Structure de groupe abélien sur l'ensemble des couples (6n - 1, 6n + 1)

Introduction.

Objectifs : On se propose de munir l'ensemble des couples (6n - 1,6n + 1) d'une structure algébrique à partir de la génération d'une suite que l'on agrandit pour obtenir successivement un demi-groupe, un monoïde et au final un groupe. Ces structures sont toutes abéliennes et isomorphes respectivement à $\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

On définira d'abord un ensemble d'entiers dénommés M - nombres à partir desquels on construira des couples (x,y) qui seront les membres de la classe d'équivalence (6n - 1,6n + 1) pour $n \in \mathbb{Z}$.

Etude.

Soit la suite $(u_i) = \{1,4,3,8,5,12,7,16,9,\dots.\}$ dont on extrait 2 sous-suites arithmétiques $(s_i) = \{1,3,5,7,9,\dots\}$

et $(r_i) = \{4,8,12,16,20,\dots.\}$ de raisons respectives 2 et 4.

En écrivant les éléments de (u_i) en ligne et en sommant tous les couples d'entiers consécutifs et que l'on groupe par paires, on obtient tous les couples (6n - 1, 6n + 1) pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

La suite $(v_i) = \{-1,01,4,3\ 8,5,12,7,16,9,\dots.\}$ permet d'obtenir tous les couples (6n - 1, 6n + 1) pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(w_i) = \{\dots.,-5,-8-3,-4,-1,01,4,3\ 8,5,12,7,16,9,\dots.\}$ détermine tous les couples (6n - 1, 6n + 1) pour $n \in \mathbb{Z}$.

A) Détermination des carrés.

On s'intéresse d'abord aux carrés x_j^2 qui apparaissent dans l'un des membres des couples (6n - 1, 6n + 1)

avec $n \in \mathbb{N}$ et l'on cherchera à déterminer l'expression de ceux d'entre eux ayant un antécédent p_j dans (v_i) avec $p_j \equiv 0(16)$.

On trouve :

$5^2 = 16+9$,

$7^2 = 32+17$,

$11^2 = 80+41$,

$13^2 = 112+57$,

etc….

Ce sont les carrés des nombres 6n - 1 et 6n + 1 pour n ≥ 1.

L'analyse des x_j^2 montre que :

a) $x_j^2 = p_j + q_j$,

b) $p_j = 2q_j - 2$

Tapez une équation ici.

et donc $x_j^2 = 3q_j - 2 \Leftrightarrow x_j^2 + 2 = 3q_j \Leftrightarrow x_j \not\equiv 0(3)$.

Proposition : Pour tout $j \geq 1$ alors $x_j^2 \equiv +1(6)$.

En effet, on a $x_j^2 + 2 = 3q_j$ et si $x_j^2 \equiv -1(6)$ alors $x_j^2 + 2 \equiv +1(6)$.

D'où l'égalité : $3q_j = 6u + 1$.

Or q_j est impair donc on aura :

$3(2c + 1) = 6u + 1 \Leftrightarrow 6(c - u) = -2 \Leftrightarrow 3(u - c) = 1$ égalité impossible dans $\mathbb{N}$.

B) Généralisation.

On prend maintenant tous les nombres $3q_j - 2$ tels que $q_1 = 1$ et $q_{j+1} = q_j + 8$.

On pose $\mathbf{M_j = 3q_j - 2}$.

Alors les nombres M_j définissent une suite arithmétique de raison 24 et de 1[er] terme $M_1 = 1$.

Définition : **Les nombres M_j seront appelés des M – nombres**.

Classification des M – nombres.

Les M – nombres se répartissent alors en 3 classes :

- les nombres premiers,
- les nombres 6n+1 tels que (6n-1, 6n+1) est un couple de nombres premiers jumeaux,
- les nombres composés a² ou ab avec $a \equiv \pm 1(6)$ et $b \equiv \pm(6)$.

On s'occupera dans la suite de l'article que des M - nombres composés.

Définition : (x,y) ou (y,x) est appelé couple de M–nombres si :

1) $x = a.\, b$, $y = (a+2) . (b+2)$ tel que $a \equiv -1(6)$ et $b \equiv -1(6)$ ou

1') $x = (a-2) . (b-2)$, $y = a . b$ où $a \equiv +1(6)$ et $b \equiv +1(6)$,

2) x et y sont des nombres M_j,
3) $\pm(y - x) = 24\, k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Définition : C_M est l'ensemble des couples (a . b, (a+2) . (b+2)) et ((a+2) . (b+2), a . b) tels que

$a \equiv -1(6)$ et $b \equiv -1(6)$.

Sur C_M, on définit :

- une loi de composition interne notée $\widehat{+}$ associative et commutative,
- une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ pour obtenir l'ensemble quotient $C_M / \mathfrak{R}$.

Tapez une équation ici.

Soit l'application surjective

$$s: \quad C_M \quad \longrightarrow \quad C_M/_{\mathfrak{R}}$$

(1) $(a_i \cdot b_i, (a_i+2) \,.\, (b_i+2)) \quad \longmapsto \quad (\frac{a_i+b_i}{2}, \frac{a_i+2+b_i+2}{2})$ pour $n \geq 0$,

(2) $((a_i+2) \,.\, (b_i+2), (a_i \cdot b_i) \quad \longmapsto \quad (-\frac{(a_i+2+b_i+2)}{2}, -\frac{(a_i+b_i}{2})$ pour $n < 0$.

Les éléments de $C_M/_{\mathfrak{R}}$ seront notés (α_i,β_i) avec $\alpha_i \equiv -1(6)$, $\beta_i \equiv +1(6)$ et $\beta_i - \alpha_i = 2$.

Les antécédents de (α_i, β_i) par s sont les couples $(\alpha_i^2 - (12h)^2, \beta_i^2 - (12h)^2)$

où $h = 0, 1, 2, \ldots, p = \left[\frac{\alpha_i}{12}\right]$ dans le cas (1) et $p = \left[\frac{\beta_i}{12}\right]$ dans le cas (2).

La surjectivité de s entraine que (α_i, β_i) est une classe d'équivalence de cardinal p+1

pour la relation $\mathfrak{R}$.

<u>Définition de la loi $\widehat{+}$</u> :

$$(\alpha_i^2 - (12h)^2, \beta_i^2 - (12h)^2) \widehat{+} (\alpha_j^2 - (12u)^2, \beta_j^2 - (12u)^2) = (\alpha_k^2 - (12t)^2, \beta_k^2 - (12t)^2)$$

avec $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j + 1$, $\quad \beta_k = \beta_i + \beta_j - 1$.

Le couple $((-1)^2, 1^2)$ est le neutre pour la loi $\widehat{+}$, il en résulte que $(C_M, \widehat{+})$ est un monoïde commutatif.

La loi de composition interne $\widehat{+}$ sur C_M induit alors la loi $\overline{\overline{+}}$ sur $C_M/_{\mathfrak{R}}$:

$$\forall ((\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j)) \in C_M/_{\mathfrak{R}} \times C_M/_{\mathfrak{R}} : (\alpha_i, \beta_i) \overline{\overline{+}} (\alpha_j, \beta_j) = (\alpha_k, \beta_k) \in C_M/_{\mathfrak{R}}.$$

Soient les couples $(\alpha_i^2 - (12h)^2, \beta_i^2 - (12h)^2)$, $(\alpha_i^2 - (12l)^2, \beta_i^2 - (12l)^2)$,

$(\alpha_j^2 - (12u)^2, \beta_j^2 - (12u)^2)$ et $(\alpha_j^2 - (12n)^2, \beta_j^2 - (12n)^2)$.

Comme $(\alpha_i^2 - (12h)^2, \beta_i^2 - (12h)^2) \equiv (\alpha_i^2 - (12l)^2, \beta_i^2 - (12l)^2)$ et

$(\alpha_j^2 - (12u)^2, \beta_j^2 - (12u)^2) \equiv (\alpha_j^2 - (12n)^2, \beta_j^2 - (12n)^2)$

La compatibilité de $\widehat{+}$ avec $\mathfrak{R}$ entraine :

$(\alpha_i^2 - (12h)^2, \beta_i^2 - (12h)^2) \widehat{+} (\alpha_j^2 - (12u)^2, \beta_j^2 - (12u)^2)$ est équivalent par $\mathfrak{R}$ à

$(\alpha_i^2 - (12l)^2, \beta_i^2 - (12l)^2) \widehat{+} (\alpha_j^2 - (12n)^2, \beta_j^2 - (12n)^2)$.

Tapez une équation ici.

D'où il s'ensuit les égalités :

$(\alpha_i^2-(12l)^2, \beta_i^2-(12l)^2)\hat{\mp}(\alpha_j^2-(12n)^2, \beta_j^2-(12n)^2) = (\alpha_k^2-(12s)^2, \beta_k^2-(12s)^2)$,

$(\alpha_i^2-(12h)^2, \beta_i^2-(12h)^2)\ \hat{\mp}\ (\alpha_j^2-(12u)^2, \beta_j^2-(12u)^2) = (\alpha_k^2-(12t)^2, \beta_k^2-(12t)^2)$.

Ce qui amène à définir les homomorphismes :

$\psi : (C_M, \hat{\mp}) \longrightarrow (\mathbb{N},+)$

$(\alpha_i^2-(12h)^2, \beta_i^2-(12h)^2) \longmapsto \beta_i^2-\alpha_i^2$,

$\varphi : ({C_M}/_{\mathfrak{R}}, \bar{\bar{\mp}}) \longrightarrow (\mathbb{N},+)$

$(\alpha_i, \beta_i) \longmapsto \beta_i^2-\alpha_i^2$.

tels que φ est une bijection et $\psi = \varphi o s$.

En outre, les relations $(\alpha_i,\beta_i)\bar{\bar{\mp}}(\alpha_j,\beta_j) = (\alpha_k,\beta_k)$, $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j + 1$ et $\beta_k = \beta_i + \beta_j - 1$ induisent :

a) La décomposition de (α_k, β_k) en $\left[\frac{\alpha_k}{12}\right]$ sommes de 2 couples,

b) Les égalités suivantes :

$(11,13) = (5,7)\ \bar{\bar{\mp}}\ (5,7)$,

$(17,19) = (5,7)\ \bar{\bar{\mp}}\ (11,13)$,

$(23,25) = (5,7)\ \bar{\bar{\mp}}\ (17,19)$

Etc…

Relation d'ordre $\prec$ sur $({C_M}/_{\mathfrak{R}}, \bar{\bar{\mp}})$.

<u>Définition</u> : $(\alpha_i,\beta_i) \prec (\alpha_j,\beta_j)$ si et seulement si $i < j$.

<u>Conclusions :</u>

$({C_M}/_{\mathfrak{R}}, \prec)$ est un ensemble totalement ordonné,

$({C_M}/_{\mathfrak{R}}, \bar{\bar{\mp}})$ est un groupe abélien d'élément neutre (-1,1).

Tapez une équation ici.

Développements envisagés.

- Définition d'une loi externe $\dot{\times}$ sur ${}^{C_M}/_{\mathfrak{R}}$ induite par $\overline{\overline{+}}$,
- Relation avec des triangles particuliers associés aux couples$(\alpha_{i,}\beta_i)$,
- Construction d'une suite croissante, convergente, bornée par $\frac{6}{5}$ et de terme initial 1 obtenue par la conjugaison des propriétés des triangles et de la multiplication $\dot{\times}$,
- Caractérisation des couples de nombres premiers jumeaux $(\alpha_i,\ \beta_i)$ à partir de leurs antécédents.

Tableau des M - nombres composés et de leurs images par s.

$25 = 5^2 \longmapsto 5$

$49 = 7^2 \longmapsto 7$

$121 = 11^2 \longmapsto 11$

$145 = 5.29 \longmapsto 17$

$169 = 13^2 \longmapsto 13$

$217 = 7.31 \longmapsto 19$

$265 = 5.53 \longmapsto 29$

$289 = 17^2 \longmapsto 17$

$361 = 19^2 \longmapsto 19$

$385 = 7.55 \longmapsto 31$

$= 11.35 \longmapsto 23$

$= 5.77 \longmapsto 41$

$481 = 13.37 \longmapsto 25$

$505 = 5.101 \longmapsto 53$

$529 = 23^2 \longmapsto 23$

$553 = 7.79 \longmapsto 43$

$625 = 25^2 \longmapsto 25$

$= 5.125 \longmapsto 65$

$649 = 11.59 \longmapsto 35$

$697 = 17.41 \longmapsto 29$

$721 = 7.103 \longmapsto 55$

$745 = 5.149 \longmapsto 77$

$793 = 13.61 \longmapsto 37$

Tapez une équation ici.

$817 = 19.43 \longmapsto 31$

$841 = 29^2 \longmapsto 29$

$865 = 5.173 \longmapsto 89$

$889 = 7.127 \longmapsto 67$

$913 = 11.83 \longmapsto 47$

$961 = 31^2 \longmapsto 31$

$985 = 5.197 \longmapsto 101$

$1057 = 7.151 \longmapsto 79$

$1081 = 23.47 \longmapsto 35$

$1105 = 5.221 \longmapsto 113$

$= 13.85 \longmapsto 49$

$= 17.65 \longmapsto 41$

$1177 = 11.107 \longmapsto 59$

$1225 = 35^2 \longmapsto 35$

$= 7.175 \longmapsto 91$

$=25.49 \longmapsto 37$

$1273 = 19.67 \longmapsto 43$

$1345 = 5.269 \longmapsto 137$

$1369 = 37^2 \longmapsto 37$

$1393 = 7.199 \longmapsto 103$

$1417 = 13.109 \longmapsto 61$

$1441 = 11.131 \longmapsto 71$

$1465 = 5.293 \longmapsto 149$

$1513 = 17.89 \longmapsto 53$

$1537 = 29.53 \longmapsto 41$

$1561 = 7.223 \longmapsto 115$

$1585 = 5.317 \longmapsto 161$

$1609 = 23.71 \longmapsto 47\ldots$

Tapez une équation ici.

M. MADANI Bouabdallah

I.A.G.T.N.

La Pallu

61320 La Lande de Goult.

Tel : 02 33 28 59 47.

madanibouabdallah@hotmail.fr

Tapez une équation ici.