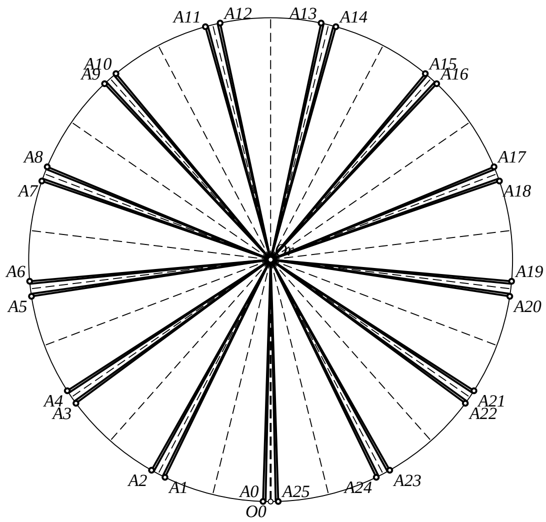
Goldbach, Legendre, Brocard, Considérations élémentaires sur quelques conjectures.



Auteur : Olivier Massot
Email : omassot@singnet.com.sg

Table des matières

Notations utilisées.

0.1 Rappels sur les notations utilisées.

Pour les besoins de cette étude, nous utilisons les notations et symboles usuels des mathématiques. Nous pensons souhaitable cependant de préciser quelques notations.

En calcul propositionnel, une **proposition** P est soit vraie soit fausse par définition. Le propos des mathématiques étant de relier logiquement un ensemble de propositions les unes aux autres pour arriver à une conclusion, formulée elle même par une proposition, nous aurons besoin des connecteurs logiques suivants
- symbole de **négation** $\neg$
- symbole de **conjonction** "et" $\wedge$
- symbole de **disjonction** "ou inclusif" $\vee$

ainsi que des symboles de relations
- symbole d'**implication** $\Longrightarrow$
- symbole d'**équivalence** $\Longleftrightarrow$

Nous aurons aussi recours à l'utilisation des quantificateurs logiques suivants
- **universel** "Pour tout..." $\forall$
- **existentiel** "Il existe au moins un..." $\exists$
- **existentiel** "Il existe un et un seul..." $\exists!$

Les notations usuelles de la théorie des ensembles seront utilisées. Les symboles d'**appartenance** et de **non appartenance** d'un élément a à un ensemble $\mathbb{A}$ sont notés respectivement $\in$ et $\notin$. De même, les symboles d'**inclusion** et de **non inclusion** d'un ensemble $\mathbb{A}$ dans un ensemble $\mathbb{B}$ sont notés respectivement $\subset$ et $\not\subset$. Enfin, en fonction de nos besoins, nous notons les opérateurs d'**intersection** et d'**union** d'ensembles respectivement
- $\bigcap$ ou $\cap$
- $\bigcup$ ou $\cup$.

Soient deux ensembles $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, non nécessairement distincts, et soient $a \in \mathbb{A}$ et $b \in \mathbb{B}$ deux éléments quelconques de ces deux ensembles, la paire ordonnée (a, b) appartient à l'ensemble $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$, habituellement dénommé **produit cartésien** de l'ensemble $\mathbb{A}$ par l'ensemble $\mathbb{B}$. Cette notion de produit est bien sur applicable à plus de deux ensembles. Un sous-ensemble $\mathbb{A}_j \times \mathbb{B}_k$ du produit cartésien $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$

permet de définir la **relation binaire** $\mathcal{R}$

$$(\forall a \in \mathbb{A})\,(\forall b \in \mathbb{B}) \quad ((a\mathcal{R}b) \Longleftrightarrow ((a,b) \in \mathbb{A}_j \times \mathbb{B}_k))$$

Cette définition débouche naturellement sur la notion de **relation d'équivalence**. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathbb{A}$ est une relation d'équivalence si et seulement si

$$\begin{aligned} (\forall a \in \mathbb{A}) \quad & (a\mathcal{R}a) \\ \left(\forall (a,b) \in \mathbb{A}^2\right) \quad & ((a\mathcal{R}b) \Longleftrightarrow (b\mathcal{R}a)) \\ \left(\forall (a,b,c) \in \mathbb{A}^3\right) \quad & ((a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Longrightarrow (a\mathcal{R}c)) \end{aligned}$$

La définition de la relation d'équivalence entraine à son tour celle de **classe d'équivalence**. La classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbb{A}$ engendrée par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est l'ensemble, que nous notons $\mathcal{R}(a)$

$$((\forall b \in \mathbb{A}) \quad (b \in \mathcal{R}(a))) \Longleftrightarrow (a\mathcal{R}b)$$

et nous avons

$$\mathcal{R}(a) \subset \mathbb{A}$$

L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{R}(a_j)$ engendrées par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{A}$ est son **ensemble quotient**, que l'on note $\mathbb{A}/\mathcal{R}$.
L'ensemble $\mathbb{A}$ a un nombre d'éléments, fini ou infini, et dans ce dernier cas, dénombrable ou non dénombrable. Ce nombre est défini comme le **cardinal** de l'ensemble et est noté $|\mathbb{A}|$.
Nous nous intéresserons plus particulièrement aux ensembles suivants

- $\mathbb{N}$ Ensemble des **entiers naturels**.
- $\mathbb{Z}$ Ensemble des **entiers relatifs**.
- $\mathbb{Q}$ Ensemble des **nombres rationnels**.
- $\mathbb{R}$ Ensemble des **nombres réels**.

Dans les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, les éléments, autrement dit les nombres, autre que l'élément nul peuvent être positifs où négatifs. Chaque ensemble $\mathbb{A}$ choisi parmi ceux-ci, contient le sous-ensemble de ses nombres négatifs, que nous notons $\mathbb{A}^-$, l'élément nul noté 0 et le sous-ensembles de nombres positifs que nous notons $\mathbb{A}^+$. Nous avons

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{A}^+$$

La notion de **valeur absolue** suit naturellement

$$\begin{aligned} \left(\forall a \in \mathbb{A}^-\right) \quad & (|a| = -a) \\ \left(\forall a \in \mathbb{A}^+\right) \quad & (|a| = a) \end{aligned}$$

De même, pour chaque ensemble $\mathbb{A}$, choisi maintenant parmi l'un quelconque des ensembles ci-dessus, nous noterons $\mathbb{A}^*$ l'ensemble de ses éléments non nuls

$$(a \in \mathbb{A}^*) \Longleftrightarrow (a \neq 0)$$

et

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^* \cup \{0\}$$

Nous utilisons les lois de compositions internes usuelles appliquées aux éléments de ces ensembles, les nombres. Ces lois sont notées

- $+$ pour l'**addition**
- $\times$ pour la **multiplication**.

Cependant, il nous arrivera souvent d'omettre ce symbole, ainsi qu'il est d'usage. Nous utilisons également les notations

- $-$ pour la **soustraction**
- $/$ pour la **division**.

Après avoir rappelé la définition de la **division Euclidienne** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$

$$(\forall a \in \mathbb{Z})\,(\forall b \in \mathbb{Z})\,(\exists q \in \mathbb{Z})\,(\exists r \in \mathbb{Z}) \quad (a = bq + r)$$

nous recourons, dans le cas où $r = 0$, au symbole $|$ pour la **division exacte** dans ce même ensemble et nous notons

$$((\forall a \in \mathbb{Z}^*)\,(\forall b \in \mathbb{Z}^*) \quad (b|a)) \Longleftrightarrow ((\exists! c \in \mathbb{N}^*) \quad (a = bc))$$

La division euclidienne par un entier premier p_n donné dans $\mathbb{Z}$ permet de définir la relation d'équivalence que nous notons $\mathcal{R} = p_n$

$$(\forall a \in \mathbb{Z})\,(\forall b \in \mathbb{Z}) \quad (ap_nb) \Longleftrightarrow p_n|\,(a-b)$$

Cette relation d'équivalence engendre à son tour p_n classes d'équivalence, la division euclidienne par l'entier premier p_n ayant pour reste r possibles les entiers $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p_{n-2}$ et p_{n-1}. Ces p_n classes d'équivalence sont les éléments de l'ensemble quotient que nous notons

$$\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \cdots, p_{n-2}, p_{n-1}\}$$

Nous utilisons les notations employées habituellement dans la **théorie des congruences**

$$(a \in \mathbb{Z})\,(b \in \mathbb{Z})\,(c \in \mathbb{Z}^*) \quad (a \equiv b \quad [c] \Longleftrightarrow c|a-b)$$

Les intervalles bornés par deux éléments a et b d'un ensemble $\mathbb{K}$ sont notés

- $]a, b[$ pour un **ouvert**
- $[a, b]$ pour un **fermé**
- $]a, b]$ et $[a, b[$ pour les **semis-ouverts**.

Nous utiliserons les **fonctions** dans leur définition habituelle. Soient deux ensembles $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ et l'ensemble F des fonctions f qui à un élément de k de $\mathbb{K}$ associe un élément k'de $\mathbb{K}'$. Nous noterons

$$\begin{aligned} f\mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}' \\ k &\longmapsto k' = f(k) \end{aligned}$$

Dans tout ce qui suit, les ensembles $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ seront le plus souvent l'ensemble $\mathbb{R}$ lui même, ou l'un de ses sous-ensembles.

Introduction et remarques préalables.

Les nombres premiers semblent se distribuer au sein des nombres entiers de façon aléatoire. Il est depuis longtemps établi qu'étant donné un intervalle $[0, p_k[$ pris dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ où p_k et p_{k+1} sont deux entiers naturels premiers consécutifs, tout nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[p_k, p_{k+1}^2[$ pris dans $\mathbb{R}$ est soit premier, soit multiple de l'un au moins des nombres premiers appartenant à l'intervalle $[0, p_k[$. Par ailleurs, un théorème postulé par Joseph Bertrand et démontré par Pafnuty Tchebychev [1] [2] énonce que

Théorème 1 ***de Bertrand Tchebychev*** *Pour tout entier naturel $n > 1$, il existe au moins un entier naturel premier qui appartient à l'intervalle $]n, 2n]$.*

Enfin, la définition de la congruence entre deux nombres entiers a et b, tous deux non nuls, modulo un troisième entier naturel c également non nul, que l'on écrit habituellement comme suit

$$(a \in \mathbb{N}^*)\,(b \in \mathbb{N}^*)\,(c \in \mathbb{N}^*) \quad ((a \equiv b \quad [c]) \Longleftrightarrow (c|a-b))$$

donne à penser qu'il pourrait exister au moins une fonction F_c telle que

$$\begin{aligned} F_c : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F_c(x) \end{aligned}$$

pour laquelle

$$(a \in \mathbb{N}^*)\,(b \in \mathbb{N}^*)\,(c \in \mathbb{N}^*) \quad (F_c(a) = F_c(b) \Longleftrightarrow c|a-b)$$

Une telle fonction est à l'évidence périodique de période c. Nous nous proposons dans les pages qui suivent de construire l'une possible de ces fonctions F_c puis d'étudier certaines de ces propriétés, en insistant plus particulièrement sur ses propriétés de **symétrie**.
Puis, dans les chapitres qui suivent, nous nous intéresserons tout d'abord à à la conjecture forte de Goldbach [5]

Conjecture 1 ***forte de Goldbach*** *Tout entier naturel pair $n \geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers.*

Puis nous nous efforcerons de démontrer le théorème qui suit, en utilisant certaines propriétés des fonctions périodiques $S_{p_{n-1}}$ et S_{p_n}, que nous introduisons plus loin et dont les périodes respectives seront notées TS_{p_n} et $TS_{p_{n-1}}$

Théorème 2 *Pour tout entier naturel premier p_n et sa fonction associée S_{p_n}, soit l'ensemble des intervalles*

$$[kp_n, (k+1)\, p_n[$$

où k est un entier naturel décrivant $\mathbb{N}$, et soit l'entier naturel

$$M_1 = \frac{1}{4} TS_{p_{n-1}}$$

alors, pour tout $k < M_1$, il existe au moins un entier

$$a \in [kp_n, (k+1)\, p_n[$$

tel que

$$S_{p_n}(a) \neq 0$$

soit encore

$$(\forall k \in \mathbb{N})\,(k < M_1)\,(\exists a \in ([kp_n, (k+1)\, p_n[\cap \mathbb{N})) \quad (S_{p_n}(a) \neq 0)$$

Une conséquence de ce théorème s'énonce dans le théorème ci-après

Théorème 3 ***de Bertrand-Tchebychev étendu*** *Etant donné un entier premier p_n, il existe au moins un entier premier dans chaque intervalle*

$$[kp_n, (k+1)\, p_n[$$

pour tout entier naturel k non nul tel que

$$(k+1)\, p_n < p_{n+1}^2$$

Cet autre théorème n'est pas sans rappeler le théorème de Bertrand-Tchebychev.

Ces résultats nous permettront, pour finir, de tirer certaines conclusions sur deux conjectures, l'une due à Adrien-Marie Legendre [3].

Conjecture 2 ***de Legendre*** *Pout tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe au moins un entier naturel premier qui appartient à l'intervalle $[n^2, (n+1)^2]$.*

l'autre à Henri Brocard [4].

Conjecture 3 ***de Brocard*** *Pout tout entier naturel premier $p_n \geqslant 2$, il existe au moins quatre entiers naturels premiers qui appartiennent à l'intervalle $[p_n^2, p_{n+1}^2]$.*

Définitions.

0.2 Définitions.

Nous définissons certains ensembles et certaines fonctions dont nous aurons l'usage.

0.2.1 Ensembles finis π_{p_n} de nombres premiers

Soit π_{p_n} l'ensemble contenant tous les entiers premiers p_j (distincts de 1) et inférieurs ou égaux à un entier premier p_n donné

$$\pi_{p_n} = \{p_j | \, (c|p_j \Longleftrightarrow c \in \{1, p_j\}) \wedge (p_j \leqslant p_n)\}$$

L'ensemble π_{p_n} est totalement ordonné au sens de la relation $<$. Nous notons qu'il est également bien ordonné, car il possède un plus petit élément, que nous notons $p_1 = 2$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
&p_1 = 2 \\
&p_2 = 3 \\
&p_3 = 5 \\
&p_4 = 7 \\
&\dots \\
&p_n = \sup \pi_{p_n}
\end{aligned}$$

Nous posons $|(\pi_{p_n})| = n$

0.2.2 Les fonctions élémentaires.

Nous sommes aussi amenés à définir certaines fonctions, dont certaines propriétés seront mises à contribution pour conduire notre étude.

Les fonctions s_{a,p_j} et $\overline{s_{a,p_j}}$.

Pour chaque entier premier $p_j \in \pi_{p_n}$, nous définissons ainsi les fonctions s_{a,p_j} et $\overline{s_{a,p_j}}$, où $a \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_{a,p_j} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto s_{a,p_j}(x) \end{aligned}$$

avec

$$s_{a,p_j}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(a+x)$$

Cette fonction s'annule pour tous les $(a+x)$ multiples de p_j.

$$\begin{aligned} \overline{s_{a,p_j}} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto \overline{s_{a,p_j}}(x) \end{aligned}$$

avec

$$\overline{s_{a,p_j}}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(a-x)$$

Cette fonction s'annule pour tous les $(a-x)$ multiples de p_j.

Les périodes de ces deux fonctions notées respectivement Ts_{a,p_j} et $T\overline{s_{a,p_j}}$ sont toutes deux égales à $2p_j$.

Nous noterons pour $a = 0$

$$s_{0,p_j}(x) = s_{p_j}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(x)$$

et pour $a = 2m$

$$\overline{s_{2m,p_j}}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(2m-x)$$

Les fonctions c_{a,p_j} et $\overline{c_{a,p_j}}$.

De la même façon, nous définissons les fonctions c_{a,p_j} et $\overline{c_{a,p_j}}$ respectivement comme

$$\begin{aligned} c_{a,p_j} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto c_{a,p_j}(x) \end{aligned}$$

avec

$$c_{a,p_j}(x) = \cos \frac{\pi}{p_j}(a+x)$$

Cette fonction s'annule pour tous les $(a+x)$ multiples impaires de $\frac{1}{2}p_j$.

$$\begin{aligned} \overline{c_{a,p_j}} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto \overline{c_{a,p_j}}(x) \end{aligned}$$

avec

$$\overline{c_{a,p_j}}(x) = \cos\frac{\pi}{p_j}(a+x)$$

Cette fonction s'annule pour tous les $(a-x)$ multiples impaires de $\frac{1}{2}p_j$.

Les périodes de ces deux fonctions notées respectivement Tc_{a,p_j} et $T\overline{c_{a,p_j}}$ sont toutes deux égales à $2p_j$.

Nous noterons pour $a=0$

$$c_{0,p_j}(x) = c_{p_j}(x) = \cos\frac{\pi}{p_j}(x)$$

et pour $a=2m$

$$\overline{c_{2m,p_j}}(x) = \cos\frac{\pi}{p_j}(2m-x)$$

Nous pensons utile de rappeler que les fonctions **sin** et **cos** sont respectivement impaire et paire.

0.2.3 Les fonctions produits.

Nous sommes amenés pour nos besoins à définir des fonctions produits d'un nombre fini de fonctions s_{a,p_j}. Nous définissons ainsi

$$\begin{aligned} S_{p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto S_{p_n}(x) \end{aligned} \tag{1}$$

avec

$$S_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)$$

où les entiers premiers p_j appartiennent à l'ensemble π_{p_n}, que nous désignons comme l'**ensemble de référence** de la fonction S_{p_n}.

De même, soit la fonction $\overline{S_{2m,p_n}}$

$$\begin{aligned} \overline{S_{2m,p_n}} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto \overline{S_{2m,p_n}}(x) \end{aligned}$$

avec

$$\overline{S_{2m,p_n}}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(2m-x) = \prod_{j=1}^{j=n} \overline{s_{2m,p_j}}(x)$$

Nous remarquons que

$$(2m-x=X) \Longleftrightarrow \left(\overline{S_{2m,p_n}}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(2m-x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(x) = S_{p_n}(X)\right)$$

et donc

$$T\overline{S_{2m,p_n}} = TS_{p_n}$$

Ces deux fonctions partagent d'intéressantes propriétés de symétries.

Enfin, nous construisons une troisième fonction G_{m,p_n}

$$\begin{aligned} G_{m,p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto G_{m,p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{m,p_n}(x) &= S_{p_n}(x) \times \overline{S_{2m,p_n}}(x) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)\right)\left(\prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right) \\ &= \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)\,\overline{s_{2m,p_j}}(x) \end{aligned}$$

Nous utiliserons également les fonctions produits d'un nombre fini de fonctions c_{a,p_j}. Nous définissons ainsi

$$\begin{aligned} C_{p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto C_{p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$C_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \cos\frac{\pi}{p_j}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} c_{p_j}(x)$$

où les entiers premiers p_j appartiennent à l'ensemble π_{p_n}, que nous désignons également comme l'**ensemble de référence** de la fonction C_{p_n}.

Nous allons maintenant étudier ces différentes fonctions.

Chapitre 1

Quelques propriétés de la fonction S_{p_n}.

1.1 Objet du chapitre

Etude de quelques propriétés de la fonction S_{p_n}. Une propriété particulière des fonctions S_{p_n} lorsque $n \leq 5$. Explication simple sur la distribution de certains nombres premiers inférieurs à 49.

1.2 Quelques propriétés de la fonction S_{p_n}

Nous rappelons la définition de la fonction S_{p_n}

$$\begin{aligned} S_{p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto S_{p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$S_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)$$

et

$$s_{p_j}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(x)$$

1.2.1 Période et parité

La période de la fonction S_{p_n}, notée TS_{p_n} est le double du produit des périodes Ts_{p_j}, soit le produit des éléments de π_{p_n} multiplié par 2. Nous avons donc

$$TS_{p_n} = 2 \times \prod_{j=1}^{j=n} p_j$$

La fonction S_{p_n} étant le produit de fonctions sin est impaire lorsque n est impair et paire lorsque n est pair. Dans l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$, nous remarquons que la fonction S_{p_n} s'annule chaque fois que x prend our valeur un entier non premier ainsi que l'un des éléments de π_{p_n}. En particulier

$$\begin{aligned} S_{p_n}(0) &= S_{p_n}(\frac{TS_{p_n}}{4}) \\ &= S_{p_n}(\frac{TS_{p_n}}{2}) \\ &= S_{p_n}(\frac{3TS_{p_n}}{4}) \\ &= S_{p_n}(TS_{p_n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A titre d'illustration, nous présentons les graphes respectifs de la fonction S_3 (voir la figure-1.1 page-9)

$$S_3(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

qui est une fonction paire et de la fonction S_5 (voir la figure-1.2 page-9)

$$S_5(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)$$

qui est une fonction impaire.

1.2.2 Quelques propriétés de symétrie

Nous nous proposons maintenant d'étudier quelques propriétés de symétrie simples de la fonction $S(p_n)$ sur l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$. Nous nous contenterons d'étudier ces propriétés aux voisinages des entiers $\frac{TS_{p_n}}{4}$ et $\frac{TS_{p_n}}{2}$. Soient x_p et x_q deux nombres réels tels que

$$\left(\frac{1}{2}(x_p + x_q) = lTS_{p_n}\right)\left(l \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}\right) \Longleftrightarrow (x_p + x_q = kTS_{p_n})\left(k \in \{\frac{1}{2}, 1\}\right)$$

Il vient

$$\begin{aligned} S_{p_n}(x_q) &= S_{p_n}(kTS_{p_n} - x_p) \\ &= \prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}(kTS_{p_n} - x_p)\right) \\ &= \prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{p_j}TS_{p_n} - \frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right) \end{aligned}$$

Posons pour tout $p_j > 2$

$$2h_j + 1 = \frac{1}{4p_j}TS_{p_n}$$

avec

$$h_j \in \mathbb{N}^*$$

alors

$$\sin\left(k\frac{\pi}{p_j}TS_{p_n} - \frac{\pi}{p_j}x_p\right) = \sin\left(4k\left(2h_j+1\right)\pi - \frac{\pi}{p_j}x_p\right)$$

Par ailleurs, lorsque $p_j = 2$

$$\begin{aligned}\sin\left(k\frac{\pi}{p_j}TS_{p_n} - \frac{\pi}{p_j}x_p\right) &= \sin\left(k\frac{\pi}{2}TS_{p_n} - \frac{\pi}{2}x_p\right) \\ &= \sin\left(2k\left(2h+1\right)\pi - \frac{\pi}{2}x_p\right)\end{aligned}$$

avec $h \in \mathbb{N}^*$ Nous obtenons alors les résultats suivants

Cas $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sin\left(4k\left(2h_j+1\right)\pi - \frac{\pi}{p_j}x_p\right) &= \sin\left(2\left(2h_j+1\right)\pi\frac{\pi}{p_j} - x_p\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(2k\left(2h+1\right)\pi - \frac{\pi}{2}x_p\right) &= \sin\left(\left(2h+1\right)\pi - \frac{\pi}{2}x_p\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}x_p\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}S_{p_n}\left(x_q\right) &= S_{p_n}\left(kTS_{p_n} - x_p\right) \\ &= \sin\left(x_p\frac{\pi}{2}\right)\prod_{j=2}^{j=n}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right) \\ &= \left(-1\right)^{n-1}\prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\end{aligned}$$

Cas $k = 1$

$$\begin{aligned}\sin\left(4k\left(2h_j+1\right)\pi - \frac{\pi}{p_j}x_p\right) &= \sin\left(4\left(2h_j+1\right)\pi\frac{\pi}{p_j} - x_p\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(2k\left(2h+1\right)\pi-\frac{\pi}{2}x_p\right)&=\sin\left(2\left(2h+1\right)\pi-\frac{\pi}{2}x_p\right)\\&=\sin\left(-\frac{\pi}{2}x_p\right)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}S_{p_n}\left(x_q\right)&=S_{p_n}\left(kTS_{p_n}-x_p\right)\\&=\sin\left(-x_p\frac{\pi}{2}\right)\prod_{j=2}^{j=n}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right)\\&=\left(-1\right)^n\prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\end{aligned}$$

Conclusion

Sur l'intervalle $[0,TS_{p_n}[$, nous pouvons écrire

$$\left(x_p+x_q=\frac{1}{4}TS_{p_n}\right)\Longrightarrow\left(S_{p_n}\left(x_q\right)=\left(-1\right)^{n-1}\prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right)$$

soit encore

$$\left(x_p+x_q=\frac{1}{4}TS_{p_n}\right)\Longrightarrow\left(S_{p_n}\left(x_q\right)=\left(-1\right)^{n-1}S_{p_n}\left(x_p\right)\right)\tag{1.1}$$

et de même

$$\left(x_p+x_q=\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)\Longrightarrow\left(S_{p_n}\left(x_q\right)=\left(-1\right)^{n}\prod_{j=1}^{j=n}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right)$$

soit encore

$$\left(x_p+x_q=\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)\Longrightarrow\left(S_{p_n}\left(x_q\right)=\left(-1\right)^{n}S_{p_n}\left(x_p\right)\right)\tag{1.2}$$

1.2.3 Une propriété particulière de la fonction S_{p_n} lorsque $n\leq 5$.

Soit alors une fonction s_{α_j,p_j} telle que

$$s_{\alpha_j,p_j}\left(x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x-\alpha_j\right)\right)=s_{p_j}\left(x-\alpha_j\right)$$

où α_j est un entier quelconque pris dans l'intervalle $[0,2p_j[$. Nous définissons maintenant les fonctions U_{p_n}

$$\begin{aligned}U_{p_n}:\mathbb{R}&\longrightarrow[-1,1]\\x&\longmapsto U_{p_n}\left(x\right)\end{aligned}$$

où

$$U_{p_n}(x) = s_2(x)\, s_{p_n}(x) \prod_{j=2}^{j=n-1} s_{\alpha_j,p_j}(x)$$

Commençons par considérer le cas où $n = 5$ et $p_n = 11$. Cherchons s'il existe une fonction U_{11} qui s'annule pour chaque entier de l'intervalle $[0, 11[$ et écrivons

$$(\forall x \in \{0, 1, 2, \cdots, 9, 10\}) \left(U_{11} = s_2(x)\, s_{11}(x) \prod_{j=2}^{j=4} s_{\alpha_j,p_j}(x) = 0 \right)$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} s_{11}(0) &= 0 \\ (\forall x \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\})\, (s_2(x) &= 0) \\ (\forall x \in \{1, 3, 5, 7, 9\})\, (s_2(x) &\neq 0) \\ (\forall x \in \{1, 3, 5, 7, 9\})\, ((s_{11}(x) &\neq 0)) \end{aligned}$$

L'une au moins des fonctions s_{α_j,p_j} doit s'annuler lorsque x est égal à l'un des entiers impairs de l'intervalle $[0, 11[$. Ces fonctions sont au nombre de trois, p_j appartenant à l'ensemble $\{3, 5, 7\}$. Nous devons avoir

$$(\forall x \in \{1, 3, 5, 7, 9\})\, (\exists! j \in \{2, 3, 4\}) \left(s_{\alpha_j,p_j}(x) = s_{p_j}(x - \alpha_j) = 0 \right)$$

Nous avons donc un produit de trois fonctions s_{α_j,p_j} qui doit s'annuler pour cinq entiers distincts. Or, la différence de deux entiers distincts pris parmi ces cinq est une puissance paire de 2, à l'exception des couples $(1, 7)$ et $(3, 9)$ pour lesquels seules les fonctions $s_{1,3}$ et s_3 s'annulent respectivement. Les fonctions $s_{\alpha_3,5}$ et $s_{\alpha_4,7}$ ne peuvent quant à elles que s'annuler respectivement pour un et un seul des trois entiers restant de l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Il n'existe donc pas de fonction U_{11} qui s'annule en chaque point entier de l'intervalle $[0, 11[$. Par conséquent, il existe nécessairement sur chaque intervalle $[11k, 11(k+1)[$, $k \in N$, au moins un entier pour lequel la fonction S_{11} ne s'annule pas. Ces entiers sont premiers pour tout intervalle dont la borne supérieure $11(k+1) \leq 13^2$. On démontre de la même façon que pour tout $p_n < 11$, il existe sur chaque intervalle $[kp_n, (k+1)\, p_n[$, $k \in \mathbb{N}$, au moins un entier pour lequel la fonction S_{p_n} ne s'annule pas. Ces entiers sont premiers pour tout intervalle dont la borne supérieure $(k+1)\, p_n \leq p_{n+1}^2$. Lorsque $p_n \leq 5$, nous avons

$$\prod_{j=1}^{j=n} p_j < p_{n+1}^2$$

Dans la cas particulier où $n = 3$, $p_n = 5$, alors

$$TS_5 = 2\,(2 \times 3 \times 5)$$

et

$$\frac{TS_5}{2} < 7^2 \Longleftrightarrow (2 \times 3 \times 5) < 7^2$$

Sur l'intervalle $[0, \frac{TS_5}{2}[$

$$\left(x_p + x_q = \frac{TS_5}{2}\right) \Longleftrightarrow \left(S_5\left(x_q\right) = \left(-1^3\right)\prod_{j=1}^{j=3}\left(\sin\frac{\pi}{p_j}x_p\right)\right)$$

ce qui implique

$$\left(\left(x_p + x_q = \frac{TS_5}{2}\right) \wedge (x_p \neq 0)\right) \Longleftrightarrow (x_q \neq 0)$$

or x_p et x_q sont nécessairement premiers, n'étant multiples ni de 2, ni de 3, ni de 5 et dans le même temps inférieurs à 7^2. Dans ce cas simple, si x_p est premier supérieur strictement à 5, alors $x_q = 30 - x_p$ est également premier.

1.2.4 Nombre des valeurs entières pour lesquelles la fonction S_{p_n} ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$

Considérons pour un entier premier impair p_n sa fonction associée S_{p_n}. Soit dans l'intervalle

$$[0, TSp_n[$$

l'ensemble $\mathbb{B}_{p_n}$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_n. Ainsi $\mathbb{B}_{p_4} = \mathbb{B}_7$ est l'ensemble des entiers inférieurs à $TS_{p_4} = 420$ et qui ne sont divisibles par aucun des entiers premiers strictement inférieurs à p_4, soient 2, 3 et 5.

Considérons ainsi l'ensemble $\mathbb{B}_2$ des entiers non multiples de 2, y compris 1, dans l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$; son cardinal $|\mathbb{B}_2|$ est égal à

$$|\mathbb{B}_2| = \left(1 - \frac{1}{2}\right) TS_{p_n}$$

De même, l'ensemble $\mathbb{B}_3$ des entiers non multiples de 3, y compris 1, pris dans l'ensemble $\mathbb{B}_2$ a un cardinal égal à

$$\begin{aligned}
|\mathbb{B}_3| &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) |\mathbb{B}_2| \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) TS_{p_n}\right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) TS_{p_n}
\end{aligned}$$

De proche en proche, nous pouvons calculer le nombre $|\mathbb{B}_{p_n}|$ des entiers non multiples de p_n, y compris 1
- pris dans l'ensemble des entiers non multiples de p_{n-1}, p_{n-1} étant le nombre premier immédiatement inférieur à p_n

- eux mêmes pris dans l'ensemble des entiers non multiples de p_{n-2}, p_{n-2} étant le nombre premier immédiatement inférieur à p_{n-1}
- $\cdots$
- eux mêmes pris dans l'ensemble des entiers non multiples de $p_{n-(j-1)}$, $p_{n-(j-1)}$ étant le nombre premier immédiatement inférieur à p_{n-j}
- eux mêmes pris dans l'ensembles des entiers non multiples de 2 soit

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{B}_{p_n}| &= \left(1-\frac{1}{p_n}\right)\left|\mathbb{B}_{p_{n-1}}\right| TS_{p_n} \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)....\left(1-\frac{1}{p_n}\right) TS_{p_n} \\
&= \prod_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{1}{p_j}\right) TS_{p_n}
\end{aligned}
$$

En rappelant que

$$TS_{p_n} = 2\prod_{j=1}^{j=n} p_j$$

nous trouvons

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{B}_{p_n}| &= \left[\prod_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\right]\left[2\prod_{j=1}^{j=n} p_j\right] \\
&= 2\prod_{j=1}^{j=n}(p_j-1)
\end{aligned}
$$

Par analogie avec la définition usuelle du produit Eulerien, nous convenons d'appeler **produit fini Eulerien de rang** n le produit

$$\prod_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$$

Remarque

La proportion d'entiers, que nous notons δ_n, pour lesquels la fonction S_{p_n} ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$ est évidemment

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= \frac{TS_{p_n}}{|\mathbb{B}_{p_n}|} \\
&= \prod_{j=1}^{j=n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_j}\right)}
\end{aligned}
$$

or

$$\lim_{l\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=l}\left(\frac{1}{p_j^k}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p_j}\right)}$$

et donc

$$\delta_n = \prod_{j=1}^{j=n} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)} = \prod_{j=1}^{j=n} \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \left(\frac{1}{p_j^k}\right)$$

Si maintenant nous faisons tendre n vers l'infini, alors

$$\left(\lim_{n \to +\infty} \delta_n = \lim_{n \to +\infty} \prod_{j=1}^{j=n} \lim_{l \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=l} \left(\frac{1}{p_j^k}\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \delta_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{j}\right) = \infty\right)$$

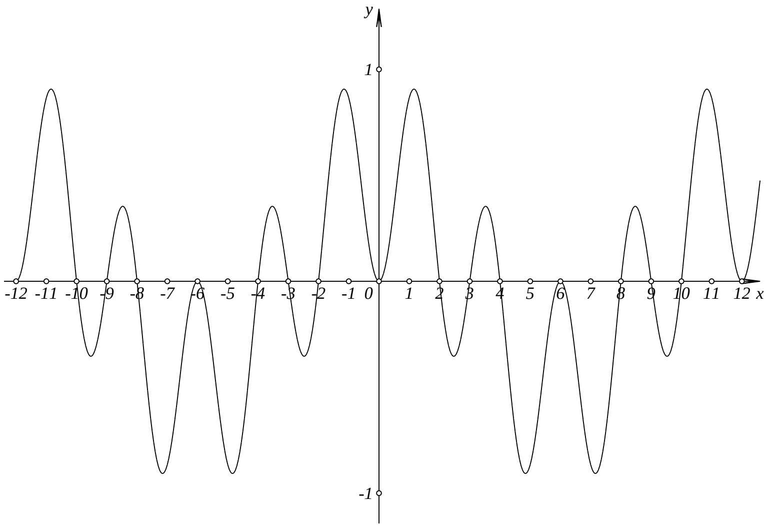


FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction S_3

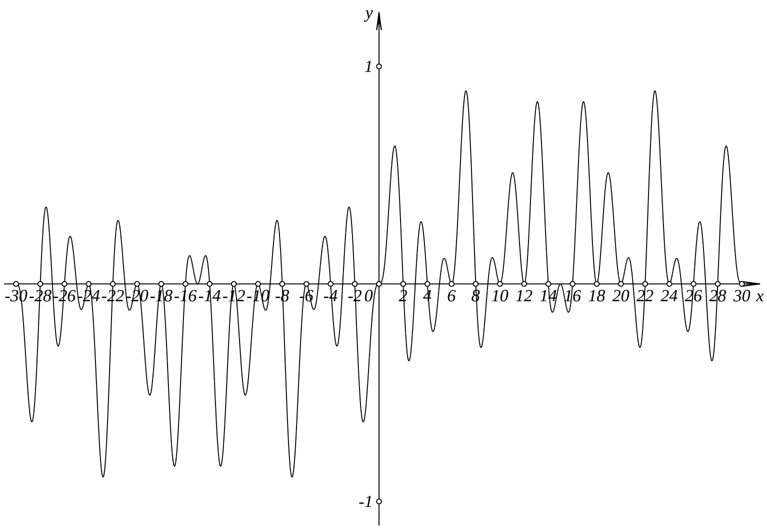


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction S_5

Chapitre 2

Quelques propriétés de la fonction G_{m,p_n}.

On doit à Christian Goldbach d'avoir énoncé la conjecture suivante

Conjecture 4 ***forte de Goldbach*** *Pour tout entier naturel $m \geqslant 2$, l'entier naturel pair $2m$ est la somme de deux nombres premiers.*

Pour cette conjecture, nous indiquons une approche au cours des deux chapitres qui suivent, qui semble conduire à une démonstration rigoureuse. La voie choisie pour notre étude repose sur l'idée qu'il est possible de créer une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et symétrique par rapport à un entier quelconque m, dont les propriétés permettent de mieux comprendre pourquoi cette conjecture a des chances d'être vraie. Après avoir construit cette fonction, nous étudierons certaines de ses propriétés. En particulier, nous chercherons à établir que cette fonction ne s'annule pas pour certains entiers, naturels et relatifs, pris dans son domaine de définition.

Soit l'ensemble contenant tous les nombres premiers p_j inférieur ou égal à un nombre premier p_n donné

$$\pi_{p_n} = \{p_j | \, (c|p_j \Longleftrightarrow c \in \{1, p_j\}) \wedge (p_j \leq p_n)\}$$

et la fonction S_{p_n} déjà définie (voir formule 1 page-xi) et étudiée précédemment S_{p_n} est une fonction périodique de période TS_{p_n} (voir formule 1.2.1 page-1). D'une façon similaire à celle employée pour construire la fonction S_{p_n}, nous allons construire les nouvelles fonctions g_{m,p_j} et G_{m,p_n}. Nous commençons par la fonction g_{m,p_j}

$$\begin{aligned} g_{m,p_j} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto g_{m,p_j}(x) \end{aligned}$$

avec

$$g_{m,p_j}(x) = \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m - x)\right)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ Cette fonction peut également s'écrire, en utilisant les notations que nous avons introduites

$$\begin{aligned} g_{m,p_j}(x) &= s_{p_j}(x)\, s_{p_j}(2m-x) \\ &= s_{p_j}(x)\, \overline{s_{2m,p_j}}(x) \end{aligned}$$

Puis définissons la fonction G_{m,p_n}

$$\begin{aligned} G_{m,p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto G_{m,p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$ Cette fonction peut également s'écrire

$$\begin{aligned} G_{m,p_n}(x) &= S_{p_n}(x)\, S_{p_n}(2m-x) \\ &= S_{p_n}(x)\, \overline{S_{2m,p_n}}(x) \end{aligned}$$

ainsi que

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} g_{m,p_j}(x)$$

Nous attendons de l'étude de cette fonction qu'elle nous éclaire sur la nature de la conjecture forte de Goldbach et sa vraisemblance.

2.1 Quelques propriétés des fonctions g_{m,p_j} et G_{m,p_n}

Les fonctions g_{m,p_j} et G_{m,p_n} présentent des propriétés de périodicité et de symétrie que nous examinons ici.

2.1.1 La fonction g_{m,p_j}

Périodicité

Rappelons que

$$T_{s_{p_j}} = 2p_j$$

Nous avons

$$\begin{aligned} s_{p_j}(x) &= (-1)\ s_{p_j}\left(x + \frac{1}{2} T s_{p_j}\right) \\ &= (-1)\ s_{p_j}\left(x - \frac{1}{2} T s_{p_j}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$s_{p_j}\left(2m-x\right)=\left(-1\right)\,s_{p_j}\left(\left(2m-x\right)+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)$$

et

$$s_{p_j}\left(2m-x\right)=\left(-1\right)\,s_{p_j}\left(\left(2m-x\right)-\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)$$

Considérons la fonction g_{m,p_j}

$$g_{m,p_j}\left(x\right)=s_{p_j}\left(x\right)s_{p_j}\left(2m-x\right)$$

il vient

$$g_{m,p_j}\left(x\right)=\left(-1\right)^2 s_{p_j}\left(x+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)s_{p_j}\left(\left(2m-x\right)+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)$$

et

$$g_{m,p_j}\left(x+\frac{1}{2}T\;s_{p_j}\right)=s_{p_j}\left(x+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)s_{p_j}\left(2m-\left(x+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)\right)$$

Nous établissons donc que

$$g_{m,p_j}\left(x\right)=g_{m,p_j}\left(x+\frac{1}{2}Ts_{p_j}\right)$$

et donc que la fonction g_{m,p_j} admet pour période

$$\frac{1}{2}Ts_{p_j}=Tg_{p_j,m}=p_j$$

Symétrie

Partant de la définition de la fonction g_{m,p_j}

$$g_{m,p_j}\left(x\right)=s_{p_j}\left(x\right)s_{p_j}\left(2m-x\right)$$

nous écrivons

$$g_{m,p_j}\left(2m-x\right)=s_{p_j}\left(2m-x\right)s_{p_j}\left(2m-\left(2m-x\right)\right)$$

d'où

$$gm,p_j\left(2m-x\right)=s_{p_j}\left(2m-x\right)s_{p_j}\left(x\right)$$

La commutativité du produit des fonctions $s_{p_j}\left(2m-x\right)$ et $s_{p_j}\left(x\right)$ nous permet donc d'écrire

$$g_{m,p_j}\left(x\right)=g_{m,p_j}\left(2m-x\right)$$

En particulier, lorsque $x=2m$

$$g_{m,p_j}\left(2m-2m\right)=g_{m,p_j}\left(2m\right)=g_{m,p_j}\left(0\right)$$

et

$$s_{p_j}\left(2m-2m\right)=s_{p_j}\left(0\right)=0$$

Zéros

Chaque nombre x pour lequel la fonction g_{m,p_j} s'annule vérifient

$$\left(g_{m,p_j}(x)=0\right) \Longleftrightarrow \left(s_{p_j}(x)\, s_{p_j}(2m-x)=0\right)$$

et donc sont soit de la forme hp_j soit de la forme $2m-lp_j$, où h et l sont des entiers naturels. Si les deux fonctions s_{p_j} et $\overline{s_{2m,p_j}}$ s'annulent simultanément pour un même entier impair, alors m est nécessairement multiple de p_j. Ces deux fonctions sont alors non distinctes. En particulier, nous notons qu'elles s'annulent toutes deux lorsque $x=0$, $x=m$ et $x=2m$ sur l'intervalle $[0,2m]$. Si par contre seul x est multiple de p_j, alors seule la fonction s_{p_j} s'annule. Elle est distincte de la fonction $\overline{s_{2m,p_j}}$. En particulier, sur l'intervalle $[0,2m]$, la fonction $\overline{s_{2m,p_j}}$ ne s'annule pas lorsque $x=0$, $x=m$ et $x=2m$.
Considérons la fonction g_{m,p_j} sur l'un des intervalles

$$[kp_j, kp_j + Tg_{m,p_j}[$$

Elle s'annule lorsque x prend pour valeur l'entier hp_j. Egalement, en posant

$$m \equiv m_j \quad [p_j]$$

nous obtenons

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right) = \sin(h\pi) = 0\right) \Longleftrightarrow (x = 2m_j - lp_j)$$

et donc sur l'intervalle considéré

$$[kp_j, kp_j + Tg_{m,p_j}[= [kp_j, (k+1)\,p_j[$$

nous avons deux entiers, kp_j et $(k+1)\,p_j - 2m_j$, pour lesquels la fonction g_{m,p_j} s'annule.

Exemple

Nous présentons à titre d'illustration dans le cas où $p_j = 5$ et $m = 13$ le graphe (voir la figure-2.1 page-15) sur l'intervalle $[0,26[$ de la fonction $g_{5,13}$ de période $Tg_{5,13} = 5$. En particulier, ce graphe sur les intervalles $[0,26[$ et $[-2,28[$ montre les propriétés de symétrie que nous avons établies plus haut.

2.1.2 La fonction G_{m,p_n}

Périodicité

Nous avons montré que

$$S_{p_n}(x) = (-1)S_{p_n}\left(x + \frac{1}{2}TS_{p_n}\right) = (-1)S_{p_n}\left(x - \frac{1}{2}TS_{p_n}\right)$$

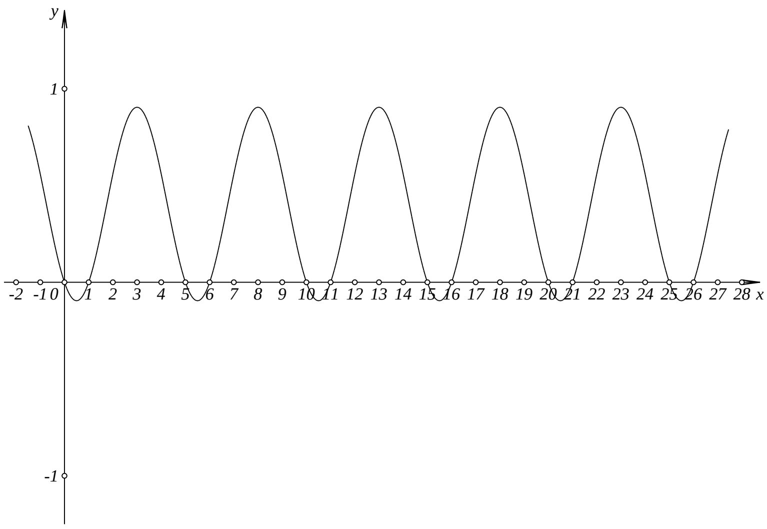


FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $g_{5,13}$

et donc

$$S_{p_n}(2m-x) = (-1)S_{p_n}\left((2m-x)+\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)$$

et également

$$S_{p_n}(2m-x) = (-1)S_{p_n}\left((2m-x)-\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)$$

Par conséquent, il nous est possible d'écrire

$$G_{m,p_n}(x) = S_{p_n}(x)\,S_{p_n}(2m-x)$$

et

$$G_{m,p_n}(x) = (-1)^2 S_{p_n}\left(x+\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)S_{p_n}\left((2m-x)+\frac{1}{2}TS_{p_n})\right)$$

et aussi

$$G_{m,p_n}\left(x+\frac{1}{2}TS_{p_n}\right) = S_{p_n}\left(x+\frac{1}{2}TS_{p_n}\right)S_{p_n}\left(2m-(x+\frac{1}{2}TS_{p_n})\right)$$

et finalement

$$G_{m,p_n}(x) = G_{m,p_n}(x+\frac{1}{2}TS_{p_n})$$

Nous constatons que la fonction G_{m,p_n} est périodique, de période $\frac{1}{2}TS_{p_n}$, et nous posons

$$TG_{m,p_n} = \frac{1}{2}TS_{p_n}$$

Cette période a toujours une valeur entière paire, quel que soit n.

Symétrie

Nous pouvons également vérifier que sur l'intervalle $[0, 2m[$

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m - x)\right)$$

ce qu'on peut encore écrire

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m - x)\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right)$$

et donc

$$(G_{m,p_n}(x) = G_{m,p_n}(2m - x)) \Longleftrightarrow (G_{m,p_n}(m - x) = G_{m,p_n}(m + x))$$

En particulier

$$(G_{m,p_n}(m - x) \neq 0) \Longleftrightarrow ((S_{p_n}(m - x) \neq 0) \wedge (S_{p_n}(m + x) \neq 0))$$

De même

$$(G_{m,p_n}(m - x) = 0) \Longleftrightarrow ((S_{p_n}(m - x) = 0) \wedge (S_{p_n}(m + x) = 0))$$

Par construction, l'entier m est centre de symétrie pour la fonction G_{m,p_n} sur l'intervalle $[0, 2m[$. De plus, nous avons

$$G_{m,p_n}\left(m - \frac{1}{2}TG_{m,p_n}\right) = G_{m,p_n}\left(m + \frac{1}{2}TG_{m,p_n}\right)$$

et donc m est également centre de symétrie pour la fonction G_{m,p_n} sur l'intervalle

$$[m - \frac{1}{2}TG_{m,p_n}, m + \frac{1}{2}TG_{m,p_n}[$$

Nous remarquons enfin que

$$\begin{aligned} G_{m,p_n}(-x) &= \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(-x)\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m + x)\right) \\ &= (-1)^n \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m + x)\right) \end{aligned}$$

et

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(x)\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m - x)\right)$$

S'il existe des valeurs entières non nulles prises par x pour lesquelles

$$|G_{m,p_n}(-x)| = |G_{m,p_n}(x)|$$

alors nous devons avoir

$$(\forall p_j \in \pi_{p_n}) \left(\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m+x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)\right)$$

or

$$\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m+x)\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)\cos\left(\frac{\pi}{p_j}(2x)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2x)\right)$$

et donc

$$\left(\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m+x)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)\right) \Longleftrightarrow \\ \left(\cos\left(\frac{\pi}{p_j}(2x)\right) = 1 \Longleftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2x)\right) = 0\right)$$

Ceci implique nécessairement

$$(\exists h_0 \in \mathbb{Z}^*) \left(x = h_0 \prod_{j=1}^{j=n} p_j\right)$$

Et nous vérifions

$$(\forall p_k \in \pi_{p_n}) (\exists h_1 \in \mathbb{Z}^*) \left(\sin\left(\frac{\pi}{p_k} h_0 \prod_{j=1}^{j=n} p_j\right) = \sin(h_1\pi) = 0\right)$$

ce qui entraine

$$G_{m,p_n}\left(h_0 \prod_{j=1}^{j=n} p_j\right) = G_{m,p_n}\left(-h_0 \prod_{j=1}^{j=n} p_j\right) = 0$$

En revanche, lorsque

$$(h_0 \in \mathbb{Z}^*) \left(x \neq h_0 \prod_{j=1}^{j=n} p_j\right)$$

alors

$$G_{m,p_n}(x) \neq G_{m,p_n}(-x)$$

Par conséquent, 0 n'est pas un centre de symétrie de la fonction G_{m,p_n}.

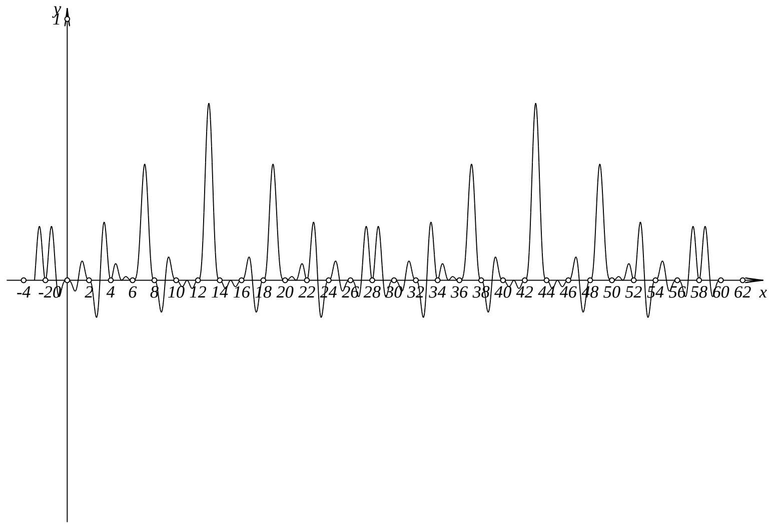


FIGURE 2.2 – Graphe de la fonction $G_{5,13}$ sur l'intervalle $[-2, 58[$

Exemples

Nous présentons à titre d'illustration dans le cas où $p_n = 5$ et $m = 13$ le graphe sur l'intervalle $[-2, 58[$ de la fonction $G_{5,13}$ de période $TG_{5,13} = 30$ (voir la figure-2.2 page-18). En particulier, ce graphe montre sur les intervalles $[0, 26[$ et $[-2, 28[$ les propriétés de symétrie que nous avons établies plus haut.

Autres propriétés

Nous n'avons jusqu'à présent fait aucune hypothèse sur le paramètre m dont la valeur a, à l'évidence, une certaine importance dans le comportement de la fonction G_{m,p_n} et en particulier, dans la façon dont cette fonction s'annule sur son domaine de définition. Par construction, la fonction s'annule pour la valeur x lorsque

$$S_{p_n}(x) = 0$$

ou bien

$$S_{p_n}(2m - x) = \overline{S_{2m,p_n}}(x) = 0$$

Cas 1 : $m \leq p_n$ L'intervalle $[0, m[$ est inclus dans l'intervalle $[0, p_n[$. Nous savons que la fonction S_{p_n} s'annule pour toutes les valeurs entières prises par x dans cet intervalle $[0, p_n[$, hormis 1. Par conséquent, par symétrie, la fonction G_{m,p_n} s'annule a priori pour toutes les valeurs entières prises par x dans l'intervalle $[0, 2m[$, hormis 1 et $2m - 1$ pour lesquels cette fonction ne s'annule pas nécessairement. Cependant, si $2m-1$ est divisible par l'un au moins des entiers premiers inférieurs ou égal à p_n, alors la fonction G_{m,p_n} s'annule pour toutes les valeurs entières prises par x dans l'intervalle $[0, 2m[$. Nous illustrons ce cas par

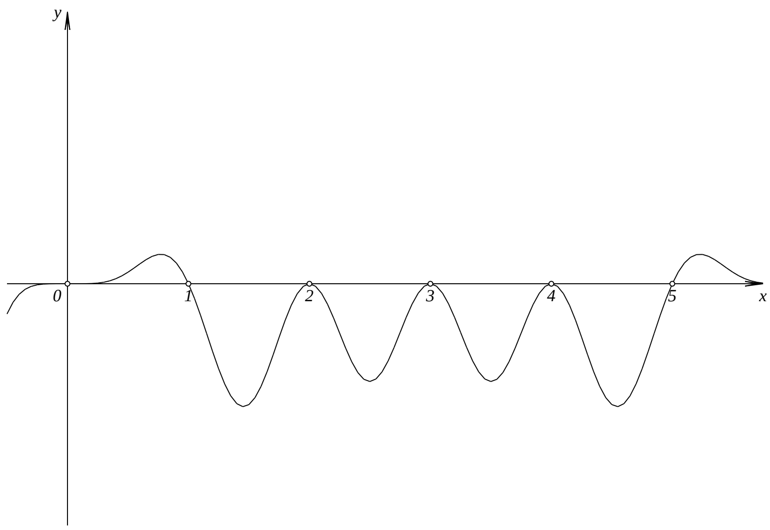


FIGURE 2.3 – Graphe de la fonction $G_{5,3}$ sur l'intervalle $[-2, 30[$

les graphes des fonctions $G_{5,3}$ et $G_{5,4}$ sur les intervalles respectifs $[0, 6[$, $[0, 8[$ et $[0, 10[$ (voir les figures 2.3 et 2.4 pages 19 et 20).

Cas 2 : $m > p_n$ L'intervalle $[0, p_n[$ est inclus dans l'intervalle $[0, m[$. Par conséquent, la fonction G_{m,p_n} peut a priori ne pas s'annuler pour toutes les valeurs entières prises par x dans l'intervalle $[0, 2m[$. Nous illustrons ce cas par les graphes des fonctions $G_{7,6}$ et $G_{7,7}$ sur les intervalles respectifs $[0, 12[$ et $[0, 14[$ (voir les figures 2.5 et 2.6 pages 21 et 22). C'est ce dernier cas, où l'entier m est choisi strictement supérieur à l'entier premier p_n, qui fait l'objet d'une étude plus approfondie dans ce qui suit.

Nous montrerons que pour tout entier premier $p_n > 11$, il existe au moins un entier dans chaque intervalle

$$[kp_n, (k+1)\, p_n[$$

pour lequel la fonction S_{p_n} ne s'annule pas, lorsque k est inférieur à un certain entier dont la valeur dépend de p_n. De plus, lorsque

$$(k+1)\, p_n < p_{n+1}^2$$

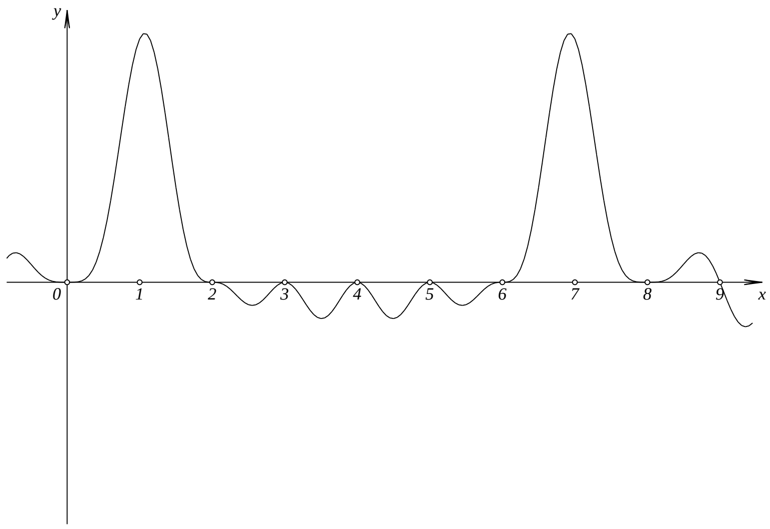


FIGURE 2.4 – Graphe de la fonction $G_{5,4}$ sur l'intervalle $[-2, 30[$

cet entier est premier. Nous remarquons aussi que tout entier qui annule la fonction S_{p_n}, annule la fonction G_{m,p_n}. La réciproque n'est pas vraie. En effet, cette fonction s'annule également lorsque pour l'un au moins des entiers premiers p_j, nous avons

$$\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right) = 0$$

Les entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas.

A chaque entier m nous faisons correspondre la fonction

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=\mu} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m-x)\right)$$

et nous choisissons les entiers premiers p_n et p_{n+1}, consécutifs dans l'ensemble des nombres premiers, tels que

$$p_n^2 < 2m < p_{n+1}^2$$

Nous étudions la façon dont la fonction G_{m,p_n} s'annule sur l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

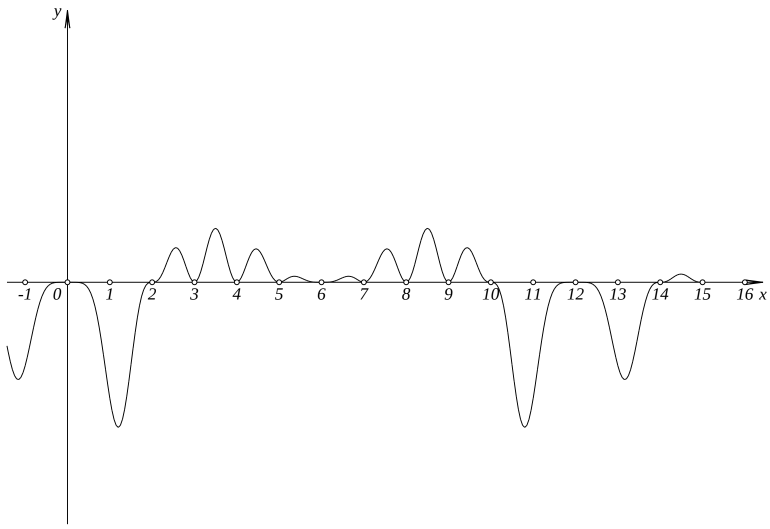


FIGURE 2.5 – Graphe de la fonction $G_{7,6}$ sur l'intervalle $[-2, 30[$

Cet intervalle est centré sur l'entier m et contient TG_{m,p_n} entiers, avec

$$TG_{m,p_n} = \prod_{j=1}^{j=n} p_j$$

Considérons les entiers a_k de cet intervalle et pour eux tous leurs restes respectifs $\alpha_{k,j}$ modulo chacun des entiers premiers p_j de l'ensemble π_{p_n}. Pour chacun de ces entiers, nous avons pour chaque indice j

$$a_k \equiv \alpha_{k,j} \quad [p_j]$$

avec

$$\alpha_{k,j} \in \mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z}$$

Reportons dans chacune des $\prod_{j=1}^{j=n} p_j$ lignes du tableau suivant chacun des entiers a_k de l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

et leurs restes respectifs modulo p_j

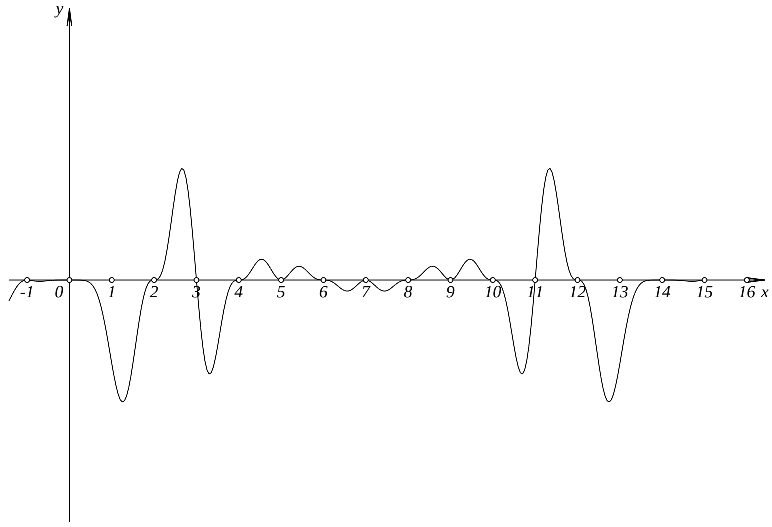


FIGURE 2.6 – Graphe de la fonction $G_{7,7}$ sur l'intervalle $[-2, 30[$

$\equiv \quad [p_1]$	$\equiv \quad [p_2]$		$\equiv \quad [p_j]$		$\equiv \quad [p_n]$
$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$	$\cdots$	$\alpha_{1,j}$	$\cdots$	$\alpha_{1,n}$
$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	$\cdots$	$\alpha_{2,j}$	$\cdots$	$\alpha_{2,n}$
$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{3,2}$	$\cdots$	$\alpha_{3,j}$	$\cdots$	$\alpha_{3,n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_{k,1}$	$\alpha_{k,2}$	$\cdots$	$\alpha_{k,j}$	$\cdots$	$\alpha_{k,n}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-2,1}$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-2,2}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-2,i}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-2,n}$
$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-1,1}$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-1,2}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-1,i}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j-1,n}$
$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j,1}$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j,2}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j,i}$	$\cdots$	$\alpha_{\prod_{j=1}^{j=n} p_j,n}$

Chacun des restes $\alpha_{k,j}$ peut prendre p_j valeurs entières distinctes prises dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, \cdots, j, \cdots, p_j - 1\}$$

Donc, chaque ligne du tableau peut s'écrire de $\prod_{j=1}^{j=n} p_j$ façons distinctes. Nous remarquons de plus que deux lignes distinctes contenant exactement les mêmes restes $\alpha_{k,j}$, pour chaque valeur que peut prendre l'indice j, correspondent nécessairement à deux entiers distincts a_{k_1} et a_{k_2} qui sont tels que

$$(\forall p_j \in \pi_{p_n}) \left[(a_{k_1} \equiv a_{k_2} \quad [p_j]) \Longleftrightarrow ((a_{k_1} - a_{k_2}) \equiv 0 \quad [p_j]) \right]$$

Nous en déduisons qu'il ne peut y avoir qu'un seul de ces nombres dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m,\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m[$$

Par conséquent, sur cet intervalle, deux lignes du tableau prises parmi les $\prod_{j=1}^{j=n} p_j$ lignes possibles ne peuvent être identiques et l'ensemble de ces lignes contient toutes les lignes qu'il est possible de construire avec tous les restes $\alpha_{k,j}$. Considérons maintenant les entiers a_κ de l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m,\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m[$$

pour lequel la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas. Pour chacun d'entre eux, aucun des restes $\alpha_{k,j}$ modulo p_j n'est nul et chacun d'eux ne peut prendre une valeur que parmi p_j-1 entiers. Le nombre de ces entiers a_k contenu dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m,\frac{1}{2}TG_{m,p_n}+m[$$

est donc égal à $\prod_{j=1}^{j=n}(p_j-1)$. De plus, il est clair que nous devons vérifier

$$(\forall a_\kappa)\,(\forall p_j\in\pi_{p_n})\,(a_\kappa-(2m-a_\kappa)\equiv 2m \quad [p_j])$$

Soient les ensembles des entiers premiers impairs $\left\{p_j^{(m)}\right\}$ et $\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}$ qui divisent et ne divisent pas respectivement m, et donc $2m$. Nous avons

$$\left\{p_j^{(m)}\right\}\cup\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}=\pi_{p_n}-\{2\}$$

L'ensemble $\left\{p_j^{(m)}\right\}$ est vide si m est lui même premier ou multiple d'entiers premiers impairs n'appartenant pas à π_{p_n}. Nous avons

$$\left(\forall p_j^{(m)}\in\left\{p_j^{(m)}\right\}\right)\left(2m\equiv 0 \quad [p_j^{(m)}]\right)$$

De même

$$\left(\forall p_j^{\neg(m)}\in\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right)\left(\exists\mu_j\in\mathbb{Z}^*/p_j^{\neg(m)}\right)\left(2m\equiv\mu_j \quad [p_j^{\neg(m)}]\right)$$

Nous posons

$$\left|\left\{p_j^{(m)}\right\}\right|=\rho$$

Ce qui entraîne

$$\left|\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right|=(n-1)-\rho$$

Supposons qu'il existe au moins un entier premier impair $p_k\in\pi_{p_n}$ qui divise $2m-a_\kappa$. Alors

$$(\exists p_k\in\pi_{p_n})\,((a_\kappa\equiv 2m \quad [p_k])\Leftrightarrow((2m-a_\kappa)\equiv 0 \quad [p_k]))$$

et dans ce cas

$$G_{m,p_n}(a_k) = G_{m,p_n}(2m - a_k) = 0$$

A l'inverse, les entiers a_k tels que

$$(\forall p_j \in \pi_{p_n})\,(a_\kappa \not\equiv 2m \quad [p_j])$$

vérifient

$$G_{m,p_n}(a_k) = G_{m,p_n}(2m - a_k) \neq 0$$

Pour chacun de ces entiers a_k, aucun de ses restes $\alpha_{k,j}$ modulo p_j n'est nul. Deux cas se présentent alors

Cas 1

$$\left(\left\{p_j^{(m)}\right\} = \emptyset\right) \Leftrightarrow \left(\left|\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right| = |\pi_{p_n} - \{2\}| = n - 1\right)$$

Aucun de ses restes $\alpha_{k,j}$ n'est de plus égal au reste μ_j modulo p_j de $2m$. Chacun de ses restes $\alpha_{k,j}$ ne peut donc prendre une valeur que parmi $p_j - 2$ entiers. Le nombre de ces entiers a_k contenu dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

pour lesquels la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas sur ce même intervalle est donc égal à

$$\Gamma_{G_{m,p_n}} = \prod_{j=2}^{j=n} \left(p_j^{\neg(m)} - 2\right) \tag{2.1}$$

A titre d'exemple, l'entier p_n et le paramètre m étant choisis respectivement égal à 7 et 31, la fonction $G_{31,7}$ a pour période

$$TG_{31,7} = 210$$

Nous vérifions que $7^2 < 62 < 11^2$. De plus, $31 \notin \pi_7$. L'intervalle d'étude est

$$[-\frac{1}{2}210 + 31 = -74, \frac{1}{2}210 + 31 = 136[$$

Il contient 210 entiers. Nous avons

$$\left\{p_j^{(m)}\right\} = \emptyset$$

et

$$\left\{p_j^{\neg(m)}\right\} = \pi_7 - \{2\} = \{3, 5, 7\}$$

Par conséquent, $\left|\left\{p_j^{(m)}\right\}\right| = 0$ et $\left|\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right| = 3$. L'ensemble des entiers qui n'annulent pas la fonction $G_{31,7}$ sur l'intervalle $[-74, 136[$ est l'ensemble

$$\{-59, -47, -41, -17, -11, 1, 19, 31, 43, 61, 73, 79, 103, 109, 121\}$$

Il contient 15 entiers et l'on vérifie bien que

$$\Gamma_{G_{31,7}} = \prod_{j=2}^{j=3} \left(p_j^{(m)} - 2\right) = (3-2)(5-2)(7-2) = 15$$

Cas 2

$$\left(\left\{p_j^{(m)}\right\} \neq \emptyset\right) \Leftrightarrow \left(\left|\left\{p_j^{(m)}\right\}\right| = \rho\right) \Leftrightarrow \left(\left|\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right| = (n-1) - \rho\right)$$

Aucun de ses restes $\alpha_{k,j}$ n'est de plus égal au reste μ_j modulo $p_j^{\neg(m)}$ de $2m$. Chacun de ses restes $\alpha_{k,j}$ ne peut donc prendre une valeur que parmi $p_j - 1$ entiers pour chaque entier premier $p_j \in \left\{p_j^{(m)}\right\}$. De même, chacun de ces restes $\alpha_{k,j}$ ne peut prendre une valeur que parmi $p_j - 2$ entiers pour chaque entier premier $p_j \in \left\{p_j^{\neg(m)}\right\}$. Le nombre de ces entiers a_k contenu dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

pour lesquels la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas sur ce même intervalle est donc égal à

$$\Gamma_{G_{m,p_n}} = \prod_{k=1}^{k=\rho} \left(p_k^{(m)} - 1\right) \prod_{l=2}^{l=n-\rho} \left(p_l^{\neg(m)} - 2\right) \tag{2.2}$$

Il est clair que le cas précédent n'est que le cas particulier du cas présent où $\rho = 0$, et nous pouvons écrire

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left(\prod_{j=2}^{j=n} (p_j - 2) \leq \Gamma_{G_{m,p_n}} < \prod_{j=2}^{j=n} (p_j - 1)\right)$$

les ensembles $\left\{p_j^{(m)}\right\}$ et $\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}$ étant les ensembles des entiers premiers impairs qui divisent et ne divisent pas respectivement m. A titre d'exemple, l'entier premier p_n et le paramètre m étant choisis respectivement égaux à 7 et 30, la fonction $G_{30,7}$ a pour période

$$TG_{30,7} = 210$$

Nous vérifions que $7^2 < 60 < 11^2$. De plus

$$30 \equiv 0 \quad [3]$$

et

$$30 \equiv 0 \quad [5]$$

L'intervalle d'étude est

$$[-\frac{1}{2}210 + 30 = -75, \frac{1}{2}210 + 30 = 135[$$

Il contient 210 entiers. Nous avons

$$\left\{p_j^{(m)}\right\} = \{3, 5\}$$

et

$$\left\{p_j^{\neg(m)}\right\} = \pi_5 - \{2,3,5\} = \{7\}$$

Par conséquent, $\left|\left\{p_j^{(m)}\right\}\right| = 2$ et $\left|\left\{p_j^{\neg(m)}\right\}\right| = 1$. L'ensemble des entiers qui n'annulent pas la fonction $G_{30,7}$ sur l'intervalle $[-75, 135[$ est l'ensemble

$$\begin{aligned} &\{-71,-67,-61,-53,-47,107,113,121,127,131\} \\ &\qquad \cup \{-43,-41,-37,-29,-23,83,89,97,101,103\} \\ &\qquad\quad \cup \{-19,-13,-11,-1,1,59,61,71,73,79\} \\ &\qquad\qquad \cup \{13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\} \end{aligned}$$

que nous avons découpé en quatre sous-ensembles de cardinal 10 chacun pour des raisons de typographie et de clarté. Cet ensemble contient donc 40 entiers et l'on vérifie bien que

$$\Gamma_{G_{30,7}} = \prod_{k=1}^{k=2} \left(p_k^{(m)} - 1\right) \prod_{l=1}^{l=1} \left(p_l^{\neg(m)} - 2\right) = (3-1)(5-1)(7-2) = 40$$

2.2 Etude sur l'intervalle $[0, 2m[$

Le résultat auquel nous venons de parvenir indique que la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas pour un nombre significatifs d'entiers de l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

Ces entiers sont nécessairement soit des entiers premiers qui n'appartiennent pas à π_{p_n}, soit des entiers multiples d'entiers premiers qui n'appartiennent pas à π_{p_n}. Il existe également deux entiers premiers p_ν et $p_{\nu+1}$, avec $\nu \in \mathbb{N}^*$, tels que pour les fonctions G_{m,p_ν} et $G_{m,p_{\nu+1}}$ correspondantes, nous ayons

$$TG_{m,p_\nu} < 2m < TG_{m,p_{\nu+1}}$$

La fonction G_{m,p_ν} ne s'annule pas non plus pour un nombre significatifs d'entiers de l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m[$$

2.2.1 Les zéros

Considérons donc ces deux fonctions G_{m,p_n} et G_{m,p_ν} sur l'intervalle fermé

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

où p_ν est tel que

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m] \subset [0, 2m[$$

Nous avons établi précédemment

$$TG_{m,p_\nu} = \prod_{j=1}^{j=\nu} p_j$$

On remarquera que les bornes de l'intervalle $[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$, que nous notons respectivement A_ν et B_ν sont de même parité. Pour ces deux mêmes bornes, nous avons

$$(\forall p_j \leq p_\nu)\,(A_\nu \equiv B_\nu \quad [p_j])$$

Nous supposerons aussi que l'entier m n'est pas premier. Rappelons maintenant

$$G_{m,p_n}(x) = S_{p_n}(x)\,\overline{S_{2m,p_n}}(x)$$

avec

$$S_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(2m - x) = \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)$$

$$\overline{S_{2m,p_n}}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\frac{\pi}{p_j}(2m - x) = \prod_{j=1}^{j=n} \overline{s_{2m,p_j}}(x)$$

La fonction S_{p_n} s'annule pour a_n entiers pris dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

et b_n entiers pris dans l'intervalle

$$]m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

Symétriquement, la fonction $\overline{S_{2m,p_n}}$ s'annule pour $\overline{a_n} = b_n$ entiers pris dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

et $\overline{b_n} = a_n$ entiers pris dans l'intervalle

$$]m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

Par conséquent, le nombre d'entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

est inférieur ou égal à $a_n + b_n$, lorsque le nombre d'entiers pour lesquels la fonction S_{p_n} s'annule dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

est lui égal à $a_n + b_n + 1$.
L'ensemble des entiers pour lesquels la fonction S_{p_n} s'annule dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

est aussi l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est inférieur ou égal à p_n. Nous le notons $\mathbb{C}_{p_n}$ et nous avons

$$|\mathbb{C}_{p_n}| = a_n + b_n + 1 \tag{2.3}$$

De ce qui précède, il s'ensuit que

– le nombre d'entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

est inférieur ou égal à $(a_n + b_n)$. Ces entiers sont les éléments de l'ensemble noté $\mathbb{D}_{p_n}$ et nous avons

$$|\mathbb{D}_{p_n}| \leq a_n + b_n \tag{2.4}$$

– le nombre d'entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

est supérieur à $\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} - (a_n + b_n)$. Ces entiers sont les éléments de l'ensemble noté $\mathbb{E}_{p_n}$ et nous avons

$$|\mathbb{E}_{p_n}| > \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} - (a_n + b_n) \tag{2.5}$$

Nous définissons à présent dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$

- l'ensemble $\mathbb{A}_2$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est 2, et son complémentaire $\mathbb{B}_2$ dans cet intervalle. Ces deux ensembles ont respectivement pour cardinal $|\mathbb{A}_2|$ et $|\mathbb{B}_2|$. Nous avons les égalités strictes

$$|\mathbb{A}_2| = \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}$$

$$|\mathbb{B}_2| = \left(1 - \frac{1}{2}\right)TG_{m,p_\nu}$$

$\mathbb{B}_2$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à 2.
- l'ensemble $\mathbb{A}_3$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est 3, et son complémentaire $\mathbb{B}_3$ dans l'ensemble $\mathbb{B}_2$. Ces deux ensembles ont respectivement pour cardinal $|\mathbb{A}_3|$ et $|\mathbb{B}_3|$ et nous avons encore les égalité strictes

$$|\mathbb{A}_3| = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)TG_{m,p_\nu}$$

$$|\mathbb{B}_3| = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) TG_{m,p_\nu}$$

$\mathbb{B}_3$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à 3.
Pour l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier $5 \leq p_j \leq p_\nu$, il n'y a plus d'égalité stricte, sauf lorsque

$$m \equiv 0 \quad [p_j]$$

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{A}_5$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est 5, et son complémentaire dans l'ensemble $\mathbb{B}_3$ est $\mathbb{B}_5$. Ces deux ensembles ont respectivement pour cardinal $|\mathbb{A}_5|$ et $|\mathbb{B}_5|$ et nous avons les inégalités

$$|\mathbb{A}_5| \leq \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) TG_{m,p_\nu}$$

$$|\mathbb{B}_5| \geq \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) TG_{m,p_\nu}$$

$\mathbb{B}_5$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à 5.
De façon générale, l'ensemble $\mathbb{A}_{p_j}$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est p_j, et son complémentaire dans l'ensemble $\mathbb{B}_{p_{i-1}}$ est $\mathbb{B}_{p_j}$. Ces deux ensembles ont respectivement pour cardinal $\left|\mathbb{A}_{p_j}\right|$ et $\left|\mathbb{B}_{p_j}\right|$ et nous avons les inégalités

$$\left|\mathbb{A}_{p_j}\right| \leq \frac{1}{p_j}\prod_{k=1}^{k=j-1}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) TG_{m,p_\nu} \tag{2.6}$$

$$\left|\mathbb{B}_{p_j}\right| \geq \prod_{k=1}^{k=j}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) TG_{m,p_\nu} \tag{2.7}$$

Pour tout j, $\mathbb{B}_{p_j}$ est l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_j. Nous avons de plus

$$TG_{m,p_\nu} = \mathbb{A}_{p_1} \cup \mathbb{B}_{p_1}$$

$$\mathbb{B}_{p_1} = \mathbb{A}_{p_2} \cup \mathbb{B}_{p_2}$$

$$\mathbb{B}_{p_2} = \mathbb{A}_{p_3} \cup \mathbb{B}_{p_3}$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{B}_{p_{j-2}} = \mathbb{A}_{p_{j-1}} \cup \mathbb{B}_{p_{j-1}}$$

$$\mathbb{B}_{p_{j-1}} = \mathbb{A}_{p_j} \cup \mathbb{B}_{p_j}$$

$$\ldots$$

$$\mathbb{B}_{p_{n-1}} = \mathbb{A}_{p_j} \cup \mathbb{B}_{p_n}$$

et donc

$$\mathbb{B}_{p_1} = \mathbb{A}_{p_2} \cup \mathbb{A}_{p_3} \cup \mathbb{B}_{p_3}$$

et en procédant de proche en proche

$$(\forall j \in \mathbb{N}^*)\,(j \leq n)\left(\mathbb{B}_{p_1} = \bigcup_{k=2}^{k=j-1} \mathbb{A}_{p_k} \cup \mathbb{B}_{p_j}\right)$$

Par ailleurs, il est clair que les ensembles $\mathbb{A}_{p_j}$ sont distincts et disjoints deux à deux et que l'ensemble $\mathbb{C}_{p_n}$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est inférieur ou égal à p_n, avec $1 < j \leq n$, sur l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m[$$

est égal à

$$\mathbb{C}_{p_n} = \bigcup_{j=1}^{j=n} \mathbb{A}_{p_j}$$

et a pour cardinal

$$|\mathbb{C}_{p_n}| = \sum_{j=1}^{j=n} \left|\mathbb{A}_{p_j}\right| \tag{2.8}$$

Pour finir, l'ensemble $\mathbb{B}_{p_n}$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_n est le complémentaire de l'ensemble $\mathbb{C}_{p_n}$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est inférieur ou égal à p_n dans l'ensemble des entiers contenus dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m]$$

et donc

$$|\mathbb{B}_{p_n}| = TG_{m,p_\nu} - (a_n + b_n) \tag{2.9}$$

Posons maintenant

$$u_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$v_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_3 = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{p_3}\prod_{k=1}^{k=2}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$v_3 = \left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^{k=3}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$\cdots$$

$$u_j = \frac{1}{p_j}\prod_{k=1}^{k=j-1}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$v_j = \prod_{k=1}^{k=j}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

Les grandeurs u_j et v_j sont les termes des deux suites

$$u_j = \frac{1}{p_j}\prod_{k=1}^{k=j-1}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{2.10}$$

et

$$v_j = \prod_{k=1}^{k=j}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{2.11}$$

et nous avons

$$(\forall j \in \mathbb{N}^*) \quad (u_j + v_j = v_{j-1})$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N}^*) \quad \left(u_j = \frac{1}{p_j}v_{j-1}\right)$$

Nous posons également par convention $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. De plus

$$u_{j+1} = \frac{1}{p_{j+1}}\prod_{k=1}^{k=j}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{p_{j+1}}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)\prod_{k=1}^{k=j-1}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

d'où

$$\left(u_{j+1} = \frac{p_j}{p_{j+1}}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right)u_j\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_{j+1}}{u_j} = \frac{p_j - 1}{p_{j+1}} < \frac{p_j}{p_{j+1}} < 1\right)$$

ce qui établi la décroissance de la suite u_j. Maintenant

$$(\forall j \in \mathbb{N}) \quad \left(u_j = \frac{1}{p_j}v_{j-1}\right)$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{j=n} u_j = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{p_j}v_{j-1}$$

Nous pouvons maintenant aborder le chapitre suivant qui présente l'approche d'une démonstration de la conjecture forte de Goldbach [5]. Nous ferons appel à des résultats déjà connus.

Chapitre 3

Sur la conjecture forte de Goldbach

Comme annoncé au terme des pages précédentes, commençons par établir quelques résultats en nous inspirant des travaux de Franz Mertens [6].

3.1 Un minorant de la somme des inverses des n premiers nombres premiers

Considérons la somme S des inverses des nombres premiers. Nous avons

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j}$$

et pour chaque entier premier p_j

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_j}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^k}$$

Soit maintenant p_n le n-ième entier premier et choisissons l'entier P tel que

$$p_n \leq P < p_{n+1}$$

alors

$$\prod_{j=1}^{j=n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_j}\right)^k = \sum_{n \in N_{p_n}} \frac{1}{n}$$

où N_{p_n} est l'ensemble des entiers naturels dont le plus grand diviseur premier est p_n. Il est clair que

$$\sum_{j=1}^{j=P} \frac{1}{j} < \prod_{j=1}^{j=n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p_j}\right)^k$$

or

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^k} = 1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2} + \cdots = 1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j^2}\left(1 + \frac{1}{p_j} + \cdots\right)$$

et

$$\frac{1}{p_j^2}\left(1 + \frac{1}{p_j} + \cdots\right) = \frac{1}{p_j^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_j^k} = \frac{1}{p_j^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}} = \frac{1}{p_j\left(p_j-1\right)}$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{j=P}\frac{1}{j} < \prod_{j=1}^{j=n}\left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\left(p_j-1\right)}\right)$$

mais

$$1 > \int_{x=1}^{x=2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int_{x=1}^{x=2}\frac{\mathrm{d}x}{x} > \frac{1}{2} > \int_{x=2}^{x=3}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\cdots$$

$$\int_{x=j-1}^{x=j}\frac{\mathrm{d}x}{x} > \frac{1}{j} > \int_{x=j}^{x=j+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\cdots$$

$$\int_{x=p_n-1}^{x=p_n}\frac{\mathrm{d}x}{x} > \frac{1}{p_n} > \int_{x=p_n}^{x=p_n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\cdots$$

$$\int_{x=P-1}^{x=P}\frac{\mathrm{d}x}{x} > \frac{1}{P} > \int_{x=P}^{x=P+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et donc

$$\left(1 + \int_{x=1}^{x=p_n}\frac{\mathrm{d}x}{x} > \sum_{j=1}^{j=P}\frac{1}{j} > \int_{x=1}^{x=P+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(1 + [\ln x]_{x=1}^{x=P} > \sum_{j=1}^{j=P}\frac{1}{j} > [\ln x]_{x=1}^{x=P+1}\right)$$

et

$$\left(1 + \ln\left(P\right) > \sum_{j=1}^{j=P}\frac{1}{j} > \ln\left(p_n+1\right)\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\left(1 + \ln\left(P\right) > \sum_{j=1}^{j=P}\frac{1}{j} > \ln\left(P\right)\right)$$

Il s'ensuit

$$\ln \ln (P) < \ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right)$$

et nous avons

$$\ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right) = \sum_{j=1}^{j=n} \ln \left(1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right)$$

Rappelons maintenant que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \left(\left(\exp (x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \Longrightarrow (\exp (x) \geq 1 + x)\right)$$

et donc

$$\exp \left(\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right) \geq 1 + \frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}$$

et par conséquent

$$\ln \ln (P) \leq \sum_{j=1}^{j=n} \ln \exp \left(\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right)$$

soit encore

$$\ln \ln (P) \leq \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{p_j} + \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)}\right)$$

mais

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j\,(p_j - 1)} < \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j^2} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j^2} < 1$$

et finalement

$$\left(\ln \ln (P) \leq 1 + \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{p_j}\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\ln \ln (P) - 1 \leq \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{p_j}\right)\right) \tag{3.1}$$

3.2 Un majorant de la somme des inverses des n premiers nombres premiers

Posons, pour $1 \leq j \leq n$

$$a_j = \frac{1}{\ln p_j}$$

$$b_j = \frac{\ln p_j}{p_j}$$

$$B_j = \sum_{k=1}^{k=j} b_k$$

Dans un premier temps, considérons

$$B_j = \sum_{k=1}^{k=j} \frac{\ln p_k}{p_k} = \sum_{k=1}^{k=j} \ln p_k^{\frac{1}{p_k}} = \ln \prod_{k=1}^{k=j} p_k^{\frac{1}{p_k}}$$

Nous remarquons que la fonction

$$y = x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)$$

admet pour dérivée

$$\frac{\mathrm{d}}{dx} y = \frac{\mathrm{d}}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right) = \left(\frac{1}{x^2}\left(1-\ln x\right)\right) x^{\frac{1}{x}}$$

et que cette dérivée est négative lorsque $x > e$. Par conséquent, pour tout $k > 2$

$$\frac{\ln p_k}{p_k} < \frac{\ln k}{k}$$

et donc

$$\sum_{k=2}^{k=m} \frac{\ln p_k}{p_k} < \sum_{k=2}^{k=m} \frac{\ln k}{k}$$

mais

$$\int_{x=k-1}^{x=k} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x < \frac{\ln k}{k} < \int_{x=k}^{x=k+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$

et donc

$$\sum_{k=2}^{k=m} \frac{\ln k}{k} < \int_{x=2}^{x=m+1} \frac{\ln x}{x} \mathrm{d}x$$

et finalement

$$\sum_{k=2}^{k=m} \frac{\ln p_k}{p_k} < \sum_{k=2}^{k=m} \frac{\ln k}{k} < [\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2]_2^{m+1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\ln p_k}{p_k} < \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=2}^{j=m} \frac{\ln k}{k} < \frac{1}{2}\left(\left(\ln\left(m+1\right)\right)^2 - \ln 2\left(\ln 2 - 1\right)\right)$$

Nous vérifions alors numériquement que

$$B_j = \sum_{k=1}^{k=j} \frac{\ln p_k}{p_k} < \ln p_j$$

lorque $j \leq 10$. Supposons que cette dernière relation soit vraie jusqu'au rang m, alors

$$B_{m+1} = \sum_{k=2}^{k=m+1} \frac{\ln p_k}{p_k} = B_m + \frac{\ln p_{m+1}}{p_{m+1}} < \ln p_m + \frac{\ln p_{m+1}}{p_{m+1}}$$

et

$$B_{m+1} = \sum_{k=2}^{k=m+1} \frac{\ln p_k}{p_k} < \ln p_m + \ln p_{m+1}^{\frac{1}{p_{m+1}}}$$

et

$$B_{m+1} = \sum_{k=2}^{k=m+1} \frac{\ln p_k}{p_k} < \ln p_m p_{m+1}^{\frac{1}{p_{m+1}}}$$

Supposons aussi

$$\left(p_{m+1}^{\frac{p_m}{p_{m+1}}} < p_m\right) \Longleftrightarrow \left(p_{m+1}^{p_m} < p_m^{p_{m+1}}\right)$$

soit encore

$$p_m \ln p_{m+1} < p_{m+1} \ln p_m$$

or la fonction **Identité** croît plus vite que la fonction ln. Par conséquent, il existe un entier premier p_n tel que

$$\left((\forall p_j > p_n) \quad \left(p_j < p_{j+1}^{\frac{p_j}{p_{j+1}}}\right)\right) \Longrightarrow \left(p_j p_{j+1}^{\frac{1}{p_{j+1}}} < p_{j+1}^{\frac{p_j+1}{p_{j+1}}} < p_{j+1}\right)$$

Nous vérifions que $p_n = p_3 = 5$. Nous avons donc montré que

$$(\forall j) \quad \left(B_j = \sum_{k=1}^{k=j} \frac{\ln p_k}{p_k} < \ln p_j\right)$$

A présent, soit l'entier premier p_n et choisissons l'entier P tel que

$$p_n \leq P < p_{n+1}$$

Considérons la suite

$$(a_{j-1} - a_j)\, B_{j-1}$$

et pour chacun de ses termes, développons. Il vient

$$\begin{aligned}
(a_1 - a_2)\, B_1 &= \left(\frac{1}{\ln p_1} - \frac{1}{\ln p_2}\right) \frac{\ln p_1}{p_1} \\
&= \frac{1}{\ln p_1} \frac{\ln p_1}{p_1} - \frac{1}{\ln p_2} \frac{\ln p_1}{p_1} \\
&= \frac{1}{p_1} - \frac{1}{\ln p_2} \frac{\ln p_1}{p_1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(a_2 - a_3)\, B_2 &= \left(\frac{1}{\ln p_2} - \frac{1}{\ln p_3}\right)\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2}\right) \\
&= \frac{1}{\ln p_2}\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2}\right) - \frac{1}{\ln p_3}\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2}\right) \\
&= \frac{1}{p_2} + \frac{\ln p_1}{p_1}\frac{1}{\ln p_2} - \left(\frac{\ln p_1}{p_1}\frac{1}{\ln p_3} + \frac{\ln p_2}{p_2}\frac{1}{\ln p_3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_3 - a_4)\, B_3 &= \left(\frac{1}{\ln p_3} - \frac{1}{\ln p_4}\right)\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2} + \frac{\ln p_3}{p_3}\right) \\
&= \frac{1}{\ln p_3}\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2} + + \frac{\ln p_3}{p_3}\right) - \frac{1}{\ln p_4}\left(\frac{\ln p_1}{p_1} + \frac{\ln p_2}{p_2} + \frac{\ln p_3}{p_3}\right) \\
&= \frac{1}{p_3} + \left(\frac{\ln p_1}{p_1}\frac{1}{\ln p_3} + \frac{\ln p_2}{p_2}\frac{1}{\ln p_3}\right) - \left(\frac{\ln p_1}{p_1}\frac{1}{\ln p_4} + \frac{\ln p_2}{p_2}\frac{1}{\ln p_4} + \frac{\ln p_3}{p_3}\frac{1}{\ln p_4}\right)
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

$$
\begin{aligned}
(a_{j-1} - a_j)\, B_{j-1} &= \left(\frac{1}{\ln p_{j-1}} - \frac{1}{\ln p_j}\right)\sum_{k=1}^{k=j-1}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{\ln p_{j-1}}\sum_{k=1}^{k=j-1}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_j}\sum_{k=1}^{k=j-1}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{p_{j-1}} + \frac{1}{\ln p_{j-1}}\sum_{k=1}^{k=j-2}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_j}\sum_{k=1}^{k=j-1}\frac{\ln p_k}{p_k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a_j - a_{j+1})\, B_j &= \left(\frac{1}{\ln p_j} - \frac{1}{\ln p_{j+1}}\right)\sum_{k=1}^{k=j}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{\ln p_j}\sum_{k=1}^{k=j}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_{j+1}}\sum_{k=1}^{k=j}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{p_j} + \frac{1}{\ln p_j}\sum_{k=1}^{k=j-1}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_{j+1}}\sum_{k=1}^{k=j}\frac{\ln p_k}{p_k}
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

$$
\begin{aligned}
(a_{n-1} - a_n)\, B_{n-1} &= \left(\frac{1}{\ln p_{n-1}} - \frac{1}{\ln p_n}\right)\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{\ln p_{n-1}}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\ln p_k}{p_k} \\
&= \frac{1}{p_{n-1}} + \frac{1}{\ln p_{n-1}}\sum_{k=1}^{k=n-2}\frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln p_n}\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\ln p_k}{p_k}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left(a_n - \frac{1}{\ln P}\right) B_n &= \left(\frac{1}{\ln p_n} - \frac{1}{\ln P}\right) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k} \\ &= \frac{1}{\ln p_n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln P} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k} \\ &= \frac{1}{p_n} + \frac{1}{\ln p_n} \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\ln p_k}{p_k} - \frac{1}{\ln P} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k}\end{aligned}$$

Effectuons la somme

$$\sum_{j=1}^{j=n-1} (a_j - a_{j+1}) B_j + \left(a_n - \frac{1}{\ln P}\right) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k} + \frac{1}{\ln P} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\ln p_k}{p_k} = B_n$$

et, d'après ce que nous avons établi plus haut

$$(\forall j \in \mathbb{N}^*) \quad (B_j < \ln p_j)$$

il vient

$$\left(\sum_{j=1}^{j=n-1} (a_j - a_{j+1}) B_j + \left(a_n - \frac{1}{\ln P}\right) B_n = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} - \frac{1}{\ln P} B_n\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{j=n-1} (a_j - a_{j+1}) B_j + \left(a_n - \frac{1}{\ln P}\right) B_n + \frac{1}{\ln P} B_n\right)$$

et en explicitant les termes

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{j=n-1} \left(\frac{1}{\ln p_j} - \frac{1}{\ln p_{j+1}}\right) B_j + \left(\frac{1}{\ln p_n} - \frac{1}{\ln P}\right) B_n + \frac{1}{\ln P} B_n$$

soit encore

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{j=n-1} \frac{1}{\ln p_j \ln p_{j+1}} \left(\ln p_{j+1} - \ln p_j\right) B_j + \frac{1}{\ln p_n \ln P} \left(\ln P - \ln p_n\right) B_n + \frac{1}{\ln P} B_n$$

et donc

$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} < \sum_{j=1}^{j=n-1} \frac{1}{\ln p_{j+1}} \left(\ln p_{j+1} - \ln p_j\right) + \frac{1}{\ln P} \left(\ln P - \ln p_n\right) + \frac{1}{\ln P} B_n$$

Nous avons

$$\frac{1}{\ln p_{j+1}}\left(\ln p_{j+1}-\ln p_j\right)<\int_{x=p_j}^{x=p_{j+1}}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x<\frac{1}{\ln p_j}\left(\ln p_{j+1}-\ln p_j\right)$$

et

$$\frac{1}{\ln p_{j+1}}\sum_{j=1}^{j=n-1}\left(\ln p_{j+1}-\ln p_j\right)<\sum_{j=1}^{j=n-1}\int_{x=p_j}^{x=p_{j+1}}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x$$

mais

$$\sum_{j=1}^{j=n-1}\int_{x=p_j}^{x=p_{j+1}}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\int_{x=p_1}^{x=p_n}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln\ln p_n-\ln\ln 2$$

de la même façon

$$\frac{1}{\ln P}\left(\ln P-\ln p_n\right)<\int_{x=p_n}^{x=P}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x<\frac{1}{\ln p_n}\left(\ln P-\ln p_n\right)$$

avec

$$\int_{x=p_n}^{x=P}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}\ln x=\ln\ln P-\ln\ln p_n$$

Nous obtenons finalement l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{p_j}<\ln\ln P-\ln\ln 2+\frac{\ln p_n}{\ln P}\tag{3.2}$$

3.3 Une approximation de la valeur du produit fini Eulerien de rang n

Nous avons de façon générale

$$\left(\forall a\in\mathbb{R}^+\right)\quad\left(\forall b\in\mathbb{R}^+\right)\quad(a<b)\quad\left(\frac{1}{b}<\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\frac{1}{a}\right)$$

et

$$\int_{x=a}^{x=b}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$$

Posons

$$\frac{b}{a}=\frac{p_j}{p_j-1}=\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}$$

il vient

$$\forall p_j\in\mathbb{N}\quad\frac{1}{p_j}<\int_{x=p_j-1}^{x=p_j}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\frac{1}{p_j-1}$$

soit encore
$$\forall p_j \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{p_j} < \ln \frac{p_j}{p_j - 1} < \frac{1}{p_j - 1}$$
mais
$$\ln \frac{p_j}{p_j - 1} = -\ln \frac{p_j - 1}{p_j} = -\ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$
et donc
$$\forall p_j \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{p_j} < -\ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \frac{1}{p_j - 1}$$
Maintenant posons
$$-\ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \frac{1}{p_j} + \epsilon_j$$
Il est clair que
$$0 < \epsilon_j < \frac{1}{p_j - 1} - \frac{1}{p_j} < \frac{1}{(p_j - 1)^2} < \frac{1}{j^2}$$
Nous avons
$$-\sum_{j=1}^{j=n} \ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} + \sum_{j=1}^{j=n} \epsilon_j$$
mais
$$\sum_{j=1}^{j=n} \epsilon_j < \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{j^2} < 2$$
et donc
$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} < -\sum_{j=1}^{j=n} \ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} + 2$$
Or
$$\sum_{j=1}^{j=n} \ln \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right)$$
et nous pouvons écrire
$$\sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} < -\ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{p_j} + 2$$
soit encore, avec $p_n \leq P < p_{n+1}$
$$\ln \ln P - 1 < -\ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \ln \ln P - \ln \ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P} + 2$$
et, en posant $\mathrm{e} = \exp(1)$
$$\ln \left(\frac{\ln P}{\mathrm{e}}\right) < -\ln \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) < \ln \left(\frac{\ln P}{\mathrm{e}}\right) - \ln \ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P} + 3$$

Il existe donc un nombre μ_n tel que

$$\left(0 < \ln \mu_n < 3 - \ln\ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P}\right) \Longleftrightarrow \left(1 < \mu_n < \exp\left(3 - \ln\ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)\right)$$

et tel que

$$-\ln \prod_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \ln\left(\frac{\ln P}{\mathrm{e}}\right) + \ln \mu_n = \ln\left(\frac{\mu_n}{\mathrm{e}} \ln P\right)$$

Posons

$$\left(\frac{\mu_n}{\mathrm{e}} = m_n\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{e}} < m_n < \exp\left(2 - \ln\ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)\right)$$

il vient

$$\prod_{j=1}^{j=n}\left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \frac{1}{m_n \ln P} = v_n > 0 \tag{3.3}$$

3.4 L'ébauche d'une démonstration

Revenons maintenant dans le cadre de la conjecture forte de Goldbach et plus spécifiquement dans celui que nous avons considéré au paragraphe précédent. Soit donc l'entier m, choisi non premier, et les entiers premiers p_n et p_{n+1}, consécutifs dans l'ensemble des nombres premiers, tels que

$$p_n^2 < 2m < p_{n+1}^2$$

et la fonction G_{m,p_n}

$$\begin{aligned} G_{m,p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto G_{m,p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$G_{m,p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{p_j}(2m - x)\right)$$

Cette fonction est périodique de période

$$TG_{m,p_n} = \prod_{j=1}^{j=n} p_j$$

Les diviseurs de m, supposé non premier, appartiennent à l'ensemble π_{p_n} et donc

$$G_{m,p_n}(m) = 0$$

Par ailleurs, nous savons qu'il existe deux entiers premiers p_ν et $p_{\nu+1}$, consécutifs dans l'ensemble des nombre premiers, pour lesquels les périodes respectives TG_{m,p_ν} et $TG_{m,p_{\nu+1}}$ des fonctions correspondantes $G_{m.p_\nu}$ et $G_{m,p_{\nu+1}}$ vérifient

$$TG_{m,p_\nu} < 2m < TG_{m,p_{\nu+1}}$$

Soient les deux suites u_k (voir l'équation 2.10 page 31) et v_k (voir l'équation 2.11 page 31), que nous avons déjà introduites

$$u_k = \frac{1}{p_k}\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{1}{p_h}\right)$$

$$v_k = \prod_{h=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_h}\right)$$

Nous avons

$$u_k = \frac{1}{p_k}v_{k-1}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{p_k}v_{k-1}$$

Maintenant, soient d'un coté dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}+m, \frac{1}{2}TG_{m.p_\nu}+m] \subset [0,2m]$$

les ensembles définis au chapitre précédent

- $\mathbb{A}_{p_k}$ l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est p_k. Cet ensemble a pour cardinal $|\mathbb{A}_{p_k}|$, qui vérifie l'inégalité (voir l'équation 2.6 page 29)

$$|\mathbb{A}_{p_k}| \leq \frac{1}{p_k}\prod_{j=1}^{j=k-1}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)TG_{m,p_\nu}$$

- $\mathbb{B}_{p_n}$ l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_n. Cet ensemble a pour cardinal $|\mathbb{B}_{p_n}|$, qui vérifie l'inégalité (voir l'équation 2.7 page 29)

$$|\mathbb{B}_{p_n}| \geq \prod_{j=1}^{j=n}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)TG_{m,p_\nu}$$

– $\mathbb{C}_{p_n}$ l'ensemble des entiers dont le plus petit diviseur premier est inférieur ou égal à p_n. Cet ensemble a pour cardinal (voir l'équation 2.3 page 30)

$$|\mathbb{C}_{p_n}| = \sum_{k=1}^{k=n} |\mathbb{A}_{p_k}|$$

qui vérifie l'inégalité

$$|\mathbb{C}_{p_n}| \leq TG_{m,p_\nu} \sum_{k=1}^{n} u_k \tag{3.4}$$

et d'un autre coté, soient aussi dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

les ensembles définis au chapitre précédent

– $\mathbb{D}_{p_n}$ l'ensemble des entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule. Cet ensemble a pour cardinal $|\mathbb{D}_{p_n}|$, qui vérifie l'inégalité (voir l'équation 2.4 page 28)

$$|\mathbb{D}_{p_n}| \leq a_n + b_n$$

– $\mathbb{E}_{p_n}$ l'ensemble des entiers pour lesquels la fonction G_{m,p_n} ne s'annule pas. Cet ensemble a pour cardinal $|\mathbb{E}_{p_n}|$, qui vérifie l'inégalité (voir l'équation 2.5 page 28)

$$|\mathbb{E}_{p_n}| \geq \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} - (a_n + b_n)$$

La conjecture forte de Goldbach se trouverait démontrée si nous pouvions vérifier

$$\left(|\mathbb{D}_{p_n}| < \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}\right) \Longleftrightarrow (|\mathbb{E}_{p_n}| > 0)$$

3.4.1 Considérations sur l'ensemble $\mathbb{B}_{p_n}$

Considérons $\mathbb{B}_{p_n}$ l'ensemble des entiers de l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_n} + m[$$

dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_n Nous avons

$$|\mathbb{B}_{p_n}| \geq \prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) TG_{m,p_\nu}$$

avec

$$TG_{m,p_\nu} = \prod_{j=1}^{j=\nu} p_j$$

Par ailleurs, nous avons montré que (voir l'équation 3.3 page 42)

$$\prod_{j=1}^{j=n} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) = \frac{1}{m_n \ln P} = v_n > 0$$

avec

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu_n}{\mathrm{e}} = m_n\right) &\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{e}} < m_n < \exp\left(2 - \ln\ln 2 + \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(\mathrm{e} > \frac{1}{m_n} > \exp\left(-2 + \ln\ln 2 - \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$p_n \leq P < p_{n+1}$$

et donc

$$\left(|\mathbb{B}_{p_n}| \geq \frac{1}{m_n \ln P} TG_{m,p_\nu}\right) \Longrightarrow \left(|\mathbb{B}_{p_n}| \geq \frac{\exp\left(-2 + \ln\ln 2 - \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)}{\ln P} TG_{m,p_\nu}\right)$$

Maintenant, nous observons que

$$(TG_{m,p_\nu} \subset [0, 2m]) \Longleftrightarrow ((\exists \lambda \in \mathbb{Q}^*) \, (1 \leq \lambda < p_{\nu+1}) \, (\lambda TG_{m,p_\nu} = 2m))$$

avec $p_n^2 < 2m < p_{n+1}^2$ et donc

$$\begin{aligned}&\left(p_n^2 < \lambda TG_{m,p_\nu} < p_{n+1}^2 \Longleftrightarrow \frac{p_n^2}{\lambda} < TG_{m,p_\nu} < \frac{p_{n+1}^2}{\lambda}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \left(\frac{p_n^2}{p_{\nu+1}} < TG_{m,p_\nu} < p_{n+1}^2\right)\end{aligned}$$

et donc

$$|\mathbb{B}_{p_n}| > \frac{p_n^2}{p_{\nu+1} \ln P} \exp\left(-2 + \ln\ln 2 - \frac{\ln p_n}{\ln P}\right)$$

Or, P peut prendre arbitrairement n'importe quelle valeur entre p_n et p_{n+1}. Choisissons $P = p_n$ et nous obtenons finalement

$$|\mathbb{B}_{p_n}| > \frac{p_n^2}{p_{\nu+1} \ln p_n} \exp(-3 + \ln\ln 2)$$

soit plus explicitement

$$|\mathbb{B}_{p_n}| > \frac{p_n^2}{29 p_{\nu+1} \ln p_n} > \frac{p_n}{29 \ln p_n}$$

On peut alors voir que le cardinal $|\mathbb{B}_{p_n}|$ de l'ensemble $\mathbb{B}_{p_n}$ des entiers dont le plus petit diviseur premier est supérieur à p_n vérifie numériquement

$$(|\mathbb{B}_{p_n}| > 1) \Longleftrightarrow (p_n \geq p_{35} = 149)$$

ce qui semble indiquer que cet ensemble n'est pas vide, dès que $p_n \geq 149$.

3.4.2 Considérations sur l'ensemble $\mathbb{C}_{p_n}$

Considérons l'ensemble $\mathbb{C}_{p_n}$. Son cardinal vérifie les relations suivantes

$$|\mathbb{C}_{p_n}| = a_n + b_n$$

(voir l'équation 2.3 page 28) et

$$|\mathbb{C}_{p_n}| \leq TG_{m,p_\nu} \sum_{k=1}^{k=n} u_k$$

(voir l'équation 3.4 page 44)
Concentrons nous d'abord sur l'équation 3.4, il vient

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{p_k} v_{k-1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{p_k} v_{k-1}$$

Nous pouvons aussi écrire (voir les équations 2.10 et 3.3, pages 31 et 42)

$$\sum_{k=2}^{k=n} u_k < \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{m_{k-1} p_k \ln p_{k-1}}$$

soit encore

$$\sum_{k=2}^{k=n} u_k < \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{p_k \ln p_{k-1}} < \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{p_k \ln p_k} < \frac{1}{2\mathrm{e}} \sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k \ln p_k}$$

maintenant

$$\frac{p_k - p_{k-1}}{p_k \ln p_k} < \int_{x=p_{k-1}}^{x=p_k} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} < \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1} \ln p_{k-1}}$$

et

$$\int_{x=p_{k-1}}^{x=p_k} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_{x=p_{k-1}}^{x=p_k} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}$$

et donc

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k \ln p_k} < \sum_{k=2}^{k=n} \int_{x=p_{k-1}}^{x=p_k} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x} < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1} \ln p_{k-1}}$$

soit encore

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k \ln p_k} < \int_{x=p_1}^{x=p_n} \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x} < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1} \ln p_{k-1}}$$

et finalement

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_k \ln p_k} < [\ln \ln x]_{x=p_1}^{x=p_n} < \sum_{k=2}^{k=n} \frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k-1} \ln p_{k-1}}$$

Par conséquent

$$\sum_{k=2}^{k=n} u_k < \frac{1}{2\mathrm{e}} (\ln \ln p_n - \ln \ln 2)$$

Dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}+m, m[$, le nombre d'entier pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule est inférieur où égal à $a_n + b_n$. Ces nombres sont soit pairs, auxquels cas nous avons

$$(\forall k < m) \left(2k \in [-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[\right) (S_{p_n}(2k) = S_{p_n}(2m - 2k) = 0)$$

soit impairs. Le cardinal de l'ensemble de ces nombres impairs dans l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m[$$

est égal à $\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}$ et les inégalitées suivantes sont vérifiées

$$\left(\frac{1}{2}(a_n + b_n) \leq \frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} \sum_{k=2}^{k=n} u_k\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}(a_n + b_n) < \frac{1}{4\mathrm{e}} (\ln \ln p_n - \ln \ln 2)\, TG_{m,p_\nu}\right)$$

Maintenant, le cardinal de l'ensemble des nombres impairs pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu}+m, m[$ est lui aussi inférieur ou égal à $\frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Le cardinal de l'ensemble des nombres impairs dans ce même intervalle est $\frac{1}{4}TG_{m,p_\nu}$. Cherchons alors les valeurs de p_n pour lesquelles

$$\left(\frac{1}{4\mathrm{e}} (\ln \ln p_n - \ln \ln 2)\, TG_{m,p_\nu} \leq \frac{1}{4}TG_{m,p_\nu}\right) \Longleftrightarrow ((\ln \ln p_n - \ln \ln 2) \leq \mathrm{e})$$

Il vient

$$\begin{aligned}
((\ln \ln p_n - \ln \ln 2) \leq \mathrm{e}) &\Longleftrightarrow (\ln \ln p_n \leq \mathrm{e} + \ln \ln 2) \\
&\Longleftrightarrow \left(\ln p_n \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}+\ln \ln 2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \left(p_n \leq \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+\ln \ln 2}}\right)
\end{aligned}$$

et nous vérifions numériquement

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}+\ln \ln 2}} = 36\,465{,}95$$

Par conséquent, le cardinal de l'ensemble des nombres impairs pour lesquels la fonction G_{m,p_n} s'annule sur l'intervalle

$$[-\frac{1}{2}TG_{m,p_\nu} + m, m[$$

est inférieur à $\frac{1}{4}TG_{m,p_\nu}$ pour tout entier premier $p_n < 36\,466$. Nous terminons en remarquant que

$$\left(\left(\frac{1}{2}p_n^2 < m < \frac{1}{2}p_{n+1}^2\right) \wedge (p_n = 36\,466)\right)$$
$$\Longrightarrow$$
$$\left(\frac{1}{2}1\,329\,765\,293 < m < 2\,(1\,329\,765\,293)\right)$$

3.4.3 Une conclusion qui semble s'imposer

En nous appuyant sur les résultats qui précèdent, nous pouvons affirmer que d'un coté la fonction $G_{m.p_n}$ ne peut pas s'annuler pour tout les entiers de l'intervalle $[-\frac{1}{2}TG_{m,p\nu} + m, \frac{1}{2}TG_{m,p\nu} + m[$ lorque $p_n < 36\,466$. De l'autre coté, dans ce même intervalle, il existe au moins un entier premier supérieur à p_n dès lors que $p_n > p_{35} = 149$. La conjecture forte de Godlbach semble donc partiellement vérifiée, au moins pour tout entier $m \leq \frac{1}{2}1\,329\,765\,293$ et nous pouvons énoncé le théorème suivant

Théorème 4 ***partiel de Goldbach*** *Pour tout entier naturel* $2 \leq m < \frac{1}{2}1\,329\,765\,293$*, l'entier naturel pair* $2m$ *est la somme de deux nombres premiers.*

Chapitre 4

Sur une extension de la conjecture de Joseph Bertrand

4.1 Objet du chapitre

Joseph Bertrand avait proposé une conjecture démontrée par Panufty Tchebychev et que nous avons déjà mentionnée dans notre introduction

Théorème 5 ***de Bertrand Tchebychev*** *Pour tout entier naturel $n > 1$, il existe au moins un entier naturel premier qui appartient à l'intervalle $]n, 2n]$.*

Dans un esprit très proche et sur la base de résultats obtenus manuellement, nous émettons la conjecture suivante

Conjecture 5 *Etant donné un entier premier p_n, il existe au moins un entier premier dans chaque intervalle $[kp_n, (k+1)\,p_n[$ pour tout entier k non nul tel que $(k+1)\,p_n < p_{n+1}^2$.*

Nous essaierons au cours de ce chapitre de démontrer cette conjecture.

4.2 Outils utilisés.

Nous rappelons la définition de l'ensemble π_{p_n} qui contient tout nombre premier p_j inférieur ou égal à un nombre premier p_n donné

$$\pi_{p_n} = \{p_j |\, ((c|p_j) \Longleftrightarrow (c \in \{1, p_j\}) \wedge (p_j \leq p_n))\}$$

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} S_{p_n} : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto S_{p_n}(x) \end{aligned}$$

avec

$$S_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)$$

Cette fonction s'annule si et seulement si x prend pour valeur celle de l'un, ou du produit de plusieurs, des éléments de π_{p_n}. Sa période est

$$TS_{p_n} = 2\prod_{j=1}^{j=n} p_j$$

La fonction S_{p_n} étant le produit de fonctions sin est
- impaire lorsque n est impair
- paire lorsque n est pair

Dans l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$, nous avons

$$S_{p_n}(TS_{p_n}) = S_{p_n}(\frac{TS_{p_n}}{4}) = S_{p_n}(\frac{TS_{p_n}}{2}) = S_{p_n}(\frac{3TS_{p_n}}{4}) = 0$$

Nous rappelons aussi que, pour deux entiers x_p et x_q pris dans l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$, nous avons (voir les équations 1.1 et 1.2 page 4)

$$\left(x_p + x_q = \frac{1}{4}TS_{p_n}\right) \Longrightarrow \left(S_{p_n}(x_q) = (-1)^{n-1} S_{p_n}(x_p)\right)$$

$$\left(x_p + x_q = \frac{1}{2}TS_{p_n}\right) \Longrightarrow (S_{p_n}(x_q) = (-1)^{n} S_{p_n}(x_p))$$

4.3 Vers une extension du théorème de Bertrand Tchebychev.

4.3.1 Les fonctions S_{p_n} et $S_{p_{n-1}}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$

Nous notons que

$$[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[= [0, \frac{1}{4}TS_{p_n}[\cup[\frac{1}{4}TS_{p_n}, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$$

Soit maintenant incluse dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}]$ la suite des sous-intervalles

$$[\frac{l}{4}TS_{p_{n-1}}, \frac{l+1}{4}TS_{p_{n-1}}] \quad (l \in \mathbb{N})$$

Ces sous-intervalles sont au nombre de $2p_n$ dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$. Nous notons les bornes de ces sous-intervalles

$$M_0 = O_0 = 0$$

$$M_1 = \frac{1}{4} TS_{p_{n-1}}$$

$$M_2 = \frac{2}{4} TS_{p_{n-1}}$$

$$M_3 = \frac{3}{4} TS_{p_{n-1}}$$

$$\ldots$$

$$M_l = \frac{l}{4} TS_{p_{n-1}}$$

$$\ldots$$

$$M_{p_n} = \frac{p_n}{4} TS_{p_{n-1}}$$

$$\ldots$$

$$M_{2p_n} = \frac{2p_n}{4} TS_{p_{n-1}}$$

Toutes les bornes M_l sont entières et multiples de p_{n-1}, et nous avons

$$[M_0, M_{2p_n}[= \bigcup_{l=0}^{l=2p_n-1} [M_l, M_{l+1}[$$

et

$$(\forall l \not\equiv 0 \quad [p_n]) \, (M_l \not\equiv 0 \quad [p_n])$$

La figure 4.1 (voir page 52)montre les bornes M_l de chaque sous-intervalle sur la représentation circulaire de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{pn}[$ dans le cas où

$$(n = 6) \Longleftrightarrow ((p_n = 13) \wedge (p_{n-1} = 11))$$

Considérons maintenant la fonction $S_{p_{n-1}}$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}]$ et supposons qu'il existe un sous-intervalle $]A_t, B_t = A_t + p_n[$, dans lequel cette fonction $S_{p_{n-1}}$ s'annule pour tous les entiers impairs. A_t est un entier naturel supposé non nul et n'est pas nécessairement multiple de p_n. Ce sous-intervalle $]A_t, B_t[$ contient $p_n - 1$ entiers. Les diviseurs de chacun de ces entiers appartiennent exclusivement à l'ensemble $\pi_{p_{n-1}}$. Deux cas se présentent alors

- Ce sous-intervalle $]A_t, B_t[$ contient un entier M_l. En raison des propriétés de symétrie de la fonction $S_{p_{n-1}}$, chaque entier M_l de l'intervalle $[M_0, M_{2p_{n-1}}[$ appartient à l'un des sous-intervalles $]A_t, B_t[$. En particulier, l'entier $M_0 = 0$ appartient à l'un des sous-intervalles $]A_t, B_t[$. Or nous savons que $S_{p_{n-1}}(1) \neq 0$. Ce cas doit donc être écarté.
- Ce sous-intervalle $]A_t, B_t[$ ne contient pas d'entier M_l. En raison des propriétés de symétrie de la fonction $S_{p_{n-1}}$, chaque sous-intervalle $[M_l, M_{l+1}[$ contient un sous-intervalle $]A_t, B_t[$.

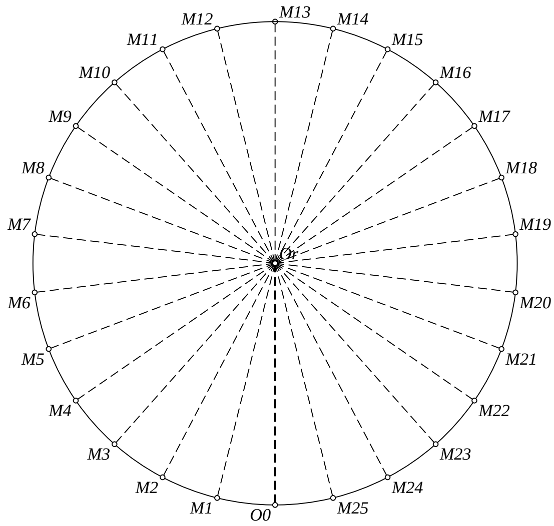


FIGURE 4.1 – Les sous-intervalles $[M_l, M_{l+1}[$ sur la représentation circulaire de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}\right[$

En raison des propriétés de symétrie de la fonction $S_{p_{n-1}}$, chacun des $2p_n$ sous-intervalles $[M_l, M_{l+1}[$ inclus dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$ contient lui même un sous-intervalle $]A_t, B_t[$. Ces sous-intervalles $]A_t, B_t[$ sont donc également au nombre de $2p_n$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$. Nous les notons

$$]A_0, B_0[$$

$$]A_1, B_1[$$

$$\cdots$$

$$]A_t, B_t[$$

$$]A_{t+1}, B_{t+1}[$$

$$\cdots$$

$$]A_{2p_n-2}, B_{2p_n-2}[$$

$$]A_{2p_n-1}, B_{2p_n-1}[$$

et nous avons

$$(\forall t \in \{0, 1, 2, \cdots, 2p_n - 2, 2p_n - 1\})\,(A_t \in [M_t, M_{t+1}[\Longleftrightarrow M_t < A_t < M_{t+1})$$

Nous conviendrons de dire que l'ensemble des sous-intervalles $]A_t, B_t[$ est engendré par le sous-intervalle $]A_0, B_0[$ et nous définirons cet ensemble comme la

famille indexée des sous-intervalles $\{]A_t, B_t[\}$. Il est important de remarquer que le sous-intervalle $[M_0, M_1[$ peut contenir plusieurs sous-intervalles distincts deux à deux et que nous notons $]A_0, B_0[_u$, avec l'indice $u \in \mathbb{N}$ pouvant prendre plusieurs valeurs distinctes. Chaque sous-intervalle $]A_0, B_0[_u$ engendre donc la famille $\{]A_t, B_t[_u\}$. Dans tous ce qui suit, nous choisissons l'une de ces familles $\{]A_t, B_t[_u\}$, que nous notons plus simplement $\{]A_t, B_t[\}$. Pour chaque $t \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq t \leq 2p_n - 1$, nous avons, en raison des propriétés de symétrie de la fonction $S_{p_{n-1}}$

$$\frac{A_t + A_{t+1}}{2} = M_{t+1} = \frac{t+1}{4} TSp_{n-1}$$

De façon générale, pour deux entiers de parités distinctes t_1 et t_2, où

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 2p_n - 1$$

nous avons

$$\frac{A_{t_1} + A_{t_2}}{2} = M_{\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{1}{2}}$$

Ainsi

$$\frac{A_{t+1} + A_{t+2}}{2} = M_{t+2}$$

et donc

$$\frac{A_{t+2} - A_t}{2} = M_{t+2} - M_{t+1} = \frac{1}{4} TSp_{n-1}$$

et finalement

$$A_{t+2} - A_t = \frac{1}{2} TSp_{n-1}$$

et de façon plus générale, pour $q \in \mathbb{N}$

$$A_{t+2q} - A_t = \frac{q}{2} TSp_{n-1}$$

Egalement, pour chaque t tel que $0 \leq t \leq p_n - 1$, nous avons, en raison des propriétés de symétrie de la fonction S_{p_n}

$$\left(\frac{1}{2}\left(A_t + A_{2p_n-1-t}\right) = \frac{1}{4} TS_{p_n}\right) \Longleftrightarrow \left(A_{2p_n-1-t} + A_t = \frac{1}{2} TS_{p_n}\right)$$

Nous pouvons donc écrire

$$(\forall p_j \in \pi_{p_n})\left(A_{2p_n-1-t} \equiv -A_t \quad [p_j]\right) \tag{4.1}$$

En particulier, pour l'entier α_t choisi dans l'ensemble $\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} = \{0, 1, p_n - 1\}$

$$(A_t \equiv \alpha_t \quad [p_n]) \Longleftrightarrow (A_{2p_n-1-t} \equiv -\alpha_t \quad [p_n])$$

La figure 4.2 montre la position des sous-intervalles $]A_t, B_t[$ dans la représentation circulaire de l'intervalle $[M_0, M_{2p_n-1}[= [0, \frac{1}{2} TS_{p_n}[$ et comme dans la figure 4.1, dans le cas où

$$(p_n = 13) \Longleftrightarrow (n = 6)$$

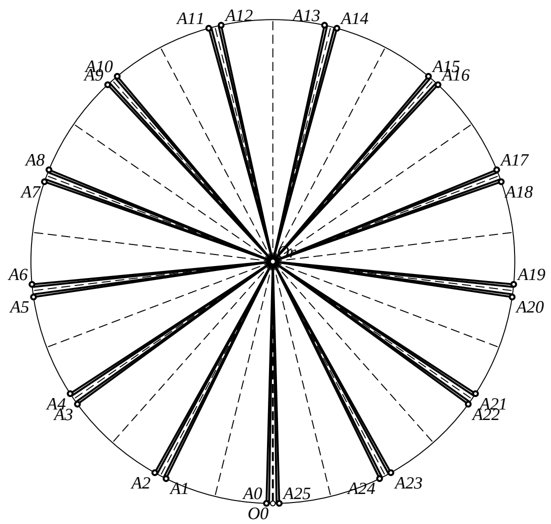


FIGURE 4.2 – Les sous-intervalles $]A_t, B_t[$ sur la représentation circulaire de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}\right[$

Par souci de clarté pour l'illustration, la figure montre uniquement la borne A_t de chaque sous-intervalle $]A_t, B_t[$.
Par ailleurs, l'ensemble des sous-intervalles $]A_t, B_t[$ contient lui même deux sous-ensembles dont les éléments sont respectivement les sous-intervalles $]A_{2\tau}, B_{2\tau}[$ et $]A_{2\tau+1}, B_{2\tau+1}[$, et nous avons pour $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leq q \leq \tau \leq p_n - 1$

$$(\forall \tau)\,(\forall q)\left(A_{2\tau+2q} - A_{2\tau} = \frac{q}{2}TS_{p_{n-1}}\right)$$

$$(\forall \tau)\,(\forall q)\left(A_{2\tau+1+2q} - A_{2\tau+1} = \frac{q}{2}TS_{p_{n-1}}\right)$$

Ces deux relations montrent que pour deux entiers de même parité t_1 et t_2, où

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq p_n - 1$$

$$A_{t_2} \not\equiv A_{t_1} \quad [p_n]$$

Considérons alors le sous-ensemble des sous-intervalles $]A_t, B_t[$ dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$, où t est choisi pair. Cet ensemble contient p_n sous-intervalles. Il en va de même pour l'autre sous-ensemble des sous-intervalles $]A_t, B_t[$, où t est choisi impair. Il y a donc p_n entiers A_t pour t de parité donnée. Enfin, nous remarquons que

$$((\forall \tau \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(\forall q \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(q \leq \tau))\left(A_{2\tau+2q} = A_{2\tau} + \frac{q}{2}TS_{p_{n-1}}\right)$$

$$((\forall \tau \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(\forall q \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(q \leq \tau))\left(A_{2p_n-1-2\tau+2q} = A_{2p_n-1-2\tau} + \frac{q}{2}TS_{p_{n-1}}\right)$$

et donc

$$((\forall \tau \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(\forall q \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(q \leq \tau))\left(\forall p_j \in \pi_{p_{n-1}}\right)(A_{2\tau+2q} \equiv -A_{2p_n-1-2\tau+2q} \quad [p_j])$$

Nous pouvons maintenant énoncé le lemme suivant

Lemme 1 *Soit l'intervalle* $[0, \frac{1}{2}TS_{p_n}[$, *où* $p_n \geq 13$ *est l'entier premier de rang* n *dans l'ensemble des nombres premiers. Soit dans cet intervalle l'ensemble des* $2p_n$ *sous-intervalles* $[\frac{l}{4}TSp_{n-1}, \frac{l+1}{4}TSp_{n-1}[= [M_l, M_{l+1}[$ *et supposons qu'il existe au moins un sous-intervalle* $]A_t, B_t[$, *où* $B_t = A_t + p_n$, *dans lequel la fonction* $S_{p_{n-1}}$ *s'annule pour tous les entiers qu'il contient, alors*

- *ce sous-intervalle est entièrement contenu dans le sous-intervalle* $[M_t, M_{t+1}[$ *avec* $M_t < A_t$
- *il existe un sous-intervalle* $]A_t, B_t[$ *dans chacun des* $2p_n$ *sous-intervalles* $[\frac{l}{4}TSp_{n-1}, \frac{l+1}{4}TSp_{n-1}[= [M_l, M_{l+1}[$. *Nous numérotons ces sous-intervalles* $]A_0, B_0[$, $]A_1, B_1[$,..., $]A_t, B_t[$,..., $]A_{2p_{n-2}}, B_{2p_{n-2}}[$, $]A_{2p_{n-1}}, B_{2p_{n-1}}[$, *avec*

  $$(\forall t \in \{0, 1, 2, \cdots, 2p_n - 2, 2p_n - 1\})\,(A_t \in [M_t, M_{t+1}[\Longleftrightarrow M_t < A_t < M_{t+1})$$

- *l'ensemble de ces sous-intervalles* $]A_t, B_t[$ *contient lui même deux sous-ensembles dont les éléments sont respectivement les sous-intervalles* $]A_{2k}, B_{2k}[$ *et* $]A_{2k+1}, B_{2k+1}[$, *et nous avons*

  $$(\forall p_j \in \pi_{p_n})\,(A_t \equiv -A_{2p_n-1-t} \quad [p_j])$$

  En particulier, l'entier a_t *étant choisi dans l'ensemble*

  $$\mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, p_n - 1\}$$

  chacun de ces deux sous-ensembles contient un et un seul sous-intervalle $]A_t, B_t[$, *où*

  $$A_t \equiv a_t \quad [p_n]$$

  et

  $$(A_t \equiv a_t \quad [p_n]) \Longleftrightarrow (A_{2p_n-1-t} \equiv -a_t \quad [p_n])$$

Posons

$$\frac{1}{2}TSp_{n-1} \equiv \alpha \quad [p_n]$$

$$A_0 \equiv a_0 \quad [p_n]$$

Il vient, l'index τ_1 variant de 1 à $p_n - 1$

$$A_2 = A_0 + \frac{1}{2}TSp_{n-1} \equiv a_2 = a_0 + \alpha \quad [p_n]$$

$$A_4 = A_0 + \frac{2}{2}TSp_{n-1} \equiv a_4 = a_0 + 2\alpha \quad [p_n]$$

$$A_6 = A_0 + \frac{3}{2}TSp_{n-1} \equiv a_6 = a_0 + 3\alpha \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$A_{2\tau_1} = A_0 + \frac{\tau_1}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2\tau_1} = a_0 + \tau_1\alpha \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$A_{2(p_n-1)} = A_0 + \frac{(p_n-1)}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2(p_n-1)} = a_0 + (p_n-1)\,\alpha \quad [p_n]$$

De même, posons

$$A_{2p_n-1} \equiv a_{2p_n-1} = -a_0 \quad [p_n]$$

Il vient, l'index τ_2 variant de -1 à $-(p_n-1)$

$$A_{(2p_n-1)-2} = A_{2p_n-1} - \frac{1}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2p_n-3} = a_{2p_n-1} - \alpha \quad [p_n]$$
$$A_{(2p_n-1)-4} = A_{2p_n-1} - \frac{2}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2p_n-5} = a_{2p_n-1} - 2\alpha \quad [p_n]$$
$$A_{(2p_n-1)-6} = A_{2p_n-1} - \frac{3}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2p_n-1-7} = a_{2p_n-1} - 3\alpha \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$A_{(2p_n-1)-2\tau_2} = A_{2p_n-1} - \frac{\tau_2}{2}TSp_{n-1} \equiv a_{2p_n-1-2\tau_2} = a_{2p_n-1} - \tau_2\alpha \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$A_{(2p_n-1)-2(p_n-1)} = A_{2p_n-1} - \frac{p_n-1}{2}TSp_{n-1} \equiv a_1 = a_{2p_n-1} - (p_n-1)\,\alpha \quad [p_n]$$

et

$$a_{2p_n-3} \equiv -(a_0+\alpha) \quad [p_n]$$
$$a_{2p_n-5} \equiv -(a_0+2\alpha) \quad [p_n]$$
$$a_{2p_n-1-7} \equiv -(a_0+3\alpha) \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$a_{2p_n-1-2\tau_2} \equiv -(a_0+\tau_2\alpha) \quad [p_n]$$
$$\dots$$
$$a_1 = a_{2p_n-1-2(p_n-1)} \equiv -(a_0+(p_n-1)\,\alpha) \quad [p_n]$$

L'un des entiers $a_{2\tau_1}$, soit $a_{2\lambda}$, et lui seulement, est nul, et

$$a_{2\lambda} = a_0 + \lambda\alpha \equiv 0 \quad [p_n]$$

Nous remarquons que dans le cas où $a_0 = 0$, alors

$$A_0 \equiv 0 \quad [p_n]$$

et

$$A_{(2p_n-1)-2\tau_2} \equiv a_{(2p_n-1)-2\tau_2} = -\tau_2\alpha \quad [p_n]$$

Posons maintenant $\tau_2 = p_n - \tau_1$

$$A_{(2p_n-1)-2(p_n-\tau_1)} = A_{2\tau_1-1} \equiv a_{2\tau_1-1} = j\alpha \quad [p_n]$$

Nous pouvons finalement écrire

$$((\forall\tau \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(A_0 \equiv 0 \quad [p_n]) \Longleftrightarrow (A_{2\tau} - A_{2\tau-1} \equiv 0 \quad [p_n])) \tag{4.2}$$

Considérons à nouveau l'ensemble des sous-intervalles $\{]A_t, B_t[\}$. Choisissons trois indices entiers t_1, t_2 et t_3 distincts deux à deux tels que

$$M_{2t_1} = \frac{2t_1}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2(p_n-1)-2t_1} = \frac{p_n-1-t_1}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2t_2} = \frac{2t_2}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2(p_n-1)-2t_2} = \frac{p_n-1-t_2}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2t_3} = \frac{2t_3}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2(p_n-1)-2t_3} = \frac{p_n-1-t_3}{4}TSp_{n-1}$$

alors

$$A_{2t_1} = \frac{2t_1}{4}TSp_{n-1} + A_0$$

$$A_{2(p_n-1)-2t_1} = \frac{2\,(p_n-1-t_1)}{4}TSp_{n-1} - A_0$$

$$A_{2t_2} = \frac{2t_2}{4}TSp_{n-1} + A_0$$

$$A_{2(p_n-1)-2t_2} = \frac{2\,(p_n-1-t_2)}{4}TSp_{n-1} - A_0$$

$$A_{2t_3} = \frac{2t_3}{4}TSp_{n-1} + A_0$$

$$A_{2(p_n-1)-2t_3} = \frac{2\,(p_n-1-t_3)}{4}TSp_{n-1} - A_0$$

Il vient

$$M_{2t_2} - M_{2t_1} = A_{2t_2} - A_{2t_1} = \frac{2\,(t_2-t_1)}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2t_3} - M_{2t_2} = A_{2t_3} - A_{2t_2} = \frac{2\,(t_3-t_2)}{4}TSp_{n-1}$$

$$M_{2t_1} - M_{2t_3} = A_{2t_1} - A_{2t_3} = \frac{2\,(t_1 - t_3)}{4} TSp_{n-1}$$

et de même

$$M_{2(p_n-1)-2t_2} - M_{2(p_n-1)-2t_1} = A_{2(p_n-1)-2t_2} - A_{2(p_n-1)-2t_1} = -\frac{2\,(t_2 - t_1)}{4} TSp_{n-1}$$

$$M_{2(p_n-1)-2t_3} - M_{2(p_n-1)-2t_2} = A_{2(p_n-1)-2t_3} - A_{2(p_n-1)-2t_2} = -\frac{2\,(t_3 - t_2)}{4} TSp_{n-1}$$

$$M_{2(p_n-1)-2t_1} - M_{2(p_n-1)-2t_3} = A_{2(p_n-1)-2t_1} - A_{2(p_n-1)-2t_3} = -\frac{2\,(t_1 - t_3)}{4} TSp_{n-1}$$

Supposons maintenant que

$$A_{2t_1} \equiv 0 \quad [p_n]$$

alors

$$A_{2t_2} = \frac{2\,(t_2 - t_1)}{4} TSp_{n-1}$$

$$A_{2t_3} = \frac{2\,(t_3 - t_1)}{4} TSp_{n-1}$$

et nous avons

$$((A_{2t_1} \equiv 0 \quad [p_n]) \wedge (A_{2t_2} + A_{2t_3} \equiv 0 \quad [p_n])) \Longrightarrow (t_2 + t_3 \equiv 2t_1 \quad [p_n]) \tag{4.3}$$

Posons maintenant $t_1 = 0$. Nous avons déjà établi que (voir l'équation 4.2 page 57)

$$(\forall j \in \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z})\,(A_{2t_1} = A_0 \equiv 0 \quad [p_n] \Longleftrightarrow A_{2t_2} - A_{2t_2-1} \equiv 0 \quad [p_n])$$

et dans ce cas

$$A_{2t_2-1} = A_{2(p_n-1)-2t_3}$$

et donc

$$A_{2t_2} - A_{2t_2-1} = A_{2t_2} - A_{2(p_n-1)-2t_3} = \frac{2t_2}{4} TSp_{n-1} - \frac{2\,(p_n - 1 - t_3)}{4} TSp_{n-1}$$

et finalement

$$A_{2t_2} - A_{2t_2-1} = \frac{2\,(t_2 - (p_n - 1 - t_3))}{4} TSp_{n-1} = \frac{2\,(t_2 - p_n + 1 + t_3)}{4} TSp_{n-1}$$

Nous devons donc avoir

$$t_2 + t_3 + 1 \equiv 0 \quad [p_n]$$

Nous aboutissons alors à une contradiction car nous avions montré plus haut (voir l'équation 4.3 page 58)

$$((A_{2t_1} \equiv 0 \quad [p_n]) \wedge (A_{2t_2} + A_{2t_3} \equiv 0 \quad [p_n])) \Longrightarrow (t_2 + t_3 \equiv 2t_1 = 0 \quad [p_n])$$

Par conséquent

$$(\forall]A_t, B_t[\in \{]A_t, B_t[\})\,((A_t \equiv 0 \quad [p_n]) \Longleftrightarrow (t \neq 0)) \tag{4.4}$$

Ce résultat, obtenu pour l'une des familles $\{]A_t, B_t[_u\}$, est valable pour chacune d'entre elles et nous pouvons énoncer le théorème suivant

Théorème 6 *Pour tout entier naturel premier p_n et sa fonction associée S_{p_n}, soit l'ensemble des intervalles*

$$[kp_n, (k+1)\, p_n[$$

où k est un entier naturel décrivant $\mathbb{N}$, et soit l'entier naturel

$$M_1 = \frac{1}{4} T S_{p_{n-1}}$$

alors

$$(\forall k \in \mathbb{N})\, (k < M_1)\, (\exists a \in ([kp_n, (k+1)\, p_n[\cap \mathbb{N}))\, (S_{p_n}(a) \neq 0)$$

Entre autres conséquences, la conjecture que nous avions énoncée plus haut est vérifiée et nous pouvons énoncer ce qui est maintenant un théorème

Théorème 7 *Etant donné un entier premier p_n, il existe au moins un entier premier dans chaque intervalle $[kp_n, (k+1)\, p_n[$ pour tout entier naturel k non nul tel que $(k+1)\, p_n < p_{n+1}^2$.*

Ce dernier théorème permet d'établir une formule. Considérons la suite des sous-intervalles

$$[p_n, 2p_n[$$
$$[2p_n, 3p_n[$$
$$\cdots$$
$$[kp_n, (k+1)\, p_n[$$
$$\cdots$$
$$[(p_n - 1)\, p_n, p_n^2[$$

Chacun de ces sous-intervalles contient au moins un nombre premier que nous notons respectivement $p_{\nu+1}, p_{\nu+2}, \cdots, p_{\nu+k+1}, \cdots, p_{\nu+p_n}$, et nous avons évidemment

$$p_{n+1} \leq p_{\nu+1} \leq 2p_n$$
$$p_{n+2} \leq p_{\nu+2} \leq 3p_n$$
$$\cdots$$
$$p_{n+k+1} \leq p_{\nu+k+1} \leq (k+1)\, p_n$$
$$\cdots$$
$$p_{n+p_n} \leq p_{\nu+p_n} \leq p_n^2$$

et finalement

$$\left(\prod_{j=n+1}^{j=n+p_n} p_j \leq p_n! p_n^{p_n - 1} \right) \Longleftrightarrow \left(\prod_{j=n+1}^{j=n+p_n} p_j \leq (p_n - 1)! p_n^{p_n} \right) \qquad (4.5)$$

Chapitre 5

A propos de deux autres conjectures.

5.1 Une conjecture de Jean Marie Legendre

Jean Marie Legendre a énoncé la conjecture suivante.

Conjecture 6 ***de Legendre*** *Pout tout entier naturel* $n \geqslant 2$*, il existe au moins un entier naturel premier qui appartient à l'intervalle* $[n^2, (n+1)^2]$.

Nous indiquons une approche qui pourrait conduire à une démonstration rigoureuse de cette conjecture. Nous rappelons la définition de la fonction S_{p_n}

$$\begin{aligned} S_{p_n} &: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto S_{p_n} x \end{aligned}$$

avec

$$S_{p_n}(x) = \prod_{j=1}^{j=n} s_{p_j}(x)$$

et

$$s_{p_j}(x) = \sin \frac{\pi}{p_j}(x)$$

Nous utilisons le théorème suivant, démontré précédemment (voir le théorème 7 page 59).

Théorème 8 *Etant donné un entier premier* p_n*, il existe au moins un entier premier dans chaque intervalle* $[kp_n, (k+1)\, p_n[$ *pour tout entier naturel* k *non nul tel que* $(k+1)\, p_n < p_{n+1}^2$.

Les entiers k et $k+1$ ont leurs diviseurs exclusivement dans π_{p_n}. Aucun d'eux n'est divisible par un entier premier strictement supérieur à p_n. La réunion des intervalles $\bigcup_{j=1}^{\infty}[p_j, p_{j+1}[$ décrit l'ensemble des nombres réels positifs supérieurs ou égaux à 2. Nous avons

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}[p_j, p_{j+1}[= \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Nous vérifions tout d'abord que

$$\begin{aligned}
&1^2 < 3 < 2^2 \\
&2^2 < 5 < 7 < 3^2 \\
&3^2 < 11 < 13 < 4^2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Considérons, ce qui est toujours possible, l'entier naturel m tel que $p_j \leq m < m+1 \leq p_{j+1}$. Il vient

$$p_j^2 \leq m^2 < (m+1)^2 \leq p_{j+1}^2$$

L'intervalle $[p_j^2, p_{j+1}^2]$ contient un ensemble fini d'intervalles $[kp_j, (k+1)\,p_j[$, où $k \in N$. Il existe alors un entier K tel que

$$Kp_j < p_{j+1}^2 < (K+1)p_j$$

Considérons m^2 et

$$(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$$

Il est clair que

$$(\exists k \in \mathbb{N})\left(m^2 \in [kp_j, (k+1)\,p_j[\right)$$

Pour que la conjecture de Legendre soit vraie, il suffit de montrer que

$$(\forall k \in \mathbb{N})\left(m^2 \in [kp_j, (k+1)p_j[\right) \Longrightarrow \Big((m+1)^2 \geq (k+2)\,p_j\Big)$$

puis d'invoquer le théorème ci-dessus (voir le théorème 7 page 59). Il nous suffit de démontrer que

$$2m + 1 > 2p_j$$

On peut voir que cette dernière inégalité est toujours vraie. En effet

$$2m + 1 > 2p_j \Longleftrightarrow m \geq p_j$$

ce qui est l'hypothèse de départ. La conjecture est donc démontrée dans le cas où $m+1$ est inférieur à Kp_j, Kp_j étant défini comme le plus grand entier naturel multiple de p_j inférieur à p_{i+1}^2.

Il nous reste maintenant à vérifier ce qui se passe dans les intervalles

$$[(K-1)p_j, Kp_j[$$

et

$$[Kp_j, (K+1)p_j[$$

où

$$p_{i+1}^2 \in [Kp_j, (K+1)p_j[$$

Nous avons

$$Kp_j < p_{i+1}^2 < (K+1)p_j$$

et donc les entiers naturels

$$p_{i+1}^2 - (2m+1)$$

et

$$(m+1)^2 - (2m+1)$$

soit m^2, sont tous deux strictement inférieur à Kp_j. En effet

$$\begin{aligned}(m \geq p_j) &\Longleftrightarrow \left(p_{i+1}^2 - 2m \leq p_{i+1}^2 - 2p_j\right) \\ &\Longleftrightarrow \left(p_{i+1}^2 - (2m+1) < p_{i+1}^2 - 2p_j\right)\end{aligned}$$

et donc

$$(m+1)^2 - (2m+1) < p_{i+1}^2 - (2m+1) < Kp_j$$

Ceci complète la démonstration de cette conjecture et permet d'énoncer ce qui est maintenant un théorème.

Théorème 9 ***de Legendre*** *Pout tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe au moins un entier naturel premier qui appartient à l'intervalle $[n^2, (n+1)^2]$.*

5.2 Une conjecture de Henri Brocard

Henri Brocard a proposé de son coté cette autre conjecture

Conjecture 7 ***de Brocard*** *Pout tout entier naturel premier $p_n \geqslant 2$, il existe au moins quatre entiers naturels premiers qui appartiennent à l'intervalle $[p_n^2, p_{(n+1)}^2]$.*

Nous allons établir qu'il existe au moins quatre sous-intervalles $[kp_n, (k+1)p_n[$, avec $k \in \mathbb{N}$, contenus dans l'intervalle $[p_n^2, p_{n+1}^2[$, pour chaque entier premier p_n. Ces sous-intervalles sont plus explicitement de la forme

$$[(p_n + k)p_n, (p_n + k + 1)p_n[\quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

Nous savons que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(p_{n+1} - p_n \geq 2) \Longleftrightarrow \left(p_{n+1}^2 \geq p_n^2 + 4p_n + 1\right)$$

or $p_n^2 + 4p_n$ est la borne supérieure du quatrième sous-intervalle

$$[(p_n + k)p_n, (p_n + k + 1)p_n[\quad (k = 3)$$

Chacun de ces quatres sous-intervalles contient au moins un entier premier, en raison du théorème énoncé ci-dessus (voir le théorème 7 page 59). La conjecture est donc vérifiée et conduit au théorème suivant

Théorème 10 ***de Brocard*** *Pout tout entier naturel premier* $p_n \geqslant 2$*, il existe au moins quatre entiers naturels premiers qui appartiennent à l'intervalle* $[p_n^2, p_{(n+1)}^2]$.

Chapitre 6

Lemme portant sur la fonction $S^1_{p_n}$

Les fonctions S_{p_n} et $S^1_{p_n}$ s'annulent pour les mêmes entiers impairs de l'intervalle $[0, TS_{p_n}[$. L'étude de certaines propriétés de la fonction $S^1_{p_n}$ peut donc nous éclairer sur le comportement de la fonction S_{p_n} elle même.

6.1 Une propriété de la fonction $S^1_{p_n}$.

Un entier premier $p_n \geq 13$ étant donné, considérons la fonction $S^1_{p_n}$ sur l'intervalle fermé $[kp_n, (k+1)\,p_n]$

$$S^1_{p_n}(x) = \prod_{j=2}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}x\right)$$

et supposons qu'elle s'annule pour tous les entiers impairs m_h de cet intervalle, où $h \in N^*$. Ces entiers sont de la forme

$$m_h = \left(\prod_{k=2}^{k=n} p_k^{a_k}\right)\left(\prod_{k=n+1}^{k=\nu} p_k^{a_k}\right)$$

Il existe donc au moins une fonction s_{p_j} qui s'annule pour chacun de ces entiers m_h. Nous avons

$$s_{p_j}(m_h) = \sin\frac{\pi}{p_j}(m_h) = 0$$

m_h étant impair, nous avons pour chaque entier premier p_j qui divise m_h

$$\left(s_{p_j}(m_h) = \sin\frac{\pi}{p_j}(m_h) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(s_{p_j}\left(\frac{1}{2}m_h\right) = \sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{m_h}{p_j}\right) = \pm 1\right)$$

et nous pouvons écrire

$$s_{p_j}\left(\frac{1}{2}m_h\right) = \pm 1 \Longleftrightarrow c_{p_j}\left(\frac{1}{2}m_h\right) = 0$$

Considérons alors la fonction $C^1_{p_n}$ telle que

$$C^1_{p_n}(x) = \prod_{j=2}^{j=n} \cos\left(\frac{\pi}{p_j}x\right)$$

Cette fonction s'annule pour chaque nombre $\frac{1}{2}m_h$ de l'intervalle fermé

$$[\frac{1}{2}kp_n, \frac{1}{2}(k+1)p_n]$$

Ces nombres sont tous strictement rationnels et nous avons

$$(\forall h)\left((m_{h+1} - m_h = 2) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}m_{h+1} - \frac{1}{2}m_h = 1\right)\right)$$

et

$$(\forall h)\left(\left(m_h \pm \frac{1}{2}\right) \in N\right)$$

Nous remarquons de plus que

$$C^1_{p_n}(x) = C^1_{p_n}\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \prod_{j=2}^{j=n} \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)$$

Considérons maintenant

$$\cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right) + (2l_j + 1)\frac{\pi}{2} - (2l_j + 1)\frac{\pi}{2}\right)$$

avec $l_j \in \mathbb{N}$. Il vient

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right) + (2l_j + 1)\frac{\pi}{p_j}\frac{p_j}{2} - (2l_j + 1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) + (2l_j + 1)\frac{p_j}{2}\right) - (2l_j + 1)\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \pm\sin\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x + \frac{1}{2}((2l_j + 1)p_j - 1)\right)\right)$$

Par conséquent

$$\prod_{j=2}^{j=n} \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \pm\prod_{j=2}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x + \frac{1}{2}((2l_j + 1)p_j - 1)\right)\right)$$

Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\left(2l_j+1\right)p_j-1\right)$$

et imposons à α d'être indépendant de l'indice j, alors α peut prendre comme valeur

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\prod_{j=2}^{j=n} p_j - 1\right)$$

et nous écrivons

$$\prod_{j=2}^{j=n} \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) = \pm\prod_{j=2}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}\left(x+\alpha\right)\right)$$

En particulier, lorsque la fonction $S^1_{p_n}$ s'annule pour chacun des entiers naturels impairs m_h de l'intervalle $[kp_n, (k+1)\,p_n]$ alors la fonction $C^1_{p_n}$ s'annule pour chacun des nombres rationnels $\frac{1}{2}m_h$ de l'intervalle $[\frac{1}{2}k_{p_n}, \frac{1}{2}\left(k+1\right)p_n]$ et, dans ce même intervalle, nous avons

$$\prod_{j=2}^{j=n} \cos\left(\frac{\pi}{p_j}\left(\frac{1}{2}m_h\right)\right) = \pm\prod_{j=2}^{j=n} \sin\left(\frac{\pi}{p_j}\left(\frac{1}{2}\left(m_h+1\right)+\alpha\right)\right) = 0$$

Ce qui revient à dire que la fonction $S^1_{p_n}$ s'annule pour chacun des entiers de l'intervalle $[\frac{1}{2}\left(kp_n+1\right)+\alpha, \frac{1}{2}\left(\left(k+1\right)p_n+1\right)+\alpha]$. Nous pouvons énoncé le lemme suivant

Lemme 2 *Soit un entier premier $p_n \geq 13$ et la fonction $S^1_{p_n}$, si cette fonction s'annule pour tous les entiers impairs de l'intervalle $[kp_n, (k+1)\,p_n]$, alors il existe un nombre $\alpha = \frac{1}{2}\left(\prod_{j=2}^{j=n} p_j - 1\right)$ tel que la fonction $S^1_{p_n}$ s'annule pour tous les entiers de l'intervalle $[\frac{1}{2}\left(kp_n+1\right)+\alpha, \frac{1}{2}\left(\left(k+1\right)p_n+1\right)+\alpha]$.*

Posons

$$\frac{1}{2}\left(kp_n+1\right)+\alpha = a$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(k+1\right)p_n+1\right)+\alpha = b$$

Il est clair que l'un et l'un seulement des deux nombres a et b est entier suivant la parité de l'entier naturel k. Soient maintenant m_{h_1} et m_{h_2} deux entiers impairs distincts pris dans l'intervalle $[kp_n, (k+1)\,p_n]$ tels que $m_{h_1} < m_{h_2}$, alors leurs images respectives dans l'intervalle $[a, b]$ sont $\alpha+\frac{1}{2}\left(m_{h_1}+1\right)$ et $\alpha+\frac{1}{2}\left(m_{h_2}+1\right)$. Elles sont distinctes et nous avons

$$\alpha+\frac{1}{2}\left(m_{h_2}+1\right)-\alpha+\frac{1}{2}\left(m_{h_1}+1\right) = \frac{1}{2}m_{h_2}-\frac{1}{2}m_{h_1} > 0$$

Ainsi, la fonction S^1_{13} s'annule pour tous les entiers impairs de l'intervalle $[2184, 2197[$, où $k = 168$, et tous les entiers de l'intervalle $[8599.5, 8606]$ (voir la figure 6.1 page 68). De même, cette fonction s'annule pour tous les entiers impairs de l'intervalle $[9113, 9126[$, où $k = 701$, et tous les entiers de l'intervalle $[12064, 12070.5]$ (voir la figure 6.2 page 68).

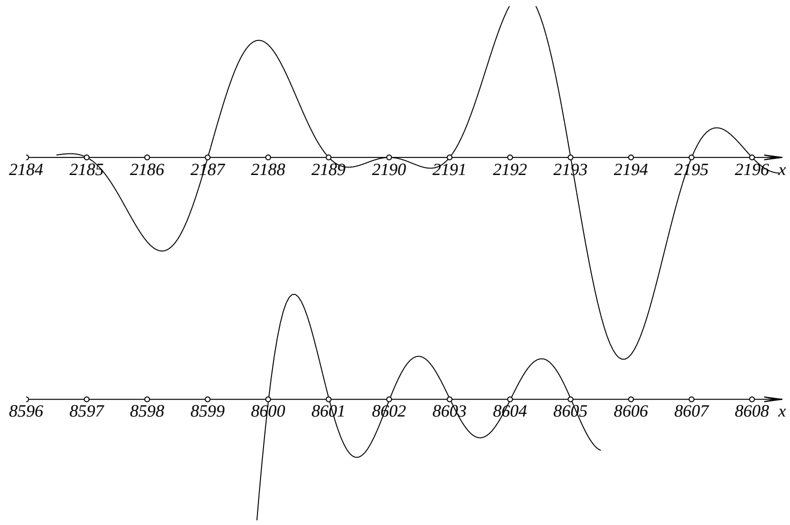


FIGURE 6.1 – La fonction S^1_{13} sur les intervalles $[2184, 2197[$ et $[8599.5, 8606[$

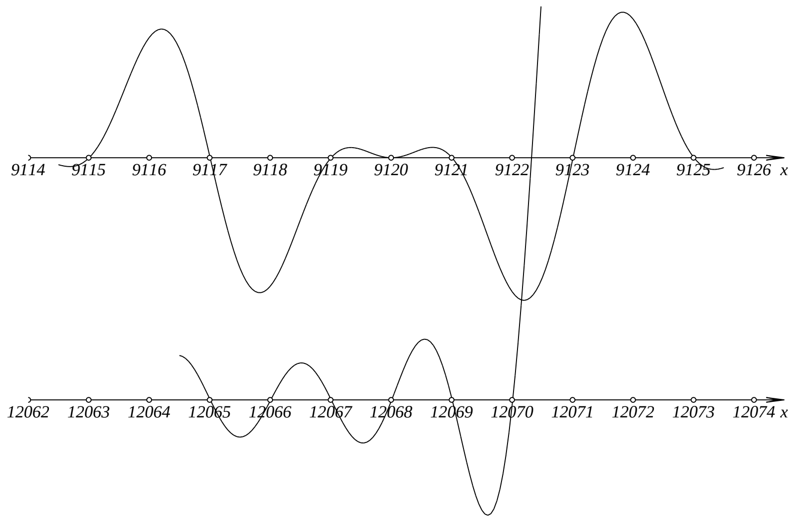


FIGURE 6.2 – La fonction S^1_{13} sur les intervalles $[9113, 9126[$ et $[12064, 12070.5[$

Remerciements.

6.2 Remerciements.

Je tiens à remercier ici tous ceux qui par leurs encouragements tout au long de mon existence m'ont donné tout ce dont j'ai eu besoin pour aimer ce monde, l'admirer et chercher à le comprendre. Ce mémoire est aussi le témoignage que leurs efforts ont porté leurs fruits.

6.3 Logiciels utilisés.

Ce mémoire n'aurait jamais vu le jour sans les logiciels suivants :

- LaTeX. Ce remarquable logiciel a été tout simplement indispensable. La possibilité de travailler sur des documents toujours clairs et facilement modifiables m'a permis de développer mes idées sans avoir à recourir à des brouillons. Que toute la communauté LaTeX soit ici remerciée.

- WinGCLC. Ce logiciel de géométrie s'est révélé d'emploi aisé. Il a permis la réalisation de toutes les illustrations de ce mémoire. Je tiens à en remercier vivement son auteur, Monsieur Pedrag Janicic de l'Université de Belgrade ainsi que ses nombreux co-auteurs.

Bibliographie

[1] Ivan Niven, Herbert S. Zucherman, Hugh. L. Montgomery *An introduction to the theory of numbers - Fifth edition* John Wiley and son's Inc. 1991 ISBN 0-471-62546-9

[2] Martin Aigner, Günter M. Ziegler *Proofs from the book - Second edition* Springer 2000 ISBN 3-540-67865-4

[3] Weisstein Eric *Legendre's conjecture* from Mathworld - A Wolfram Web resource

[4] Weisstein Eric *Brocard's conjecture* from Mathworld - A Wolfram Web resource

[5] Weisstein Eric *Goldbach's conjecture* from Mathworld - A Wolfram Web resource

[6] Yaglom, A.M. and I.M. *Challenging mathematical problems with elementary solutions - Volume II : Problems from various branches of mathematics* Dover Publications New York 1987 ISBN 0-486-65537-7