# Essai sur les Nombres Premiers $n^2$+1

Note: On tente de démontrer la conjecture des nombres premiers ($n^2$ +1).

# Essay on Primes Numbers $n^2$+1

Abstract: We try to prove the conjecture on Prime Numbers ($n^2$+1).

Démonstration par l'absurde.
Hypothèse : Il existe un entier N pair tel que :
1) $\mathrm{N}^2 + 1$ est premier,
2) $\forall \mathrm{m} \geq 1, (\mathrm{N} + 2 \times \mathrm{m})^2 + 1 = \mathrm{x_m} \times \mathrm{y_m}$ tel que $\mathrm{x_m} < \mathrm{y_m}$ et $\mathrm{x_m} \neq 1$.

Soit le polynôme à valeurs entières $\mathrm{Q(t)} = (\mathrm{N} + 2 \times \mathrm{t})^2 + 1$ , $t \geq 1$.
Or d'après le théorème de Lagrange tout entier est somme de 4 carrés.
Il s'ensuit que $\forall t \geq 1$, Q(t)= $\mathrm{a_t^2} + \mathrm{b_t^2} + \mathrm{c_t^2} + \mathrm{d_t^2}$.

Détermination des entiers $\mathrm{a_t}, \mathrm{b_t}, \mathrm{c_t}$ , $\mathrm{d_t}$.
De Q(t) = $\mathrm{x_t} \times \mathrm{y_t}$ avec $\mathrm{x_t} = \mathrm{u_t^2} + \mathrm{v_t^2}$ , $\mathrm{y_t} = \mathrm{w_t^2} + \mathrm{z_t^2}$
où $\mathrm{u_t}$ et $\mathrm{w_t}$ sont pairs, nous tirons les égalités :
$\mathrm{a_t} = \mathrm{u_t} \times \mathrm{w_t}$ , $\mathrm{b_t} = \mathrm{u_t} \times \mathrm{z_t}$ ,
$\mathrm{c_t} = \mathrm{v_t} \times \mathrm{w_t}$ et $\mathrm{d_t} = \mathrm{v_t} \times \mathrm{z_t}$ est impair,
$\mathrm{a_t} \times \mathrm{d_t} = \mathrm{b_t} \times \mathrm{c_t}$ .

La dernière relation amène à considérer les triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont de longueurs $\mathrm{a_t}$ et $\mathrm{d_t}$ (resp. $\mathrm{b_t}$ et $\mathrm{c_t}$) et dont l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{\mathrm{a_t^2} + \mathrm{d_t^2}}$ (resp. $\sqrt{\mathrm{b_t^2} + \mathrm{c_t^2}}$ ).
Ces 2 hypoténuses sont alors vues comme les côtés d'un triangle rectangle d'hypoténuse de longueur $\mathrm{L_t} = \sqrt{\mathrm{a_t^2} + \mathrm{d_t^2} + \mathrm{b_t^2} + \mathrm{c_t^2}}$.
Nous procédons de même avec $\sqrt{(\mathrm{N}^2 + 1)}$ et $\sqrt{(2 \times \mathrm{t})^2 + 4 \times \mathrm{N} \times \mathrm{t}}$
avec pour résultat un triangle rectangle d'hypoténuse dont la longueur est aussi $\mathrm{L_t} = \sqrt{(\mathrm{N}^2 + 1) + (2 \times \mathrm{t})^2 + 4 \times \mathrm{N} \times \mathrm{t}}$ .

On construit maintenant le cercle $(C_t)$ de centre O et de diamètre $E_tF_t$ dont la longueur est $\mathrm{L_t}$ (cf. figure).
Les sommets de l'angle droit des 2 triangles rectangles inscrits dans $(C_t)$
sont notés G et H, ce qui donne :
$OF_t = OG = OH.$
La loi du cosinus appliquée aux triangles OH$F_t$ et OG$F_t$ induit les relations suivantes :

$OH^2 + {OF_t}^2 - 2 \times OH \times OF_t \times \cos\alpha_t = a_t^2 + d_t^2$,
$OG^2 + {OF_t}^2 - 2 \times OG \times OF_t \times \cos\beta_t = N^2 + 1$

A partir de la relation $OF_t = OG = OH$, on obtient :
$N^2 + 1 = \frac{(1-\cos\beta_t)}{(1-\cos\alpha_t)} \times (a_t^2 + d_t^2)$ .
Ce qui entraine que $\frac{(1-\cos\beta_t)}{(1-\cos\alpha_t)} = \gamma_t/\delta_t$ tel que $(\gamma_t, \delta_t) = 1$
et ainsi $\delta_t$ divise $(a_t^2 + d_t^2)$ d'où $\delta_t = h_t^2 + k_t^2$.
Alors $a_t^2 + d_t^2 = (h_t^2 + k_t^2) \times (m_t^2 + n_t^2)$.
Donc $N^2 + 1 = \gamma_t \times ({m_t}^2 + {n_t}^2)$ où $\gamma_t = (p_t^2 + q_t^2)$.

Il y a alors 2 possibilités :
α) $m_t^2 + n_t^2 \neq 1$ alors la primalité de $N^2 + 1$ est violée,
β) $m_t^2 + n_t^2 = 1$ alors $N^2 + 1 = p_t^2 + q_t^2$ .

Comme t est arbitraire, on a ainsi une famille infinie de cercles concentriques $(C_t)$ de centre O de diamètres de longueur $L_t = \sqrt{a_t^2 + d_t^2 + b_t^2 + c_t^2}$
vérifiant la relation : $\forall t \geq 1$ , $N^2 + 1 = p_t^2 + q_t^2$ .
Or d'après le théorème de Fermat tout nombre premier $p \equiv 1 \bmod 4$ est somme de 2 carrés d'une seule façon.

Conclusion.
Le polynôme Q(t) ne peut donc exister.

Théorème : L'ensemble des nombres premiers de la forme $(n^2 + 1)$ est infini.

Bibliographie.
A. Ferrer : Les Nombres Premiers, Librairie Vuibert, 1947.

M.MADANI Bouabdallah
La Pallu
61320 La Lande de Goult.
Tel 02 33 28 59 47
madanibouabdallah@hotmail.fr

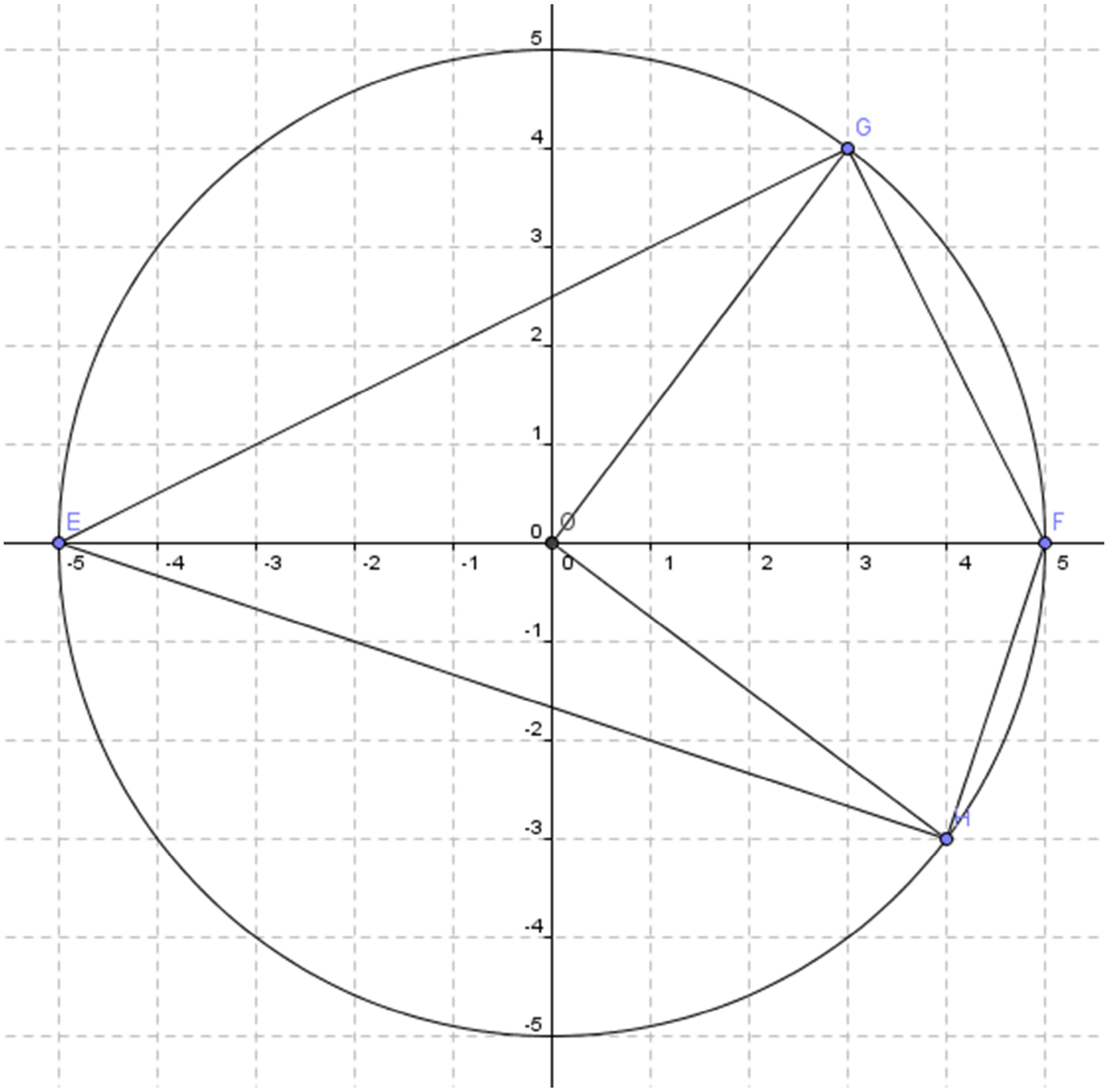


Figure du cercle $(C_t)$