q)=p_{甲_3}=\sum_{\mathrm{k}=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}(1-q)^kq^{n+m-1-k},$$

$$h(q)=f(q)-g(q)$$

然后对 $h(q)$ 求导。计算出 $f'(q)$ 以及 $g'(q)$ 如下：

$$f'(q)=[(1-q)^n+\sum_{k=1}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}(1-q)^n q^k]'$$

$$=-n(1-q)^{n-1}+\sum_{k=1}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}[k(1-q)^n q^{k-1}-n(1-q)^{n-1}q^k]$$

$$=(1-q)^{n-1}\{-n+\sum_{k=1}^{m-1}[kC_{n+k-1}^{n-1}(1-q)q^{k-1}-nC_{n+k-1}^{n-1}q^k]\}$$

$$=(1-q)^{n-1}\{-n+n\sum_{k=1}^{m-1}[C_{n+(\boldsymbol{k}-1)}^{n}q^{(\boldsymbol{k}-1)}-C_{n+\boldsymbol{k}}^{n}q^{\boldsymbol{k}}]\}$$

$$=-nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}$$

$$g'(q)=[\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n+m-1}^{k+n}(1-q)^{k+n}q^{m-1-k}]'$$

$$=[\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-2}C_{n+m-1}^{k+n}(1-q)^{k+n}q^{m-k-1}+(1-q)^{n+m-1}]'$$

$$=\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-2}C_{n+m-1}^{k+n}[(m-1-k)(1-q)^{k+n}q^{m-k-2}-(k+n)(1-q)^{k+n-1}q^{m-1-k}]-(n+m-1)(1-q)^{n+m-2}$$

$$=(1-q)^{n-1}\{\sum_{k=0}^{m-2}[(m-1-k)C_{n+m-1}^{k+n}(1-q)^{k+1}q^{m-k-2}-(k+n)C_{n+m-1}^{k+n}(1-q)^k q^{m-1-k}]-(n+m-1)(1-q)^{\mathrm{m}-1}\}$$

$$=(1-q)^{n-1}\{\sum_{k=0}^{m-2}[(m-(\boldsymbol{k}+1))C_{n+m-1}^{m-(\boldsymbol{k}+1)}(1-q)^{(\boldsymbol{k}+1)}q^{m-1-(\boldsymbol{k}+1)}-(m-\boldsymbol{k})C_{n+m-1}^{m-\boldsymbol{k}}(1-q)^{\boldsymbol{k}}q^{m-1-\boldsymbol{k}}]$$

$$-(n+m-1)(1-q)^{\mathrm{m}-1}\}$$

$$=(1-q)^{n-1}\{[C_{n+m-1}^{1}(1-q)^{m-1}-mC_{n+m-1}^{m}q^{m-1}]-(n+m-1)(1-q)^{\mathrm{m}-1}\}$$

$$=-nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}$$

故 $h'(q)=f'(q)-g'(q)=0$

$$\Leftrightarrow h(q)=\sum_{\mathrm{k}=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}(1-q)^k q^{n+m-1-k}-\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}(1-q)^n q^k=C$$

显然当 $n\neq 0$ 时，

$$C=h(1)=\sum_{\mathrm{k}=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}(1-1)^k 1^{n+m-1-k}-\sum_{\mathrm{k}=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}(1-1)^n 1^k=0$$

$$\Leftrightarrow h(q)=f(q)-g(q)=0\Leftrightarrow f(q)=g(q)\Leftrightarrow p_{甲_1}=p_{甲_3}$$

到此，我们证明了 $p_{甲_1}=p_{甲_2}=p_{甲_3}$，从而验证 3 种概率论思想得到的 3 种表达式等价。

3 $p_{甲}$ 与 Beta 函数以及 Beta 分布的联系

利用 $f'(q)=-nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}$ 可以不用 Beta 函数的递推公式得到 $\mathrm{B}(m,n)(n,m\in N)$ 的表达式。对 $f'(q)=-nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}$ 两边取[0,1]上的定积分得：

$$\int_0^1 f'(q)dq=\int_0^1 -nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}dq$$

$$\Leftrightarrow [f(q)]\Big|_0^1=[\sum_{k=0}^{m-1}C_{n+k-1}^{k}(1-q)^n q^k]\Big|_0^1=-1=\int_0^1 -nC_{n+m-1}^{n}q^{m-1}(1-q)^{n-1}dq$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{1}{nC_{n+m-1}^{n}}=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},(n,m\in N)$$

这就得到 $p_{甲}$ 与 Beta 函数的联系。

定义 3.1 若随机变量ξ的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{B(n,m)} & 0\le x\le 1\\ 0 & x<0或x>1\end{cases},$$

其中（$B(n,m)=\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$，$n>0,m>0$），那么 X 服从 Beta 分布，记为 $\xi\sim\beta(n,m)$。其相应的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ I_x(n,m) & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}。$$

定义 3.2 称 $I_x(n,m)=\int_0^x \frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{B(n,m)}dx$ 为不完全 Beta 函数[5]。

$p_{甲}$ 与 Beta 函数有着密切的联系。下面来证明 $p_{甲}$ 与不完全 Beta 函数一个关系，

定理 3.1 符号同上，$p_{甲}=\sum_{k=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}p^k(1-p)^{n+m-1-k}$ 恰为 Beta 分布的分布函数的型式（不完全 Beta 函数），即

$$I_p(n,m)=\sum_{k=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}p^k(1-p)^{n+m-1-k}$$

证明：由不完全 Beta 函数 $I_p(n,m)$ 的定义，利用分部积分，得

$$\begin{aligned}I_p(n,m)&=\int_0^p \frac{x^{n-1}(1-x)^{m-1}}{B(n,m)}dx\\
&=\frac{\Gamma(n+m)p^n(1-p)^{m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}+\int_0^p \frac{\Gamma(n+1+m-1)x^n(1-x)^{m-2}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-1)}dx\\
&=\frac{\Gamma(n+m)p^n(1-p)^{m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}+I_p(n+1,m-1)\\
&=\frac{\Gamma(n+m)p^n(1-p)^{m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}+\frac{\Gamma(n+m)p^{n+1}(1-p)^{m-2}}{\Gamma(n+2)\Gamma(m-1)}+I_p(n+2,m-2)\\
&=\frac{\Gamma(n+m)p^n(1-p)^{m-1}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}+\cdots+\frac{\Gamma(n+m)p^k(1-p)^{n+m-1-k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+m-i)}+\cdots+I_p(n+m-1,1)\\
&=\sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{\Gamma(n+m)p^k(1-p)^{n+m-1-k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+m-k)}\end{aligned}$$

因为n、m为正整数，于是有：

$$I_p(n,m)=\sum_{k=n}^{n+m-1}\frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+m-k)}p^k(1-p)^{n+m-1-k}=\sum_{k=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{k}p^k(1-p)^{n+m-1-k}$$

4 结论

Montmort 总结了前人的思想，得到假如继续赌博某方胜利的概率两个等价的表达式。三个等价的表达式根据不同的概率论思想而来。本文利用数学分析方法证明这三种甲胜概率表达式是恒等的，在证明的过程中意外的得到了 $B(m,n)$ $m,n \in N$ 的具体表达式，由此根据Beta函数的特点，证明了分赌注问题某方胜利的概率恰为Beta分布的分布函数(不完全Beta函数）的形式。

概率理论孕育于赌博游戏中,是数学家们解决赌徒们提出的点数问题的代数学产物[4]。帕斯卡和费马成功的解决点数问题, 使概率论更加成熟并且逐步脱离了算术性的概率计算，从而推动了概率论的数学化发展。在概率论的历史长河中，后人把这个事件看作是概率论数学化的标志。

我们知道，很多组合恒等式可以用概率论的思想加以证明。而本文反其道而行之，利用数学分析的方法证明组合恒等式从而验证不同的概率论思想得到的不同表达式都是恒等的。利用这几个表达式的恒等性，并且得到 $p_{甲}$ 恰好为 Beta 分布的分布函数的形式。这显示了概率论与数学分析的相互融通。

5 致谢

感谢黄超老师、褚莉莉同学对本文提出的意见与建议。

参考文献

[1] 朱春浩.概率论思想方法的历史研究[M].成都.电子科技大学，2007.
[2] 陈勇.浅谈分赌注问题[J].才智，2009，24：151.
[3] 李贤平.概率论基础（第二版）[M].北京，高等教育出版社，2008.
[4] 宋尚玮.浅谈概率论中的认识论及方法论问题[J].山西大学学报(哲学社会科学版),32(2)：13-17.
[5] 徐传胜.贝塔分布的有关性质及应用探讨[J].临汾师范学院学报，2001，23（4）：6-