The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 6

一，流形K的研究

在文献[ ]中，我们得到了如下的定理：

定理1.1 若Q是由1.7式所表示的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末在流形Q上有一个一维子流形Q_0且有如下的参数表达式

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \frac{4\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}{(1+\bar{\beta})^2} \\
\bar{\beta} &= \bar{\beta} \\
\bar{\xi} &= \frac{9\bar{\beta}^2-10\bar{\beta}+5}{4(1-\bar{\beta})^2} \\
\bar{\eta} &= -\frac{\bar{\beta}^2+6\bar{\beta}-3}{4(1-\bar{\beta})^2} \\
P_1 &= \frac{13\bar{\beta}^2-10\bar{\beta}+1}{2(5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1)} \\
P_2 &= \frac{2(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1} \\
P_3 &= \frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})} \\
P_4 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
\quad \cdots\cdots 1.1
$$

这里 $\bar{\beta} \in I$ 且 $I = \left\{ \bar{\beta} \,\middle|\, 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3} \neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3} \neq 0 \right\}$

现在，我们定義一个流形K

$$K = Q - Q_0 \quad \cdots\cdots 1.2$$

由定理1.1得知有

$$Q_0 \subset Q \qquad \cdots\cdots 1.3$$

故由集合理论得知流形K在事实上是集合Q_0对於集合Q的余集。下面我们转而来研究由1.2式所定义的流形K。

由文献[ ]得知，如果我们要研究流形K那末必须去研究

$$y=\frac{m-n}{2} \qquad \cdots\cdots 1.4$$

不等於零的情况。

根据引理1及引理2，我们得知现在必须去寻求关於x及y的超定非线性方程组

$$(1-2\bar{\beta}+5\bar{\beta}^2)x-(1-2\bar{\beta}-3\bar{\beta}^2)y-4(1-\bar{\beta})^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.5$$

$$(1-\bar{\alpha})^2x^2-(1-\bar{\alpha})^2y^2-4(1-\bar{\alpha})^2x-4(1-\bar{\alpha})^2y+4\bar{\alpha}^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.6$$

$$(1-\bar{\xi}^2)x^2+2xy+(1+\bar{\xi}^2)y^2+2x+2y+1=0 \qquad \cdots\cdots 1.7$$

$$(1-\bar{\eta}^2)x^2+2xy+(1+\bar{\eta}^2)y^2-2x-2y+1=0 \qquad \cdots\cdots 1.8$$

满足条件

$$x\neq 0 \quad , \quad y\neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.9$$

的解$Z=(x,y)$。

完全是为了书写上的方便起見，我们在研究方程组（1.5~1.8）時暂將 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$ 简記为 α, β, ξ, η，这并不会使我们的概念发生混淆。

为了研究上的方便起見，我们作变数的代换

$$x_1 = x^2, \quad x_2 = xy, \quad x_3 = y^2, \quad x_4 = x,$$

$$x_5 = y \qquad \cdots\cdots 1.10$$

如此我们立刻得到关於 x_j（$j=1,2,\cdots,5$）的一组线性方程

$$(1-2\beta+5\beta^2)x_4 - (1-2\beta-3\beta^2)x_5 = 4(1-\beta)^2 \qquad \cdots\cdots 1.11$$

$$(1-\alpha)^2 x_1 - (1-\alpha)^2 x_3 - 4(1-\alpha)^2 x_4 - 4(1-\alpha)^2 x_5 = -4\alpha^2 \qquad \cdots\cdots 1.12$$

$$(1-\xi^2)x_1 + 2x_2 + (1+\xi^2)x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -1 \qquad \cdots\cdots 1.13$$

$$(1-\eta^2)x_1 + 2x_2 + (1+\eta^2)x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -1 \qquad \cdots\cdots 1.14$$

此外，从 1.10 式中消去 x 及 y 可得 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 间的三个非线性关係

$$x_1 - x_4^2 = 0, \quad x_2 - x_4 x_5 = 0, \quad x_3 - x_5^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.15$$

显然，方程组（1.11~1.15）与方程组（1.5~1.8）是完

全等价的，但是方程组（1.11~1.15）中的线性内涵与非线性内涵已经分离开来了。下面我们先来研究线性方程组（1.11~1.14）。

现在，我们将线性方程组（1.11~1.14）中的系数矩阵及相应的增广矩阵依次记作

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-2\beta+5\beta^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) \\ (1-\alpha)^2 & 0 & -(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 \\ 1-\gamma^2 & 2 & 1+\gamma^2 & 2 & 2 \\ 1-\eta^2 & 2 & 1+\eta^2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-2\beta+5\beta^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) & 4(1-\beta)^2 \\ (1-\alpha)^2 & 0 & -(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4\alpha^2 \\ 1-\gamma^2 & 2 & 1+\gamma^2 & 2 & 2 & -1 \\ 1-\eta^2 & 2 & 1+\eta^2 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

在事实上我们有如下的

引理 1 $\operatorname{rank} A=4$.

证 由於 A 是一个四行五列矩阵，故由矩阵秩的定义得知定有

$$\operatorname{rank} A \le 4 \qquad \cdots\cdots 1.16$$

另一方面，我们考虑矩阵A的不含第二列元素的四阶子式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-2\beta+5\beta^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) \\ (1-\alpha)^2 & -(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 \\ 1-\xi^2 & 1+\xi^2 & 2 & 2 \\ 1-\eta^2 & 1+\eta^2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

容易算出

$$\Delta = 16(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1) \qquad \cdots\cdots 1.17$$

下面我们来证明

1° 若 $(\lambda,\mu)\in G$ 且 $G=\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\ \lambda-1\neq 0,\ \mu>0,\ \lambda\mu-1\neq 0,\ \lambda^2\mu-\lambda\mu+2\neq 0,\ \lambda\mu-\mu-2\neq 0\}$，那末总有 $\Delta>0$。

证 由文献[ ]我们得知有

$$\alpha-1=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-\mu-2}, \qquad \beta-1=-\frac{\lambda^2\mu+1}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}$$

$$\xi+\eta=\frac{\lambda^2\mu+1}{\sqrt{\mu}(\lambda+1)}, \qquad \xi-\eta=\frac{\mu+1}{\sqrt{\mu}(\lambda+1)}$$

由此立得

$$\xi^2-\eta^2-1=\frac{(\lambda\mu-1)^2}{\mu(\lambda+1)^2} \qquad \cdots\cdots 1.18$$

根据域G的定义，我们立刻得知定有

$$\alpha-1\neq 0,\quad \beta-1\neq 0,\quad \xi^2-\eta^2-1>0 \qquad \cdots\cdots 1.19$$

由1.17及1.19两式我们立刻得到 $\Delta>0$，这就证明了1°的结论。

2° 若记 $F(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta)=16(1-\bar\alpha)^2(1-\bar\beta)^2(\bar\xi^2-\bar\eta^2-1)$，那末总有 $F(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta)>0$。

证 由文献[ ]得知有

$$\bar\alpha=\alpha,\quad \bar\beta=\beta,\quad \bar\xi=\xi,\quad \bar\eta=\eta \qquad \cdots\cdots 1.20$$

如此便有

$$F(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta)=F(\alpha,\beta,\xi,\eta)=\Delta \qquad \cdots\cdots 1.21$$

由1.21式并根据1°的结论，我们立刻得到

$$F(\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta)>0 \qquad \cdots\cdots 1.22$$

这就证明了2°的结论。

由於我们是用记号 α,β,ξ,η 来依次简记 $\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta$ 四个实参数的，因此在事实上矩阵A的不含第二列元素的四阶子式应是

$$\bar{\Delta}=16(1-\bar{\alpha})^2(1-\bar{\beta})^2(\xi^2-\eta^2-1) \qquad \cdots\cdots 1.23$$

但是，根据2°的结论我们得知有$\bar{\Delta}>0$。由此并根据矩阵秩的定义，我们立刻得知有

$$\operatorname{rank} A \geqslant 4 \qquad \cdots\cdots 1.24$$

由1.16及1.24两式立得

$$\operatorname{rank} A = 4 \qquad \cdots\cdots 1.25$$

这就证明了引理1，引理1至此全部证完。

引理2 线性方程组(1.11~1.14)恒有解，且其通解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=x_2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\quad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta},$$
$$x_5=\frac{\Delta_5}{\Delta} \qquad \cdots\cdots 1.26$$

式中

$$\Delta=16(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1) \qquad \cdots\cdots 1.27$$

$$\Delta_1=8(1-\beta)^2\left[2(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)x_2+(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)+2\alpha^2(2+\xi^2+\eta^2)\right] \qquad \cdots\cdots 1.28$$

$$\Delta_3=8(1-\beta)^2\left[2(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)x_2+(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)+2\alpha^2(-2+\xi^2+\eta^2)\right] \qquad \cdots\cdots 1.29$$

$$\Delta_4=8\left[\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)-4(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\xi^2+\eta^2)\right] \quad \cdots\cdots 1.30$$

$$\Delta_5=8\left[\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)+4(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\xi^2+\eta^2)\right] \quad \cdots\cdots 1.31$$

証 由於线性方程组(1.11~1.14)它的相应的增广矩阵B是一个四行六列矩阵，故由矩阵秩的定義得知它有

$$\text{rank } B\leq 4 \quad \cdots\cdots 1.32$$

另一方面，由於係数矩阵A的四阶子式Δ同时也是矩阵B的一个四阶子式，因此根据引理7及矩阵秩的定義得知又有

$$\text{rank } B\geq 4 \quad \cdots\cdots 1.33$$

由1.32及1.33两式我们立刻得知有

$$\text{rank } B=4 \quad \cdots\cdots 1.34$$

但是，由线性方程组的理论得知线性方程组(1.11~1.14)有解的充分而必要条件是它的係数矩阵A与其相应的增广矩阵B同秩。今由1.25及1.34两式得知有

$$\text{rank } A=\text{rank } B=4 \quad \cdots\cdots 1.35$$

因此，线性方程组（1.11~1.14）必定有解。

现在，我们将线性方程组（1.11~1.14）改写为下列形式

$$(1-2\beta+5\beta^2)x_4-(1-2\beta-3\beta^2)x_5=4(1-\beta)^2 \quad \cdots\cdots 1.36$$

$$(1-\alpha)^2x_1-(1-\alpha)^2x_3-4(1-\alpha)^2x_4-4(1-\alpha)^2x_5=-4\alpha^2 \quad \cdots\cdots 1.37$$

$$(1-\xi^2)x_1+(1+\xi^2)x_3+2x_4+2x_5=-1-2x_2 \quad \cdots\cdots 1.38$$

$$(1-\eta^2)x_1+(1+\eta^2)x_3-2x_4-2x_5=-1-2x_2 \quad \cdots\cdots 1.39$$

如果我们暂将 x_2 看作为实参数，由引理1得知线性方程组（1.36~1.39）它的系数行列式是

$$\Delta=16(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)>0$$

由于 $\Delta\neq 0$，所以我们可用 Cramer 法则来解线性方程组（1.36~1.39）。易求得其它四个 Cramer 行列式依次是

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 4(1-\beta)^2 & 0 & 1-2\beta+5\beta^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) \\ -4\alpha^2 & -(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 \\ -1-2x_2 & 1+\xi^2 & 2 & 2 \\ -1-2x_2 & 1+\eta^2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 8(1-\beta)^2\left[2(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)x_2+(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)+2\alpha^2(2+\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & 4(1-\beta)^2 & 1-2\beta+5\beta^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) \\ (1-\alpha)^2 & -4\alpha^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 \\ 1-\xi^2 & -1-2x_2 & 2 & 2 \\ 1-\eta^2 & -1-2x_2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 8(1-\beta)^2\left[2(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)x_2+(1-\alpha)^2(1-\xi^2+\eta^2)+2\alpha^2(-2+\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4(1-\beta)^2 & -(1-2\beta-3\beta^2) \\ (1-\alpha)^2 & -(1-\alpha)^2 & -4\alpha^2 & -4(1-\alpha)^2 \\ 1-\xi^2 & 1+\xi^2 & -1-2x_2 & 2 \\ 1-\eta^2 & 1+\eta^2 & -1-2x_2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 8\left[\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)-4(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\xi^2+\eta^2)\right]$$

$$\Delta_5=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-2\beta+5\beta^2 & 4(1-\beta)^2 \\ (1-\alpha)^2 & -(1-\alpha)^2 & -4(1-\alpha)^2 & -4\alpha^2 \\ 1-\xi^2 & 1+\xi^2 & 2 & -1-2x_2 \\ 1-\eta^2 & 1+\eta^2 & -2 & -1-2x_2 \end{vmatrix}$$

$$= 8\left[\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)+4(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(1-\xi^2+\eta^2)\right]$$

有了以上諸 Cramer 行列式，根據 Cramer 法則我

们立刻得到线性方程组(1.36~1.39)的通解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=x_2,\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},\quad x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta},\quad x_5=\frac{\Delta_5}{\Delta}$$

这就证明了引理2,引理2至此全部证完。

但是,通解1.26一般说来并不恰好满足1.15式中的三个非线性关系。为了寻找既满足线性方程组(1.11~1.14)同时又满足1.15式中三个非线性关系的解,我们可将通解1.26代入到1.15式中的三个非线性关系式里去。在事实上,根据引理2我们得知线性方程组(1.11~1.14)之的通解可写成下列形式

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-x_2-\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2+2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)}$$

$$x_2=x_2$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-x_2-\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2-2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \quad \cdots\cdots 1.40$$

$$x_4=\frac{\Delta_4}{\Delta}=\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)}+2$$

$$x_5=\frac{\Delta_5}{\Delta}=\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)}-2$$

现在我们将通解1.40代入到1.15式中的三个非线性关系式里去,如此我们立得关于x_2的三个一次

代数方程

$$x_2 + \frac{1}{2} + \left[\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} + 2\right]^2 - \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2+2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} = 0 \quad \cdots\cdots 1.41$$

$$x_2 + \frac{1}{2} + \left[\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2\right]^2 - \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2-2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} = 0 \quad \cdots\cdots 1.42$$

$$x_2 - \left[\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} + 2\right]\cdot\left[\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2\right] = 0 \quad \cdots\cdots 1.43$$

这就是说1.41、1.42、1.43三个一次代数方程必须要有公根。为了研究上的方便起见，我们简记

$$a_1 = \frac{1}{2} + \left[\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} + 2\right]^2 - \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2+2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \quad \cdots\cdots 1.44$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + \left[\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2\right]^2 - \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2-2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \quad \cdots\cdots 1.45$$

$$a_3 = -\left[\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} + 2\right]\cdot\left[\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2\right] \quad \cdots\cdots 1.46$$

如此，1.41、1.42、1.43三个一次方程可改写为

$$x_2 + a_1 = 0 \quad , \quad x_2 + a_2 = 0 \quad , \quad x_2 + a_3 = 0 \quad \cdots\cdots 1.47$$

现在，我们转而来研究关于x及y的齐次方程组

$$\begin{aligned} x + a_1 y &= 0 \\ x + a_2 y &= 0 \\ x + a_3 y &= 0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots 1.48$$

在正式研究齐次方程组1.48之前，我们先来证明如下的

引理3　如果关于 x_2 的三个一次代数方程1.47有公根 x_2 的话，那末定有 $x_2 \neq 0$。

证　如若不然，設有公根 $x_2 = 0$。在1.47的三个代数方程中同時令 $x_2 = 0$，我们立刻得到

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.49$$

为了研究上的方便起見，我们从 $a_3 = 0$ 入手进行研究。并且我们置

$$b_1 = \frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} + 2$$

$$b_2 = \frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2$$

$$c_1 = \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2+2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \qquad \cdots\cdots 1.50$$

$$c_2 = \frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2-2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)}$$

为了清晰起見，我们分为几个段落来研究

1^0　$b_1 = 0$。

此時若用1.50中的記号，那末1.49中的三个式子显然可以写作下列形式

$$\frac{1}{2}+b_1^2-c_1=0,\quad \frac{1}{2}+b_2^2-c_2=0,\quad b_1=0 \qquad \cdots\cdots 1.51$$

由1.51我们立刻得知有

$$\frac{1}{2}-c_1=0,\quad \frac{1}{2}+b_2^2-c_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.52$$

将1.52中的两个式子相减，我们又能得到

$$b_2^2+c_1-c_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.53$$

但是，由1.50中的諸式得知有

$$b_2^2+c_1-c_2=\left[\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)}-2\right]^2+\frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \cdots\cdots 1.54$$

根据1.19式我们立刻得到

$$b_2^2+c_1-c_2>0 \qquad \cdots\cdots 1.55$$

但此与1.53式相違，由此产生矛盾。因此，若 b_1 等於零時1.49中的三个式子不能同時成立。

2° $b_2=0$。

此時若用1.50中的記号，那末1.49中的三个式子显然可以写作下列形式

$$\frac{1}{2}+b_1^2-c_1=0,\quad \frac{1}{2}+b_2^2-c_2=0,\quad b_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.56$$

由1.56我们立刻得知有

$$\frac{1}{2}+b_1^2-c_1=0,\quad \frac{1}{2}-c_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.57$$

将1.57中的两个式子相减，我们又能得到

$$b_1^2-c_1+c_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.58$$

另一方面，根据1.50中的諸式我们很容易得到下列结果

$$b_1+b_2=\frac{\alpha^2(\xi^2-\eta^2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \qquad \cdots\cdots 1.59$$

$$-c_1+c_2=-\frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \qquad \cdots\cdots 1.60$$

由1.59及1.60两式并注意到现在有 $b_2=0$，我们立刻能够得出

$$b_1^2-c_1+c_2=\left[\frac{\alpha^2(\xi^2-\eta^2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)}\right]^2-\frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)} \qquad \cdots\cdots 1.61$$

但是，由引理1中的1°得知有

$$\alpha=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu-\mu-2}, \qquad \beta=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}$$

$$\xi^2-\eta^2=\frac{(\lambda^2\mu+1)(\mu+1)}{\mu(\lambda+1)^2}, \qquad \xi^2-\eta^2-1=\frac{(\lambda\mu-1)^2}{\mu(\lambda+1)^2}$$

由此1.61式又可写成

$$b_1^2-c_1+c_2=\frac{\mu(\lambda+1)^2}{(\mu+1)^2}\left[\frac{(\lambda^2\mu+1)^2}{\mu(\lambda+1)^2}-4\right] \qquad \cdots\cdots 1.62$$

此外，由于 $b_2=0$ 故由1.50式得知有

$$\frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)}-2=0 \qquad \cdots\cdots 1.63$$

将 α, β, ξ, η 与 λ 及 μ 的诸关系式代入后立得

$$\frac{(\lambda^2\mu+1)^2+4(\lambda\mu-1)^2}{2(\lambda^2\mu+1)(\mu+1)}-2=0 \quad \text{------}1.64$$

根据1.57中的第二个式子及1.50式，我们又有

$$\frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2-2)}{(1-\alpha)^2(\xi^2-\eta^2-1)}-\frac{1}{2}=0 \quad \text{------}1.65$$

也将 α, β, ξ, η 与 λ 及 μ 的相关关系式代入，我们立刻得到

$$\frac{1}{2(\mu+1)^2}\left[2(\lambda\mu-1)^2-2\mu(\lambda+1)^2+\mu^2(\lambda^2-1)^2\right]-\frac{1}{2}=0 \quad \text{------}1.66$$

又根据1.58及1.62两式，我们是如此的得出

$$\frac{(\lambda^2\mu+1)^2}{\mu(\lambda+1)^2}-4=0 \quad \text{-----}1.67$$

现在，1.58中的三个式子与1.64, 1.66, 1.67 三个式子是完全相当的。在事实上，我们可将1.64, 1.66, 1.67 三个式子进一步改写成下列形式

$$(\lambda^2\mu+1)^2+4(\lambda\mu-1)^2-4(\lambda^2\mu+1)(\mu+1)=0 \quad \text{-----}1.68$$

$$2(\lambda\mu-1)^2-2\mu(\lambda+1)^2+\mu^2(\lambda^2-1)^2-(\mu+1)^2=0 \quad \text{-----}1.69$$

$$(\lambda^2\mu+1)^2-4\mu(\lambda+1)^2=0 \quad \text{-----}1.70$$

将1.68, 1.69, 1.70 三个式子比商后，我们可得如下同一个式子

$$\lambda^4\mu^2-2\lambda^2\mu-8\lambda\mu-4\mu+1=0 \quad \text{-----}1.71$$

由此得知，1.71式正是1.49式成立的充分且必要条件。因此，当1.71式成立时从1.47式我们立刻能够得出

$$x_2=0 \qquad \cdots\cdots 1.72$$

由此及1.10式立得

$$xy=0 \qquad \cdots\cdots 1.73$$

但是，我们从文献[]中的引理1得知：若超定代数方程组(1.5, 1.6, 1.7, 1.8)有实数解 $z=(x,y)$，则必定有 $x\neq 0$。由此及1.73式我们得知，当1.71式成立时定有

$$y=0 \qquad \cdots\cdots 1.74$$

这正是文献[]所研究过的情形。从1.4式我们得知，我们现在要研究的是

$$y=\frac{m-n}{2} \qquad \cdots\cdots 1.75$$

不等于零的情形。由此及文献[]中的引理1我们立刻能够得出

$$x_2=xy\neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.76$$

对于 $b_2=0$ 的情形，我们就研究到这里为止。

现在，我们当然要发问：1.71式成立时它的几何意义是什么？下面，我们来回答这个几何问题。实际上，从文献[ ]可得 λ, μ 与 σ, t 之间的一个关系

$$\lambda=\frac{\sigma}{1-\sigma},\quad \mu=\left(\frac{1-\sigma}{t}\right)^2 \qquad \text{----}1.77$$

若将1.77中两个关系式同时代入到1.71式中，我们可得

$$\frac{\sigma^4}{t^4}-2\frac{\sigma^2}{t^2}-8\frac{\sigma(1-\sigma)}{t^2}-\frac{4(1-\sigma)^2}{t^2}+1=0$$

此即

$$\sigma^4-2\sigma^2t^2+t^4-8\sigma(1-\sigma)t^2-4(1-\sigma)^2t^2=0$$

化简后可得

$$\sigma^4+2\sigma^2t^2+t^4-4t^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.78$$

这是一条退化的四次曲线。事实上，它由圆

$$\sigma^2+t^2+2t=0 \qquad \cdots\cdots 1.79$$

及圆

$$\sigma^2+t^2-2t=0 \qquad \cdots\cdots 1.80$$

所组成。

根据上面分析，我们得知1.71式成立充分的几何意义是1.79式或者1.80式成立。这就是文献[ ]中所研究过的

$$y=\frac{m-n}{2}=0$$

的情形充分的几何意义。

在稍后的一篇论文中，我们从文献[ ]的结果直接出发，我们也能得出1.79, 1.80这两个圆方程。由于复零点关于σ轴及直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$呈对称分布，我们仅须考虑圆1.80就足够了。在以后的论文中，我们将证明如下的结果

[定理] Riemann-ζ函数$\zeta(s)$在圆

$$\sigma^2+(t-1)^2=1 \qquad \text{-----}1.81$$

上无复零点。利用文献[ ]中的引理1及引理2并使用极坐标，我们可以充分周详地证明上述定理。对于$b_2=0$从而$x_2=xy=0$的情形，我们就补充说明到这里。由1°及2° 1.49式恒不能成立。

3° 应 $x_2 \neq 0$。

如若不然，设线性方程组1.47有 $x_2=0$ 的解。如此，1.49中的三个式子必须同时成立。但由上面的研究得知，无论是 $b_1=0$ 的情形还是 $b_2=0$ 的情形1.49中的三个式子均不能同时成立。由此发生矛盾，故定有 $x_2 \neq 0$。

这就证明了引理3，引理3至此全部证明完毕。

引理4　线性方程组1.47与齐次线性方程组1.48是完全等价的。

证　根据引理3我们得知线性方程组1.47只能有不等於零的解。今设 $x_0 \neq 0$ 是线性方程组1.47的解，根据解的定义显然应有

$$x_0+a_1=0,\quad x_0+a_2=0,\quad x_0+a_3=0 \qquad \cdots\cdots 1.82$$

此时，我们极易看出齐次线性方程组1.48有全不为零的非零解

$$x=x_0 \qquad y=1 \qquad \cdots\cdots 1.83$$

反之，若設齐次线性方程組1.48有非零解

$$z_0=(x,y) \qquad \cdots\cdots 1.84$$

的話，那末极易証明这是一組全不为零的非零解。在事实上我们有如下的

1° $x\neq 0$。

如若不然，設 $z_0=(0,y)$ 是齐次线性方程組1.48的一組解。那末，將 z_0 代入到1.48中后立得

$$a_1 y=0, \quad a_2 y=0, \quad a_3 y=0 \qquad \cdots\cdots 1.85$$

由於 z_0 是一个非零解，故而必有 $y\neq 0$。由此及1.85式我们立得

$$a_1=0, \quad a_2=0, \quad a_3=0$$

这正是1.49式。但由引理3中的1°及2°得知1.49中的三个式子恒不能同時成立，因此发生矛盾。故必有 $x\neq 0$，这就証明了1°的结论。

2° $y\neq 0$。

如若不然，設 $z_0=(x,0)$ 是齐次线性方程組1.48的一組解。那末，將 z_0 代入到1.48中后立得同

一个式子 $x=0$。由此我们立刻得知有

$$z_0=(0,0) \quad \cdots\cdots 1.86$$

但此与1.84是齐次线性方程组1.48的非零解这一假定相违，因此产生矛盾。故而必有 $y\neq 0$，这就证明了2°的结论。由1°及2°就证明了结论。

既然1.84式是齐次线性方程组1.48的全不为零的一组解，特殊地我们在非零解1.84中取 $y=1$ 如此可得 $z_0=(x_0,1)$ 是1.48的一组非零解。代入后有

$$x_0+a_1=0, \quad x_0+a_2=0, \quad x_0+a_3=0 \quad \cdots\cdots 1.87$$

这说明 $x_2=x_0$ 是线性方程组1.47的不等于零的解。

综上所述，我们得知线性方程组1.47有不等于零的解它的充分而必要条件是齐次线性方程组1.48有非零解。这就证明了引理4，引理4至此全部证完。

根据引理4，我们转而来研究齐次线性方程组1.48。在事实上我们有如下的

引理5　若 M 是齐次线性方程组1.48的系数矩阵，那末齐次线性方程组1.48有非零解的充分而必要条件是 $\operatorname{rank} M \neq 2$。

証　先来証明必要性。今将証明若齐次线性方程组1.48有非零解的話那末定有 $\operatorname{rank} M \neq 2$。如若不然，設 $\operatorname{rank} M = 2$。由矩阵秩的定義得知，此時係数矩阵 M 至少有一个二阶子式不等於零。不失一般性，无妨可設这个二阶子式是

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.88$$

根据1.88式我们得知，齐次线性方程组1.48只有零解。但此与齐次线性方程组1.48有非零解之一假定相違，因此产生矛盾。故而一定有 $\operatorname{rank} M \neq 2$，这就証明了必要性。

其次，我们来証明充分性。今将証明如果 $\operatorname{rank} M \neq 2$ 那末齐次线性方程组1.48定有非零解。由於 $\operatorname{rank} M \neq 2$，故知係数矩阵 M 的三个二

阶子式全都等於零。由此我们立刻得到

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \cdots\cdots 1.89$$

根据1.89式我们得知，齐次线性方程组1.48其中任意两个方程它们对应的係数成比例。而且我们从1.89式还可看出，a_1, a_2, a_3中不能有一个等於零否则由1.89式我们立刻能够得出

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \qquad \cdots\cdots 1.90$$

但是，根据引理3中1°及2°的研究得知1.49中的三个式子不能同时成立，因此1.90式不可能成立。由此得知，a_1, a_2, a_3中不能有一个等於零。

既然齐次线性方程组1.48其中任意两个方程它们对应的係数成比例，因此在1.48的三个齐次方程中只有一个是独立的。为了明确起见，我们就取

$$x + a_1 y = 0 \qquad \cdots\cdots 1.91$$

作为独立的方程。由1.91式我们立刻能够得到

$$x=-a_1 y\ ,\quad y=y \qquad \cdots\cdots 1.92$$

另一方面，由上述的研究得知 a_1, a_2, a_3 中不能有一个等於零。由此我们立刻得知，定有

$$a_1 \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.93$$

根据1.93式我们得知，当取 $y\neq 0$ 时1.92式在事实上的确给出了一组非零解。这就证明了充分性。

综上所述，我们证明了引理5。引理5至此全部证完。

引理6　如果M是齐次线性方程组1.48的係数矩阵，那末 $\operatorname{rank} M\neq 2$ 的充分而必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}=0\ ,\quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_3 \end{vmatrix}=0 \qquad \cdots\cdots 1.94$$

证　因为M是齐次线性方程组1.48的係数矩阵，故我们有

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ 1 & a_3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots 1.95$$

根据矩阵秩的定义我们得知，$\mathrm{rank}\, M \neq 2$ 的充分而必要条件是1.89中的三个式子同时成立。现在我们将1.95式中矩阵M的每一行看作为一个二维向量，并且置

$$\vec{a}=\vec{i}+a_1\vec{j}\ ,\quad \vec{b}=\vec{i}+a_2\vec{j}\ ,\quad \vec{c}=\vec{i}+a_3\vec{j} \quad \cdots\cdots 1.96$$

如此，由向量代数得知此时 $\mathrm{rank}\, M \neq 2$ 见的充分和必要条件1.89式可改写为下列形式

$$\vec{a}\times\vec{b}=0\ ,\quad \vec{a}\times\vec{c}=0\ ,\quad \vec{b}\times\vec{c}=0 \quad \cdots\cdots 1.97$$

现在，我们可以断言：1.97中三个式子同时成立的充分而必要条件是

$$\vec{a}\times\vec{b}=0\ ,\quad \vec{a}\times\vec{c}=0 \quad \cdots\cdots 1.98$$

首先，必要性是显然的。今来证明其充分性，即1.98式成立时1.97中三个式子必定同时成立。由1.96式可看出，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三个向量中没有一个是零向量。因此，由1.98的 $\vec{a}\times\vec{b}=0$ 得知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 共线。今设向量 $\vec{a}$ 所在的直线是 l，故向量 $\vec{b}$ 必也在直线 l 上。同理，由1.98的第

二个式子 $\vec{a}\times\vec{c}=0$ 我们又得知向量 $\vec{c}$ 也在直线 l 上。因此，我们得知向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 同在向量 $\vec{a}$ 的所在直线 l 上。根据向量代数我们得知，此时必有 $\vec{b}\times\vec{c}=0$。这就证明了充分性。

如果将1.98式写为行列式的形式，我们立刻得到1.94式。这就证明了引理6，引理6至此全部证完。

由引理6得知，$\operatorname{rank}M\neq 2$ 的充分和必要条件是1.94式成立。由1.94式我们立刻得到

$$a_2-a_1=0 \qquad a_3-a_1=0 \qquad \cdots\cdots 1.99$$

将1.44、1.45、1.46三式代入到1.99中的两个式子里去，经整理后我们立刻有

$$\alpha^2\beta^2(\xi^2-\eta^2)^2-(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.100$$

$$(1-\alpha)^4(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)^2+\alpha^4(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)^2+2\alpha^2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\cdot$$
$$(\xi^2-\eta^2-1)\cdot(\xi^2-3\eta^2-2)=0 \qquad \cdots\cdots 1.101$$

在得到1.100式的过程中，我们用到了引理1中的1°。即有

$$\alpha=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu-\mu-2}\neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.102$$

回忆起我们是用 α,β,ξ,η 来简记 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$ 四个实参数的。由文献[ ]得知，四个实参数 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ 还必须满足

$$(\bar{\alpha}-\bar{\beta})\bar{\xi}-(\bar{\alpha}+\bar{\beta}-2\bar{\alpha}\bar{\beta})\bar{\eta}=0 \qquad \cdots\cdots 1.103$$

$$(1-2\bar{\beta})\bar{\xi}^2-2\bar{\beta}^2\bar{\xi}\bar{\eta}-(1-2\bar{\beta}+2\bar{\beta}^2)\bar{\eta}^2-(1-\bar{\beta})^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.104$$

仍用 α,β,ξ,η 来简记 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$，这样我们立刻得到关于 α,β,ξ,η 的高次方程组

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0$$

$$\alpha^2\beta^2(\xi^2-\eta^2)^2-(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.105$$

$$(1-\alpha)^4(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)^2+\alpha^4(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)^2+2\alpha^2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\cdot(\xi^2-\eta^2-1)\cdot(\xi^2-3\eta^2-2)=0$$

在具体研究关于 α,β,ξ,η 的高次方程组1.105之前，我们先来研究关于 α,β,ξ,η 的四元实函数

$$G(\alpha,\beta,\xi,\eta)=\alpha\beta(\xi^2-\eta^2)+(1-\alpha)(1-\beta)(\xi^2-\eta^2-1) \qquad \cdots\cdots 1.106$$

在事实上我们有如下的

引理 7 若 $(\lambda,\mu)\in G$ 且 $G=\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\ \lambda-1\neq 0,\ \mu>0,\ \lambda\mu-1\neq 0,\ \lambda^2\mu-\lambda\mu+2\neq 0,\ \lambda\mu-\mu-2\neq 0\}$，又定义四元实函数

$$G(\alpha,\beta,\xi,\eta)=\alpha\beta(\xi^2-\eta^2)+(\alpha-1)(\beta-1)(\xi^2-\eta^2-1)$$

那末我们恒有 $G(\alpha,\beta,\xi,\eta)\neq 0$ ·

证 由引理 1 的 1° 得知有

$$\alpha=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu-\mu-2},\qquad \beta=\frac{1-\lambda\mu}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}$$

$$\xi^2-\eta^2=\frac{(\lambda^2\mu+1)(\mu+1)}{\mu(\lambda+1)^2},\qquad \xi^2-\eta^2-1=\frac{(\lambda\mu-1)^2}{\mu(\lambda+1)^2}$$

故知四元实函数在事实上是 λ,μ 的复合函数。如果将 α,β,ξ,η 与 λ,μ 的諸关係式代入到函数 $G(\alpha,\beta,\xi,\eta)$ 的定义式中去，这样我们立刻能够得到

$$G(\alpha,\beta,\xi,\eta)=-\frac{2(\mu+1)(\lambda\mu-1)^2(\lambda^2\mu+1)}{\mu(\lambda+1)^2(\lambda\mu-\mu-2)(\lambda^2\mu-\lambda\mu+2)}$$

由於 $(\lambda,\mu)\in G$，因此我们立刻得知必有

$$G(\alpha,\beta,\xi,\eta)\neq 0$$

这就证明了引理 7，引理 7 至此证完。

现在，我们转而来研究关於 α,β,ξ,η 的高

次方程组1.105。为了研究上的方便起见，我们不妨将α及β看作为实参数而将ξ及η看作为变数。这样，方程组1.105中的第一个式子在几何上显然表示一条依赖於参数α及β并通过原点的直线。方程组1.105中的第二个式子显然表示一条依赖於实参数β的二次曲线，由於它的判别式为

$$\Delta=-\left[\beta^4+(1-2\beta)(1-2\beta+2\beta^2)\right]=-(1-\beta)^4<0 \quad \cdots\cdots 1.107$$

故知它是一对双曲线。

方程组1.105中的第三个式子在几何上表示一条依赖於实参数α及β的退化四次曲线，在事实上它由两条二次曲线

$$\alpha\beta(\xi^2-\eta^2)+(\alpha-1)(\beta-1)(\xi^2-\eta^2-1)=0 \quad \cdots\cdots 1.108$$

与

$$\alpha\beta(\xi^2-\eta^2)-(\alpha-1)(\beta-1)(\xi^2-\eta^2-1)=0 \quad \cdots\cdots 1.109$$

所组成。由於二次曲线1.108及二次曲线1.109它们相应的判别式依次是

$$\Delta_1 = \left[\alpha\beta + (\alpha-1)(\beta-1)\right]^2 < 0 \qquad \cdots\cdots 1.110$$

$$\Delta_2 = (\alpha+\beta-1)^2 < 0 \qquad \cdots\cdots 1.111$$

由此得知二次曲线1.108及二次曲线1.109它们所表示的都是依赖於实参数α及β的一对双曲线。

方程组1.105中的第四个式子在几何上表示一条依赖於实参数α及β的特殊的四次曲线。从代数结构来看，它的主要特点是不出现ξ及η的奇次项。由此得知，这条四次代数曲线关於ξ轴及η轴都是轴对称的。所以，在具体研究这条四次曲线时我们仅需研究曲线在第一象限中的那部分曲线就足够了。

为了研究上的方便起见，我们将四次曲线改写为

$$\left\{\left[(1-\alpha)^2+\alpha^2\right]^2(1-\beta)^2-4\alpha^4\beta^2\right\}\xi^4-2\left\{\left[(1-\alpha)^4+4\alpha^2(1-\alpha)^2+\alpha^4\right](1-\beta)^2-4\alpha^4\beta^2\right\}\xi^2\eta^2+\left\{\left[(1-\alpha)^4+6\alpha^2(1-\alpha)^2+\alpha^4\right](1-\beta)^2-4\alpha^4\beta^2\right\}\eta^4-2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\cdot\left[(1-\alpha)^2+3\alpha^2\right]\xi^2+2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\left[(1-\alpha)^2+5\alpha^2\right]\eta^2+(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\cdot\left[(1-\alpha)^2+4\alpha^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.112$$

根据以上讨论及引理7，我们得知四元高次方程组1.105在实际上应该改写为

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \qquad \cdots\cdots 1.113$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.114$$

$$(1-\alpha-\beta)\xi^2-(1-\alpha-\beta)\eta^2-(1-\alpha)(1-\beta)=0 \qquad \cdots\cdots 1.115$$

$$\begin{aligned}&\{[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2(1-\beta)^2-4\alpha^4\beta^2\}\xi^4-2\{[\alpha^4+4\alpha^2(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^4](1-\beta)^2\\&-4\alpha^4\beta^2\}\xi^2\eta^2+\{[\alpha^4+6\alpha^2(1-\alpha)^2+(1-\alpha)^4](1-\beta)^2-4\alpha^4\beta^2\}\eta^4-2(1-\alpha)^2\cdot\\&(1-\beta)^2[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]\xi^2+2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2[5\alpha^2+(1-\alpha)^2]\eta^2+(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\cdot\\&[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]=0\end{aligned} \qquad \cdots\cdots 1.116$$

现在，我们将1.113看作为变数ξ及η所满足的线性方程而将1.114、1.115、1.116三个式子看作为变数ξ及η所满足的三个非线性关系。如此，关於ξ及η的二元非线性方程组(1.113~1.116)它的线性内涵与非线性内涵已经分离开来了。

显然，齐次线性方程1.113它的一般解可以写作

$$\xi=\xi,\quad \eta=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\xi \qquad \cdots\cdots 1.117$$

在事实上我们有如下的

引理 8　若 α 与 β 是两个相互独立的实参数，而且域 $F=\{(\alpha,\beta)\mid 0<\alpha<\frac{1}{2}, 0<\beta<\frac{1}{2}\}$。如果 $(\alpha,\beta)\in F$ 那末关于 ξ 及 η 的超定非线性方程组（1.113～1.116）恒有解，且其解是

$$\xi=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}},\quad \eta=\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}} \quad \cdots\cdots 1.118$$

证　在非线性方程组（1.113～1.116）中，我们将 1.113 看作为未知数 ξ 及 η 所满足的线性方程而将其余三个方程看作为未知数 ξ 及 η 所满足的三个非线性关系。显然，当 $(\alpha,\beta)\in F$ 時恒有

$$\alpha+\beta-2\alpha\beta=\alpha(1-\beta)+\beta(1-\alpha)>0 \quad \cdots\cdots 1.119$$

由齐次方程组理论得知，齐次方程 1.113 它的一般解是 1.117。由 1.119 式得知，一般解 1.117 当 $(\alpha,\beta)\in F$ 時是有意義的。一般說来，线性方程 1.113 它的一般解 1.117 并不满足三个非线性关係 1.114、1.115、1.116。为了寻找既满足齐次线性方程 1.113 同時又满足三个非线性关係 1.114、1.115、1.116 的解，我们可将齐次线性方程

1.113 它的一般解 1.117 代入到 ζ 与 η 的三个非线性关系 1.114、1.115、1.116 中去。如此经过整理以后我们便能得到下列三个式子

$$(1-\beta)^2\left[4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\zeta^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.120$$

$$(1-\alpha)(1-\beta)\left[4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\zeta^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.121$$

$$\begin{aligned}(1-\alpha)^2(1-\beta)^2\Big\{&16\alpha^2\beta\left[-4\alpha^4\beta^3+\beta[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2(1-\beta)^2-\alpha(1-\alpha)\cdot\right.\\&\left.(1-\beta)(\alpha-\beta)^2\right]\zeta^4-2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left[(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]-(\alpha-\beta)^2\cdot\right.\\&\left.[5\alpha^2+(1-\alpha)^2]\right]\zeta^2+(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^4[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]\Big\}=0 \qquad \cdots\cdots 1.122\end{aligned}$$

如果我们将 α, β, ζ 看作为三个实数，那末 1.120 及 1.121 两式在几何上表示的是退化的七次曲面而 1.122 式在几何上表示的是退化的十八次曲面。在事实上，退化的七次曲面 1.120 由一对重合的平面

$$\beta-1=0 \qquad \cdots\cdots 1.123$$

及五次曲面

$$4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\zeta^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.124$$

所组成。与此同时，退化的七次曲面 1.121 由一对

相互垂直的平面

$$\alpha-1=0\quad,\quad\beta-1=0 \qquad \cdots\cdots 1.125$$

及五次曲面1.124所组成。而退化的十八次曲面1.122是由两对重合的平面

$$\alpha-1=0 \qquad \cdots\cdots 1.126$$

$$\beta-1=0 \qquad \cdots\cdots 1.127$$

及十四次曲面

$$18\alpha^2\beta\left\{-4\alpha^4\beta^3+\beta\left[\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]^2(1-\beta)^2-\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)^2\right\}\xi^4$$
$$-2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left\{(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left[3\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]-(\alpha-\beta)^2\left[5\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]\right\}\xi^2$$
$$+(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^4\left[4\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.128$$

所组成。为了减少篇幅及不离题太远，我们不想在这里对五次曲面1.124及十四次曲面1.128作进一步的详尽的研究和讨论。

为了便于研究，我们将1.124、1.126、1.127、1.128四个式子在几何上所表示的平面或者曲面都看作为一个集合。如此，我们显然可以定义如下的几个集合

$$P=\{(\alpha,\beta,\xi)\mid \alpha-1=0\}$$

$$Q=\{(\alpha,\beta,\xi)\mid \beta-1=0\}$$

$$S=\{(\alpha,\beta,\xi)\mid 4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\xi^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2=0\}$$

$$T=\{(\alpha,\beta,\xi)\mid 16\alpha^2\beta\left[-4\alpha^4\beta^3+\beta[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2(1-\beta)^2-\right.$$
$$\left.-\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)^2\right]\xi^4-2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left[(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]\right.$$
$$\left.-(\alpha-\beta)^2[5\alpha^2+(1-\alpha)^2]\right]\xi^2+(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^4[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]=0\}$$

$$G=\{(\alpha,\beta,\xi)\mid 0<\alpha<\tfrac{1}{2},\ 0<\beta<\tfrac{1}{2},\ \xi>0\}$$

如果我们将1.120、1.121、1.122三个式子它们各自在空间中的几何图象都看作为集合，而且我们用记号Z_1, Z_2, Z_3来依次表示这三个集合的话那末这三个集合显然可依次写作

$$Z_1=Q\bigcup S \qquad \cdots\cdots 1.129$$

$$Z_2=P\bigcup Q\bigcup S \qquad \cdots\cdots 1.130$$

$$Z_3=P\bigcup Q\bigcup T \qquad \cdots\cdots 1.131$$

现在，我们为了寻求集合Z_1, Z_2, Z_3在域G上的交，不妨置

$$Z=Z_1\bigcap Z_2\bigcap Z_3 \qquad \cdots\cdots 1.132$$

$$Z_0 = Z_1 \bigcap Z_2 \quad \cdots\cdots 1.133$$

根据 Z_1 与 Z_2 的定义以及 1.133 式，我们立刻得到

$$Z_0 = (Q \bigcup S) \bigcap (P \bigcup Q \bigcup S) = (Q \bigcap P) \bigcup (Q \bigcap Q) \bigcup (Q \bigcap S) \bigcup (S \bigcap P) \bigcup (S \bigcap Q) \bigcup (S \bigcap S) \quad \cdots\cdots 1.134$$

注意到

$$Q \bigcap P \subset Q, \quad Q \bigcap S \subset Q, \quad Q \bigcap Q = Q,$$
$$S \bigcap P \subset S, \quad S \bigcap Q \subset S, \quad S \bigcap S = S.$$

由此立得

$$Z_0 = Q \bigcup S \quad \cdots\cdots 1.135$$

现在，由 1.132、1.133、1.135 三式并根据 Z_3 的定义我们又有

$$Z = Z_0 \bigcap Z_3 = (Q \bigcup S) \bigcap (P \bigcup Q \bigcup T) = (Q \bigcap P) \bigcup (Q \bigcap Q) \bigcup (Q \bigcap T) \bigcup (S \bigcap P) \bigcup (S \bigcap Q) \bigcup (S \bigcap T) \cdots 1.136$$

现在如果我们注意到

$$Q \bigcap P \subset Q, \quad Q \bigcap T \subset Q, \quad Q \bigcap Q = Q$$

那末 1.136 式立刻可以改写为

$$Z = Q \bigcup (S \bigcap P) \bigcup (S \bigcap Q) \bigcup (S \bigcap T) \qquad \cdots\cdots 1.137$$

因为我们感兴趣的是集合 Z_1, Z_2, Z_3 在域 G 上的交，故可置

$$V = Z_1 \bigcap Z_2 \bigcap Z_3 \bigcap G \qquad \cdots\cdots 1.138$$

根据 1.132、1.137、1.138 三式以及域 G 的定義，我们立刻能够得到

$$V = (Q \bigcup (S \bigcap P) \bigcup (S \bigcap Q) \bigcup (S \bigcap T)) \bigcap G =$$

$$= (Q \bigcap G) \bigcup (S \bigcap P \bigcap G) \bigcup (S \bigcap Q \bigcap G) \bigcup (S \bigcap T \bigcap G)$$

$$\cdots\cdots 1.139$$

根据諸集合 P, Q, G 的定義，我们极易证明

$$P \bigcap G = \phi, \quad Q \bigcap G = \phi \qquad \cdots\cdots 1.140$$

由此我们立刻能够得出

$$S \bigcap P \bigcap G = \phi, \quad S \bigcap Q \bigcap G = \phi \qquad \cdots\cdots 1.141$$

现在，我们根据 1.139、1.140、1.141 三式立得

$$V = S \bigcap T \bigcap G \qquad \cdots\cdots 1.142$$

从 1.142 式我们可以明显地看出，如果要寻求 Z_1, Z_2, Z_3 在域 G 上的交的话那末仅需考慮集合 S 及 T

在域G上的交就可以了。

根据1.142式以及集合S与集合T的定义我们立刻得知，若$(\alpha,\beta,\xi)\in V$ 那末三个变数α,β,ξ必定满足下列两个代数方程

$$4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)\xi^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.143$$

$$16\alpha^2\beta\left\{-4\alpha^4\beta^3+\beta\left[\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]^2(1-\beta)^2-\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)^2\right\}\xi^4$$
$$-2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left\{(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\left[3\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]-(\alpha-\beta)^2\left[5\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]\right\}\xi^2$$
$$+(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^4\left[4\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]=0 \quad \cdots\cdots 1.144$$

且有$(\alpha,\beta,\xi)\in G$。

在事实上，我们可有如下的结论：

1° 若将五次曲面1.124及十四次曲面1.128依次看作为集合S及集合T，那末恒有

$$S\subset T \quad \cdots\cdots 1.145$$

証 考虑恒等式

$$-4\alpha^4\beta^3+\beta\left[\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]^2(1-\beta)^2-\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)^2=$$
$$=\left[\beta-(1-\alpha)\right]\cdot\left\{\left[(1-2\alpha)\left[3\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]+\alpha(1-\alpha)\right]\beta^2+\left[-4\alpha^4(1-\alpha)\right.\right.$$
$$\left.\left.-(1+\alpha)\left[\alpha^2+(1-\alpha)^2\right]^2-3\alpha^2(1-\alpha)\right]\beta+\alpha^3\right\} \quad \cdots\cdots 1.146$$

利用恒等式1.146我们能够得出恒等式

$$16\alpha^2\beta\{-4\alpha^4\beta^3+\beta[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2(1-\beta)^2-\alpha(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha-\beta)^2\}z^4$$
$$-2(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2\{(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]-(\alpha-\beta)^2[5\alpha^2+(1-\alpha)^2]\}z^2$$
$$+(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^4[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]=[4\alpha\beta(1-\alpha-\beta)z^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2]\cdot$$
$$\cdot\{-4\alpha\Big([(1-2\alpha)[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]+\alpha(1-\alpha)]\beta^2+[-4\alpha^4(1-\alpha)-(1+\alpha)[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2$$
$$-3\alpha^2(1-\alpha)]\beta+\alpha^3\Big)z^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]\} \quad \cdots\cdots 1.147$$

根据恒等式1.147我们立刻得知，十四次曲面1.128是一个由五次曲面1.124及九次曲面

$$4\alpha\{[4\alpha^4(1-\alpha)+(1+\alpha)[\alpha^2+(1-\alpha)^2]^2+3\alpha^2(1-\alpha)]\beta-[(1-2\alpha)[3\alpha^2+(1-\alpha)^2]$$
$$+\alpha(1-\alpha)]\beta^2-\alpha^3\}z^2-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)^2[4\alpha^2+(1-\alpha)^2]=0 \quad \cdots\cdots 1.148$$

所组成的退化的十四次曲面。由此并根据集合S及集合T的定义，我们便立刻得到

$$S\subseteq T$$

这就证明了1°的结论。

2° 若集合V是集合S与集合T在域G上的交，那末集合V非空且有

$$V=\left\{(\alpha,\beta,z)\,\middle|\,0<\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{1}{2},\ z=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}}\right\}$$

证明　根据1.142式我们有

$$V=S\bigcap T\bigcap G$$

由此并根据1.145式我们显然可得

$$V=(S\bigcap T)\bigcap G=S\bigcap G \quad \cdots\cdots 1.149$$

根据集合S的定义，我们可将集合S写作两个集合S_1与S_2的并。即有

$$S=S_1\bigcup S_2 \quad \cdots\cdots 1.150$$

式中

$$S_1=\left\{(\alpha,\beta,\xi)\,\middle|\,2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}\,\xi+\left|\alpha+\beta-2\alpha\beta\right|=0\right\}$$

$$S_2=\left\{(\alpha,\beta,\xi)\,\middle|\,2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}\,\xi-\left|\alpha+\beta-2\alpha\beta\right|=0\right\}$$

现在，由1.149及1.150两式并根据集合S_1与集合S_2的定义我们有

$$V=(S_1\bigcap G)\bigcup(S_2\bigcap G) \quad \cdots\cdots 1.151$$

但是，根据集合S_1的定义及域G的定义我们极易证明

$$S_1\bigcap G=\phi \quad \cdots\cdots 1.152$$

由1.151及1.152两式立得

$$V = S_2 \prod G \qquad \cdots\cdots 1.153$$

由1.153式并根据集合S_2及域G的定义，我们立刻能够得到

$$V=\left\{(\alpha,\beta,\xi)\,\middle|\,0<\alpha<\tfrac{1}{2},\ 0<\beta<\tfrac{1}{2},\ \xi=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}}\right\} \qquad \cdots\cdots 1.154$$

由1.154式得知集合V必定是非空的，这就证明了2^0的结论。

现在，我们从以上的研究得知关于ξ及η的非线性方程组（1.113～1.116）的解只能从齐次线性方程1.113的一般解1.117中找到。而且我们还知道，如果$u=(\xi,\eta)$是非线性方程组（1.113～1.116）的解的话那末ξ不能是任意的。它与两个实参数α及β必须满足条件

$$(\alpha,\beta,\xi)\in V \qquad \cdots\cdots 1.155$$

根据1.117、1.154、1.155三个式子，我们立刻可以得知非线性方程组（1.113～1.116）的解是

$$\xi=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}},\qquad \eta=\frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}}$$

这里 $(\alpha,\beta)\in F$ 且 $F=\{(\alpha,\beta)\mid 0<\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{1}{2}\}$。

由此引理8得证，引理8至此全部证完。从引理8的证明过程可看出，它的证明是比较麻烦的。

二、流形K的参数表达式

在这一节我们来証明如下的

定理2.1 若K是由1.2式所定義的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末流形K有如下的参数表达式

$$
\begin{aligned}
\bar\alpha &= \bar\alpha\\
\bar\beta &= \bar\beta\\
\bar\xi &= \frac{\bar\alpha+\bar\beta-2\bar\alpha\bar\beta}{2\sqrt{\bar\alpha\bar\beta(1-\bar\alpha-\bar\beta)}}\\
\bar\eta &= \frac{\bar\alpha-\bar\beta}{2\sqrt{\bar\alpha\bar\beta(1-\bar\alpha-\bar\beta)}}\\
P_1 &= \frac{1-3\bar\alpha}{2(1-\bar\alpha)}\\
P_2 &= \frac{\sqrt{\bar\alpha\bar\beta(1-\bar\alpha-\bar\beta)}}{\bar\beta(1-\bar\alpha)}\\
P_3 &= \frac{1-3\bar\beta}{2(1-\bar\beta)}\\
P_4 &= \frac{\sqrt{\bar\alpha\bar\beta(1-\bar\alpha-\bar\beta)}}{\bar\alpha(1-\bar\beta)}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots 2.1
$$

式中 $(\bar\alpha,\bar\beta)\in F_0$ 且 $F_0=\left\{(\bar\alpha,\bar\beta)\,\middle|\,0<\bar\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\bar\beta<\frac{1}{2},\ \bar\alpha-\bar\beta\neq 0\right\}$。

証　由1.10式及1.40式我们有

$$x=x_4=\frac{\alpha^2(1-2\beta-3\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)}+2 \qquad \cdots\cdots 2.2$$

$$y = x_5 = \frac{\alpha^2(1-2\beta+5\beta^2)(\xi^2-\eta^2)}{2(1-\alpha)^2(1-\beta)^2(\xi^2-\eta^2-1)} - 2 \qquad \cdots\cdots 2.3$$

根据上一节中诸引理的研究我们得知，关于 x 及 y 的超定非线性方程组（1.5～1.8）有满足条件 1.9 的解的话那末它的充分和必要条件是四个实参数有如次关系

$$\xi = \frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}}, \quad \eta = \frac{\alpha-\beta}{2\sqrt{\alpha\beta(1-\alpha-\beta)}} \qquad \cdots\cdots 2.4$$

这里 $(\alpha,\beta)\in F$ 且 $F=\{(\alpha,\beta)\,|\,0<\alpha<\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{1}{2}\}$。

现在，我们依次将 2.4 式代入到 2.2 及 2.3 两个式子中去经整理后可得

$$x = \frac{\alpha(1-2\beta-3\beta^2)}{2\beta(1-\alpha)(1-\beta)} + 2$$

$$y = \frac{\alpha(1-2\beta+5\beta^2)}{2\beta(1-\alpha)(1-\beta)} - 2 \qquad \cdots\cdots 2.5$$

根据文献[ ]的 1.19 式，我们有

$$m = x+y, \quad n = x-y \qquad \cdots\cdots 2.6$$

如果我们将 α, β, ξ, η 恢复到原来的四个记号 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$，那末由 2.5 及 2.6 两式我们立刻经验得到

$$m = \frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\beta})}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})}, \quad n = \frac{4(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} \qquad \cdots\cdots 2.7$$

若将2.7式代入到文献[ ]的1.7式中去经整理并注意到$(\bar{\alpha},\bar{\beta})\in F$，那末我们立刻就能够得到

$$
\begin{aligned}
\bar{\alpha} &= \bar{\alpha}\\
\bar{\beta} &= \bar{\beta}\\
\bar{\gamma} &= \frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}-2\bar{\alpha}\bar{\beta}}{2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}\\
\bar{\eta} &= \frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{2\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}\\
P_1 &= \frac{1-3\bar{\alpha}}{2(1-\bar{\alpha})}\\
P_2 &= \frac{\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})}\\
P_3 &= \frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}\\
P_4 &= \frac{\sqrt{\bar{\alpha}\bar{\beta}(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}}{\bar{\alpha}(1-\bar{\beta})}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots 2.8
$$

假如将2.7式代入到文献[ ]的1.7式中的R域的定义式里去，经整理后我们立刻能够得到关于$\bar{\alpha}$及$\bar{\beta}$的两元不等式组

$$\frac{\bar{\alpha}(1-\bar{\beta})}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})} > 0 \qquad \cdots\cdots 2.9$$

$$\frac{\bar{\alpha}-\bar{\beta}}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})} \neq 0 \qquad \cdots\cdots 2.10$$

$$\frac{(1-\bar{\alpha}-\bar{\beta})}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} > 0 \qquad \cdots\cdots 2.11$$

$$\frac{\bar{\alpha}\bar{\beta}}{(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} > 0 \qquad \cdots\cdots 2.12$$

$$\frac{1-2\bar{\alpha}}{(1-\bar{\alpha})^2} > 0 \qquad \cdots\cdots 2.13$$

$$\frac{\bar{\alpha}(1-2\bar{\beta})}{\bar{\beta}(1-\bar{\alpha})(1-\bar{\beta})} > 0 \qquad \cdots\cdots 2.14$$

解不等式组（2.9～2.14）我们立得其解为

$$\bar{F}_1 = \left\{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \,\middle|\, 0 < \bar{\alpha} < \tfrac{1}{2},\ 0 < \bar{\beta} < \tfrac{1}{2},\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} \neq 0 \right\} \qquad \cdots\cdots 2.15$$

及

$$\bar{F}_2 = \left\{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \,\middle|\, \bar{\alpha} < 0,\ \bar{\beta} < 0,\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} \neq 0 \right\} \qquad \cdots\cdots 2.16$$

由域 F，$\bar{F}_1$，$\bar{F}_2$ 的定义得知；现在 $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\beta}$ 的取值范围应是

$$F_0 = F \bigcap (\bar{F}_1 \bigcup \bar{F}_2) \qquad \cdots\cdots 2.17$$

由此我们立刻得到 $\bar{\alpha}$ 及 $\bar{\beta}$ 的取值域是

$$F_0 = \left\{(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \,\middle|\, 0 < \bar{\alpha} < \tfrac{1}{2},\ 0 < \bar{\beta} < \tfrac{1}{2},\ \bar{\alpha} - \bar{\beta} \neq 0 \right\} \qquad \cdots\cdots 2.18$$

这就证明了定理 2.1，定理 2.1 至此全部证毕。