

The More Simple Proof Of Fermat Last Theorem 初等函数费马大定理证明

蒋春暄
北京 3824 信箱,100854
123jiangchunxuan@gmail.com

$x^n + y^n = z^n (n > 2)$ 无非零整数解称为费马大定理. 只要证明指数 4 和所有奇素数指 P 就够了. Fermat 证明指数 4. Euler 证明指数 3.

本文利用初等函数(复双曲函数) 我们证明费马大定理指数 $3P$ 和 P , 其中 P 是奇素数.

1974 年我们发现 Euler 公式

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i J^i\right) = \sum_{i=1}^n S_i J^{i-1} \quad (1)$$

其中 J 称为 n 次单位根, $J^n = 1$, n 是奇数, t_i 是实数.

S_i 是初等函数(复双曲函数) 具有 $n-1$ 变量 [1-5].

$$S_i = \frac{1}{n} \left[e^A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{(i-1)j} e^{B_j} \cos\left(\theta_j + (-1)^j \frac{(i-1)j\pi}{n}\right) \right] \quad (2)$$

其中 $i=1,2,\dots,n$;

$$A = \sum_{\alpha=1}^{n-1} t_\alpha, \quad B_j = \sum_{\alpha=1}^{n-1} t_\alpha (-1)^{\alpha j} \cos \frac{\alpha j \pi}{n},$$

$$\theta_j = (-1)^{j+1} \sum_{\alpha=1}^{n-1} t_\alpha (-1)^{\alpha j} \sin \frac{\alpha j \pi}{n}, \quad A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j = 0 \quad (3)$$

(2) 可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \dots \\ S_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \\ 1 & \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \frac{(n-1)\pi}{n} & \sin \frac{(n-1)\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)^2 \pi}{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^A \\ 2e^{B_1} \cos \theta_1 \\ 2e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \dots \\ 2 \exp B_{\frac{n-1}{2}} \sin \theta_{\frac{n-1}{2}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 $(n-1)/2$ 是偶数.

从(4) 我们有逆变换

$$\begin{bmatrix} e^A \\ e^{B_1} \cos \theta_1 \\ e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \dots \\ \exp(B_{\frac{n-1}{2}}) \sin(\theta_{\frac{n-1}{2}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\cos \frac{\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} & \dots & \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} & \dots & \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} & -\sin \frac{(n-1)\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)^2\pi}{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \dots \\ S_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

从 (5) 我们有

$$e^A = \sum_{i=1}^n S_i, \quad e^{B_j} \cos \theta_j = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} S_{1+i} (-1)^{ij} \cos \frac{ij\pi}{n}$$

$$e^{B_j} \sin \theta_j = (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^{n-1} S_{1+i} (-1)^{ij} \sin \frac{ij\pi}{n}, \quad (6)$$

在 (3) 和(6) t_i 和 S_i 有相同形式 (4) 和 (5) 是证明费马大定理的重要公式. 利用 (4) 和(5) 我们发现 n 每个因子都有一个 Fermat 方程. 把 (4) 代入 (5) 我们证明 (5).

$$\begin{bmatrix} e^A \\ e^{B_1} \cos \theta_1 \\ e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \dots \\ \exp(B_{\frac{n-1}{2}}) \sin(\theta_{\frac{n-1}{2}}) \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\cos \frac{\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} & \dots & \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \\ 0 & -\sin \frac{\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} & \dots & \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} & -\sin \frac{(n-1)\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)^2\pi}{2n} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \\ 1 & \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos \frac{(n-1)\pi}{n} & \sin \frac{(n-1)\pi}{n} & \dots & -\sin \frac{(n-1)^2\pi}{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^A \\ 2e^{B_1} \cos \theta_1 \\ 2e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \dots \\ 2 \exp(B_{\frac{n-1}{2}}) \sin(\theta_{\frac{n-1}{2}}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^A \\ 2e^{B_1} \cos \theta_1 \\ 2e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \cdots \\ 2\exp(B_{\frac{n-1}{2}}) \sin(\theta_{\frac{n-1}{2}}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^A \\ e^{B_1} \cos \theta_1 \\ e^{B_1} \sin \theta_1 \\ \cdots \\ \exp(B_{\frac{n-1}{2}}) \sin(\theta_{\frac{n-1}{2}}) \end{bmatrix}, \tag{7}
\end{aligned}$$

其中 $1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\cos \frac{j\pi}{n})^2 = \frac{n}{2}$, $\sum_{j=1}^{n-1} (\sin \frac{j\pi}{n})^2 = \frac{n}{2}$.

从 (3) 我们有

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j) = 1. \tag{8}$$

从(6) 我们有

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j) = \begin{vmatrix} S_1 & S_n & \cdots & S_2 \\ S_2 & S_1 & \cdots & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n & S_{n-1} & \cdots & S_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & (S_1)_1 & \cdots & (S_1)_{n-1} \\ S_2 & (S_2)_1 & \cdots & (S_2)_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n & (S_n)_1 & \cdots & (S_n)_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

其中 $(S_i)_j = \frac{\partial S_i}{\partial t_j}$ [5].

从 (8) 和 (9) 我们有循环行列式

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j) = \begin{vmatrix} S_1 & S_n & \cdots & S_2 \\ S_2 & S_1 & \cdots & S_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ S_n & S_{n-1} & \cdots & S_1 \end{vmatrix} = 1 \tag{10}$$

如 $S_i \neq 0$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 那末 (10) 有无限多有理数解.

设 $S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, S_i = 0$ 其中 $i = 3, 4, \dots, n, S_i = 0$ 是 $n-2$ 不定方程, 有 $n-1$ 变量.

从 (6) 我们有

$$e^A = S_1 + S_2, \quad e^{2B_j} = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2(-1)^j \cos \frac{j\pi}{n}. \quad (11)$$

从(10) 和 (11) 我们有 Fermat 方程

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} B_j) = (S_1 + S_2) \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} (S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2(-1)^j \cos \frac{j\pi}{n}) = S_1^n + S_2^n = 1 \quad (12)$$

例[1]. 设 $n = 15$. 从(3) 我们有

$$\begin{aligned} A &= (t_1 + t_{14}) + (t_2 + t_{13}) + (t_3 + t_{12}) + (t_4 + t_{11}) + (t_5 + t_{10}) + (t_6 + t_9) + (t_7 + t_8) \\ B_1 &= -(t_1 + t_{14}) \cos \frac{\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{2\pi}{15} - (t_3 + t_{12}) \cos \frac{3\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{4\pi}{15} \\ &\quad - (t_5 + t_{10}) \cos \frac{5\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{6\pi}{15} - (t_7 + t_8) \cos \frac{7\pi}{15}, \\ B_2 &= (t_1 + t_{14}) \cos \frac{2\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{4\pi}{15} + (t_3 + t_{12}) \cos \frac{6\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{8\pi}{15} \\ &\quad + (t_5 + t_{10}) \cos \frac{10\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{12\pi}{15} + (t_7 + t_8) \cos \frac{14\pi}{15}, \\ B_3 &= -(t_1 + t_{14}) \cos \frac{3\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{6\pi}{15} - (t_3 + t_{12}) \cos \frac{9\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{12\pi}{15} \\ &\quad - (t_5 + t_{10}) \cos \frac{15\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{18\pi}{15} - (t_7 + t_8) \cos \frac{21\pi}{15}, \\ B_4 &= (t_1 + t_{14}) \cos \frac{4\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{8\pi}{15} + (t_3 + t_{12}) \cos \frac{12\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{16\pi}{15} \\ &\quad + (t_5 + t_{10}) \cos \frac{20\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{24\pi}{15} + (t_7 + t_8) \cos \frac{28\pi}{15}, \\ B_5 &= -(t_1 + t_{14}) \cos \frac{5\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{10\pi}{15} - (t_3 + t_{12}) \cos \frac{15\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{20\pi}{15} \\ &\quad - (t_5 + t_{10}) \cos \frac{25\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{30\pi}{15} - (t_7 + t_8) \cos \frac{35\pi}{15}, \\ B_6 &= (t_1 + t_{14}) \cos \frac{6\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{12\pi}{15} + (t_3 + t_{12}) \cos \frac{18\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{24\pi}{15} \\ &\quad + (t_5 + t_{10}) \cos \frac{30\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{36\pi}{15} + (t_7 + t_8) \cos \frac{42\pi}{15}, \\ B_7 &= -(t_1 + t_{14}) \cos \frac{7\pi}{15} + (t_2 + t_{13}) \cos \frac{14\pi}{15} - (t_3 + t_{12}) \cos \frac{21\pi}{15} + (t_4 + t_{11}) \cos \frac{28\pi}{15} \\ &\quad - (t_5 + t_{10}) \cos \frac{35\pi}{15} + (t_6 + t_9) \cos \frac{42\pi}{15} - (t_7 + t_8) \cos \frac{49\pi}{15}, \\ A + 2 \sum_{j=1}^7 B_j &= 0, \quad A + 2B_3 + 2B_6 = 5(t_5 + t_{10}). \end{aligned} \quad (13)$$

从 (12) 我们有 Fermat 方程

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^7 B_j) = S_1^{15} + S_2^{15} = (S_1^5)^3 + (S_2^5)^3 = 1. \quad (14)$$

从(13) 我们有

$$\exp(A + 2B_3 + 2B_6) = [\exp(t_5 + t_{10})]^5. \quad (15)$$

从 (11) 我们有

$$\exp(A + 2B_3 + 2B_6) = S_1^5 + S_2^5. \quad (16)$$

从(15) 和 (16) 我们有 Fermat 方程

$$\exp(A + 2B_3 + 2B_6) = S_1^5 + S_2^5 = [\exp(t_5 + t_{10})]^5. \quad (17)$$

Euler 证明 (14) 无有理数解对指数 3. 因此我们证明(17) 无有理数解对指数 5[1].

定理. [1-5]. 设 $n = 3P$, 其中 $P > 3$ 是素数. 从(12) 我们有 Fermat 方程

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{3P-1} B_j) = S_1^{3P} + S_2^{3P} = (S_1^P)^3 + (S_2^P)^3 = 1. \quad (18)$$

从 (3) 我们有

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} B_{3j}) = [\exp(t_P + t_{2P})]^P. \quad (19)$$

从 (11) 我们有

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} B_{3j}) = S_1^P + S_2^P. \quad (20)$$

从 (19) 和 (20) 我们有 Fermat 方程

$$\exp(A + 2 \sum_{j=1}^{\frac{P-1}{2}} B_{3j}) = S_1^P + S_2^P = [\exp(t_P + t_{2P})]^P. \quad (21)$$

Euler 证明 (18) 无有理数解对指数 3. 因此我们证明 (21) 无有理数解对 $P > 3$ [1-5].

参考文献

- [1] 蒋春暄, 费马大定理已被证明. 潜科学杂志, 2,17-20(1992).
<http://www.wbabin.net/math/xuan47.pdf>.
- [2] Jiang, C-X, On the factorization theorem of circulant determinant, Algebras, Groups and Geometries, 11. 371-377(1994), MR. 96a: 11023, <http://www.wbabin.net/math/xuan45.pdf>
- [3] Jiang, C-X, Fermat last theorem was proved in 1991, Preprints (1993). In: Fundamental open problems in science at the end of the millennium, T.Gill, K. Liu and E. Trelle (eds). Hadronic Press, 1999, P555-558. <http://www.wbabin.net/math/xuan46.pdf>.
- [4] Jiang, C-X, On the Fermat-Santilli theorem, Algebras, Groups and Geometries, 15. 319-349(1998)
- [5] Jiang, C-X, Foundations of Santilli Isonumber Theory with applications to new cryptograms, Fermat's theorem and Goldbach's Conjecture. Inter. Acad. Press. 2002. MR2004c:11001, <http://www.wbabin.net/math/xuan13.pdf>. <http://www.i-b-r.org/docs/jiang.pdf>