Démonstration de l'hypothèse de Goldbach (demonstration of the goldbach conjecture)

(Première Partie)

Par

Sambegou Diallo

sambegoudiallo@gmail.com

(5 février 2013)

Par Sambegou Diallo

Abstract. - The Goldbach conjecture is a matter of quantity of partitions of even numbers. This is a consequence of combined four tools: the Chebotarev's density theorem, the Inclusion–exclusion principle, the Prime number theorem and the Algorithms for evaluating π(x). By applying these tools on a family of arithmetic sequences, we can establish the validity of this conjecture.

Résumé. – La conjecture de *Goldbach* est une question de quantités de partitions des nombres pairs. C'est une conséquence conjuguée de quatre outils : le Théorème de *Chebotarev,* le Principe d'inclusion-exclusion de *Moivre*, le théorème de raréfaction des nombres premiers et l'algorithme d'évaluation de π(x) de *Legendre*. En appliquant ces outils sur une famille de suites arithmétiques, on peut établir la validité de cette assertion.

Table des matières

Je remercie très sincèrement le département mathématique de l'Université Cheikh Anta Diop (UCAD) et l'Institut Mathématique Africain (AIMS-Sénégal), les professeurs Mamadou Sangharé (Chaire d'Algèbre), Hamidou Dath (Chaire de Géométrie), Amadou Ly (Faculté des Lettres), Amadou Tall (AIMS) et surtout Mme MBaye Laïla Mesmouri (de l'UCAD) pour les conseils de rédaction.

1. Introduction

Enoncé. – En 1742, *Christian Goldbach*, tuteur du tsar *Pierre II*, et fonctionnaire au ministère russe des Affaires étrangères, expédie une lettre à son contemporain *Leonhard Euler*, dans laquelle il fait remarquer que *« Tout nombre strictement supérieur à 2 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers ».* (1)

Dans sa réponse datée du 30 juin 1742, Euler reformule la conjecture en énonçant que : *« Tout nombre pair (plus grand que 4) peut être écrit comme somme de deux nombres premiers ».*

C'est la conjecture de Goldbach dite forte ou binaire, objet de cette présente étude. Mais pourquoi ? Comment le prouver de façon indubitable ? Questions auxquelles nous allons apporter de réponse dans cette étude. Publiée en deux temps. Cette première partie sera consacrée aux grandes lignes, à l'angle d'attaque de la conjecture et au fondement de la démonstration.

La deuxième partie, qui sera publiée quelques semaines après, terminera la démonstration en répondant aux exigences et aux arguments qui auront manqué à la première partie. Je remercie d'avance tous ceux qui vont consacrer leur temps précieux à voir et revoir ce travail, dans le but unique d'en juger la rigueur et la cohérence, et peut-être y déceler des failles pouvant entamer sa crédibilité et sa validité. Bonne lecture !

2. Comment démontrer la conjecture de Goldbach ?

Considérons $2m$ objets numérotés, placés deux à deux dans m boîtes différentes, de sorte que chaque boîte notée B_x puisse refléter la partition $(x\,;\ 2m - x)$ de l'entier $2m$ (avec $1 \leq x \leq m$). La conjecture de Goldbach suppose qu'il y a, au moins, une boîte ne renfermant que des nombres premiers comme numéros et ce, quel que soit m. C'est ce que nous allons prouver.

Pour commencer, notons par n la quantité d'objets marqués de nombres premiers. Et $(2m - n)$ la quantité de ceux estampillés d'entiers non premiers. Ainsi, n représente le nombre des nombres premiers inférieurs à $2m$, plus zéro ou un (selon que m soit composé ou premier). En l'occurrence,

$$n = \begin{cases} \pi(2m), si\ m\ est\ composé \\ \pi(2m) + 1, si\ m\ est\ premier \end{cases}$$

De façon exhaustive, on peut, pour l'ensemble des m boîtes, relever trois types de [2-partitions] :

-des partitions où les deux termes, x et $(2m - x)$, sont premiers
-des partitions où l'un des termes est premier et le second non premier (composé) ; et

-des partitions où tous les deux termes sont composés (non premiers)

Du coup, on peut penser à trois fonctions (pas plus, pas moins) :

i. La Fonction qui renvoie le Nombre de manières d'écrire $2m$ comme somme de deux premiers. Notons-la par $R(2m)$. $R(2m)$ correspond au nombre de boîtes ne contenant que des objets-nombres premiers. Soit donc,

$$R(2m) = card\{(x; y), avec\ 1 \leq x \leq y;\ x\ et\ y\ premiers\}$$

ii. La Fonction qui quantifie le Nombre d'écritures de $2m$ comme somme d'un premier et d'un composé. Notons celle-ci par $\partial(2m)$ telle que :

$$\partial(2m) = card\{(x; y), avec\ 1 \leq x \leq y;\ x\ ou\ bien\ y\ premier\}$$

iii. La Fonction qui détermine le Nombre de boîtes ne renfermant que des objets-nombres composés. Nous allons noter celle-là par $\check{S}(2m)$ telle que :

$$\check{S}(2m) = card\{(x; y), avec\ 1 \leq x \leq y;\ x\ et\ y\ non\ premiers\}$$

2.1. Egalités qui unissent les fonctions de $2\boldsymbol{m}$. – en procédant à un décompte par couples, nous relevons deux identités :

$$2R(2m) + \partial(2m) = n\ \textit{(identité 1)}$$
$$2\check{S}(2m) + \partial(2m) = 2m - n\ \textit{(identité 2)}$$

Nous en déduisons deux autres identités :

$$\check{S}(2m) - R(2m) = m - n\ \textit{(identité 3)}$$
$$\check{S}(2m) + \ \partial(2m) + R(2m) = m\ \textit{(identité 4)}$$

Remarque. Considérons quatre ensembles A, A_1, A_2 et A_3tels que :

$$A = \{(x; y), avec\ 1 \leq x \leq y;\ x\ et\ y\ entiers: x + y = 2m\}$$
$$A_1 = \{(x; y) \in A | x\ et\ y\ premiers\}$$
$$A_2 = \{(x; y) \in A | x\ ou\ bien\ y\ premier\}$$
$$A_3 = \{(x; y) \in A | x\ et\ y\ composés\}$$

On a :

$$R(2m) = Card\{A_1\}$$
$$\partial(2m) = Card\{A_2\}$$
$$\check{S}(2m) = Card\{A_3\}$$

n est le nombre de fois qu'un nombre premier apparait comme numéro dans les m boîtes; d'où:

$$2Card\{A_1\} + Card\{A_2\} = n,$$

soit

$$2R(2m) + \partial(2m) = n$$

Puisque le complémentaire de A_1 est A_2UA_3, on peut donc poser :

$$A_1^c = A_2UA_3$$
$$CardA_1^c = CardA_2 + CardA_3$$
$$CardA - CardA_1 = CardA_2 + CardA_3$$
$$m - R(2m) = \partial(2m) + \check{S}(2m)$$
$$\check{S}(2m) + \partial(2m) + R(2m) = m$$

Par déduction, nous avons :

$$2\left(\check{S}(2m) + \partial(2m) + R(2m)\right) - \left(2R(2m) + \partial(2m)\right) = 2m - n$$
$$2\check{S}(2m) + \partial(2m) = 2m - n$$

Et

$$\left(\check{S}(2m) + \partial(2m) + R(2m)\right) - \left(2R(2m) + \partial(2m)\right) = m - n$$

D'où la dernière identité

$$\check{S}(2m) - R(2m) = m - n$$

En résumé. Pour tout nombre pair $2m$, si les fonctions $R(2m)$, $\check{S}(2m)$ et $\partial(2m)$ sont telles que définis précédemment, alors $2m$ vérifie ces identités :

$$2R(2m) + \partial(2m) = n$$
$$2\check{S}(2m) + \partial(2m) = 2m - n$$
$$\check{S}(2m) - R(2m) = m - n$$
$$\check{S}(2m) + \partial(2m) + R(2m) = m$$

2.2. La conjecture de Goldbach vue autrement. En raison de ces égalités, l'on voit que la valeur maximale de $\partial(2m)$ est étroitement liée à celle minimale de $R(2m)$. Tandis que les valeurs minimales de $\check{S}(2m)$et $R(2m)$ sont aussi toutes deux interdépendantes.

En d'autres termes, démontrer la conjecture de Goldbach revient à prouver l'une des deux propositions suivantes :

a. $\forall m, \check{S}(2m) > m - n$; ce qui va impliquer, suivant l'égalité (3), que $R(2m) \geq 1$

b. $\forall m, \partial(2m) < n$. Ce qui, suivant l'égalité (1), impliquera aussi que $R(2m) \geq 1$.

En termes plus simples, la conjecture de Goldbach stipule qu'il existe, pour tout m, deux nombres premiers p et p' tels que $p + p' = 2m$. Puisqu'il n'existe pas un chemin direct pour vérifier cette assertion, en raison de la répartition irrégulière des nombres premiers, il y a lieu donc de trouver solution à l'un des deux problèmes suivants :

i. Chercher le $Card\{A_2\}$?
ii. Ou chercher le $Card\{A_3\}$?

Après avoir solutionné l'un de ces deux problèmes, on peut en tirer une conclusion, à savoir est-ce que la conjecture de Goldbach est exacte pour tout nombre pair $2m$, ou non ?

Pour le simple fait que les deux derniers cardinaux soient liés par l'égalité (2), on peut dire qu'il y a une voie et une méthode communes pour trouver l'un et l'autre. Et quelle est cette voie ?

3. Calcul de $\partial(2m)$

3.1. Version quantitative du théorème de *Chebotarev*. Le théorème de *Chebotarev* traite de la *densité naturelle* des premiers, comparés, non pas par rapport à l'ensemble de [tous] les entiers, mais aux entiers de la classe $[a]$ modulo (b). En fait, ce théorème précise que pour tout $a, b \geq 1$ entiers, premiers entre eux, la densité naturelle des nombres premiers dans la suite arithmétique $a + bt$ vaut $1/_{\varphi(b)}$. [(2)] En terme de quantité, cet énoncé signifie que le nombre des nombres premiers $\leq x$, congrus à a modulo b est équivalent à :

$$\pi(x; b, a) = \frac{\pi(x)}{\varphi(b)} \sim \frac{x}{\varphi(b) \ln x}$$

Pour le cas présent de la démonstration de la conjecture de Goldbach, nous n'allons pas utiliser l'approximation $\pi(x) \sim x/_{\ln x}$ pour le simple fait qu'on n'en a pas besoin. Pour le cas présent, le nombre des nombres premiers est paramétré. C'est comme si $\pi(x)$ était connue d'avance pour certaines valeurs de x :

$$\pi(2m) = \begin{cases} n, si\ m\ est\ composé \\ n - 1, sinon \end{cases}$$

De même, nous considérons que pour tout $x < 2m$, naturel, $\pi(x) \leq \pi(2m)$. A rappeler que n représente le nombre d'objets, marqués de nombres premiers dans la disposition préalablement définie. Ceci dit, à partir du moment où x est clairement défini par rapport à $2m$, il nous est facile d'exprimer $\pi(x)$ en fonction de n.

3.2. Calcul de $\partial(2m)$. Face au choix posé précédemment, à savoir calculer le $Card\{A_2\}$ ou $Card\{A_3\}$, j'ai préféré le cas le plus simple : le calcul du $Card\{A_2\}$ qui équivaut par ailleurs à $\partial(2m)$.

Considérons l'ensemble de composés successifs, situés dans l'intervalle $[4; 2m-2]$:

$$\mathrm{M} = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, \dots, 2m-2\}$$

Les entiers que nous appellerons ici composés, sont ceux non premiers, regroupant du coup les nombres pairs (plus grands que 4) et les nombres impairs de la Crible de *Sundaram*.[(3)]

Chacun de ces composés a un « complément » auquel on peut l'ajouter pour avoir $2m$. Ces « compléments », réunis dans l'ensemble $\ddot{\mathrm{M}}$ qui suit, ont un comportement, selon leur « primalité ». Tout d'abord, voici $\ddot{\mathrm{M}}$:

$$\ddot{\mathrm{M}} = \{2m-4, 2m-6, 2m-8, 2m-9, 2m-10, \dots, 2\}$$

Comportement des éléments de l'ensemble $\ddot{\mathrm{M}}$. Pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{M} \times \ddot{\mathrm{M}}$ tel que : $x + y = 2m$, si y est composé, ce que $y \in \mathrm{M}$, et déjà répertorié dans cet ensemble. Par contre, si y est premier, ce qu'il n'est pas élément de M. Donc, tout composé dans $\ddot{\mathrm{M}}$ est aussi élément de M. Seule la partition $(1; 2m-1)$ a été isolée, l'unité n'étant pas considéré comme un nombre premier (voir ci-après). Ceci dit, la fonction qui dénombre les couples mixtes est perçue comme une différence de deux cardinaux :

$$|\ddot{\mathrm{M}}| - |\mathrm{M} \cap \ddot{\mathrm{M}}| = \begin{cases} \partial(2m), \text{si } (2m-1) \text{ est composé} \\ \partial(2m) - 1, \text{si } (2m-1) \text{est premier} \end{cases}$$

La différence $|\ddot{\mathrm{M}}| - |\mathrm{M} \cap \ddot{\mathrm{M}}|$ quantifie les nombres premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}$.
Tout le calcul qu'il y a, en répondant à une question préalablement posée, consiste désormais à connaître $\partial(2m)$, lui élaborer une formule générale.

Notes (1). Le schéma d'addition suivant illustre à lui seul l'explication précédente.

$$\begin{gathered} 4 + (2m-4) = 2m \\ 6 + (2m-6) = 2m \\ 8 + (2m-8) = 2m \\ 9 + (2m-9) = 2m \\ 10 + (2m-10) = 2m \\ 12 + (2m-12) = 2m \\ 14 + (2m-14) = 2m \\ 15 + (2m-15) = 2m \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (2m-2) + 2 = 2m \end{gathered}$$

Donc, x, élément de M, et $(2m-x)$, appartenant à $\ddot{\mathrm{M}}$, constituent une 2-partition de $2m$; le second terme étant désigné comme le « complément » du premier, on parle de partition mixte si $(2m-x)$ est premier. Le total de partitions (différentes) de ce type est noté $\partial(2m)$. Essentiellement, calculer $\partial(2m)$ revient à trouver le nombre des nombres premiers dans l'ensemble M̈ ; les dénombrer avec précision. Etant donné que tous ceux de l'ensemble M « de départ » sont composés.

Remarque. Nous ne perdons pas de vue que l'unité "1" ne soit pas considéré comme premier. Le fait important, pour nous, est qu'il ne soit divisible par aucun nombre premier. C'est donc un composé à part entière. De ce fait, il n'est pas répertorié dans l'ensemble M. Dans un second temps, nous analyserons la partition $\left(1+(2m-1)\right)$ à part entière, la dissociant des autres.

Nous retiendrons que les ensembles M et M̈ ne sont pas deux suites arithmétiques. Plutôt, il s'agit d'une famille de suites…

Nous retiendrons également que Tout composé $< 2m$ a un facteur premier $< \sqrt{2m}$. De ce point de vue, chaque composé peut se retrouver au sein des multiples d'un nombre premier donné. Au moment où on évoque l'utilisation du théorème de *Chebotarev*, pour déterminer la fonction $\partial(2m)$, il est important de classer les nombres premiers $< \sqrt{2m}$ en deux groupes :

-les nombres premiers, premiers avec $2m$ (exposé 1)
-les diviseurs premiers de $2m$ (exposé 2)

Soit $\{p_{1;}\, p_{2;}\, p_{3;}\, p_{4;}\ \ldots ; p_{\bar{n}}\}$ les nombres premiers plus petits que $\sqrt{2m}$ et « premiers avec » $2m$, établis dans l'ordre :

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_{\bar{n}} < \sqrt{2m}$$

et $\{m_1, m_2, m_3, \ldots\ m_d\}$ les facteurs premiers de $2m$ tels que

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_d < \sqrt{2m}$$

Tout composé inférieur à $2m$ est multiple d'un de ces nombres premiers, au moins. Par conséquent, tous les éléments de l'ensemble M peuvent être catégorisés en divers sous-ensembles. Il est donc question de procéder à un regroupement de multiples de chaque premier tel que :

Exposé 1.

- multiples de p_1 : $\mathrm{M}_1 = \{2p_1, 3p_1, 4p_1, 5p_1, \ldots, \lfloor 2m/p_1 \rfloor . p_1\}$
- multiples de p_2 : $\mathrm{M}_2 = \{2p_2, 3p_2, 4p_2, 5p_2, \ldots, \lfloor 2m/p_2 \rfloor . p_2\}$
- multiples de p_3 : $\mathrm{M}_3 = \{2p_3, 3p_3, 4p_3, 5p_3, \ldots, \lfloor 2m/p_3 \rfloor . p_3\}$
- multiples de p_4 : $\mathrm{M}_4 = \{2p_4, 3p_4, 4p_4, 5p_4, \ldots, \lfloor 2m/p_4 \rfloor . p_4\}$

… … …

- multiples de $\mathrm{p}_{\bar{\mathrm{n}}}$: $\mathrm{M}_{\bar{\mathrm{n}}} = \{2p_{\bar{\mathrm{n}}}, 3p_{\bar{\mathrm{n}}}, 4p_{\bar{\mathrm{n}}}, 5p_{\bar{\mathrm{n}}}, \ldots, \lfloor 2m/p_{\bar{\mathrm{n}}} \rfloor . p_{\bar{\mathrm{n}}}\}$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière. Tels sont les multiples des premiers p_i, qui sont, on le constate, en progressions arithmétiques.

Pour toute valeur de $i = 1, 2, 3, \dots \bar{n}$, $\mathrm{M_i}$ est un sous-ensemble de M.

(Nous analyserons plus tard le cas des composés exclusivement générés par les diviseurs premiers de $2m$).

De même, on peut énumérer les sous-ensembles de $\ddot{\mathrm{M}}$ correspondants, qui sont obtenus par différence avec $2m$.

- **« compléments » des multiples de $\mathbf{p_1}$:**

$$\ddot{\mathrm{M}}_1 = \{2m - 2p_1, 2m - 3p_1, 2m - 4p_1, 2m - 5p_1, \dots, 2m - \lfloor 2m/p_1 \rfloor . p_1\}$$

- **« compléments » des multiples de $\mathbf{p_2}$:**

$$\ddot{\mathrm{M}}_2 = \{2m - 2p_2, 2m - 3p_2, 2m - 4p_2, 2m - 5p_2, \dots, 2m - \lfloor 2m/p_2 \rfloor . p_2\}$$

- **« compléments » des multiples de $\mathbf{p_3}$:**

$$\ddot{\mathrm{M}}_3 = \{2m - 2p_3, 2m - 3p_3, 2m - 4p_3, 2m - 5p_3, \dots, 2m - \lfloor 2m/p_3 \rfloor . p_3\}$$

- **« compléments » des multiples de $\mathbf{p_4}$:**

$$\ddot{\mathrm{M}}_4 = \{2m - 2p_4, 2m - 3p_4, 2m - 4p_4, 2m - 5p_4, \dots, 2m - \lfloor 2m/p_4 \rfloor . p_4\}$$

etc.

- **« compléments » des multiples de $\mathbf{p_{\bar{n}}}$:**

$$\ddot{\mathrm{M}}_{\bar{\mathrm{n}}} = \{2m - 2p_{\bar{\mathrm{n}}}, 2m - 3p_{\bar{\mathrm{n}}}, 2m - 4p_{\bar{\mathrm{n}}}, 2m - 5p_{\bar{\mathrm{n}}}, \dots, 2m - \lfloor 2m/p_{\bar{\mathrm{n}}} \rfloor . p_{\bar{\mathrm{n}}}\}$$

Rappel. Selon la version quantitative du théorème de *Chebotarev*, dans une suite arithmétique généralisée par l'expression $a + bq$, avec $a, b \geq 1$ premiers entre eux, le nombre des nombres premiers $p \leq x$, congrus à a, modulo b, est environ

$$\pi(x; b, a) = \frac{\pi(x)}{\varphi(b)}$$

Intersection de sous-ensembles. Pour chaque élément de M_i, il existe un autre de $\ddot{\mathrm{M}}_i$, avec lequel il s'accouple pour former une partition de $2m$. Afin de requérir l'application de la formule du Crible de Poincaré, puis du principe d'inclusion-exclusion de Moivre, il convient de signaler la récurrence de certains éléments.

1i. Pour toute valeur singulière de i, M_i rassemble les multiples de p_i, tels que :

$$\mathrm{M}_i = \left\{2p_i, 3p_i, 4p_i, 5p_i, 6p_i \dots, \left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor p_i\right\}$$

La différence avec $2m$ de chacun de ces éléments permet d'énumérer l'autre ensemble, dénommé $\ddot{\mathrm{M}}_i$, qui réunit les « complémentaires » de ces derniers éléments (à ne pas confondre avec la notion de complémentaire d'ensemble) :

$$\ddot{\mathrm{M}}_i = \left\{2m - 2p_i, 2m - 3p_i, 2m - 4p_i, 2m - 5p_i, \dots, 2m - \left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor p_i\right\}$$

Posons :

$$2m \equiv r_i \ (mod\ p_i)$$

Ou encore

$$2m = r_i + \left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor p_i$$

Ceci permet de mieux cerner $\ddot{\mathrm{M}}_i$dont revoilà la composition, par ordre de grandeur croissant :

$$\ddot{\mathrm{M}}_i = \left\{r_i, r_i + p_i, r_i + 2p_i, r_i + 3p_i, \dots, r_i + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor - 2\right) p_i\right\}$$

Les modalités de recherche de nombres premiers, inférieurs ou égaux à $r_i + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor - 2\right) p_i$, expression qui équivaut par ailleurs à $2m - 2p_i$ et reste le plus grand terme de la suite, sont définies par la version quantitative du théorème de Chebotarev, parfaitement applicable à cette suite où $r_i \wedge p_i = 1$. On peut concevoir l'existence d'un entier positif $\bar{r}_i$ (à ne pas confondre avec r_i) tel que :

$$\pi(x_i) = \pi(2m - 2p_i) = n - \bar{r}_i$$

Ainsi, dans chaque suite d'expression $r_i + kp_i$ (avec comme encadrement $1 \le r_i + kp_i \le 2m - 2p_i$), on a :

$$\pi(2m - 2p_i; p_i, r_i) = \left(\frac{n - \bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right)$$

(on peut aussi utiliser la notion de partie entière à ce niveau, conformément à l'idée d'une certaine quantité qui doit être entière)

2i. Pour i et j différents, M_i et M_j ont en commun les composés « factorisables » par $p_i p_j$. De ce fait,

$$\mathrm{M}_i \cap \mathrm{M}_j = \left\{p_i p_j, 2p_i p_j, 3p_i p_j, \dots, \left\lfloor\frac{2m}{p_i p_j}\right\rfloor p_i p_j\right\}$$

Quid des « complémentaires » ?

$$\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j = \left\{2m - p_i p_j, 2m - 2p_i p_j, 2m - 3p_i p_j, \dots, 2 \; - - \left\lfloor \frac{2m}{p_i p_j} \right\rfloor p_i p_j \right\}$$

(ordre de grandeur décroissant).

Soit r_{ij} tel que $2m \equiv r_{ij} \; (mod \; p_i p_j)$. En inversant l'ordre de grandeur, nous retrouvons

$$\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j = \left\{r_{ij}, (r_{ij} + p_i p_j), (r_{ij} + 2p_i p_j), \dots, r_{ij} + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_i p_j} \right\rfloor - 1\right) p_i p_j \right\}$$

Le terme maximal de cette dernière suite étant renseigné par l'expression $(2m - p_i p_j)$, le nombre des nombres premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j$, selon le théorème de *Chebotarev*,

$$\pi(2m - p_i p_j; p_i p_j, r_{ij}) = \frac{\pi(2m - p_i p_j)}{\varphi(p_i p_j)} = \left(\frac{n - \bar{r}_{ij}}{\varphi(p_i p_j)}\right)$$

(avec $\pi(2m - p_i p_j) = n - \bar{r}_{ij}$; à ne pas confondre r_{ij} et $\bar{r}_{ij}$)

3i. Pour i, j et k, différents, les multiples de $p_i p_j p_k$, s'il en existe en dessous de $2m$, reviennent dans les sous-ensembles M_i, M_j et M_k (et probablement dans d'autres sous-ensembles). D'où,

$$\mathrm{M}_i \cap \mathrm{M}_j \cap \mathrm{M}_k = \left\{p_i p_j p_k, 2p_i p_j p_k, 3p_i p_j p_k, \dots, \left\lfloor \frac{2m}{p_i p_j p_k} \right\rfloor p_i p_j p_k \right\}$$

De l'autre côté du « miroir », où sont reflétés les « complémentaires », on a :

$$\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j \cap \ddot{\mathrm{M}}_k = \left\{2m - p_i p_j p_k, 2m - 2p_i p_j p_k, \dots, 2m - \left\lfloor \frac{2m}{p_i p_j p_k} \right\rfloor p_i p_j p_k \right\}$$

Après inversion de l'ordre de grandeur des éléments, et l'introduction de la congruence, nous obtenons :

$$\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j \cap \ddot{\mathrm{M}}_k = \left\{r_{ijk}, (r_{ijk} + p_i p_j p_k), \dots, r_{ijk} + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_i p_j} \right\rfloor - 1\right) p_i p_j p_k \right\}$$

Considérons l'entier positif $\bar{r}_{ijk}$ qui vérifie la condition

$$\pi(2m - p_i p_j p_k) = n - \bar{r}_{ijk}$$

La quantité de premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j \cap \ddot{\mathrm{M}}_k$ est déterminée par l'égalité

$$\pi(2m - p_i p_j p_k;\ p_i p_j p_k, r_{ijk}) = \left(\frac{n - \bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_i p_j p_k)}\right)$$

4i. On poursuit ainsi le calcul pour le reste des intersections, avec comme objectif, l'évaluation des nombres premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}_i \cap \ddot{\mathrm{M}}_j \cap \ddot{\mathrm{M}}_k \cap \ddot{\mathrm{M}}_l$, $i < j < k < l$, etc. jusqu'à épuisement des indices $\ddot{\mathrm{M}}_i \ldots \cap \ddot{\mathrm{M}}_{\bar{n}}$, avec $i < j < k < l < \cdots < \bar{n}$. (Il est évident qu'on en arrivera pas là, puisque le rapport $(n - \bar{r}_{ij\ldots\bar{n}})/\varphi(p_i p_j \ldots p_{\bar{n}}) \sim 0$).

… … …

Donc, au regard de la récurrence des premiers dans les sous-ensembles de $\ddot{\mathrm{M}}$, il est important de noter la Formule du Crible de Poincaré qui montre l'importance et l'esprit des intersections qui viennent d'être amorcées.

Notes (2). Le fait pour les sous-ensembles de M d'avoir en leur sein des éléments communs renvoie à un devoir de conformité à la formule du crible de Poincaré. Ainsi :

$$|\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2| = |\mathrm{M}_1| + |\mathrm{M}_2| - |\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2|$$

Il en ressort de même pour les trois premiers ensembles :

$$\begin{aligned} |\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \cup \mathrm{M}_3| \\ &= |\mathrm{M}_1| + |\mathrm{M}_2| + |\mathrm{M}_3| - |\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2| - |\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_3| - |\mathrm{M}_2 \cap \mathrm{M}_3| \\ &\quad + |\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2 \cap \mathrm{M}_3| \end{aligned}$$

Dans le cas général, notons que

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \mathrm{M}_i\right| &= \sum_{i=1}^{\bar{n}} |\mathrm{M}_i| - \sum_{i<j} |\mathrm{M_i} \cap \mathrm{M_j}| + \sum_{i<j<k} |\mathrm{M_i} \cap \mathrm{M_j} \cap \mathrm{M_k}| \\ &\quad - \sum_{i<j<k<l} |\mathrm{M_i} \cap \mathrm{M_j} \cap \mathrm{M_k} \cap \mathrm{M_l}| + \cdots + |\mathrm{M_i} \ldots \cap \mathrm{M}_{\bar{\mathrm{n}}}| (-1)^{\bar{\mathrm{n}}+1} \end{aligned}$$

où $|.|$ désigne le cardinal. Tel est l'esprit de la formule du Crible à laquelle les sous-ensembles $\mathrm{M_i}$ se conforment [4].

Notes (3). À l'image des sous-ensembles $\mathrm{M_i}$ issus de la décomposition de M, ceux notés $\ddot{\mathrm{M}}_{\mathrm{i}}$ obéissent également à la formule du crible de Poincaré. Successivement, nous devons avoir :

Echelon 1.

$$|\ddot{\mathrm{M}}_1 \cup \ddot{\mathrm{M}}_2| = |\ddot{\mathrm{M}}_1| + |\ddot{\mathrm{M}}_2| - |\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2|$$

Echelon 2.

$$\left|\ddot{\mathrm{M}}_1 \cup \ddot{\mathrm{M}}_2 \cup \ddot{\mathrm{M}}_3\right| = \left|\ddot{\mathrm{M}}_1\right| + \left|\ddot{\mathrm{M}}_2\right| + \left|\ddot{\mathrm{M}}_3\right| - \left|\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2\right| - \left|\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3\right| - \left|\ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3\right| + \left|\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3\right|$$

etc.

Dans un cas plus général, cela est noté par cette formule :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right| = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left|\ddot{\mathrm{M}}_i\right| - \sum_{i<j} \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j}\right| + \sum_{i<j<k} \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k}\right| - \sum_{i<j<k<l} \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{l}\right| + \cdots + \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \ldots \cap \ddot{\mathrm{M}}_{\bar{\mathrm{n}}}\right| (-1)^{\bar{\mathrm{n}}+1}$$

où $|.|$ désigne le cardinal de l'ensemble.

Le plus important n'est pas d'énumérer les sous-ensembles de $\ddot{\mathrm{M}}$, mais de préférence, réussir à compter le nombre des « nombres premiers différents » en leur sein.

Cependant, cela n'est possible qu'en démêlant l'écheveau des intersections entre lesdits sous-ensembles. Un calcul dans ce sens a été enclenché ci-haut. Avant de continuer sur cette voie, tâchons de récapituler :

- les sous-ensembles dans lesquels il est question de quantifier le nombre de nombres premiers distincts :

$$\ddot{\mathrm{M}}_1 = \left\{(r_1); (r_1 + p_1); (r_1 + 2p_1); \ldots; \left(r_1 + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_1} \right\rfloor - 2\right) p_1\right)\right\}$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_2 = \left\{(r_2); (r_2 + p_2); (r_2 + 2p_2); \ldots; \left(r_2 + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_2} \right\rfloor - 2\right) p_2\right)\right\}$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_3 = \left\{(r_3); (r_3 + p_3); (r_3 + 2p_3); \ldots; \left(r_3 + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_3} \right\rfloor - 2\right) p_3\right)\right\}$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_4 = \left\{(r_4); (r_4 + p_4); (r_4 + 2p_4); \ldots; \left(r_4 + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_4} \right\rfloor - 2\right) p_4\right)\right\}$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_{\bar{n}} = \left\{(r_{\bar{n}}); (r_{\bar{n}} + p_{\bar{n}}); (r_{\bar{n}} + 2p_{\bar{n}}); \ldots; \left(r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor \frac{2m}{p_{\bar{n}}} \right\rfloor - 2\right) p_{\bar{n}}\right)\right\}$$

-au sein de ces entités, composées de termes en progression arithmétique, nous retiendrons que le terme initial r_i et le premier p_i sont premiers entre eux :

$$r_i \wedge p_i = 1, \Leftrightarrow \; 2m \wedge p_i = 1, avec\ 2m \equiv r_i \ (mod\ p_i)$$

Par conséquent, il existe des nombres premiers dans ces sous-ensembles ; des nombres premiers qui sont susceptibles de se répéter incessamment. Au point que l'on doit s'interroger sur leur quantité exacte.

- en terme de cardinal, ces sous-ensembles se conforment à la Formule du Crible de Poincaré, selon laquelle :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right| = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left|\ddot{\mathrm{M}}_i\right| - \sum_{i<j} \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j}\right| + \sum_{i<j<k} \left|\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k}\right| - \cdots$$

Pour déterminer le nombre des nombres premiers distincts dans l'entité

$$\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i$$

nous appliquerons simultanément et rigoureusement deux lois : le théorème de *Chebotarev* et le Principe d'inclusion-exclusion de *Moivre*. (5) Définissons une propriété P qui est, pour un ensemble, le fait de « couver » une certaine quantité de nombres premiers, tels que :

$$P(X) = quantité\ de\ nombres\ premiers\ dans\ X, si\ X\ est\ un\ ensemble$$

Ainsi, suivant le Principe d'inclusion-exclusion de Moivre :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} P(\ddot{\mathrm{M}}_i) - \sum_{i<j} P(\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j}) + \sum_{i<j<k} P(\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k}) - \cdots$$

Notons par

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) = \partial_0(2m)$$

la première (et plus importante) tranche de couples mixtes qui sortent de l'étude des p_i.

Il ne reste plus qu'à reconsidérer les quantités de premiers étudiées plus haut au sujet de l'intersection de sous-ensembles :

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} P(\ddot{\mathrm{M}}_i) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right)$$

$$\sum_{i<j\leq\bar{n}} P(\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j}) = \sum_{i<j\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ij}}{\varphi(p_i p_j)}\right)$$

$$\sum_{i<j<k\leq\bar{n}} P(\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k}) = \sum_{i<j<k\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_i p_j p_k)}\right)$$

$$\sum_{i<j<k<l\leq\bar{n}} P(\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{j} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{k} \cap \ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{l}) = \sum_{i<j<k<l\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijkl}}{\varphi(p_i p_j p_k p_l)}\right)$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

etc. d'où,

$$\partial_0(2m) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right) - \sum_{i<j\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ij}}{\varphi(p_i p_j)}\right) + \sum_{i<j<k\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_i p_j p_k)}\right) - \sum_{i<j<k<l\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijkl}}{\varphi(p_i p_j p_k p_l)}\right) + \cdots$$

Autre approche. L'autre manière d'élaborer $\partial_0(2m)$ est de procéder par un calcul itératif, en étalant les sous-ensembles, l'un après l'autre, et les tableaux d'additions qui les sous-tendent. En de termes simples, on s'emploie à prospecter les quantité de premiers tapis au sein de chaque sous-ensemble de $\ddot{\mathrm{M}}$, l'un après l'autre. On exclue progressivement les premiers répétitifs. Un tel procédé est aussi simple et aboutit à élaborer sans coup férir $\partial_0(2m)$. Au niveau de chaque égalité, le composé censé appartenir à $\mathrm{M_i}$ est le terme à gauche, qui se résume par la forme kp_i, où $2 \leq k \leq \left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor p_i$. Son « complémentaire », appartenant à $\ddot{\mathrm{M}}_\mathrm{i}$, est symbolisée, dans la même égalité, par l'expression suivante :

$$r_i + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_i}\right\rfloor - 2\right) p_i$$

C'est là où il faudra chercher des nombres premiers. parce que si $r_i \equiv 2m \ (mod\ p_i)$, et $p_i \wedge 2m = 1$, cela va impliquer que $p_i \wedge r_i = 1$. D'où la possibilité d'y appliquer le Théorème de *Chebotarev*.

Tableau 1.

$$2p_1 + r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 2\right) p_1 = 2m$$

$$3p_1 + r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 3\right)p_1 = 2m$$
$$4p_1 + r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 4\right)p_1 = 2m$$
$$5p_1 + r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 5\right)p_1 = 2m$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 3\right)p_1 + r_1 + 3p_1 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 2\right)p_1 + r_1 + 2p_1 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 1\right)p_1 + r_1 + p_1 = 2m$$
$$\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor p_1 + r_1 + 0 = 2m$$

Fait notable, les termes de la suite

$$r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - k\right)p_1$$

appartiennent donc à l'ensemble $\ddot{\mathrm{M}}_1$, k variant de 0 à $\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 2\right)$. La question est de savoir la quantité de premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}_1$, avec :

$$\ddot{\mathrm{M}}_1 = \left\{(r_1); (r_1 + p_1); (r_1 + 2p_1); \dots; \left(r_1 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_1}\right\rfloor - 2\right)p_1\right)\right\}$$

Dans ce sous-ensemble, selon la version quantitative du théorème de *Chebotarev,* on peut noter

$$P(\ddot{\mathrm{M}}_1) = \left(\frac{n - \bar{r}_1}{\varphi(p_1)}\right) = \partial_0^1(2m)$$

(P étant une propriété qui est, pour un ensemble X, le fait d'avoir en son sein $P(X)$ nombres premiers).

Tableau 2.

$$2p_2 + r_2 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 2\right)p_2 = 2m$$
$$3p_2 + r_2 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 3\right)p_2 = 2m$$
$$4p_2 + r_2 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 4\right)p_2 = 2m$$
$$5p_2 + r_2 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 5\right)p_2 = 2m$$

$$\dots\dots\dots$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 3\right)p_2 + r_2 + 3p_2 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 2\right)p_2 + r_2 + 2p_2 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 1\right)p_2 + r_2 + p_2 = 2m$$
$$\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor p_2 + r_2 + 0 = 2m$$

La question est de dénombrer, dans le sous-ensemble suivant, les premiers différents de ceux déjà décomptés dans $\ddot{\mathrm{M}}_1$:

$$\ddot{\mathrm{M}}_2 = \left\{(r_2); (r_2 + p_2); (r_2 + 2p_2); \dots; \left(r_2 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_2}\right\rfloor - 2\right)p_2\right)\right\}$$

cela revient à calculer (suivant le principe d'inclusion exclusion)

$$P\left(\ddot{\mathrm{M}}_2\right) - P\left(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2\right)$$

soit

$$\partial_0^2(2m) = \left(\frac{n - \bar{r}_2}{\varphi(p_2)}\right) - \left(\frac{n - \bar{r}_{1,2}}{\varphi(p_1 p_2)}\right)$$

$P\left(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2\right)$ est le total de premiers de la forme $r_{1,2} + kp_1p_2$, des premiers qui se retrouvent aussi bien dans $\ddot{\mathrm{M}}_1$ que dans $\ddot{\mathrm{M}}_2$.
(avec $r_{1,2} \equiv 2m \ (mod\ p_1p_2)$ et $n - \bar{r}_{1,2} = \pi(2m - p_1p_2)$.

Tableau 3. Voici la troisième série d'addition et le sous-ensemble $\ddot{\mathrm{M}}_3$ qu'il génère :

$$2p_3 + r_3 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 2\right)p_3 = 2m$$
$$3p_3 + r_3 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 3\right)p_3 = 2m$$
$$4p_3 + r_3 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 4\right)p_3 = 2m$$
$$5p_3 + r_3 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 5\right)p_3 = 2m$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 3\right)p_3 + r_3 + 3p_3 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 2\right)p_3 + r_3 + 2p_3 = 2m$$

$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 1\right)p_3 + r_3 + p_3 = 2m$$
$$\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor p_3 + r_3 + 0 = 2m$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_3 = \left\{(r_3); (r_3 + p_3); (r_3 + 2p_3); \dots; \left(r_3 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_3}\right\rfloor - 2\right)p_3\right)\right\}$$

La question qui se pose encore est de savoir le total des premiers, différents de ceux déjà comptés dans les précédents tableaux. Toujours avec l'esprit du Principe d'inclusion exclusion de *Moivre*, la réponse consiste à calculer

$$P(\ddot{\mathrm{M}}_3) - P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3) - P(\ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3) + P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3)$$

Ceci correspond à

$$\partial_0^3(2m) = \binom{n - \bar{r}_3}{\varphi(p_3)} - \binom{n - \bar{r}_{1,3}}{\varphi(p_1p_3)} - \binom{n - \bar{r}_{2,3}}{\varphi(p_2p_3)} + \binom{n - \bar{r}_{1,2,3}}{\varphi(p_1p_2p_3)}$$

Série 4. Place maintenant à la quatrième série d'opérations et le sous-ensemble $\ddot{\mathrm{M}}_4$:

$$2p_4 + r_4 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 2\right)p_4 = 2m$$
$$3p_4 + r_4 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 3\right)p_4 = 2m$$
$$4p_4 + r_4 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 4\right)p_4 = 2m$$
$$5p_4 + r_4 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 5\right)p_4 = 2m$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 3\right)p_4 + r_4 + 3p_4 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 2\right)p_4 + r_4 + 2p_4 = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 1\right)p_4 + r_4 + p_4 = 2m$$
$$\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor p_4 + r_4 + 0 = 2m$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_4 = \left\{(r_4); (r_4 + p_4); (r_4 + 2p_4); \dots; \left(r_4 + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_4}\right\rfloor - 2\right)p_4\right)\right\}$$

Simplement, la quantité de premiers dans $\ddot{\mathrm{M}}_4$, différents de ceux listés dans des tableaux précédents équivaut à

$$P(\ddot{\mathrm{M}}_4) - P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4) - P(\ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4) - P(\ddot{\mathrm{M}}_3 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4) + P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4)$$
$$+ P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4) + P(\ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4) - P(\ddot{\mathrm{M}}_1 \cap \ddot{\mathrm{M}}_2 \cap \ddot{\mathrm{M}}_3 \cap \ddot{\mathrm{M}}_4)$$

soit

$$\partial_0^4(2m) = \left(\frac{n-\bar{r}_4}{\varphi(p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,4}}{\varphi(p_1p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{2,4}}{\varphi(p_2p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{3,4}}{\varphi(p_3p_4)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,4}}{\varphi(p_1p_2p_4)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,3,4}}{\varphi(p_1p_3p_4)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{2,3,4}}{\varphi(p_2p_3p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,3,4}}{\varphi(p_1p_2p_3p_4)}\right)$$

Ainsi continue le calcul jusqu'au Tableau $\bar{n}$.

… … …

… … …

Tableau $\bar{n}$. Enfin, c'est la dernière série d'addition, deux à deux, entre les éléments de $\mathrm{M}_{\bar{n}}$ et ceux de $\ddot{\mathrm{M}}_{\bar{n}}$.

$$2p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 2\right)p_{\bar{n}} = 2m$$
$$3p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 3\right)p_{\bar{n}} = 2m$$
$$4p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 4\right)p_{\bar{n}} = 2m$$
$$5p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 5\right)p_{\bar{n}} = 2m$$

… … …

$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 3\right)p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + 3p_{\bar{n}} = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 2\right)p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + 2p_{\bar{n}} = 2m$$
$$\left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 1\right)p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + p_{\bar{n}} = 2m$$
$$\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor p_{\bar{n}} + r_{\bar{n}} + 0 = 2m$$

$$\ddot{\mathrm{M}}_{\bar{n}} = \left\{(r_{\bar{n}}); (r_{\bar{n}} + p_{\bar{n}}); (r_{\bar{n}} + 2p_{\bar{n}}); \dots; \left(r_{\bar{n}} + \left(\left\lfloor\frac{2m}{p_{\bar{n}}}\right\rfloor - 2\right)p_{\bar{n}}\right)\right\}$$

Dans ce « dernier » sous-ensemble, notons que la quantité de premiers correspondante est très réduite, du fait qu'il va falloir purger tous les nombres premiers comptés dans les sous-ensembles précédents.

$$\partial_0^{\bar{n}}(2m) = \left(\frac{n-\bar{r}_{\bar{n}}}{\varphi(p_{\bar{n}})}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_{\bar{n}})}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{2,\bar{n}}}{\varphi(p_2p_{\bar{n}})}\right) - \cdots + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_2p_{\bar{n}})}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,3,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_3p_{\bar{n}})}\right) + \cdots + \left(\frac{n-\bar{r}_{2,3,\bar{n}}}{\varphi(p_2p_3p_{\bar{n}})}\right) + \cdots - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,3,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_2p_3p_{\bar{n}})}\right) - \cdots$$

En résumé, la quantité de premiers distincts dans les différents tableaux correspond à la somme des quantités partielles :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\bar{n}} \partial_0^i(2m) = &\left(\frac{n-\bar{r}_1}{\varphi(p_1)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_2}{\varphi(p_2)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2}}{\varphi(p_1p_2)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_3}{\varphi(p_3)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,3}}{\varphi(p_1p_3)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{2,3}}{\varphi(p_2p_3)}\right)\\ &+ \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,3}}{\varphi(p_1p_2p_3)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_4}{\varphi(p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,4}}{\varphi(p_1p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{2,4}}{\varphi(p_2p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{3,4}}{\varphi(p_3p_4)}\right)\\ &+ \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,4}}{\varphi(p_1p_2p_4)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,3,4}}{\varphi(p_1p_3p_4)}\right) + \left(\frac{n-\bar{r}_{2,3,4}}{\varphi(p_2p_3p_4)}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,3,4}}{\varphi(p_1p_2p_3p_4)}\right) + \cdots\\ &+ \left(\frac{n-\bar{r}_{\bar{n}}}{\varphi(p_{\bar{n}})}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_{\bar{n}})}\right) - \left(\frac{n-\bar{r}_{2,\bar{n}}}{\varphi(p_2p_{\bar{n}})}\right) - \cdots + \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_2p_{\bar{n}})}\right)\\ &+ \left(\frac{n-\bar{r}_{1,3,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_3p_{\bar{n}})}\right) + \cdots + \left(\frac{n-\bar{r}_{2,3,\bar{n}}}{\varphi(p_2p_3p_{\bar{n}})}\right) + \cdots - \left(\frac{n-\bar{r}_{1,2,3,\bar{n}}}{\varphi(p_1p_2p_3p_{\bar{n}})}\right) - \cdots\end{aligned}$$

Cette formule, en considérant que

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}} \partial_0^i(2m) = \partial_0(2m)$$

se résume comme suit :

$$\begin{aligned}\partial_0(2m) = &\sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right) - \sum_{i<j\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ij}}{\varphi(p_ip_j)}\right) + \sum_{i<j<k\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_ip_jp_k)}\right)\\ &- \sum_{i<j<k<l\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijkl}}{\varphi(p_ip_jp_kp_l)}\right) + \cdots\end{aligned}$$

(résultat que nous avions déjà établi à la page 15)

Notes (4). Le fait d'avoir procédé de manière ordinaire, passant de M_1 à M_2, puis M_3, ainsi de suite, n'était qu'une façon de simplifier et fixer les idées. En fait, il n'y a aucun alignement de sous-ensembles, préalablement défini, à obéir. On peut commencer le calcul par n'importe lequel et terminer par n'importe lequel. Le résultat sera le même.

Après cette tâche, il ne reste plus que de voir du côté des diviseurs premiers de $2m$; et la partition $1 + (2m - 1)$.

Exposé 2. Cet exposé ne sera pas long puisque les diviseurs premiers de $2m$ sont en nombre inférieur, voire insignifiant, par rapport aux autres nombres premiers. En plus, chaque diviseur premier donne au plus une seule partition mixte, s'il faut parler ainsi.

Soit $\partial_1(2m)$ la quantité de partitions mixtes au sein desquels le terme premier divise $2m$. Soit $\{m_1, m_2, m_3, \dots\ m_d\}$ les facteurs premiers de $2m$ tels que

$$m_1 < m_2 < \ m_3 < \dots < m_d < \sqrt{2m}$$

avec $m_1 = 2$, $\partial_1(2m) = d$. La preuve !

Nous allons respecter le cheminement précédent, c'est-à-dire l'application du Principe d'inclusion-exclusion de *Moivre*. Et seul le théorème de *Chebotarev* n'y sera pas appliqué en raison du fait que pour tout m_i, $1 \leq i \leq d$,

$$2m \equiv 0\ (mod\ m_i)$$

En ce qui concerne les composés, nous avons :

- Multiples de m_1 : $W_1 = \{2m_1, 3m_1, 4m_1, \dots, 2m - m_1\}$

- Multiples de m_2 : $W_2 = \{2m_2, 3m_2, 4m_2, \dots, 2m - m_2\}$

- Multiples de m_3 : $W_3 = \{2m_3, 3m_3, 4m_3, \dots, 2m - m_3\}$

… … …

- Multiples de m_d : $W_d = \{2m_d, 3m_d, 4m_d, \dots, 2m - m_d\}$

Les W_i sont aussi des sous-ensembles de l'ensemble M (Rappelons que M regroupe les composés strictement inférieurs à $(2m - 1)$). Place maintenant aux « complémentaires » :

- $\ddot{W}_1 = \{2m - 2m_1, 2m - 3m_1, 2m - 4m_1, \dots, m_1\}$

- $\ddot{W}_2 = \{2m - 2m_2, 2m - 3m_2, 2m - 4m_2, \dots, m_2\}$
- $\ddot{W}_3 = \{2m - 2m_3, 2m - 3m_3, 2m - 4m_3, \dots, m_3\}$

… … …

- $\ddot{W}_d = \{2m - 2m_d, 2m - 3m_d, 2m - 4m_d, \dots, m_d\}$

La recherche se fait, comme précédemment, au niveau des entités $\ddot{W}_i$ qui sont tous, pour leur part, des sous-ensembles de M̈ (lequel regroupe pour sa part tous les entiers appelés ici « complémentaires »). Sans même aller loin, nous remarquons que chacun d'eux fournit un seul nombre premier. Le diviseur premier en l'occurrence. En appliquant la propriété P qui est celle, pour un ensemble, d'avoir telle quantité de nombres premiers en son sein, nous avons :

$$P(\ddot{W}_1) = P(\ddot{W}_2) = P(\ddot{W}_3) = \cdots = P(\ddot{W}_d) = 1$$

Sans verser dans un calcul quelconque, nous remarquons que les nombres premiers en partitions mixtes varient d'un sous-ensemble à l'autre :

Pour tous sous-ensembles $\ddot{W}_i$ et $\ddot{W}_j$ différents,

$$P(\ddot{W}_i \cap \ddot{W}_j) = 0$$

En général,

$$P(\ddot{W}_i \cap \ddot{W}_j \cap \ldots \cap \ddot{W}_l) = 0$$

(avec$1 \leq i < j < \cdots < l \leq d$)

En d'autres termes, l'intersection entre deux, trois, quatre, ou plus, de ces sous-ensembles n'est constituée que de composés.

En somme,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right) = d$$

Cumul des exposés 1&2. En gros, nous avons, d'une part

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right) = \ddot{\mathrm{M}}$$

et d'autre part,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) = \partial_0(2m)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right) = \partial_1(2m) = d$$

Ceci dit :

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right)\right) = P(\ddot{\mathrm{M}})$$

Soit

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) + P\left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right)\right) = P(\ddot{\mathrm{M}})$$

(principe d'inclusion-exclusion de *Moivre*)

Simplement, cela se réduit à :

$$\partial_0(2m) + d - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right)\right)$$

Posons :

$$d - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right)\right) = d_0$$

Quoiqu'effrayante,

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\bar{n}} \ddot{\mathrm{M}}_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{d} \ddot{W}_i\right)\right)$$

est pourtant simple : elle indique la quantité de diviseurs premiers de $2m$ déjà comptés dans l'Exposé1. D'où la question : est-ce que certains des diviseurs m_i (ou tous), en tant que premiers, ne sont pas déjà comptabilisés ?
Là, tout dépend de la décomposition de $2m$ selon différents cas de figure. Des cas simples à relever. Même si je me permets de me limiter à ce niveau. Pour résumer, nous pouvons retenir que

$$\partial(2m) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right) - \sum_{i<j\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ij}}{\varphi(p_i p_j)}\right) + \sum_{i<j<k\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_i p_j p_k)}\right) - \sum_{i<j<k<l\leq\bar{n}} \left(\frac{n-\bar{r}_{ijkl}}{\varphi(p_i p_j p_k p_l)}\right) + \cdots + d_0$$

(où $0 \leq d_0 \leq$ nombre de diviseurs premiers de $2m$). si $(2m-1)$ est premier, la couple $(1; 2m-1)$ serait mixte, puisque l'unité 1 est considéré par bon nombre de mathématiciens (à raison d'ailleurs) comme un non premier. Ceci dit, en pareil cas, on ajoute 1 à å. Telle est la formule de la fonction $\partial(2m)$. Une formule dont la précision repose uniquement de la « justesse » du théorème de *Chebotarev*…

En résumé.

4. Lemme 1. Soit $A_2 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^* |\ x + y = 2m;\ x\ ou\ bien\ y\ premier\}$ l'ensemble des manières d'écrire l'entier pair $2m$ comme somme d'un premier et d'un composé, $|A_2|$ vaut

$$\partial(2m) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \left(\frac{n - \bar{r}_i}{\varphi(p_i)}\right) - \sum_{i<j\leq\bar{n}} \left(\frac{n - \bar{r}_{ij}}{\varphi(p_i p_j)}\right) + \sum_{i<j<k\leq\bar{n}} \left(\frac{n - \bar{r}_{ijk}}{\varphi(p_i p_j p_k)}\right) - \sum_{i<j<k<l} \left(\frac{n - \bar{r}_{ijkl}}{\varphi(p_i p_j p_k p_l)}\right) + \cdots + d_0$$

où $p_i \leq \sqrt{2m}$ premiers, $p_i \wedge 2m = 1$; $n - \bar{r}_i = \pi(2m - 2p_i)$,
$n - \bar{r}_{ij\,\dots} = \pi(2m - p_i p_j\ \dots)$; $0 \leq d_0 \leq$ nombre de diviseurs premiers de $2m$.

Donc, si nous emboîtons, deux à deux, $2m$ objets numérotés, dans m boîtes différentes, de manière à reproduire les 2-partitions de l'entier pair $2m$, nous relevons :

$\partial(2m)$ couples d'objets-nombres de « primalité » différente ;

$\frac{1}{2}\big(n - \partial(2m)\big)$ couples d'objets-nombres premiers ;

$\frac{1}{2}\big(2m - n - \partial(2m)\big)$ couples d'objets-nombres composés ;

où n représente le nombre total d'objets marqués de nombres premiers et $\partial(2m)$ étant calculée suivant le Lemme 1. (dans cette configuration, il n'existe pas de boîte B_0 ; la boîte B_m porte deux objets identiques, numérotés (m, m)).

Leçons à propos des diviseurs premiers de $2m$. Le nombre de partitions de Goldbach de $2m$ étant estimé par l'égalité $R(2m) = 0{,}5\big(n - \partial(2m)\big)$, on peut dire que la fonction ∂ constitue un véritable contrepoids pour R. Autant ∂ est important (en valeur absolue), autant R l'est moins. Et inversement. Cet équilibre montre tout le rôle prépondérant joué par ces diviseurs premiers des nombres pairs.

Au regard même de la formulation de $\partial(2m)$, il y a un enseignement important que nous pouvons tirer. Parce que cette formulation permet à elle seule de lever le voile sur les fluctuations des quantités de partitions de Goldbach constatées depuis la genèse de la conjecture. Elle montre ceci :

plus le nombre pair est grand, plus il y a de manières disponibles de l'écrire comme somme de deux premiers (nous verrons plus tard que la différence entre n et $\partial(2m)$ se creuse de plus en plus quand m s'éloigne de 0 ; ce qui justifiera la croissante de la série $R(2m)$).

plus important, le lemme 1 montre pourquoi deux nombres pairs consécutifs n'ont pas les mêmes quantités de partitions de Goldbach (comparons à titre illustratif $R(100)$, $R(102)$, $R(104)$ et $R(106)$, exemples ci-après) ? Cela s'explique par le fait que deux pairs consécutifs ont forcément des diviseurs premiers impairs différents. Ce qui se répercute directement sur les fonctions R et ∂. Celui d'entre eux qui possède les diviseurs premiers impairs les plus petits (en valeur absolue) ou les plus nombreux l'emporte en termes de partitions de Goldbach.

C'est pourquoi, dans la grille des « partitions de Goldbach » (sommes de deux premiers), les multiples de six sont les mieux lotis. Ils disposent plus de manières d'être écrits sous la forme d'une somme de deux premiers par rapport aux autres pairs. Et comment ? Si $2m$ et 3 étaient premiers entre eux, $\partial(2m)$ se serait accrue de plusieurs points. En rejetant presque tous les nombres premiers qui auraient émergé de la suite $r + 3t$, t allant de 0 à $\left(\left\lfloor\frac{2m}{3}\right\rfloor - 2\right)$, la fonction $\partial(2m)$ se déprécie considérablement, réconfortant ainsi l'autre fonction $R(2m)$ qui, à l'inverse, s'accroit de quelques points (conformément à l'identité simple qui unit R et ∂). Toute augmentation de ∂ entrainerait inexorablement une diminution de R. Et vice-versa.

Après les multiples de 6, les entiers les mieux lotis en partitions de Goldbach, selon le lemme, sont les multiples de 10, puis 14, puis 22, etc. par contre, les nombres pairs les plus pauvres en quantités de partitions de Goldbach sont les puissances de 2 (fait qui peut se vérifier à partir de 2^5).

Nous allons prendre des exemples les plus simples :

Exemple 1. $R(36) = 4$ et $R(38) = 2$, bien que $38 > 36$. Cela est dû à la décomposition en facteurs premiers des deux nombres, qui se répercute dans le calcul de R : $36 = 2^2.3^2$ et de $38 = 2.19$.

Exemple 2. $R(120) = 12$, alors que $R(128) = 3$. Or $120 < 128$

Exemple3. $100 = 2^2.5^2$; $102 = 2.3.17$ et $104 = 2^3.13$; $R(100) = 6$, $R(102) = 8$ et $R(104) = 5$.

Exemple 4. $\forall p$, premier de la forme $p = 1 + 30t$, $R(2p - 2) > R(2p)$. Toujours selon le lemme, si p n'est un nombre premier de Fermat, les partitions de Goldbach de $(2p - 2)$ sont toujours plus nombreuses que celles de $(2p)$. (avec p grand, condition sine qua non pour une applicabilité correcte du théorème de Chebotarev, lequel est plus précis quand les suites arithmétiques sont longues).

Exemple 5. Pour tout p nombre premier de Mersenne plus grand que 30,
$R(2p) < R(2p - 2)$.

Exemple 6. Le rôle prépondérant des diviseurs premiers est plus palpable dans cet exemple de deux pairs consécutifs de la forme $2m = h!$ et $2m' = h! + 2$. $\forall h \geq 4$ entier, $R(2m) > R(2m')$.

Ce type de prévisions n'est que l'interprétation de la formule associée à la fonction ∂. Toutefois, une telle comparaison entre deux, trois, quatre, etc. nombres pairs ne peut être faite que s'ils sont proches, promiscuité qui n'entraîne pas une variation importante de n.

(Fin de la première partie) – Dans la deuxième partie, il sera question d'apporter la preuve que pour tout nombre pair $2m$, $R(2m)$ est toujours plus grand que l'unité. Il sera donc question de comparer la fonction $\partial(2m)$ et n ; comparaison qui permettra de dégager la valeur minimale de $R(2m)$, pour tout m. En effet, $\partial(2m)$ devra nous permettre de prouver qu'il n'existe nulle part dans $\mathbb{N}$ un contre-exemple de la conjecture. Bref, la deuxième partie va achever la démonstration qui, essentiellement, repose sur le procédé d'élaboration de la Fonction $\partial(m)$. D'où l'importance, pour chacun d'entre nous, mathématiciens, de voir en profondeur cet aspect du document.

Bibliographie

(1) [Wikipedia]. "*Conjecture de Goldbach*".

http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Goldbach

(2) [University of Toronto. Ivan Soprounov, *"A short proof of the prime number theorem for arithmetic progressions"*

[Wikipedia]. "*Théorème de la progression arithmétique*".
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_la_progression_arithm%C3%A9tique

[Université Henri Poincaré, 2002]. Bruno Martin, "*Sur l'existence d'une preuve euclidienne du théorème de Dirichlet*"

[Université de Limoges, 1998]. Pierre Dusart, "*Autour de la fonction qui compte le nombre des nombres premiers*"

(3) [Wikipedia]. *"Crible de Sundaram"*,

http://fr.wikipedia.org/wiki/Crible_de_Sundaram

(4-5) [Wikipedia]. "Formule du Crible de Poincaré, Principe d'inclusion exclusion de Moivre",

http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_d'inclusion-exclusion