The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 7

一、高次代数方程组

在文献[ ]中，我们曾得到过如下的

定理1.1 若K是由1.2式所定义的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末流形K有如下的参数表达式

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \bar{\alpha} \\
\bar{\beta} &= \bar{\beta} \\
\bar{\xi} &= \frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-2\bar{\alpha}\bar{\beta}}{2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}} \\
\bar{\eta} &= \frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}} \\
P_1 &= \frac{1-3\bar{\alpha}}{2(1-\bar{\alpha})} \\
P_2 &= \frac{\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})} \\
P_3 &= \frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})} \\
P_4 &= \frac{\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}{\bar{\alpha}(1-\bar{\beta})}
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots 1.1$$

式中 $(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in F_0$ 且 $F_0=\left\{(\bar{\alpha},\bar{\beta})\,\middle|\,0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\alpha}-\bar{\beta}\neq 0\right\}$。

如果我们观察一下1.1式中的后四个式子的话那末我们就能发现，四个实参数 P_1, P_2, P_3, P_4 完

们之间究竟有没有联系？回答是肯定的。为了寻求并找到它们之间的联系，我们须要证明如下的

引理 1　若 k_1, k_2, k_3, k_4 是四个实参数，它们与 P_1, P_2, P_3, P_4 四个实参数之间有如次关系

$$k_1 = P_1,\quad k_2 = \frac{1}{P_2},\quad k_3 = P_3,\quad k_4 = \frac{1}{P_4} \qquad \cdots\cdots 1.2$$

那末 1.1 式中的后四个式子与下列的关于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 的方程组

$$x_1 + \frac{2k_1 - 1}{3 - 2k_1} x_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.3$$

$$x_2 + \frac{2k_3 - 1}{3 - 2k_3} x_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.4$$

$$x_3 + \frac{2k_1 - 1}{3 - 2k_1} x_6 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.5$$

$$x_4 + \frac{2k_3 - 1}{3 - 2k_3} x_6 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.6$$

$$x_4 + \frac{2k_1 - 1}{3 - 2k_1} x_7 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.7$$

$$x_5 + \frac{2k_3 - 1}{3 - 2k_3} x_7 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.8$$

$$x_1 + k_2^2 x_3 + (k_2^2 - 2) x_4 - k_2^2 x_6 + x_7 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.9$$

$$x_2 + (k_4^2 - 2) x_4 + k_4^2 x_5 + x_6 - k_4^2 x_7 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.10$$

$$x_1 - x_4 x_6 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.11$$

$$x_2 - x_4 x_7 = 0 \quad \cdots\cdots 1.12$$

$$x_3 - x_6^2 = 0 \quad \cdots\cdots 1.13$$

$$x_4 - x_6 x_7 = 0 \quad \cdots\cdots 1.14$$

$$x_5 - x_7^2 = 0 \quad \cdots\cdots 1.15$$

完全等价。

证 根据1.2式我们可将1.1式中的后四个式子改写为下列形式

$$k_1 = \frac{1-3\bar{\alpha}}{2(1-\bar{\alpha})} \quad \cdots\cdots 1.16$$

$$\frac{1}{k_2} = \sqrt{\frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})^2}} \quad \cdots\cdots 1.17$$

$$k_3 = \frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})} \quad \cdots\cdots 1.18$$

$$\frac{1}{k_4} = \sqrt{\frac{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{\bar{\alpha}(1-\bar{\beta})^2}} \quad \cdots\cdots 1.19$$

如果我们将1.17及1.19两个式子有理化后，那末这四个式子显然可进一步改写为下列形式

$$(3-2k_1)\bar{\alpha} + 2k_1 - 1 = 0 \quad \cdots\cdots 1.20$$

$$(3-2k_3)\bar{\beta} + 2k_3 - 1 = 0 \quad \cdots\cdots 1.21$$

$$\bar{\alpha}^2\bar{\beta} + k_2^2\bar{\alpha}^2 + (k_2^2-2)\bar{\alpha}\bar{\beta} - k_2^2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = 0 \quad \cdots\cdots 1.22$$

$$\bar{\alpha}\bar{\beta}^2 + (k_4^2-2)\bar{\alpha}\bar{\beta} + k_4^2\bar{\beta}^2 + \bar{\alpha} - k_4^2\bar{\beta} = 0 \quad \cdots\cdots 1.23$$

現在我们將 k_1, k_2, k_3, k_4 均看作為实參數而將 $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\beta}$ 看作為變數，那樣 1.20 及 1.21 兩式在几何上均表示一條依次依賴於參數 k_1 及參數 k_3 的直線。同時，1.22 及 1.23 兩式在几何上均表示一條依次依賴於參數 k_2 及參數 k_4 的三次曲線。从代數几何來看，1.20、1.21、1.22 及 1.23 四个式子同時成立在几何上意味着它们各自相應的曲線要有交。

由定理 1.1 我们得知有 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in F_0$，根據域 F_0 的定義我们立刻得知它有

$$\bar{\alpha} > 0, \quad \bar{\beta} > 0 \qquad \cdots\cdots 1.24$$

由此得知如果關於 $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\beta}$ 的聯立非線性方程組 (1.20~1.23) 有解的話，它必須是一組全不為零的解。

今設 $u = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 是滿足條件 1.24 的方程組 (1.20~1.23) 的一組解，我们依次用 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha}\bar{\beta}$ 去乘 1.20 及 1.21 兩个式子，這樣我们一共可以得到如下六个式子

$$(3-2k_1)\bar{\alpha}^2+(2k_1-1)\bar{\alpha}=0 \qquad \cdots\cdots 1.25$$

$$(3-2k_1)\bar{\alpha}\bar{\beta}+(2k_1-1)\bar{\beta}=0 \qquad \cdots\cdots 1.26$$

$$(3-2k_1)\bar{\alpha}^2\bar{\beta}+(2k_1-1)\bar{\alpha}\bar{\beta}=0 \qquad \cdots\cdots 1.27$$

$$(3-2k_3)\bar{\alpha}\bar{\beta}+(2k_3-1)\bar{\alpha}=0 \qquad \cdots\cdots 1.28$$

$$(3-2k_3)\bar{\beta}^2+(2k_3-1)\bar{\beta}=0 \qquad \cdots\cdots 1.29$$

$$(3-2k_3)\bar{\alpha}\bar{\beta}^2+(2k_3-1)\bar{\alpha}\bar{\beta}=0 \qquad \cdots\cdots 1.30$$

因为方程组（1.20~1.23）与方程组（1.22~1.30）是完全等价的，所以我们转而来研究方程组（1.22~1.30）。显然，这是一组关於$\bar{\alpha}$及$\bar{\beta}$的超定非线性代数方程。为了研究上的方便起见，我们可置

$$x_1=\bar{\alpha}^2\bar{\beta},\quad x_2=\bar{\alpha}\bar{\beta}^2,\quad x_3=\bar{\alpha}^2,\quad x_4=\bar{\alpha}\bar{\beta},$$

$$x_5=\bar{\beta}^2,\quad x_6=\bar{\alpha},\quad x_7=\bar{\beta} \qquad \cdots\cdots 1.31$$

如此，方程组（1.22~1.30）可改写为下列形式

$$(3-2k_1)x_1+(2k_1-1)x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.32$$

$$(3-2k_3)x_2+(2k_3-1)x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.33$$

$$(3-2k_1)x_3+(2k_1-1)x_6=0 \qquad \cdots\cdots 1.34$$

$$(3-2k_3)x_4+(2k_3-1)x_6=0 \qquad \cdots\cdots 1.35$$

$$(3-2k_1)x_4+(2k_1-1)x_7=0 \qquad \cdots\cdots 1.36$$

$$(3-2k_3)x_5+(2k_3-1)x_7=0 \qquad \cdots\cdots 1.37$$

$$x_1+k_2^2x_3+(k_2^2-2)x_4-k_2^2x_6+x_7=0 \qquad \cdots\cdots 1.38$$

$$x_2+(k_4^2-2)x_4+k_4^2x_5+x_6-k_4^2x_7=0 \qquad \cdots\cdots 1.39$$

此外，在1.31式中如果我们消去α及β那末能够得到如下五个非线性关係

$$x_1-x_4x_6=0,\quad x_2-x_4x_7=0,\quad x_3-x_6^2=0,$$

$$x_4-x_6x_7=0,\quad x_5-x_7^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.40$$

另一方面，以1.20及1.21两式我们可以断言：定有 $3-2k_1\neq 0$ 以及 $3-2k_3\neq 0$。如若不然，设有 $3-2k_1=0$ 那末由1.20式我们立刻得知必有

$$2k_1-3=0,\quad 2k_1-1=0 \qquad \cdots\cdots 1.41$$

这是两个关於 k_1 的一次代数方程，它们同时成立的充分而必要条件是这两个一次方程要有公根。但是，这两个一次方程恒没有公根，由此产生矛盾。因此，我们得知定有 $3-2k_1\neq 0$。同

理，我们能够证明定有 $3-2k_3 \neq 0$。这样，我们证明了定有

$$3-2k_1 \neq 0, \quad 3-2k_3 \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.42$$

根据关于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 的齐次线性方程组（1.32～1.39）及五个非线性关系 1.40 并注意到 1.42 式，我们立刻得出了方程组（1.3～1.15）。这就证明了引理 1，引理 1 至此全部证完。

从方程组（1.3～1.15）我们可以看出，这是线性内涵与非线性内涵业已分离开的方程组。如果我们置

$$X = (x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_7) \qquad \cdots\cdots 1.43$$

那末齐次线性方程组（1.3～1.10）可以改写为下列形式

$$AX^T = 0 \qquad \cdots\cdots 1.44$$

这里 X^T 表示行矩阵 X 的转置矩阵，显然它是一个列矩阵。而 A 表示齐次线性方程组（1.3～1.10）的相应的系数矩阵，即有

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\\ 1 & 0 & k_2^2 & k_2^2-2 & 0 & -k_2^2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & k_4^2-2 & k_4^2 & 1 & -k_4^2\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 1.45$$

现在，我们来证明如下的

引理2　若A是由1.45式所定义的含实参数k_1, k_2, k_3, k_4的八行七列矩阵，那末恒有$\operatorname{rank} A \geqslant 6$。

证　我们考虑矩阵A的一个六阶子式。譬如，我们研究矩阵A不含第四列以及第七行与第八行元素的六阶子式。如果我们将这个六阶子式记作K，那末根据六阶子式K的取法我们显然有

$$K=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots 1.46$$

由1.46式并根据行列式計算中的Laplace定理，我们有

$$K=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\cdot\frac{2k_3-1}{3-2k_3} \quad \cdots\cdots 1.47$$

但是，由1.20及1.21两式并根据1.24式及1.42式我们得知定有

$$2k_1-1 \neq 0, \quad 2k_3-1 \neq 0 \quad \cdots\cdots 1.48$$

由此得知必有

$$K \neq 0 \quad \cdots\cdots 1.49$$

由1.49式并根据矩阵秩的定义，我们立刻得到

$$\operatorname{rank} A \geq 6 \quad \cdots\cdots 1.50$$

这就证明了引理2，引理2至此证完。

引理3　齐次线性方程组（1.3～1.10）有非零解的充分和必要条件是 rank A＝6。

证　必要性。

如若不然，设 rank A＝7。由假设知矩阵A满秩，故由矩阵秩的定义得知此时矩阵A至少有一个七阶子式不等于零。不失一般性，我们设矩阵A不含第八行元素的七阶子式不等于零。由此得知齐次线性方程组（1.3～1.10）中它的前七个齐次方程的系数行列式不等于零。但是，由齐次线性方程组理论得知此时方程组（1.3～1.10）有而且只有零解。然而此与齐次线性方程组（1.3～1.10）有非零解这一假定相违，由此产生矛盾

。因此必有 rank $A \leq 6$，由此并根据引理2我们立刻得到

$$\operatorname{rank} A = 6 \qquad \cdots\cdots 1.51$$

这就证明了必要性。必要性证完。

充分性。

今设 rank $A=6$，根据矩阵秩的定义我们得知齐次线性方程组(1.3~1.10)中有而且只有六个是线性无关的。由1.49式我们得知方程组(1.3~1.10)中前六个齐次方程是相互独立的。如果我们将 x_4 看作为参数，由於线性方程组(1.3~1.8)的係数行列式 $K \neq 0$ 故它必定有解。这就证明了充分性。充分性证完。

综上所述，我们证明了引理3。

引理4 方程组(1.3~1.15)有非零解的充分而必要条件是 rank $A=6$。

证 由引理3得知必要性是十分显然的。今来证明充分性。

。因此必有 $\mathrm{rank}\,A \leq 6$，由此并根据引理2我们立刻得到

$$\mathrm{rank}\,A = 6 \qquad \cdots\cdots 1.51$$

这就证明了必要性。必要性证完。

充分性。

今设 $\mathrm{rank}\,A = 6$，根据矩阵秩的定義我们得知齐次线性方程组(1.3~1.10)中有而且只有六个是线性无关的。由1.49式我们得知方程组(1.3~1.10)中前六个齐次方程是相互独立的。如果我们将 x_4 看作为参数，由於线性方程组(1.3~1.8)系的係数行列式 $K \neq 0$ 故它必定有解。这就证明了充分性。充分性证完。

综上所述，我们证明了引理3。

引理4　方程组(1.3~1.15)有非零解的充分而必要条件是 $\mathrm{rank}\,A = 6$。

证　由引理3得知必要性是十分显然的。今来证明充分性。

的五个非线性关係式里去。这样，我们立刻能够得到关於 x_4 的如下五个代数方程

$$\frac{3-2k_1}{2k_1-1}x_4^2-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.53$$

$$\frac{3-2k_3}{2k_3-1}x_4^2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.54$$

$$\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}x_4^2-x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.55$$

$$\left(\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\right)^2x_4^2-\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{2k_3-1}{3-2k_3}x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.56$$

$$\left(\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\right)^2x_4^2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}x_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.57$$

如果我们置

$$y_1=x_4^2\,,\qquad y_2=x_4 \qquad \cdots\cdots 1.58$$

那末上述五个代数方程(1.53~1.57)立刻可以改写为下列形式

$$\frac{3-2k_1}{2k_1-1}y_1-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}y_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.59$$

$$\frac{3-2k_3}{2k_3-1}y_1-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}y_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.60$$

$$\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}y_1-y_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.61$$

$$\left(\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\right)^2y_1-\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{2k_3-1}{3-2k_3}y_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.62$$

$$\left(\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\right)^2y_1-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}y_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.63$$

这是一组关於 y_1 及 y_2 的齐次线性方程组。此外

，在1.58式中如果消去x_4，那末我们又能得到y_1与y_2的一个非线性关系

$$y_1 - y_2^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.64$$

因为代数方程组（1.53~1.57）与代数方程组（1.59~1.64）是完全等价的，所以我们转而来研究关于y_1及y_2的代数方程组（1.59~1.64）。显然，方程组（1.59~1.64）它的线性内涵与非线性内涵已经分离开来了。我们现在先来研究关于y_1及y_2的齐次线性方程组（1.59~1.63）。今设其系数矩阵是B，即有

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3-2k_1}{2k_1-1} & -\frac{2k_3-1}{3-2k_3} \\ \frac{3-2k_3}{2k_3-1} & -\frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ \frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1} & -1 \\ \left(\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\right)^2 & -\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{2k_3-1}{3-2k_3} \\ \left(\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\right)^2 & -\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots 1.65$$

由齐次线性方程组理论得知，齐次线性方程组（1.59~1.63）有非零解的充分和必要条件是

$$\operatorname{rank} B = 1 \qquad \cdots\cdots 1.66$$

现在我们须要如下的

7° 若将矩阵 B 的每一行看作为一个二维向量，且记

$$\vec{b_1} = \frac{3-2k_1}{2k_1-1}\vec{i} - \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\vec{j}$$

$$\vec{b_2} = \frac{3-2k_3}{2k_3-1}\vec{i} - \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\vec{j}$$

$$\vec{b_3} = \frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\vec{i} - \vec{j}$$

$$\vec{b_4} = \left(\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\right)^2\vec{i} - \frac{3-2k_1}{2k_1-1}\cdot\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\vec{j}$$

$$\vec{b_5} = \left(\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\right)^2\vec{i} - \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\cdot\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\vec{j}$$

那末 $\operatorname{rank} B = 1$ 的充分和必要条件是

$$\vec{b_1}\times\vec{b_3} = 0, \quad \vec{b_2}\times\vec{b_3} = 0, \quad \vec{b_3}\times\vec{b_4} = 0,$$

$$\vec{b_3}\times\vec{b_5} = 0 \qquad \cdots\cdots 1.67$$

证 必要性是明显的。下面来证明它的充分性。

今设 1.67 中的四个式子恒成立。由於向量 $\vec{b_3}$ 决非是一个零向量，因此由向量代数得知向量代数方程

$$\vec{b_1} \times \vec{b_3} = 0, \quad \vec{b_2} \times \vec{b_3} = 0$$

在几何上意味着向量 $\vec{b_1}$ 与 $\vec{b_2}$ 均同向量 $\vec{b_3}$ 共线。若设向量 $\vec{b_3}$ 所在的直线为 l，那末由上面的结论得知向量 $\vec{b_1}$ 与向量 $\vec{b_2}$ 都在直线 l 上。另外，由1.67中的后两个式子

$$\vec{b_3} \times \vec{b_4} = 0, \quad \vec{b_3} \times \vec{b_5} = 0$$

我们得知向量 $\vec{b_4}$ 与 $\vec{b_5}$ 也都在直线 l 上。综上所述，向量 $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}, \vec{b_5}$ 都在直线 l 上。故知其中任意两个向量都是共线向量，所以由向量代数及矩阵秩的定义得知定有 $\mathrm{rank}\, B = 1$。这就证明了充分性。

综上所述，我们证明了 $1°$ 的结论。

$2°$ 若 $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}, \vec{b_4}, \vec{b_5}$ 是 $1°$ 中所定义的五个二维向量，那末恒有

$$\vec{b_1} \times \vec{b_3} = 0, \quad \vec{b_2} \times \vec{b_3} = 0, \quad \vec{b_3} \times \vec{b_4} = 0,$$

$$\vec{b_3} \times \vec{b_5} = 0$$

证 用直接验证极易证明诸式成立。

根据 $1°$ 及 $2°$ 我们得知 1.66 式恒成立，由此得知齐次线性方程组（1.59~1.63）中只有一个式子是独立的。为了明确起见，我们就取 1.61 式作为独立的式子。显然，齐次线性方程 1.61 式它的一般解是

$$y_1 = y_1 \quad , \quad y_2 = \frac{3-2k_1}{2k_1-1} \cdot \frac{3-2k_3}{2k_3-1} y_1 \qquad \cdots\cdots 1.68$$

为了得到既满足齐次线性方程组（1.59~1.63）又满足非线性关係 1.64 的解，我们可将齐次线性方程 1.61 式它的一般解 1.68 代入到非线性关係 1.64 式里去。如此，我们立刻得到关於 y_1 的一个二次方程

$$\left(\frac{3-2k_1}{2k_1-1}\right)^2 \left(\frac{3-2k_3}{2k_3-1}\right)^2 y_1^2 - y_1 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.69$$

由 1.24 及 1.31 两式得知恒有 $x_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \cdots, 7)$，由此及 1.58 式我们得知定有 $y_1 \neq 0$。故由二次方程 1.69 式立得

$$y_1 = \left(\frac{2k_1-1}{3-2k_1} \cdot \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\right)^2 \qquad \cdots\cdots 1.70$$

由 1.68 及 1.70 两式我们又能得到

$$y_2 = \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \cdot \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \qquad \cdots\cdots 1.71$$

根据1.48式我们得知由1.70及1.71两式所确定的y_1及y_2的确满足条件

$$y_1 \neq 0 \, , \quad y_2 \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.72$$

由1.58及1.71两式我们立刻得到

$$x_4 = y_2 = \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \cdot \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \qquad \cdots\cdots 1.73$$

根据1.52及1.73两式我们可有

$$x_1 = -\left(\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\right)^2 \frac{2k_3-1}{3-2k_3}$$

$$x_2 = -\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\left(\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\right)^2$$

$$x_3 = \left(\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\right)^2$$

$$x_4 = \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \cdot \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \qquad \cdots\cdots 1.74$$

$$x_5 = \left(\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\right)^2$$

$$x_6 = -\frac{2k_1-1}{3-2k_1}$$

$$x_7 = -\frac{2k_3-1}{3-2k_3}$$

这就证明了充分性。充分性全部证完。

综上所述，我们证明了引理4。引理4至此全部证完。

我们还有如下的

引理5　若将矩阵A的每一行看作为一个七维向量，且記

$$\vec{v_1} = \vec{e_1} + \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\vec{e_4}$$

$$\vec{v_2} = \vec{e_2} + \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\vec{e_4}$$

$$\vec{v_3} = \vec{e_3} + \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\vec{e_6}$$

$$\vec{v_4} = \vec{e_4} + \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\vec{e_6}$$

$$\vec{v_5} = \vec{e_4} + \frac{2k_1-1}{3-2k_1}\vec{e_7}$$

$$\vec{v_6} = \vec{e_5} + \frac{2k_3-1}{3-2k_3}\vec{e_7}$$

$$\vec{v_7} = \vec{e_1} + k_2^2\vec{e_3} + (k_2^2-2)\vec{e_4} - k_2^2\vec{e_6} + \vec{e_7}$$

$$\vec{v_8} = \vec{e_2} + (k_4^2-2)\vec{e_4} + k_4^2\vec{e_5} + \vec{e_6} - k_4^2\vec{e_7}$$

这里 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_7}$ 是七维向量空间 K^7 的基。那末，$\operatorname{rank} A = 6$ 的充分和必要条件是向量 $\vec{v_7}$ 与 $\vec{v_8}$ 均可用 $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6}$ 线性表出。

証　我们取向量集

$$S = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}, \vec{v_6}, \vec{v_7}, \vec{v_8}\}$$

先来証明如下的

必要性。

今設 rank $A=6$，由矩陣秩的定義得知此時矩陣A的八个七阶子式全都等於零。如果我们排作两个合成矩陣

$$M_1=(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\vec{v_3}|\vec{v_4}|\vec{v_5}|\vec{v_6}|\vec{v_7})$$

$$M_2=(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\vec{v_3}|\vec{v_4}|\vec{v_5}|\vec{v_6}|\vec{v_8})$$

那末由 rank $A=6$ 我们立刻得知必有

$$|M_1^T|=0\ ,\quad |M_2^T|=0 \qquad \cdots\cdots 1.75$$

由此得知定有

$$|M_1|=0\ ,\quad |M_2|=0 \qquad \cdots\cdots 1.76$$

現在，我们根據向量空间中向量的线性相关与线性无关的行列式判别法得知向量組

$$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4},\vec{v_5},\vec{v_6},\vec{v_7} \qquad \cdots\cdots 1.77$$

及

$$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4},\vec{v_5},\vec{v_6},\vec{v_8} \qquad \cdots\cdots 1.78$$

都是线性相关的。

另一方面，如果我们置

$$M=(\vec{v_1}|\vec{v_2}|\vec{v_3}|\vec{v_4}|\vec{v_5}|\vec{v_6})$$

由1.46及1.49兩式得知矩陣M的轉置矩陣M^T至少有一个六階子式K不等於零。根據向量的線性無关的行列式判别法我们立刻得知，向量組

$$\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3},\vec{v_4},\vec{v_5},\vec{v_6} \quad \cdots\cdots 1.79$$

必定是線性無关的。

由1.77、1.78及1.79并根據向量的線性相关理論我们得知，向量$\vec{v_7}$及向量$\vec{v_8}$均可由向量組1.79唯一地線性表出。这就証明了必要性，必要性至此証完。

充分性。

今設向量$\vec{v_7}$及向量$\vec{v_8}$均可由向量組1.79唯一地線性表出。显然，向量組1.79中任意一个向量均可由向量組1.79線性表出。因此，向量集S中任意一个向量都可由線性無关的向量組1.79線性表出。由此并根據向量集的極大無关組的理論得知，向量組1.79就是向量集S中的極大線性無关組。

由1.79并根据向量集的秩的定义我们得知，向量集S的秩应是

$$r(S)=6 \qquad \cdots\cdots 1.80$$

由1.80式并根据向量集的秩的理论我们得知，向量集S中任意七个向量线性相关。由此我们立刻得知矩阵A的全体七阶子式全都等於零。由此并根据矩阵秩的定义我们立得

$$\operatorname{rank} A=6 \qquad \cdots\cdots 1.81$$

这就证明了充分性，充分性至此证完。

综上所述，我们证明了引理5。引理5至此全部证完。

引理6　$\operatorname{rank} A=6$的充分和必要条件是四个实参数k_1, k_2, k_3, k_4满足下列两个代数方程

$$\frac{2(2k_1-1)k_2^2}{(3-2k_1)^2}-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\left[1-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\left(k_2^2-2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\right)\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.82$$

$$\frac{2(2k_3-1)k_4^2}{(3-2k_3)^2}-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\left[1-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\left(k_4^2-2-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\right)\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.83$$

证　由引理5得知，$rank\,A=6$ 的充分和必要条件是向量 $\vec{v_7}$ 及向量 $\vec{v_8}$ 均可由线性无关的向量组1.79唯一地线性表出。根据引理5的证明我们还知道，上述条件等价于1.75式中的两个式子同时成立。如果我们置

$$J_1=\left|M_1^T\right|,\quad J_2=\left|M_2^T\right| \qquad \cdots\cdots 1.84$$

那末立刻可以得知七阶行列式 J_1 及 J_2 依次是矩阵A的不含第八行元素及不含第七行元素的两个七阶子式。因此，我们有

$$J_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \\ 1 & 0 & k_2^2 & k_2^2-2 & 0 & -k_2^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$J_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \\ 0 & 1 & 0 & k_4^2-2 & k_4^2 & 1 & -k_4^2 \end{vmatrix}$$

在具体計算行列式J_1時，可先将它変为

$$J_1=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2k_1-1}{3-2k_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2k_3-1}{3-2k_3} \\ 0 & 0 & 0 & k_2^2-2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1} & 0 & -\frac{2k_2^2}{3-2k_1} & 1 \end{vmatrix}$$

利用行列式計算中的Laplace定理，我们立刻继续得到

$$J_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&0&\frac{2k_3-1}{3-2k_3}&0\\1&0&0&\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\\0&1&0&\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\\k_2^2-2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}&0&-\frac{2k_2^2}{3-2k_1}&1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}1&\frac{2k_3-1}{3-2k_3}&0\\1&0&\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\\k_2^2-2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}&-\frac{2k_2^2}{3-2k_1}&1\end{vmatrix}=-\left\{\frac{2(2k_1-1)k_2^2}{(3-2k_1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\left[1-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\left(k_2^2-2-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\right)\right]\right\}\quad\cdots\cdots 1.85$$

完全类似地，对于J_2我们有

$$J_2=-\left\{\frac{2(2k_3-1)k_2^2}{(3-2k_3)^2}-\frac{2k_1-1}{3-2k_1}\left[1-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\left(k_2^2-2-\frac{2k_3-1}{3-2k_3}\right)\right]\right\}$$

$$\cdots\cdots 1.86$$

根据1.75、1.84、1.85及1.86四个式子，我们立刻得到1.82式与1.83式。这就证明了引理6，引理6至此全部证完。

现在我们有如下的

定理1.2　若K是由1.1式所表示的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末当$Z\in K$且

$$Z=(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta},P_1,P_2,P_3,P_4)$$

時，其局部坐标 P_1,P_2,P_3,P_4 必须满足下列高次方程组

$$8P_1^2P_3-4P_1^2-8P_1P_3-4P_1+2(1+4P_2^2)P_3+3-4P_2^2=0 \quad \cdots\cdots 1.87$$

$$8P_1P_3^2-8P_1P_3-4P_3^2+2(1+4P_4^2)P_1-4P_3+3-4P_4^2=0 \quad \cdots\cdots 1.88$$

$$(P_1-P_3)(P_2+P_4)+(1-P_1-P_3)(P_2-P_4)=0 \quad \cdots\cdots 1.89$$

$$4P_2^2P_4^2+P_2^2(2P_3-1)^2-4P_2P_4=0 \quad \cdots\cdots 1.90$$

証 由定理1.1及諸引理得知，关於 $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\beta}$ 的超定非线性方程组（1.20~1.23）有全不为零解的充分和必要条件是四个实参数 t_1,t_2,t_3,t_4 满足代数方程组（1.82~1.83）。如果将关係式1.2代入到代数方程组（1.82~1.83）里去，整理后我们立刻得到1.87及1.88两个方程式。此外，由文献[ ]我们得知四个实参数 P_1,P_2,P_3,P_4 还必须满足下列两个非线性关係

$$(P_1-P_3)(P_2+P_4)+(1-P_1-P_3)(P_2-P_4)=0$$

$$4P_2^2P_4^2+P_2^2(2P_3-1)^2-4P_2P_4=0$$

这就是1.89及1.90两式。由此我们得知四个实参数P_1, P_2, P_3, P_4必须满足高次方程组(1.87~1.90)。这就证明了定理1.2，定理1.2至此证完。

方程组(1.87~1.90)是一组关于P_1, P_2, P_3, P_4的高次方程。从几何上来看，1.87及1.88两式在几何上表示的是四维空间中的三次超曲面。而1.89及1.90两式在几何上表示的是四维空间中的二次超曲面及四次超曲面。因此，代数方程组(1.87~1.90)有无实数解的问题在几何上意味着它们所表示的四个超曲面在四维空间中有交或无交的问题。

完全是为了研究的方便起见，我们暂将方程组(1.87~1.90)中的P_2与P_4看作为实参数而将P_1与P_3看作为变数。如此，1.87及1.88两式在几何上表示的是依次依赖於参数P_2及参数P_4的两条三次曲线。当然，1.89式在几何上表示一条依赖於两个参数P_2与P_4的直线。而且，如果1.90式在几

何上表示一对依赖於两个参数 P_2 与 P_4 的相互平行的直线的话，那末它的充分而必要条件是两个实参数 P_2 与 P_4 满足如下判别条件

$$P_2^3 P_4(1-P_2P_4)\geq 0 \qquad \cdots\cdots 1.91$$

现在，方程组（1.87~1.90）有无实数解的问题在几何上相应於它们各自所表示的曲线或直线在实际上是有交还是无交的问题。

如果我们将1.89及1.90两式改写为

$$2P_4P_1-2P_2P_3+P_2-P_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.92$$

$$4P_2^2P_3^2-4P_2^2P_3+4P_2^2P_4^2+P_2^2-4P_2P_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.93$$

另一方面，我们从1.1式立刻容易得知当 $(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in F_0$ 时有

$$P_2>0, \quad P_4>0 \qquad \cdots\cdots 1.94$$

由此再根据1.93式我们立得

$$4P_2P_3^2-4P_2P_3+4P_2P_4^2+P_2-4P_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.95$$

现在，我们转而来研究方程组1.87、1.88、1.92、1.95。为了研究上的方便起见，我们作代换

$$P_1=\frac{x+1}{2},\quad P_2=\frac{u}{2},\quad P_3=\frac{y+1}{2},\quad P_4=\frac{v}{2} \quad \cdots\cdots 1.96$$

将1.96式中的諸关係依次代入到1.87、1.88、1.92、1.95四个式子里去，经整理后便能得到如下的关於x, y, u, v的高次方程組

$$x^2y+u^2y-4x=0 \quad \cdots\cdots 1.97$$

$$xy^2+xv^2-4y=0 \quad \cdots\cdots 1.98$$

$$vx-uy=0 \quad \cdots\cdots 1.99$$

$$uy^2+uv^2-4v=0 \quad \cdots\cdots 1.100$$

如果我们将四元高次方程組（1.97～1.100）的每一个式子看作为四维空间中的一个流形的話，那末1.99式在几何上表示的是四维空间中的二次超曲面而其它三个式子在几何上表示的均是四维空间中的三次超曲面。从代数结构来看，四元高次方程組（1.97～1.100）它的结构已经十分簡單的了。

在事实上，对於四元高次方程組（1.97～1.100）我们有如下的

引理 7　四元高次方程组 $(1.97\sim1.100)$ 有解的充分必要条件是 x, u, v 满足下列关系

$$x^2v+u^2v-4u=0$$

证　现在我们无妨可将 y 看作为未知数，而将 x, u, v 看作为参数。如此，我们可将四元高次方程组 $(1.97\sim1.100)$ 改写为下列形式

$$(x^2+u^2)y-4x=0 \qquad \cdots\cdots 1.101$$

$$xy^2-4y+xv^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.102$$

$$uy-vx=0 \qquad \cdots\cdots 1.103$$

$$uy^2+uv^2-4v=0 \qquad \cdots\cdots 1.104$$

如果我们置

$$x_1=y^2,\quad x_2=y \qquad \cdots\cdots 1.105$$

那末关于 x, y, u, v 的高次方程组 $(1.101\sim1.104)$ 立刻可以改写为

$$(x^2+u^2)x_2=4x \qquad \cdots\cdots 1.106$$

$$xx_1-4x_2=-xv^2 \qquad \cdots\cdots 1.107$$

$$ux_2=vx \qquad \cdots\cdots 1.108$$

的形式。因此我们立刻得知，若四元高次方程组（1.97～1.100）有解1.111的话那末此时1.131式必定成立。计算1.131式中的两个三阶行列式后，我们立刻得到

$$x^2\left[v(x^2+u^2)-4u\right]=0,\quad x\left[v(x^2+u^2)-4u\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.134$$

根据结论2°我们立刻得知，1.134成立的充分必要条件是 x, u, v 满足下列条件

$$x^2v+u^2v-4u=0 \qquad \cdots\cdots 1.135$$

这就证明了必要性，必要性至此证完。

其次，我们来证明下面的

充分性。

今设 x, u, v 满足1.135式中的关係。由此得知，此时1.134式必定成立。因此我们得知，此时1.131式肯定成立。由向量代数得知，此时1.126式必定成立。由此并根据结论3°我们立刻得知，定有

$$\mathrm{rank}\ B=2 \qquad \cdots\cdots 1.124$$

由1.124式并根据结论1°，我们立刻得到

显然，矩阵A及B依次是关於x_1及x_2的线性方程组(1.106~1.109)的係数矩阵及相应的增广矩阵。由线性方程组理论得知，线性方程组(1.106~1.109)有解的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,B \qquad \cdots\cdots 1.113$$

现在，我们需要如下的

1° $\mathrm{rank}\,A=2$。

证 因为A是一个四行二列矩阵，故根据矩阵秩的定义我们得知定有

$$\mathrm{rank}\,A\leq 2 \qquad \cdots\cdots 1.114$$

另一方面，如果我们考虑A的一个二阶子式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & u \\ u & 0 \end{vmatrix}=-u^2 \qquad \cdots\cdots 1.115$$

根据1.94及1.93两式，我们立刻得知必有

$$I=-4p_2^2<0 \qquad \cdots\cdots 1.116$$

由此并根据矩阵秩的定义，我们又將得出

$$rank\, A \geq 2 \qquad \cdots\cdots 1.117$$

由1.114及1.117两式我们立刻得到

$$rank\, A = 2 \qquad \cdots\cdots 1.118$$

这就证明了1°的结论。

2° 若x, y, u, v是四个由1.96式所定义的元素，那末我们恒有

$$x<0\ ,\quad y<0\ ,\quad u>0\ ,\quad v>0 \qquad \cdots\cdots 1.119$$

证：根据1.96式我们显然有

$$x = 2p_1 - 1\ ,\quad y = 2p_3 - 1\ ,\quad u = 2p_2\ ,$$
$$v = 2p_4 \qquad \cdots\cdots 1.120$$

由此并根据1.94式我们立刻得知有

$$u>0\ ,\quad v>0 \qquad \cdots\cdots 1.121$$

由1.120式并根据1.1式我们又可将x及y改写为

$$x = -\frac{2\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}\ ,\quad y = -\frac{2\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \qquad \cdots\cdots 1.122$$

由此并根据1.1式中域F_0的定义我们立刻得知，若$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in F_0$那末定有

$$\mathrm{rank}\, A \geq 2 \qquad \cdots\cdots 1.117$$

由1.114及1.117两式我们立刻得到

$$\mathrm{rank}\, A = 2 \qquad \cdots\cdots 1.118$$

这就证明了1°的结论。

2° 若x, y, u, v是四个由1.96式所定义的数元，那末我们恒有

$$x < 0 \quad , \quad y < 0 \quad , \quad u > 0 \quad , \quad v > 0 \qquad \cdots\cdots 1.119$$

证：根据1.96式我们显然有

$$x = 2p_1 - 1 \quad , \quad y = 2p_3 - 1 \quad , \quad u = 2p_2 \quad ,$$

$$v = 2p_4 \qquad \cdots\cdots 1.120$$

由此并根据1.94式我们立刻得知有

$$u > 0 \quad , \quad v > 0 \qquad \cdots\cdots 1.121$$

由1.120式并根据1.1式我们又可将x及y改写为

$$x = -\frac{2\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \quad , \quad y = -\frac{2\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \qquad \cdots\cdots 1.122$$

由此并根据1.1式中域F_0的定义我们立刻得知，若$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in F_0$那末定有

式成立的充分必要条件是

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3 = 0 \quad , \quad (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_4 = 0 \quad \cdots\cdots 1.126$$

证 必要性。

如若不然，设 $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3 \neq 0$。由向量代数得知此时三个向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 不共面，且有

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2+u^2 & 4x \\ x & -u & -xv^2 \\ 0 & u & vx \end{vmatrix} \neq 0$$

由此并根据矩阵秩的定义，我们立刻得出

$$\operatorname{rank} B = 3$$

但此与 $\operatorname{rank} B = 2$ 的假定相违，故必有

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.127$$

完全类似地，我们也可证明定有

$$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_4 = 0 \quad \cdots\cdots 1.128$$

由1.127及1.128两式我们立得1.126式，这就证明了必要性。

充分性。

我们先来证明：向量 $\vec{a}_1$ 与向量 $\vec{a}_2$ 不是共线向量。

如若不然，设向量 $\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_2$ 共线。由向量代数得知，此时定有

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = 0$$

故得

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2+u^2 \\ x & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4x \\ x & -xv^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x^2+u^2 & 4x \\ -4 & -xv^2 \end{vmatrix} = 0$$

此即

$$x(x^2+u^2)=0, \quad x^2=0, \quad x\left[v^2(x^2+u^2)-16\right]=0$$

显然，这三个式子同时成立的充分必要条件是 $x=0$。但是，这是同结论 $2°$ 相违背的。由此产生了矛盾，故必有 $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$。因此向量 $\vec{a}_1$ 与向量 $\vec{a}_2$ 不共线，这就证明了我们的结论。

既然向量 $\vec{a}_1$ 与向量 $\vec{a}_2$ 不共线，故由这两个向量可唯一地确定一个它们所在的平面且记其为 P。

现在根据假定得知，1.126式中的两个向量关系式必定同时成立。由向量代数得知，1.126式成立在几何上意味着向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 与向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4}$ 都是三个共面的向量。由于向量 $\vec{a_1}$ 与 $\vec{a_2}$ 均在由它们所确定的平面 P 上，因此根据向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 共面以及向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4}$ 共面得知向量 $\vec{a_3}$ 与 $\vec{a_4}$ 必定同时位于平面 P 上。这就是说，四个向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 同时位于平面 P 上。因此，它们中间的任意三个向量必定是共面的。特别地，向量 $\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 与向量 $\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 都是三个共面的向量。所以，由此得知定有

$$(\vec{a_1}\times\vec{a_3})\cdot\vec{a_4}=0,\quad(\vec{a_2}\times\vec{a_3})\cdot\vec{a_4}=0 \quad\cdots\cdots 1.129$$

根据向量代数，我们得知1.129式等价于下列的式子

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2+u^2 & 4x \\ 0 & u & vx \\ u & 0 & -v(uv-4) \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} x & -4 & -xv^2 \\ 0 & 4 & vx \\ u & 0 & -v(uv-4) \end{vmatrix}=0 \cdots 1.130$$

另外，根据1.128式我们得知定有

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2+u^2 & 4x \\ x & -4 & -xv^2 \\ 0 & u & xv \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & x^2+u^2 & 4x \\ x & -4 & -xv^2 \\ u & 0 & -v(uv-4) \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots 1.131$$

现在，根据1.130及1.131两式我们立刻得知增广矩阵B的全体三阶子式全部等于零。故由矩阵秩的定义我们得知，定有

$$\text{rank}\, B \leq 2 \quad \cdots\cdots 1.132$$

由1.125及1.132两式我们立刻能够得出

$$\text{rank}\, B = 2 \quad \cdots\cdots 1.133$$

这就证明了1.124式，充分性至此全部证完。

综上所述，我们证明了3°的结论。结论3°至此全部证完。

现在，我们来证明引理7。先来证明如下的

必要性。

由假定得知此时四元高次方程组(1.97~1.100)

有解

$$w=(x,y,u,v) \quad \cdots\cdots 1.111$$

因为方程组（1.97~1.100）与关於 x_1 及 x_2 的方程组（1.106~1.110）是完全等价的，故知此时方程组（1.106~1.110）究有解

$$x_1=f(x,u,v)$$
$$x_2=g(x,u,v) \quad \cdots\cdots 1.112$$

这里 f 与 g 都是三元代数函数。

由於解1.112满足方程组（1.106~1.110）的部分方程组（1.106~1.109），故知它必定是线性方程组（1.106~1.109）的解。但是，由1.113式及结论1°我们得知线性方程组（1.106~1.109）有解的充分必要条件是1.124式成立。再根据结论3°我们得知，1.124式成立的充分必要条件是1.126式成立。因此，我们立刻得知线性方程组（1.106~1.109）有解的充分必要条件是1.126式成立。

根据向量代数，1.126式在事实上可写为1.131式

的形式。因此我们立刻得知，若四元高次方程组（1.97～1.100）有解1.111的话那末此时1.131式必定成立。计算1.131式中的两个三阶行列式后，我们立刻得到

$$x^2\left[v(x^2+u^2)-4u\right]=0, \quad x\left[v(x^2+u^2)-4u\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.134$$

根据结论2°我们立刻得知，1.134成立的充分必要条件是 x, u, v 满足下列条件

$$x^2v+u^2v-4u=0 \qquad \cdots\cdots 1.135$$

这就证明了必要性，必要性至此证完。

其次，我们来证明下面的

充分性。

今设 x, u, v 满足1.135式中的关系。由此得知，此时1.134式必定成立。因此我们得知，此时1.131式肯定成立。由向量代数得知，此时1.126式必定成立。由此并根据结论3°我们立刻得知，定有

$$\operatorname{rank} B=2 \qquad \cdots\cdots 1.124$$

由1.124式并根据结论1°，我们立刻得到

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} A = 2 \qquad \cdots\cdots 1.136$$

现在，由1.136式并根据线性方程组的理论得知线性方程组（1.106~1.109）必定有解。而且，我们从1.136式得知此时线性方程组（1.106~1.109）中有而且只有两个方程是相互独立的。完全是为了叙述起见并不失一般性，我们就取1.108及1.109两个线性方程作为相互独立的方程。注意到这两个线性方程它们的系数行列式就是 I ，故由1.116式得知可用 Cramer 法则去解这两个线性方程。易得其解是

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -v^2 + \frac{4v}{u} \\ x_2 &= \frac{v}{u} x \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots 1.137$$

极易验证当 x, u, v 满足1.135式中的关系时，线性方程组（1.106~1.109）的解1.137恰好满足 x_1 与 x_2 的一个非线性关系1.110式。因此，我们立刻得知

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f(x, u, v) = -v^2 + \frac{4v}{u} \\ x_2 &= g(x, u, v) = \frac{v}{u} x \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots 1.138$$

在事实上就是关于 x_1 及 x_2 的方程组（1.106～1.110）的解。既然此时方程组（1.106～1.110）有解 1.138，故由方程组（1.97～1.100）与方程组（1.106～1.110）的等价性我们得知此时四元高次方程组（1.97～1.100）必有解

$$w=(x, x_2, u, v) \qquad \cdots\cdots 1.139$$

这就证明了充分性。充分性至此全部证完。

综上所述，我们证明了引理 7。由证明过程可见，它的证明有些冗长及复杂。引理 7 至此全部证完。

根据引理 7 我们得知，四元高次方程组（1.97～1.100）有解的充分必要条件是下列的四元超定非线性方程组

$$x^2y+u^2y-4x=0 \qquad \cdots\cdots 1.140$$

$$xy^2+xv^2-4y=0 \qquad \cdots\cdots 1.141$$

$$xv-yu=0 \qquad \cdots\cdots 1.142$$

$$y^2u+uv^2-4v=0 \qquad \cdots\cdots 1.143$$

$$x^2v+u^2v-4u=0 \qquad \cdots\cdots 1.144$$

有解。但是，根据引理7中的结论2°我们得知恒有

$$x \neq 0 \quad , \quad y \neq 0 \quad , \quad u \neq 0 \quad , \quad v \neq 0 \quad \cdots\cdots 1.145$$

故由1.145式得知我们可用x, y, u, v中的任何一个变元去乘方程组(1.140~1.144)中的任何一个方程。

容易看出，四元超定非线性方程组(1.140~1.144)与下列的方程组

$$x^2y^2+u^2y^2-4xy=0 \quad \cdots\cdots 1.146$$

$$x^2yv+u^2yv-4xv=0 \quad \cdots\cdots 1.147$$

$$x^2y^2+x^2v^2-4xy=0 \quad \cdots\cdots 1.148$$

$$xy^2u+xuv^2-4yu=0 \quad \cdots\cdots 1.149$$

$$xv-yu=0 \quad \cdots\cdots 1.150$$

$$xy^2u+xuv^2-4xv=0 \quad \cdots\cdots 1.151$$

$$y^2u^2+u^2v^2-4uv=0 \quad \cdots\cdots 1.152$$

$$x^2yv+yu^2v-4yu=0 \quad \cdots\cdots 1.153$$

$$x^2v^2+u^2v^2-4uv=0 \quad \cdots\cdots 1.154$$

显然同解。为方便起见，我们作变换

$$y_1 = xy,\quad y_2 = xv,\quad y_3 = yu,\quad y_4 = uv \quad \cdots\cdots 1.155$$

如此，关于 x, y, u, v 的超定非线性方程组（1.148～1.154）立刻可以改写为下列形式

$$y_1^2 + y_3^2 - 4y_1 = 0 \quad \cdots\cdots 1.156$$

$$y_1y_2 + y_3y_4 - 4y_2 = 0 \quad \cdots\cdots 1.157$$

$$y_1^2 + y_2^2 - 4y_1 = 0 \quad \cdots\cdots 1.158$$

$$y_1y_3 + y_2y_4 - 4y_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.159$$

$$y_2 - y_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.160$$

$$y_1y_3 + y_2y_4 - 4y_2 = 0 \quad \cdots\cdots 1.161$$

$$y_3^2 + y_4^2 - 4y_4 = 0 \quad \cdots\cdots 1.162$$

$$y_1y_2 + y_3y_4 - 4y_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.163$$

$$y_2^2 + y_4^2 - 4y_4 = 0 \quad \cdots\cdots 1.164$$

另外，在1.155式中消去 x, y, u, v 后可得 y_1, y_2, y_3, y_4 间的一个非线性关系

$$y_1y_4 - y_2y_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.165$$

显然，关于 x, y, u, v 的超定非线性方程组（1.148～1.154）：与关于 y_1, y_2, y_3, y_4 的超定非线性方程组

(1.156~1.165)是完全等价的。

从n维空间的解析几何理论来看，方程组(1.156~1.165)中的每一个式子除了1.160式表示四维空间中的超平面外其余的均表示四维空间中的二次超曲面。所以，方程组(1.156~1.165)有无实数解的问题在几何上相当於这些四维空间中的超平面或若二次超曲面在空间中有交还是无交的问题。

如果我们利用1.160式，那末可在方程组(1.156~1.165)中消去一个变元。如此，去掉一些重复的式子后我们立刻得到关於 y_1, y_3, y_4 的如下的一组方程式

$$y_1^2+y_3^2-4y_1=0 \qquad \cdots\cdots 1.166$$

$$y_1y_3+y_3y_4-4y_3=0 \qquad \cdots\cdots 1.167$$

$$y_3^2+y_4^2-4y_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.168$$

$$y_1y_4-y_3^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.169$$

这是一组三元超定非线性方程组。由空间解析

几何理论得知，它们中的每一个式子在几何上均表示三维空间中的二次曲面。而且由二次曲面的分类理论我们极易得知，1.166及1.168两式在几何上均表示三维空间中的圆柱面；而1.167及1.169两式在几何上依次表示一对相交的平面以及二次锥面。因此，关于 y_1, y_3, y_4 的超定非线性方程组(1.166~1.169)有无实数解的问题在几何上相当于这些二次曲面在空间中有交还是无交的问题。

由1.145及1.155两式我们立刻得知，定有

$$y_3 = y_4 \neq 0 \quad \cdots\cdots 1.170$$

如果我们作坐标变换

$$x_1 = y_1 - 2$$

$$x_2 = y_3 \quad \cdots\cdots 1.171$$

$$x_3 = y_4 - 2$$

并注意到1.170式的话，那末在新坐标系中方程组(1.166~1.169)立刻可以改写为如下的关于 x_1, x_2, x_3 的超定非线性方程组

$$x_1^2+x_2^2=4 \qquad \cdots\cdots 1.172$$

$$x_1+x_3=0 \qquad \cdots\cdots 1.173$$

$$x_2^2+x_3^2=4 \qquad \cdots\cdots 1.174$$

$$x_2^2-x_1x_3-2x_1-2x_3-4=0 \qquad \cdots\cdots 1.175$$

我们再作一次坐标变换

$$z_1=x_1\sin\frac{\pi}{4}+x_3\cos\frac{\pi}{4}$$

$$z_2=x_1\cos\frac{\pi}{4}-x_3\sin\frac{\pi}{4} \qquad \cdots\cdots 1.176$$

$$z_3=x_2$$

如此，方程组（1.172~1.175）在坐标变换1.176下它立刻可以改写为下列形式

$$(z_1+z_2)^2+2z_3^2=8 \qquad \cdots\cdots 1.177$$

$$z_1=0 \qquad \cdots\cdots 1.178$$

$$(z_1-z_2)^2+2z_3^2=8 \qquad \cdots\cdots 1.179$$

$$2z_3^2-z_1^2+z_2^2-4\sqrt{2}z_1-8=0 \qquad \cdots\cdots 1.180$$

由1.178式我们可消去一个未知数，这样我们立刻得到唯一的关于 z_2 及 z_3 的一个式子

$$z_2^2+2z_3^2=8 \qquad \cdots\cdots 1.181$$

显然，1.181式可改写为

$$\frac{z_2^2}{(2\sqrt{2})^2}+\frac{z_3^2}{2^2}=1 \qquad \cdots\cdots 1.182$$

由二次曲线的分类理论得知，1.182式在事实上表示的是 $z_1=0$ 平面上的一个椭圆。而且，这个椭圆的长半轴与短半轴依次等于 $2\sqrt{2}$ 及 2。

根据1.119及1.155两式我们立刻得知定有

$$y_3=y_u<0 \qquad \cdots\cdots 1.183$$

再从坐标变换1.171及1.176两式我们又能得知有

$$z_3=x_2=y_3 \qquad \cdots\cdots 1.184$$

由1.183及1.184两式我们立刻得出

$$z_3<0 \qquad \cdots\cdots 1.185$$

现在，如果我们将1.181式中的 z_2 视作为实参数那末显然可有

$$z_3=-\sqrt{4-\frac{z_2^2}{2}} \qquad \cdots\cdots 1.186$$

根据1.176及1.186两式，我们能够得出如下的结果

$$x_1=\frac{z_2}{\sqrt{2}} \qquad x_2=-\sqrt{4-\frac{z_2^2}{2}} \qquad x_3=-\frac{z_2}{\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots 1.187$$

现在，我们再根据1.171及1.187两式便立刻供给得到如下结果

$$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}z_2+2$$

$$y_3=-\sqrt{4-\frac{z_2^2}{2}} \qquad \cdots\cdots 1.188$$

$$y_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}z_2+2$$

因此，关于 y_1, y_3, y_4 的超定非线性方程组(1.166～1.169)的解是由1.188式所表示的一维流形。从几何上来看，方程组(1.166～1.169)中的四个二次曲面的交线就是位于平面

$$y_1+y_4-4=0 \qquad \cdots\cdots 1.189$$

上的椭圆1.182。这个椭圆既是两个垂直相交的等半径圆柱面

$$y_1^2+y_3^2-4y_1=0 \qquad \cdots\cdots 1.190$$

与

$$y_3^2+y_4^2-4y_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.191$$

的交线中的一个分支；同时又是平面1.189完同二次锥面

$$y_3^2 - y_1 y_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.192$$

的交线。由空间解析几何理论得知，圆柱面1.190与圆柱面1.191有两条交线；它们各相应于平面1.189及平面

$$y_1 - y_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.193$$

上的一个椭圆。

如果我们注意到1.180式且置 $z_2 = t$，那末我们立刻能够得到关于 y_1, y_2, y_3, y_4 的超定非线性方程组（1.156～1.165）的解应是如下的四维空间中的一个一维流形

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2 \\
y_2 &= -\sqrt{4 - \frac{t^2}{2}} \\
y_3 &= -\sqrt{4 - \frac{t^2}{2}} \\
y_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}t + 2
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots 1.194
$$

此处 $t \in T$ 且 $T = \{ t \mid -2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2} \}$。

根据1.145及1.155两式，我们得知定有

$$y_1 \neq 0, \quad y_2 \neq 0, \quad y_3 \neq 0, \quad y_4 \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.195$$

由1.194及1.195两式，我们立刻得知必须有

$$\frac{\sqrt{2}}{2}t+2\neq 0,\quad 4-\frac{t^2}{2}\neq 0,\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}t+2\neq 0 \quad \cdots\cdots 1.196$$

根据1.196式我们得知实参数 t 不能是二次方程

$$t^2-8=0 \quad \cdots\cdots 1.197$$

的根。因此，实参数 t 的取值范围应是

$$t\in T,\quad T=\left\{t \,\middle|\, -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\} \quad \cdots\cdots 1.198$$

现在，我们来证明如下的

引理8　若四元高次方程组(1.140~1.144)有全不为零的解

$$w=(x,y,u,v) \quad \cdots\cdots 1.199$$

那末解1.199必定是方程组

$$xy=\frac{\sqrt{2}}{2}t+2 \quad \cdots\cdots 1.200$$

$$xv=-\sqrt{4-\frac{t^2}{2}} \quad \cdots\cdots 1.201$$

$$yu=-\sqrt{4-\frac{t^2}{2}} \quad \cdots\cdots 1.202$$

$$uv=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+2 \quad \cdots\cdots 1.203$$

的解？反之亦真。换言之，四元高次方程组(

1.140~1.144）与方程组（1.200~1.203）互为同解方程组。

証　今設四元高次方程组（1.140~1.144）有解

$$w=(x, y, u, v)$$

但由1.145式得知 x, y, u, v 中不能有一个等於零，故知 w 是一组全不为零的解。

因为四元高次方程组（1.140~1.144）与四元高次方程组（1.146~1.154）互为同解方程组，故解1.199必定也是四元高次方程组（1.146~1.154）的解。但是，关於 x, y, u, v 的方程组（1.146~1.154）与关於 y_1, y_2, y_3, y_4 的方程组（1.156~1.165）是完全等价的。根据1.194式我们得知，关於 y_1, y_2, y_3, y_4 的方程组（1.156~1.165）其解是如下的一维流形

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}t+2\\
y_2 &= -\sqrt{4-\frac{t^2}{2}}\\
y_3 &= -\sqrt{4-\frac{t^2}{2}}\\
y_4 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}t+2
\end{aligned} \quad \cdots\cdots 1.194$$

而且，由1.198式得知实参数 t 的取值范围是

$$t \in T, \quad T = \{ t \mid -2\sqrt{2} < t < 2\sqrt{2} \} \quad \cdots\cdots 1.198$$

如果我们将1.155式与1.194式相比較的話，那末我们立刻能夠得到

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 2$$

$$xv = -\sqrt{4 - \frac{t^2}{2}}$$

$$yu = -\sqrt{4 - \frac{t^2}{2}}$$

$$uv = -\frac{\sqrt{2}}{2}t + 2$$

这正是方程组（1.200~1.203）。由此得知，解1.199必定是方程组（1.200~1.203）的解。

反之，今设方程组（1.200~1.203）有解

$$S = (x, y, u, v) \quad \cdots\cdots 1.204$$

根据方程组（1.200~1.203）及1.198式我们立刻能夠得知，解1.204中的x, y, u, v不能有一个等於零。因此，解S是一組全不为零的解。

利用变换1.155式，我们立刻可将方程组（1.200~1.203）改写为1.194式的形式。但是，我们已經知道一維流形1.194在事实上是关於y_1, y_2, y_3, y_4的方程

组（1.156～1.165）的解。另一方面，由於方程组（1.156～1.165）与方程组（1.146～1.154）完全等价；故知解1.204必定也是方程组（1.146～1.154）的解。由於方程组（1.140～1.144）与方程组（1.146～1.154）互为同解方程组，故知解1.204必定是四元高次方程组（1.140～1.144）的解。

根据以上的分析并根据两方程组同解的定义，我们立刻得知四元高次方程组（1.140～1.144）与方程组（1.200～1.203）互为同解方程组。这就证明了引理8，引理8至此全部证完。

根据1.96式我们显然有

$$x=2p_1-1\ ,\quad u=2p_2\ ,\quad y=2p_3-1\ ,\quad v=2p_4 \quad \cdots\cdots 1.205$$

由此我们立刻得到

$$xy=(2p_1-1)(2p_3-1)$$

$$xv=2p_4(2p_1-1)$$

$$yu=2p_2(2p_3-1) \quad \cdots\cdots 1.206$$

$$uv=4p_2p_4$$

现在我们根据引理8并将方程组(1.200~1.203)与1.206式相比较，如此立刻就能得到

$$(2p_1-1)(2p_3-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}t+2$$

$$2p_4(2p_1-1)=-\sqrt{4-\frac{t^2}{2}}$$

$$\cdots\cdots 1.207$$

$$2p_2(2p_3-1)=-\sqrt{4-\frac{t^2}{2}}$$

$$4p_2p_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+2$$

如果我们将1.1式中的后四个式子代入到1.207式中的每一个式子中去，那末我们立刻可以得到如下三个式子

$$\frac{4\bar{\alpha}\bar{\beta}}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})}=\frac{\sqrt{2}}{2}t+2 \qquad \cdots\cdots 1.208$$

$$-\frac{4\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})}=-\sqrt{4-\frac{t^2}{2}} \qquad \cdots\cdots 1.209$$

$$\frac{4(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})}=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+2 \qquad \cdots\cdots 1.210$$

现在，我们需要如下的

引理9　关于$\bar{\alpha},\bar{\beta},t$的三元代数方程组(1.208~1.210)有解S，且有

$$S=\left\{(\bar{\alpha},\bar{\beta},t)\;\middle|\; t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})},\ 0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\}$$

证　如果我们在方程组(1.208~1.210)中暂将$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$看作为参数而将t看作为未知数，那末我们可将1.208及1.210两式改写为下列形式

$$t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} \quad \cdots\cdots 1.211$$

根据1.1式我们得知定有$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in F_0$且$F_0=\{(\bar{\alpha},\bar{\beta})\mid 0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\alpha}-\bar{\beta}\neq 0\}$，故知1.209式恒有意义。将无理方程1.209式有理化后，我们立刻将会得到

$$t^2=\frac{8\left[(1-\bar{\alpha})^2(1-\bar{\beta})^2-4\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})\right]}{(1-\bar{\alpha})^2(1-\bar{\beta})^2} \quad \cdots\cdots 1.212$$

如果我们注意到下列的恒等式

$$(1-\bar{\alpha})^2(1-\bar{\beta})^2-4\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})=(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)^2 \quad \cdots\cdots 1.213$$

那末我们立刻可将1.212式改写为下列形式

$$t^2=\frac{8(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)^2}{(1-\bar{\alpha})^2(1-\bar{\beta})^2} \quad \cdots\cdots 1.214$$

从代数结构来看，方程组(1.208~1.210)与方程组(1.211、1.214)互为同解方程组。在事实上，方程组(1.211、1.214)有解的充分必要条件是这两个关于t的代数方程要有公根。

但是，极易証明关於 t 的两个代数方程 1.211 及 1.214 有唯一公根

$$t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} \qquad \cdots\cdots 1.215$$

如果我们将 1.215 式看作为三维空间中的一个三次曲面的話，那末由 1.198 式得知 t 应满足条件

$$-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2} \qquad \cdots\cdots 1.216$$

所以，如果我们定义一个集合 S；它的定义是

$$S=\left\{(\bar{\alpha},\bar{\beta},t)\ \middle|\ t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})},\ 0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\}$$

那末集合 S 在事实上就是关於 $\bar{\alpha},\bar{\beta},t$ 的三元代数方程组 (1.208~1.210) 的解集。这就証明了引理 9，引理 9 至此全部証完。

引理 10　若 $u=\frac{xy+x+y-1}{(1-x)(1-y)}$ 是一个二元实函数，变元 x,y 在开域 $G=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0<x<\frac{1}{2},\ 0<y<\frac{1}{2}\right\}$ 上取值。那末我们恒有 $m<u<M$，这里有 $M=1$ 及 $m=-1$。

证 我们研究二元函数 u 在闭域

$$\overline{G}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leq x\leq\frac{1}{2},\ 0\leq y\leq\frac{1}{2}\right\}$$

上的取值情况。根据二元函数 u 的定义，我们可求得它的一阶偏导数与二阶偏导数依次是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2y}{(1-x)^2(1-y)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2x}{(1-x)(1-y)^2}$$

与

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{4y}{(1-x)^3(1-y)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{2}{(1-x)^2(1-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{4x}{(1-x)(1-y)^3}$$

现在，我们考虑原点 $(0,0)$ 处函数 u 的取值情况。我们显然有

$$u_x(0,0)=0\ ,\quad u_y(0,0)=0$$

及

$$A=u_{xx}(0,0)=0\ ,\quad B=u_{xy}(0,0)=2\ ,$$

$$C=u_{yy}(0,0)=0\ ,\quad D=AC-B^2=-4$$

因为 $D<0$，故由二元函数极值点的判断定

理得知原点不是二元函数u的极值点。由此并根据二元函数极值点的必要条件，我们立刻得知二元函数

$$u=\frac{xy+x+y-1}{(1-x)(1-y)}$$

在全平面上无极值点。因此，二元函数u在开域G上无极值点。由二元函数理论得知，闭域上的二元连续函数必有最大值与最小值；故知函数u在闭域$\bar{G}$上定有最大值与最小值。由於u在$\bar{G}$的内点无极值，故而u只能在$\bar{G}$的边界上取最大值与最小值。

显然，在边界$x=0$及$y=0$上我们有

$$u(0,y)=\frac{y-1}{1-y}=-1 \qquad \cdots\cdots 1.217$$

$$u(x,0)=\frac{x-1}{1-x}=-1 \qquad \cdots\cdots 1.218$$

而在边界$x=\frac{1}{2}$及$y=\frac{1}{2}$上我们又有

$$u(\tfrac{1}{2},y)=\frac{3y-1}{1-y}$$

$$u(x,\tfrac{1}{2})=\frac{3x-1}{1-x}$$

现在，我们转而来研究一元函数

$$f(x)=\frac{3x-1}{1-x}$$

式中 $x\in I$ 且 $I=\left\{x \mid 0\leq x\leq \frac{1}{2}\right\}$。由於我们有

$$f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}>0$$

故知函数 $f(x)$ 是递增函数。因此，我们得知定有

$$f(0)\leq f(x)\leq f(\tfrac{1}{2})$$

如果我们注意到 $f(0)=-1$ 及 $f(\frac{1}{2})=1$，那末我们立刻能够得到下列结果

$$-1\leq f(x)\leq 1 \quad \cdots\cdots 1.219$$

同理，若我们置 $g(y)=u(\frac{1}{2},y)=\frac{3y-1}{1-y}$ 那末又能得到结果

$$-1\leq g(y)\leq 1 \quad \cdots\cdots 1.220$$

如果我们依次用 M 及 m 来表示函数 u 在闭域 $\overline{G}$ 上的最大值及最小值，那末由 1.217, 1.218, 1.219, 1.220 四式我们立刻能够得到

$$M=Max\left(Max\, u(0,y),\ Max\, u(x,0),\ Max\, u(\tfrac{1}{2},y),\ Max\, u(x,\tfrac{1}{2})\right)$$

$$=Max\left(-1,\ -1,\ 1,\ 1\right)=1$$

$$m=\min\left(\min u(0,y),\ \min u(x,0),\ \min u(\tfrac{1}{2},y),\ \min u(x,\tfrac{1}{2})\right)$$

$$=\min(-1,-1,-1,-1)=-1$$

因此，我们得知二元函数 u 在闭域 $\overline{G}$ 上恒有

$$m\leq u\leq M$$

且有 $m=-1$ 及 $M=1$ 。由於二元函数 u 在开域 G 上无极值，故知 u 在开域 G 上定满足

$$m<u<M$$

这就证明了引理10，引理10至此全部证完。

根据引理10我们立刻得知，若 $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in F_0$ 且 $F_0=\left\{(\overline{\alpha},\overline{\beta})\,\middle|\,0<\overline{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\overline{\beta}<\frac{1}{2},\ \overline{\alpha}-\overline{\beta}\neq 0\right\}$ 那末必有

$$-1<\frac{\overline{\alpha}\overline{\beta}+\overline{\alpha}+\overline{\beta}-1}{(1-\overline{\alpha})(1-\overline{\beta})}<1 \qquad \cdots\cdots 1.221$$

根据集合 S 的定义及1.221式，我们得知 t 的取值范围应是

$$t\in T,\qquad T=\left\{t\,\middle|\,-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\} \qquad \cdots\cdots 1.222$$

现在，根据1.198及1.222两式我们立刻得知 t 的取值范围应是

$$t \in T \bigcap \tau \qquad \cdots\cdots 1.223$$

但是，极其有趣的是我们在事实上有下列结果

$$T \bigcap \tau = T \qquad \cdots\cdots 1.224$$

故知 t 的取值范围仍是 $t \in T$ 而丝毫没有缩小。

二、流形K的参数表示式

定理 2.1 若K是由1.1式所表示的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末流形K有如下的参数表示式

$$\bar{\alpha} = \frac{1-\bar{\beta}}{1+\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}}$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}$$

$$\bar{\xi} = \frac{1-2\bar{\beta}+\frac{6\sqrt{2}+t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}^2}{2\bar{\beta}(1-\bar{\beta})\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}$$

$$\bar{\eta} = \frac{1-2\bar{\beta}-\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}^2}{2\bar{\beta}(1-\bar{\beta})\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}$$

$$\cdots\cdots 2.1$$

$$P_1 = \frac{(4\sqrt{2}+t)\bar{\beta}-2\sqrt{2}-t}{4\sqrt{2}\bar{\beta}}$$

$$P_2 = \frac{(1-\bar{\beta})\sqrt{8-t^2}}{4\sqrt{2}\bar{\beta}}$$

$$P_3 = \frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}$$

$$P_4 = \frac{\bar{\beta}\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}{1-\bar{\beta}}$$

式中 $(\bar{\beta},t)\in H$ 且 $H=\left\{(\bar{\beta},t)\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\}$。

証 根据定理1.1我们得知流形K可写成1.1式所表示的参数形式。根据定理1.2我们又得知流

形K的参数表示1.1式中的四个坐标分量P_1, P_2, P_3, P_4必须满足四元高次方程组(1.87~1.90)。在代换1.96式下，四元高次方程组(1.87~1.90)又可演化为四元高次方程组(1.97~1.100)。再根据引理7我们得知四元高次方程组(1.87~1.90)与四元高次方程组(1.140~1.144)互为同解方程组。

根据引理8我们得知，若四元高次方程组(1.140~1.144)有全不为零的解1.199的話那末它必定是方程组(1.200~1.203)的解；而且，这个结论反之亦真。换言之，四元高次方程组(1.140~1.144)与方程组(1.200~1.203)互为同解方程组。利用代换1.96式的逆关係1.205式，我们立刻能够得到1.206式。如果将1.206式与引理8中的方程组(1.200~1.203)相比较，我们又立刻能够得到1.207式。再将1.1式中的后四个式子代入到1.207式中的每一个式子里去，我们就能得到关於$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t$的三元代数方程组(1.208~1.210)。

根据引理 9 我们得知，关于 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t$ 的三元代数方程组 (1.208~1.210) 的解集是 S，且有

$$S=\left\{(\bar{\alpha},\bar{\beta},t)\;\middle|\; t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})},\ 0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2},\ 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}\right\}$$

另一方面，根据引理 10 我们得知参数 t 又必须依照 1.222 式取值。根据 1.198 及 1.222 两式，我们得知 t 的取值范围是

$$t\leftarrow T\cap\tau$$

但是，根据 1.224 式我们得知 t 的取值范围丝毫没有缩小。

现在，我们将集合 S 中 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, t$ 的关系式

$$t=\frac{2\sqrt{2}(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\alpha}+\bar{\beta}-1)}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})}$$

改写为下列形式

$$(2\sqrt{2}-t)\bar{\alpha}\bar{\beta}+(2\sqrt{2}+t)\bar{\alpha}+(2\sqrt{2}+t)\bar{\beta}-2\sqrt{2}-t=0 \quad \cdots\cdots 2.2$$

如果我们将 t 看作为参数而将 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 看作为变元的话，那末 2.2 式在几何上表示依赖于参数 t 的二次曲线族。注意到 $t\leftarrow T$ 及 2.2 式相应的

判别式是

$$\Delta=-\left(\sqrt{2}-\frac{t}{2}\right)^2<0 \qquad \cdots\cdots 2.3$$

故知2.2式在几何上表示双曲线族。

现在，我们从2.2式可明显地看出 $\bar{\alpha},\bar{\beta},t$ 三个参数中间只有两个是独立的。这就是说，它们中间的任何一个可用其它两个参数来表示。完全是为了方便和明确起见，我们就取 $\bar{\beta},t$ 两个参数作为独立的参数。如此，根据2.2式我们立刻得到

$$\bar{\alpha}=\frac{1-\bar{\beta}}{1+\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}} \qquad \cdots\cdots 2.4$$

把关係式2.4依次代入到1.1式中的各个式子里去，经整理后我们立刻得到2.1式。由于 $\bar{\alpha}$ 必须满足条件

$$0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 2.5$$

故由2.4及2.5两式我们立刻得到

$$0<\frac{1-\bar{\beta}}{1+\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}}<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 2.6$$

如果我们注意到 $0<\bar{\beta}<\frac{1}{2}$ 及 $-2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2}$，那

末由2.6式我们立刻就能得到如下结果

$$\bar{\beta}t+6\sqrt{2}\bar{\beta}-t-2\sqrt{2}>0 \qquad \cdots\cdots 2.7$$

故知 $(\bar{\beta},t)\in\bar{H}$ 且 $\bar{H}=\left\{(\bar{\beta},t)\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2},\ \bar{\beta}t+6\sqrt{2}\bar{\beta}-t-2\sqrt{2}>0\right\}$。

因此，$\bar{\beta}, t$ 的取值范围应是

$$(\bar{\beta},t)\in H\cap\bar{H} \qquad \cdots\cdots 2.8$$

注意到 $\bar{H}\subset H$ 及 $H\cap\bar{H}=\bar{H}$，故知必有

$$(\bar{\beta},t)\in\bar{H} \quad 且 \quad \bar{H}=\left\{(\bar{\beta},t)\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2},\ \bar{\beta}t+6\sqrt{2}\bar{\beta}-t-2\sqrt{2}>0\right\} \qquad \cdots\cdots 2.9$$

这就证明了定理2.1，定理2.1至此全部证完。

Afterword: Introduction of Dr. Tian–Chou Wang

Who Proved Riemann Hypothesis

Dr. Tian-Chou Wang was born in Shanghai in 1939 to a family that had migrated from NingBo, Zhe-Jiang province. Dr. Wang graduated from the School of Mathematics, Peking University in 1964. Since 1973, he systematically investigated the Riemann Hypothesis. After ten years work, he arrived at a conclusion, which he has tested it a number of times since then. He is convinced that his conclusion is corrected.

Dr. Wang’s exposition and test of the Riemann Hypothesis contains eleven chapters & eleven appendixes. It has approximately 500,000 words and 5000 equations in total.