# A la recherche de la démonstration de FERMAT
# Search for Fermat's proof


## Abstract :

Let $P_n(x)$ the associated polynomial to the equation $X^n + Y^n = Z^n$ .

$P_n(x)=(x+u)^n+(x+v)^n-(x+w)^n$ , $x=X+Y-Z$, $X=x+Z-Y=x+u$, $Y=x+Z-X=x+v$, $Z=X+Y-x=x+w$, $u$, $v$, $w=u+v$ and $n \in N^*$, $n>2$ ; $nP_{n-1}(x)= P_n'(x)$, $(n+1)P_n(x)= P_{n+1}'(x)$.

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ : a is the single positive root (Descartes' rule of signs).

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ ===> a is an irrational number (Fermat's theorem).

$uv \in N^*$, $P_{n\pm1}(a) \equiv a^2 - 2uv = 0$ [3] ===> $a^2$ is a rational number.

$a^2$ is a rational number ===> $P_{n\pm1}(a)=A+Ba\neq0$, $B\neq0$, $(0\neq0)$=False .

By contraposition :

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ ===> $a^2$ and $uv=(Z-Y)(Z-X)$ are irrational numbers.

uv is an irrational number ===> the equality $P_n(m)=(m+u)^n+(m+v)^n-(m+w)^n=0$, with m, u, v, w=u+v and n positive integers, is impossible for n>2.

---------

## Résumé :

Soit $P_n(x)$ le polynôme associé à l'équation $X^n + Y^n = Z^n$ .

$P_n(x)=(x+u)^n+(x+v)^n-(x+w)^n$ , $x=X+Y-Z$, $X=x+Z-Y=x+u$, $Y=x+Z-X=x+v$, $Z=X+Y-x=x+w$, $u$, $v$, $w=u+v$ et $n \in N^*$, $n>2$ ; $nP_{n-1}(x)= P_n'(x)$, $(n+1)P_n(x)= P_{n+1}'(x)$.

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ : a est l'unique racine positive
(règle des signes de Descartes).

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ ===> a est un nombre irrationnel (théorème de Fermat).

$uv \in N^*$, $P_{n\pm1}(a) \equiv a^2 - 2uv = 0$ [3] ===> $a^2$ est un nombre rationnel.

$a^2$ est un nombre rationnel ===> $P_{n\pm1}(a)=A+Ba\neq0$, $B\neq0$, $(0\neq0)$=Faux .

Par contraposition :

$n\pm1 \equiv 0$ [4], $P_{n\pm1}(a)=0$ ===> $a^2$et $uv=(Z-Y)(Z-X)$ sont des nombres irrationnels.

uv est un nombre irrationnel ===> l'égalité $P_n(m)=(m+u)^n+(m+v)^n-(m+w)^n=0$, où m, u, v, w=u+v et n sont des entiers positifs, est impossible pour n>2.

---------



Ahmed Idrissi Bouyahyaoui ahmed.idrissi@laposte.net Inpi - Paris

# A la recherche de la démonstration de FERMAT

$X^n + Y^n \neq Z^n$ , n>2

Théorème de Fermat-Wiles :
L'équation $X^n + Y^n = Z^n$ , où X, Y, Z, n sont des entiers positifs,
n'a pas de solution pour n>2 .
Fermat a formulé par écrit la preuve pour n=4 et affirmé avoir découvert celle du cas général.
La preuve, présentée dans cet article, s'appuie sur celle donnée pour n=4.

---------

## Démonstration :

En posant $x=X+Y-Z$ $(x>0)$, on a $X=x+Z-Y=x+u$, $Y=x+Z-X=x+v$, $Z=X+Y-x=x+w$, $w=u+v$ ; u et v sont des entiers positifs .
Par substitution dans l'équation $X^n + Y^n = Z^n$, on obtient le polynôme associé :
$P_n(x)=(x+u)^n+(x+v)^n-(x+w)^n$ .
Les nombres u et v sont communs aux polynômes $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$ puisque $nP_{n-1}(x)= P_n'(x)$, $(n+1)P_n(x)= P_{n+1}'(x)$.

Pour tout n>2, on a $n\equiv 0$ [4], et le problème est résolu par le théorème de Fermat, ou $n\pm 1\equiv 0$ [4] ou n=2k avec k un nombre impair et l'on a $k\pm 1\equiv 0$ [4] et n retenu est toujours impair.

Le polynôme $P_{n\pm 1}(x)$ possède une seule racine positive
(règle des signes de Descartes).
Soit a cette racine.
Pour $n\pm 1\equiv 0$ [4], $P_{n\pm 1}(a)=(a+u)^{n\pm 1}+(a+v)^{n\pm 1}-(a+w)^{n\pm 1}=0$ et, d'une part, a est un irrationnel d'après le théorème de Fermat car $n\pm 1\equiv 0$ [4], et d'autre part,
$0=P_{n\pm 1}(a)=(a+u)^{n\pm 1}+(a+v)^{n\pm 1}-(a+w)^{n\pm 1} \equiv (a+u)^2+(a+v)^2-(a+w)^2$ [3] .
Ce qui donne $P_{n\pm 1}(a) \equiv a^2 - 2uv = 0$ [3] .
Par hypothèse uv étant un entier, $a^2$ est alors un rationnel.

Ahmed Idrissi Bouyahyaoui ahmed.idrissi@laposte.net Inpi - Paris

Le développement de l'égalité $P_{n\pm1}$ $(a)=(a+u)^{n\pm1}+(a+v)^{n\pm1}-(a+w)^{n\pm1}=0$ donne :
$0=P_{n\pm1}(a)=\sum_{i=0}^{n\pm1} C_{n\pm1}^{i}(u^i+v^i-w^i)a^{n\pm1-i}$ où $w=u+v$, $u^i+v^i-w^i<0$ pour $i>1$ .
Si $a^2$ est un rationnel alors $P_{n\pm1}(a)$ est de la forme A+Ba où A et B sont des rationnels avec B≠0.
Comme a est un irrationnel, $P_{n\pm1}(a)$= A+Ba ≠0, ce qui implique (0≠0)=Faux.

Donc, par contraposition, $a^2$ est un irrationnel et le produit uv=(Z-Y)(Z-X) l'est aussi puisque $a^2 - 2uv = 0$ [3], et par suite, l'égalité
$P_n(m)=(m+u)^n+(m+v)^n-(m+w)^n=0$,
où m, u, v, w=u+v et n sont des entiers positifs, est impossible pour n>2.

Ahmed Idrissi Bouyahyaoui
ahmed.idrissi@laposte.net