The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 5

一、流形Q的研究

在文献[ ]中，我们得到了如下的定理：

定理1.1 若将代数方程组

$$(\bar\alpha-\bar\beta)\bar\xi-(\bar\alpha+\bar\beta-2\bar\alpha\bar\beta)\bar\eta=0 \quad \cdots\cdots 1.1$$

$$(1-2\bar\beta)\bar\xi^2-2\bar\beta^2\bar\xi\bar\eta-(1-2\bar\beta+2\bar\beta^2)\bar\eta^2-(1-\bar\beta)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.2$$

$$(3-2p_1)\bar\alpha+2p_1-1=0 \quad \cdots\cdots 1.3$$

$$p_2\bar\xi-p_2\bar\eta-1=0 \quad \cdots\cdots 1.4$$

$$(3-2p_3)\bar\beta+2p_3-1=0 \quad \cdots\cdots 1.5$$

$$p_4\bar\xi+p_4\bar\eta-1=0 \quad \cdots\cdots 1.6$$

的解看作为八维欧氏空间E^8中的一个流形且用Q来表示这个流形，那末流形Q有如下的参数表达式

$$\bar\alpha=\frac{\sqrt{m(4-n)}}{\sqrt{m(4-n)}+2},\quad \bar\beta=\frac{\sqrt{4-n}}{\sqrt{4-n}+2\sqrt{m}},\quad \bar\xi=\frac{m+1}{\sqrt{mn}},$$

$$\bar\eta=\frac{m-1}{\sqrt{mn}},\quad p_1=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{m(4-n)}\right),\quad p_2=\frac{1}{2}\sqrt{mn},$$

$$p_3=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4-n}{m}}\right),\quad p_4=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}} \quad \cdots\cdots 1.7$$

式中 $(m,n)\in R$ 且 $R=\{(m,n)\mid m>0,\ m-1\neq 0,$
$0<n<4,\ mn-4m+4>0,\ 4m+n-4>0\}$

由流形理論得知，1.7式是流形Q的一种参数表示法。由於1.7式中出现的都是无理代数式，所以我们对由它所表徵的流形Q的维数及结构还不十分清楚。为了确定流形Q的确切维数与具体代数结构，我们必须对流形Q作进一步的研究。

由於实参数m与n的几何意義不十分明确，因此我们对这两个实参数感到有些陌生。但是，我们对$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$四个实参数的几何意義是清楚的。事实上，由文献[ ]中的1.8式及引理1的1°、2°的开始部分，我们显然可有

$$\bar{\alpha}=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-3\sigma+1}, \quad \bar{\beta}=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-\sigma}$$

$$\bar{\xi}=\frac{(\sigma-1)^2+\sigma^2+2t^2}{2t}, \quad \bar{\eta}=\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{t}$$

这里$(\sigma, t)\in D$且$D=\left\{(\sigma,t) \;\middle|\; 0<\sigma<1,\ \sigma-\frac{1}{2}\neq 0,\ t>0,\ \sigma^2+t^2-\sigma>0\right\}$

我们的基本想法是能否用$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$四个实参数去表示我们的流形Q？回答是肯定的。为

了达到这个目的，我们必须找到实参数 m、n 与实参数 $\bar{\alpha}$，$\bar{\beta}$，$\bar{\xi}$，$\bar{\eta}$ 间的关係。下面的所有工作都是紧紧围绕这个主题而进行的。

在事实上，我们如果来研究 1.7 式中的前四个式子

$$\frac{\sqrt{m(4-n)}}{\sqrt{m(4-n)}+2}=\bar{\alpha} \quad \cdots\cdots 1.8$$

$$\frac{\sqrt{4-n}}{\sqrt{4-n}+2\sqrt{m}}=\bar{\beta} \quad \cdots\cdots 1.9$$

$$\frac{m+1}{\sqrt{mn}}=\bar{\xi} \quad \cdots\cdots 1.10$$

$$\frac{m-1}{\sqrt{mn}}=\bar{\eta} \quad \cdots\cdots 1.11$$

显然 1.8、1.9 两式可改写为

$$\sqrt{m(4-n)}=\frac{2\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \quad \cdots\cdots 1.12$$

$$\sqrt{4-n}=\frac{2\sqrt{m}\,\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}} \quad \cdots\cdots 1.13$$

由文献[ ]中的 1.8 式及引理 1 的 1°，我们得知有

$$0<\bar{\alpha}<\frac{1}{2}, \qquad 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 1.14$$

从 1.14 式得知 1.12 及 1.13 两式是成立的。

如果将 1.10、1.11、1.12、1.13 四个式子消去根号后并加

整理，我们立刻得到下列四个式子

$$4\bar{\beta}^2 m+(1-\bar{\beta})^2 n-4(1-\bar{\beta})^2=0 \quad \cdots\cdots 1.15$$

$$(1-\bar{\alpha})^2 mn-4(1-\bar{\alpha})^2 m+4\bar{\alpha}^2=0 \quad \cdots\cdots 1.16$$

$$m^2-\bar{\xi}^2 mn+2m+1=0 \quad \cdots\cdots 1.17$$

$$m^2-\bar{\eta}^2 mn-2m+1=0 \quad \cdots\cdots 1.18$$

由解析几何得知，1.15式在几何上表示一条直线。而1.16、1.17、1.18三个式子由於它们的判别式依次是

$$\Delta_1=-\frac{(1-\bar{\alpha})^4}{4}<0$$

$$\Delta_2=-\frac{\bar{\xi}^4}{4}<0$$

$$\Delta_3=-\frac{\bar{\eta}^4}{4}<0$$

故知1.16、1.17、1.18三个式子在几何上均表示一对双曲线。

为了研究上的方便起见，我们作变数的代换

$$m=x+y \quad ,n=x-y \quad \cdots\cdots 1.19$$

将1.19式代入到1.15、1.16、1.17、1.18四个式子中后，我们立

則得到如下四个式子

$$(1-2\bar{\beta}+5\bar{\beta}^2)x-(1-2\bar{\beta}-3\bar{\beta}^2)y-4(1-\bar{\beta})^2=0 \quad \cdots\cdots 1.20$$

$$(1-\bar{\alpha})^2x^2-(1-\bar{\alpha})^2y^2-4(1-\bar{\alpha})^2x-4(1-\bar{\alpha})^2y+4\bar{\alpha}^2=0 \quad \cdots\cdots 1.21$$

$$(1-\bar{\xi}^2)x^2+2xy+(1+\bar{\xi}^2)y^2+2x+2y+1=0 \quad \cdots\cdots 1.22$$

$$(1-\bar{\eta}^2)x^2+2xy+(1+\bar{\eta}^2)y^2-2x-2y+1=0 \quad \cdots\cdots 1.23$$

完全是为了书写上的方便起见，我们在研究方程組（1.20~1.23）時暫將 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\xi}, \bar{\eta}$ 簡記为 α, β, ξ, η，这并不会使我们的概念发生混淆。

为了研究上的方便起見，我们再作一次变数的代換

$$x_1=x^2, \quad x_2=xy, \quad x_3=y^2, \quad x_4=x,$$

$$x_5=y \quad \cdots\cdots 1.24$$

如此我们立刻得到关於 x_j ($j=1,2,\cdots,5$) 的一組綫性方程

$$(1-2\beta+5\beta^2)x_4-(1-2\beta-3\beta^2)x_5=4(1-\beta)^2 \quad \cdots\cdots 1.25$$

$$(1-\alpha)^2x_1-(1-\alpha)^2x_3-4(1-\alpha)^2x_4-4(1-\alpha)^2x_5=-4\alpha^2 \quad \cdots\cdots 1.26$$

$$(1-\xi^2)x_1+2x_2+(1+\xi^2)x_3+2x_4+2x_5=-1 \quad \cdots\cdots 1.27$$

$$(1-\eta^2)x_1+2x_2+(1+\eta^2)x_3-2x_4-2x_5=-1 \qquad \cdots\cdots 1.28$$

此外，从1.24式中消去x及y可得关于x_1,x_2,x_3,x_4,x_5间的三个非线性关系

$$x_1-x_4^2=0, \quad x_2-x_4x_5=0, \quad x_3-x_5^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.29$$

显然，方程组(1.25~1.29)与方程组(1.20~1.23)是完全等价的。但是方程组(1.25~1.29)它的线性内涵与非线性内涵已经分离开来了。

为了研究上的方便与清楚起见，我们需要如下的

引理1　若$Z=(x,y)$是超定非线性代数方程组(1.20~1.23)的解，那末必有$x\neq0$。

证　我们分几个段落来证明

1° $Z_0=(0,0)$不可能是解。

如若不然，设Z_0是一个解。将它代入到方程组(1.20~1.23)中后将产生矛盾，故Z_0不是解。

2° $Z=(0,y)$也不可能是解。

如若不然，将$Z=(0,y)$直接代入到1.22式中后

我们立刻得到关于 y 的二次方程

$$(1+\xi^2)y^2+2y+1=0 \quad \cdots\cdots 1.30$$

但是，从第2页我们得知当 $(\sigma,t)\in D$ 时恒有

$$\xi=\frac{(\sigma-1)^2+\sigma^2+2t^2}{2t}>0 \quad \cdots\cdots 1.31$$

根据1.30及1.31两式，我们得知1.30式之相应的判别式 $\Delta=-4\xi^2<0$。故知二次方程1.30式只有两个共轭复根。而且此时应有 $(m,n)\in R$，但此与 y 是复的相违，由此产生矛盾。

由1°及2°我们得知，若 $z=(x,y)$ 是超定非线性代数方程组(1.20~1.23)的解，那末恒有 $x\neq 0$。这就证明了引理1。

引理2　关于 x 及 y 的超定非线性方程组(1.20~1.23)有解 $z=(\alpha,0)$ 的充分而必要条件是四个实参数 α,β,ξ,η 满足下列关系

$$(\alpha^2+2\alpha-1)\xi^2+(3\alpha^2-2\alpha+1)\eta^2-(3\alpha^2+2\alpha-1)=0 \quad \cdots\cdots 1.32$$

$$(3\beta^2-14\beta+7)\xi^2+(13\beta^2-18\beta+9)\eta^2-16(\beta-1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.33$$

$$4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\xi^2+(\alpha-1)^2(29\beta^2-50\beta+25)$$

$$-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)=0 \quad \cdots\cdots 1.34$$

$$4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\eta^2+(\alpha-1)^2(13\beta^2-18\beta+9)-$$

$$-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)=0 \quad \cdots\cdots 1.35$$

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \quad \cdots\cdots 1.36$$

$$(2\beta-1)\xi^2+2\beta^2\xi\eta+(2\beta^2-2\beta+1)\eta^2+(\beta-1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.37$$

$$16\beta^2(\alpha-1)^2(\beta-1)^2-\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.38$$

且有

$$x=\frac{4(\beta-1)^2}{5\beta^2-2\beta+1} \quad \cdots\cdots 1.39$$

証 如果我们将点 $z=(x,0)$ 代入到超定非线性代数方程组 (1.20~1.23) 中去并用 α,β,ξ,η 来依次简记 $\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta$ 四个实参数，那末我们立刻得到关於 x 的四个代数方程

$$(5\beta^2-2\beta+1)x-4(\beta-1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.40$$

$$(\alpha-1)^2x^2-4(\alpha-1)^2x+4\alpha^2=0 \quad \cdots\cdots 1.41$$

$$(1-\xi^2)x^2+2x+1=0 \quad \cdots\cdots 1.42$$

$$(1-\eta^2)x^2-2x+1=0 \quad \cdots\cdots 1.43$$

上述四个代数方程中的三个二次方程它们相应

的三个判别式依次是

$$\Delta_1=16(\alpha-1)^2(1-2\alpha)\quad,\quad \Delta_2=4\xi^2\quad,\quad \Delta_3=4\eta^2 \quad\cdots\cdots 1.44$$

由文献[ ]中引理1的1°及2°得知恒有

$$\Delta_1>0\quad,\quad \Delta_2>0\quad,\quad \Delta_3>0 \quad\cdots\cdots 1.45$$

由此得知这三个二次方程均有实根。现在，四个代数方程的代数意义是它们要有实的公根。

为了研究上的方便起见，我们置

$$y_1=x^2\quad,\quad y_2=x \quad\cdots\cdots 1.46$$

如此，四个代数方程1.40、1.41、1.42、1.43 可改写为

$$(5\beta^2-2\beta+1)y_2=4(\beta-1)^2 \quad\cdots\cdots 1.47$$

$$(\alpha-1)^2y_1-4(\alpha-1)^2y_2=-4\alpha^2 \quad\cdots\cdots 1.48$$

$$(1-\xi^2)y_1+2y_2=-1 \quad\cdots\cdots 1.49$$

$$(1-\eta^2)y_1-2y_2=-1 \quad\cdots\cdots 1.50$$

另外，从1.46式消去x后可得y_1与y_2的一个非线性关係

$$y_1-y_2^2=0 \quad\cdots\cdots 1.51$$

现在，关於y_1及y_2的代数方程组与关於x

的代数方程组(1.47~1.51)与(1.40~1.43)是完全等价的。

现在我们转而来研究关于 y_1 及 y_2 的代数方程组(1.47~1.51)。先来研究线性方程组(1.47~1.50)，我们记其係数矩阵及相应的增广矩阵依次是

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5\beta^2-2\beta+1 \\ (\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 \\ 1-\xi^2 & 2 \\ 1-\eta^2 & -2 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 5\beta^2-2\beta+1 & 4(\beta-1)^2 \\ (\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 & -4\alpha^2 \\ 1-\xi^2 & 2 & -1 \\ 1-\eta^2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

由线性方程组理论得知，线性方程组(1.47~1.50)有解的充分和必要条件是 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B$。由於係数矩阵 A 的一个二阶子式

$$I=\begin{vmatrix} 0 & 5\beta^2-2\beta+1 \\ (\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 \end{vmatrix}=-(\alpha-1)^2(5\beta^2-2\beta+1)$$

由文献[ ]中引理1的1°得知恒有 $I\neq0$，故由矩阵秩的定义知有 $\mathrm{rank}A=2$。因此必须有

$$\mathrm{rank}\,B=2 \quad \cdots\cdots 1.52$$

由上面的研究可知，1.52式正是线性方程组(1.47~1.50)有解的充分和必要条件。根据条件1.52式，我们得知增广矩阵B的全体三阶子式必须同时为零。由此我们有

$$J_1=J_2=J_3=J_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.53$$

式中

$$J_1=\begin{vmatrix}(\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 & -4\alpha^2\\ 1-\xi^2 & 2 & -1\\ 1-\eta^2 & -2 & -1\end{vmatrix} \qquad J_2=\begin{vmatrix}0 & 5\beta^2-2\beta+1 & 4(\beta-1)^2\\ 1-\xi^2 & 2 & -1\\ 1-\eta^2 & -2 & -1\end{vmatrix}$$

$$J_3=\begin{vmatrix}0 & 5\beta^2-2\beta+1 & 4(\beta-1)^2\\ (\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 & -4\alpha^2\\ 1-\eta^2 & -2 & -1\end{vmatrix} \qquad J_4=\begin{vmatrix}0 & 5\beta^2-2\beta+1 & 4(\beta-1)^2\\ (\alpha-1)^2 & -4(\alpha-1)^2 & -4\alpha^2\\ 1-\xi^2 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

用行列式的降阶计算方法我们才能将上述四个三阶行列式依次是

$$J_1=-4\left[(\alpha^2+2\alpha-1)\xi^2+(3\alpha^2-2\alpha+1)\eta^2-3\alpha^2-2\alpha+1\right] \qquad \cdots\cdots 1.54$$

$$J_2=(3\beta^2-14\beta+7)\xi^2+(13\beta^2-18\beta+9)\eta^2-16(\beta-1)^2 \qquad \cdots\cdots 1.55$$

$$J_3=4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\eta^2+(\alpha-1)^2(13\beta^2$$

$$-18\beta+9)-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1) \quad \cdots\cdots 1.56$$

$$J_4=4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\xi^2+(\alpha-1)^2(29\beta^2$$

$$-50\beta+25)-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1) \quad \cdots\cdots 1.57$$

根据1.53式并按1.54、1.55、1.56及1.57四个式子我们立刻得到四个实参数α,β,ξ,η必须满足的四个高次代数方程

$$(\alpha^2+2\alpha-1)\xi^2+(3\alpha^2-2\alpha+1)\eta^2-3\alpha^2-2\alpha+1=0 \quad \cdots\cdots 1.58$$

$$(3\beta^2-14\beta+7)\xi^2+(13\beta^2-18\beta+9)\eta^2-16(\beta-1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.59$$

$$4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\eta^2+(\alpha-1)^2(13\beta^2-18\beta+9)$$

$$-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)=0 \quad \cdots\cdots 1.60$$

$$4\left[\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)-4(\alpha-1)^2(\beta-1)^2\right]\xi^2+(\alpha-1)^2(29\beta^2-50\beta+25)$$

$$-4\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)=0 \quad \cdots\cdots 1.61$$

现在，如果上述四个式子同时成立的话那末线性方程组（1.47～1.50）中有而且只有两个方程是独立的。为了研究上的明确和方便起见，我们就取定1.47、1.48两个方程。由于$I\neq0$故知这两个方程显然是线性无关的。

由1.47及1.48两式我们立刻得到

$$y_1=4\left[\frac{4(\beta-1)^2}{5\beta^2-2\beta+1}-\frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right] \quad \cdots\cdots 1.62$$

$$y_2=\frac{4(\beta-1)^2}{5\beta^2-2\beta+1} \quad \cdots\cdots 1.63$$

但是，由1.62及1.63两式所确定的解 $u=(y_1,y_2)$ 并不一定恰好是代数方程组(1.47~1.51)的解。为了寻求方程组(1.47~1.51)的解，可将线性方程组(1.47~1.50)的解 $u=(y_1,y_2)$ 代入到非线性关系1.51式中去。如此便得到 α 与 β 的一个关系式

$$16\beta^2(\alpha-1)^2(\beta-1)^2-\alpha^2(5\beta^2-2\beta+1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.64$$

由1.1及1.2两式并用 α,β,ξ,η 来简记 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$ 四个实参数，那末我们又有

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \quad \cdots\cdots 1.65$$

$$(2\beta-1)\xi^2+2\beta^2\xi\eta+(2\beta^2-2\beta+1)\eta^2+(\beta-1)^2=0 \quad \cdots\cdots 1.66$$

现在，我们一共得到关于 α,β,ξ,η 四个实参数的七个代数方程1.58、1.59、1.60、1.61、1.64、1.65、1.66，而这恰巧是引理2中的四元超定高次方程组(1.32~1.38)。此外，由1.46及1.63两式我们立刻得到

$$x=\frac{4(\beta-1)^2}{5\beta^2-2\beta+1}$$

这正是1.39式，引理2至此全部证完。

现在我们转而来研究四元超定高次方程组(1.32~1.38)。从代数几何角度来看，如果我们将上述七个方程中的每一个方程看作为四维空间中的一个流形，那末方程组(1.32~1.38)的求解问题在几何上意味着寻求这七个流形的交的问题。根据这组四元超定高次方程的具体代数结构以及为了研究上的方便起见，我们无妨地不将ξ及η看作为未知数而将α及β看作为实参数。

由1.38式得知实参数α与β不能相互独立。事实上从几何角度来看，1.38式在几何上表示一条退化的六次代数曲线。这条退化的六次曲线是由两条三次曲线

$$4\beta(\alpha-1)(\beta-1)+\alpha(5\beta^2-2\beta+1)=0 \quad \cdots\cdots 1.67$$

与

$$\alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)-\alpha(5\beta^2-2\beta+1)=0 \qquad \cdots\cdots 1.68$$

所组成。另一方面，根据1.14式并用α, β来简记$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$那末我们显然有

$$0<\alpha<\frac{1}{2}, \quad 0<\beta<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 1.69$$

引理3　如果F是一个开域且有$F=\{(\alpha,\beta) \mid 0<\alpha<\frac{1}{2}, 0<\beta<\frac{1}{2}\}$，那末三次曲线1.67与开域F无交而三次曲线1.68与开域F有交。

我们分几个段落来証明

1°　三次曲线1.67与开域F无交。

証　首先，我们将开域F及三次曲线1.67看作为两个集合。这样，三次曲线1.67可看作为如下的集合

$$L=\{(\alpha,\beta) \mid \alpha\beta(\alpha-1)(\beta-1)+\alpha(5\beta^2-2\beta+1)=0\} \qquad \cdots\cdots 1.70$$

且記

$$E=L\bigcap F \qquad \cdots\cdots 1.71$$

现在我们可以断言集合E肯定是空集。如若不然，設集合E是一个非空集合而是E中任

一元素而且記 $m_0=(\alpha_0,\beta_0)$。由於集合E是集合L与集合F的交，所以我们必定有

$$E\subset L \quad , \quad E\subset F \qquad \cdots\cdots 1.72$$

因为 m_0 是集合E中的任一元素，故必有

$$m_0\in E \qquad \cdots\cdots 1.73$$

由1.72、1.73两式我们立刻得知有

$$m_0\in L \quad , \quad m_0\in F \qquad \cdots\cdots 1.74$$

当 $m_0\in F$ 時由开域F的定義得知定有

$$0<\alpha_0<\frac{1}{2} \quad , \quad 0<\beta_0<\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 1.75$$

由1.75式得知此時应有

$$4\beta_0(\alpha_0-1)(\beta_0-1)+\alpha_0(5\beta_0^2-2\beta_0+1)>0 \qquad \cdots\cdots 1.76$$

由1.76式得知 $m_0\overline{\in} L$ 但此与1.74式相違，由此产生矛盾。因此集合E只能是空集。这就是說三次曲线1.67与开域F无交。这样我们証明了1°的结論。

2° 三次曲线1.68与开域F有交。

証 如同1°一样我们将开域F及三次曲线1.68

看作为两个集合。这样，三次曲线1.68可看作为如下的集合

$$C=\{(\alpha,\beta)\mid 4\beta(\alpha-1)(\beta-1)-\alpha(5\beta^2-2\beta+1)=0\} \quad \cdots\cdots 1.77$$

如果我们取一个集合

$$S=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha=\frac{4\beta(1-\beta)}{(1+\beta)^2},\ 0<\beta<\frac{1}{2},\ \beta-\frac{1}{3}\neq 0\} \quad \cdots\cdots 1.78$$

那末我们可以断言：集合S是集合C与集合F的交集，即有

$$S=C\cap F \quad \cdots\cdots 1.79$$

为了证明1.79式，我们将分为若干段落来进行。

a) $S\subset C\cap F$。

证 今設m_0是集合S中的任一元素且有

$$m_0=(\alpha_0,\beta_0)$$

由集合S的定義1.78式可知此時必有$\alpha_0-\frac{4\beta_0(1-\beta_0)}{(1+\beta_0)^2}=0$，故知元素$m_0$必在三次曲线

$$\alpha\beta^2+2\alpha\beta+4\beta^2+\alpha-4\beta=0$$

上。因此由集合C的定義知必有$m_0\in C$。

另外，由集合S的定義及 $m_0 \in S$ 我們得知此時必有

$$\alpha_0 = \frac{4\beta_0(1-\beta_0)}{(1+\beta_0)^2}, \quad 0<\beta_0<\frac{1}{2}, \quad \beta_0-\frac{1}{3} \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.80$$

故得

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_0 - \frac{1}{2} = -\frac{(3\beta_0-1)^2}{2(1+\beta_0)^2} < 0 \qquad \cdots\cdots 1.81$$

由1.80及1.81兩式并根據引理3中开域F的定義，我們得知必有 $m_0 \in F$。由此并根據上述的 $m_0 \in C$ 的結論得知定有 $m_0 \in C \cap F$。又因 m_0 是集合S中的任意一个元素，故知有

$$S \subset C \cap F$$

这就證明了a)的結論。

b) $C \cap F \subset S$。

證 今設 m_0 是集合C中的任一元素且 $m_0=(\alpha_0, \beta_0)$。因为 $m_0 \in C$ 并根據集合C的定義1.77式，我們得知此時定有

$$\alpha_0 = \frac{4\beta_0(1-\beta_0)}{(1+\beta_0)^2} \qquad \cdots\cdots 1.82$$

如果我们又設 $m_0 \in C \cap F$，那末显然应有

$$m_0 \in C \quad , \quad m_0 \in F \qquad \cdots\cdots 1.83$$

因为 $m_0 \in C$，故 m_0 可写作为

$$m_0 = \left(\frac{4\beta_0(1-\beta_0)}{(1+\beta_0)^2} , \beta_0 \right) \qquad \cdots\cdots 1.84$$

又因 $m_0 \in F$，故由1.84式并根据引理3中开域F的定义得知定有

$$0 < \frac{4\beta_0(1-\beta_0)}{(1+\beta_0)^2} < \frac{1}{2} \quad , \quad 0 < \beta_0 < \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots 1.85$$

解不等式组1.85后我们立刻得到

$$0 < \beta_0 < \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_0 - \frac{1}{3} \neq 0 \qquad \cdots\cdots 1.86$$

由1.84及1.86两式并根据集合S的定义1.78式，我们得知必有 $m_0 \in S$。又因元素 m_0 的任意性，我们立刻得到

$$C \cap F \subset S$$

这就证明了b)的结论。

由结论a)与b)，我们就能够得出

$$S = C \cap F$$

这就证明了1.79式。

从集合S的定义可看出它是非空的集合，

这一点在上面证明结论 a) 及结论 b) 的过程中已隐含地用到了。由 S 是一个非空集合及 1.79 式我们得知集合 C 与集合 F 是有交的，这就证明了 2° 的结论。

根据 1° 及 2° 的结论，引理 3 得证。引理 3 至此全部证完。

引理 4　如果矩阵 B 是引理 2 中线性方程组 (1.47~1.50) 的增广矩阵，J_j ($j=1,2,3,4$) 表示矩阵 B 不含第 j 行元素的一个三阶子式。那末 1.53 式成立的充分和必要条件是

$$J_1 = J_2 = 0 \quad \cdots\cdots 1.87$$

证 必要性是显然的，下面来证明充分性。

现在我们将引理 2 中的矩阵 B 的每一行看作为一个三维向量，这样矩阵 B 可简记为

$$B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots 1.88$$

为了研究上的方便起见，我们分为若干个段落来证明

1° 行向量$\vec{a_3}$与行向量$\vec{a_4}$是线性无关的。

证 根据引理之中增广矩阵B的定义可知行向量$\vec{a_3}$与行向量$\vec{a_4}$依次为

$$\vec{a_3}=(1-\xi^2)\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k} \quad \text{······1.89}$$

$$\vec{a_4}=(1-\eta^2)\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k} \quad \text{······1.90}$$

如若不然，设向量$\vec{a_3}$与向量$\vec{a_4}$线性相关，即有一对全不为零的实数λ与μ使$\vec{a_3}$与$\vec{a_4}$满足

$$\lambda\vec{a_3}+\mu\vec{a_4}=0 \quad \text{····1.91}$$

由线性相关的理论可知实数对λ与μ必须是不全为零的两个实数。但是，行向量$\vec{a_3}$与$\vec{a_4}$都不是零向量所以λ与μ中不能有一个为零，否则将导致$\lambda=\mu=0$而与线性相关的定义相违。因此，如果1.91式成立的话那末它的必要条件是λ与μ均不为零。

将1.91式写为各分量的形式，我们有

$$(1-\xi^2)\lambda+(1-\eta^2)\mu=0 \qquad \cdots\cdots 1.92$$

$$\lambda-\mu=0 \qquad \cdots\cdots 1.93$$

$$\lambda+\mu=0 \qquad \cdots\cdots 1.94$$

这是一组关于 λ 及 μ 的齐次线性方程组。由齐次方程组理论得知，方程组(1.92~1.94)有非零解的充分必要条件是它相应的係数矩阵

$$M=\begin{pmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

不是满秩矩阵。但是，由于 M 的一个二阶子式

$$K=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

故由矩阵的秩的定义得知有 $\operatorname{rank} M=2$。由此我们得知齐次方程组(1.92~1.94)有而且只有零解。但此与1.91式相违，由此产生矛盾。因此，行向量 $\vec{a}_3$ 与行向量 $\vec{a}_4$ 必定是线性无关的。这就证明了 7° 的结论。

2° 若向量 $\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 及向量 $\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 都是共面的三个向量，那末向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 及向量 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4}$ 也都共面。

証 由向量代数理論得知，三个向量共面的充分而必要条件是这三个向量所作成的混合积等於零。如果我们用記号 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ 来表示三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，那末由假設得知定有

$$(\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_4})=0,\quad (\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4})=0 \qquad \cdots\cdots 1.95$$

由1.95式得知向量 $\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 及向量 $\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}$ 都是线性相关的，故有

$$\lambda\vec{a_1}+\mu\vec{a_3}+\nu\vec{a_4}=0 \qquad \cdots\cdots 1.96$$

$$\bar{\lambda}\vec{a_2}+\bar{\mu}\vec{a_3}+\bar{\nu}\vec{a_4}=0 \qquad \cdots\cdots 1.97$$

式中 λ,μ,ν 及 $\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}$ 是不全为零的实数。而且，1.96式及1.97式中的 λ 及 $\bar{\lambda}$ 均不为零，否則将与1° 发生矛盾。由此得知，向量 $\vec{a_1}$ 及 $\vec{a_2}$ 都可用两个线性无关的向量 $\vec{a_3},\vec{a_4}$ 来线性表出。故得

$$\vec{a_1}=c\,\vec{a_3}+d\,\vec{a_4} \quad \cdots\cdots 1.98$$

$$\vec{a_2}=\bar{c}\,\vec{a_3}+\bar{d}\,\vec{a_4} \quad \cdots\cdots 1.99$$

现在，我们转而来研究两个混合积 $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})$ 及 $(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4})$。由1.98及1.99两式，我们显然有

$$(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})=(c\vec{a_3}+d\vec{a_4},\bar{c}\vec{a_3}+\bar{d}\vec{a_4},\vec{a_3}) \quad \cdots\cdots 1.100$$

注意到

$$(c\vec{a_3}+d\vec{a_4},\bar{c}\vec{a_3}+\bar{d}\vec{a_4},\vec{a_3})=c(\vec{a_3},\bar{c}\vec{a_3}+\bar{d}\vec{a_4},\vec{a_3})$$
$$+d(\vec{a_4},\bar{c}\vec{a_3}+\bar{d}\vec{a_4},\vec{a_3})=c\bar{c}(\vec{a_3},\vec{a_3},\vec{a_3})+c\bar{d}(\vec{a_3},\vec{a_4},\vec{a_3})$$
$$+d\bar{c}(\vec{a_4},\vec{a_3},\vec{a_3})+d\bar{d}(\vec{a_4},\vec{a_4},\vec{a_3})=0 \quad \cdots\cdots 1.101$$

由1.100及1.101两式我们立刻得到

$$(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3})=0 \quad \cdots\cdots 1.102$$

同法可证

$$(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4})=0 \quad \cdots\cdots 1.103$$

根据J_j的定义及1.88式，我们显然有

$$J_1=(\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{a_4}),\quad J_2=(\vec{a_1},\vec{a_3},\vec{a_4}),$$
$$J_3=(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_4}),\quad J_4=(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}) \quad \cdots\cdots 1.104$$

由1.102及1.103两式我们证明了2°的结论。

由上述的结論2°及1.104式得知，如果引理2中线性方程組(1.47~1.50)的增广矩陣B的两个三阶子式J_1与J_2同時为零，那末增广矩陣B的另外两个三阶子式J_3与J_4也同時为零。这就証明了充分性。引理4至此全部証完。

根据引理4我们得知，在1.58、1.59、1.60 及1.61四个式子中只需考慮1.58及1.59两个式子就足够了。因此，如果我们要研究引理2中关於四个实参数$\alpha, \beta, \gamma, \eta$的超定非线性方程組(1.32~1.38)的話，那末在事实上我们仅需考慮1.32、1.33、1.36、1.37及1.38五个式子就已经足够。现在来看这五个式子的几何意義。由引理3得知，退化的六次代数曲线1.38在事实上由两条三次曲线1.67与1.68所組成。此外，如果我们将α与β看作为参数而将γ与η看作为变数的話，那末除了1.36式表示一条直线外其余1.32、1.33及1.37三个式子在几何上都表示一条二次曲线。

由解析几何中的二次曲线理论得知，上述三条二次曲线它们相应的判别式依次是

$$\Delta_1(\alpha)=(\alpha^2+2\alpha-1)(3\alpha^2-2\alpha+1) \qquad \cdots\cdots 1.105$$

$$\Delta_2(\beta)=(3\beta^2-14\beta+7)(13\beta^2-18\beta+9) \qquad \cdots\cdots 1.106$$

$$\Delta_3(\beta)=-(\beta-1)^4 \qquad \cdots\cdots 1.107$$

而且由1.19式得知实参数α与β均在开区间I中取值且有$I=\{x\mid 0<x<\frac{1}{2}\}$。因此，我们得知

$$\Delta_3(\beta)<0 \qquad \cdots\cdots 1.108$$

故知1.37式在几何上表示依赖于参数β的一对双曲线。

由于对任意的实的α与β有

$$3\alpha^2-2\alpha+1>0\ ,\quad 13\beta^2-18\beta+9>0 \qquad \cdots\cdots 1.109$$

因而$\Delta_1(\alpha)$及$\Delta_2(\beta)$的取值的正负特性就完全依次取决于二次三项式$\alpha^2+2\alpha-1$及$3\beta^2-14\beta+7$的取值的正负特性了。

由初等代数得知，二次三项式

$$f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha-1$$

及二次三项式

$$g(\beta)=3\beta^2-14\beta+7$$

它们的取值的正負時性依次是

α	$\alpha<-(1+\sqrt{2})$	$\alpha=-(1+\sqrt{2})$	$-(1+\sqrt{2})<\alpha<\sqrt{2}-1$	$\alpha=\sqrt{2}-1$	$\alpha>\sqrt{2}-1$
$f(\alpha)$	>0	0	<0	0	>0

β	$\beta<\frac{7-2\sqrt{7}}{3}$	$\beta=\frac{7-2\sqrt{7}}{3}$	$\frac{7-2\sqrt{7}}{3}<\beta<\frac{7+2\sqrt{7}}{3}$	$\beta=\frac{7+2\sqrt{7}}{3}$	$\beta>\frac{7+2\sqrt{7}}{3}$
$g(\beta)$	>0	0	<0	0	>0

由此及 $\alpha\in I$ 與 $\beta\in I$，我们立刻得知

1° 当 $0<\alpha<\sqrt{2}-1$ 時 $\Delta_1(\alpha)<0$，因此 1.32 式表示依賴於參數 α 的双曲線。当 $\alpha=\sqrt{2}-1$ 時有 $\Delta_1(\alpha)=0$，因此 1.32 式在此時表示一条抛物線。当 $\sqrt{2}-1<\alpha<\frac{1}{2}$ 時有 $\Delta_1(\alpha)>0$，所以 1.32 式在此時表示依賴於參數 α 的橢圓。

2° 如果注意到不等式 $\frac{1}{2}<\frac{7-2\sqrt{7}}{3}$，那末 $0<\beta<\frac{1}{2}$ 時定有 $\Delta_2(\beta)>0$，因此1.33式在此時表示依賴於參數 β 的橢圓。

根據引理3我們得知，若 $(\alpha,\beta)\in F$ 則1.38式在事實上等价於1.78式。如果我們將关係式

$$\alpha=\frac{4\beta(1-\beta)}{(1+\beta)^2} \qquad \cdots\cdots 1.110$$

代入到1.32及1.36兩个式子中去經整理后立得

$$(7\beta^2-2\beta-1)(\beta^2-6\beta+1)\xi^2+\left[48\beta^2(\beta-1)^2+(\beta+1)^2(3\beta-1)^2\right]\eta^2$$
$$-\left[(4\sqrt{3}+3)\beta^2-2(2\sqrt{3}-1)\beta-1\right]\cdot\left[(4\sqrt{3}-3)\beta^2-2(2\sqrt{3}+1)\beta+1\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.111$$

$$(\beta^2+6\beta-3)\xi+(9\beta^2-10\beta+5)\eta=0 \qquad \cdots\cdots 1.112$$

由於1.32、1.33、1.36、1.37及1.38五个式子与1.33、1.37、1.111及1.112四个式子完全等价，所以我們現在轉而来研究1.33、1.37、1.111及1.112四个代數方程。如果我們將 β 看作为實參數而將 ξ 及 η 看作为未知數的話，那末这是一組线性内涵与非线性内涵已經分离开的两元超定非线性代數方程組。显然，我們可將1.33、1.37及1.111三个式子看作为未知數 ξ 及 η 所

必须满足的三个非线性关系式。

由於对任意的实的 β 二次三项式

$$h(\beta)=9\beta^2-10\beta+5$$

恒正，因此线性方程1.112式的基础解系可写作

$$\xi=\xi, \quad \eta=-\frac{\beta^2+6\beta-3}{9\beta^2-10\beta+5}\xi \qquad \cdots\cdots 1.113$$

线性方程1.112式的解1.113一般说来并不恰好满足三个非线性关系式1.33、1.37及1.111式。为了寻找同時满足三个非线性关系的解，我们可将基础解系1.113代入到1.33、1.37、1.111三个非线性关系式中去。如此便得

$$\left[(3\beta^2-14\beta+7)(9\beta^2-10\beta+5)^2+(13\beta^2-18\beta+9)(\beta^2+6\beta-3)^2\right]\xi^2-16(\beta-1)^2(9\beta^2-10\beta+5)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.114$$

$$\left[(2\beta-1)(9\beta^2-10\beta+5)^2-2\beta^2(\beta^2+6\beta-3)(9\beta^2-10\beta+5)+(2\beta^2-2\beta+1)(\beta^2+6\beta-3)^2\right]\xi^2+(\beta-1)^2(9\beta^2-10\beta+5)^2=0 \qquad \cdots\cdots 1.115$$

$$\left\{(7\beta^2-2\beta-1)(\beta^2-6\beta+1)(9\beta^2-10\beta+5)^2+(\beta^2+6\beta-3)^2\left[48\beta^2(\beta-1)^2+(\beta+1)^2(3\beta-1)^2\right]\right\}\xi^2-(9\beta^2-10\beta+5)^2\left[48\beta^2(\beta-1)^2-(\beta+1)^2(3\beta-1)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.116$$

如果我们注意到恒等式

$$(3\beta^2-14\beta+7)(9\beta^2-10\beta+5)^2+(13\beta^2-18\beta+9)(\beta^2+6\beta-3)^2$$

$$=256\beta^6-1536\beta^5+3840\beta^4-5120\beta^3+3840\beta^2-1536\beta+256=$$

$$=256(\beta-1)^6 \qquad \cdots\cdots 1.117$$

$$(2\beta-1)(9\beta^2-10\beta+5)^2-2\beta^2(\beta^2+6\beta-3)(9\beta^2-10\beta+5)+$$

$$+(2\beta^2-2\beta+1)(\beta^2+6\beta-3)^2=-16\beta^6+96\beta^5-240\beta^4+320\beta^3-$$

$$-240\beta^2+96\beta-16=-16(\beta-1)^6 \qquad \cdots\cdots 1.118$$

$$(7\beta^2-2\beta-1)(\beta^2-6\beta+1)(9\beta^2-10\beta+5)^2+(\beta^2+6\beta-3)^2\left[48\beta^2\cdot\right.$$

$$\left.(\beta-1)^2+(\beta+1)^2(3\beta-1)^2\right]=624\beta^8-4224\beta^7+11456\beta^6-16000\beta^5+$$

$$+12064\beta^4-4480\beta^3+448\beta^2+128\beta-16=16(\beta-1)^4(39\beta^4$$

$$-108\beta^3+50\beta^2+4\beta-1) \qquad \cdots\cdots 1.119$$

那末，利用恒等式1.117、1.118及1.119我们可将1.114、1.115及1.116三个式子改写为

$$16(\beta-1)^2\left[16(\beta-1)^4 z^2-(9\beta^2-10\beta+5)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.120$$

$$-(\beta-1)^2\left[16(\beta-1)^4 z^2-(9\beta^2-10\beta+5)^2\right]=0 \qquad \cdots\cdots 1.121$$

$$(39\beta^4-108\beta^3+50\beta^2+4\beta-1)\left[16(\beta-1)^4 z^2-(9\beta^2-10\beta+5)^2\right]=0 \cdots 1.122$$

根据引理3中2°的1.78式，我们得知参数β

的取值范围是

$$\beta \in I_0 \quad , \quad I_0=\left\{\beta \mid 0<\beta<\tfrac{1}{2},\ \beta-\tfrac{1}{3}\neq 0\right\} \quad \cdots\cdots 1.123$$

现在我们将 β 与 ξ 都看作为变数，那末从代数几何得知 1.120 式与 1.121 式在几何上代表同一条退化的八次曲线。它由一对重合的直线

$$\beta-1=0 \quad \cdots\cdots 1.124$$

同两条三次曲线

$$4\beta^2\xi+9\beta^2-8\beta\xi-10\beta+4\xi+5=0 \quad \cdots\cdots 1.125$$

与

$$4\beta^2\xi-9\beta^2-8\beta\xi+10\beta+4\xi-5=0 \quad \cdots\cdots 1.126$$

所组成。

如果我们注意到恒等式

$$39\beta^4-108\beta^3+50\beta^2+4\beta-1=\left[(4\sqrt{3}+3)\beta^2-2(2\sqrt{3}-1)\beta-1\right]\cdot\left[(4\sqrt{3}-3)\beta^2-2(2\sqrt{3}+1)\beta+1\right]$$

那末我们显然有因式分解

$$39\beta^4-108\beta^3+50\beta^2+4\beta-1=39\left[\beta-1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]\cdot\left[\beta-\frac{5-2\sqrt{3}}{13}\right]\cdot\left[\beta-\frac{5+2\sqrt{3}}{13}\right]\cdot\left[\beta-1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right] \quad \cdots\cdots 1.127$$

从代数几何得知，1.122式在几何上表示的是一条退化的十次曲线。它由四条相互平行的直线

$$\beta+\frac{2\sqrt{3}}{3}-1=0,\quad \beta-\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=0,$$

$$\beta-\frac{5+2\sqrt{3}}{13}=0,\quad \beta+1-\frac{2\sqrt{3}}{3}=0 \qquad \cdots\cdots 1.128$$

同两条三次曲线

$$4\beta^2\xi+9\beta^2-8\beta\xi-10\beta+4\xi+5=0 \qquad \cdots\cdots 1.129$$

与

$$4\beta^2\xi-9\beta^2-8\beta\xi+10\beta+4\xi-5=0 \qquad \cdots\cdots 1.130$$

所组成。

根据1.7式并用ξ来简记ξ，那末我们显然可以得到

$$\xi>0 \qquad \cdots\cdots 1.131$$

现在，我们在事实上有如下的

引理5　若G是一个开域且$G=\left\{(\beta,\xi)\,\middle|\,0<\beta<\frac{1}{2},\ \beta-\frac{1}{3}\neq 0,\ \xi>0\right\}$，那末退化的八次曲线1.121与退化的十次曲线1.122在开域G上有交，且其交

是

$$L=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,4\beta^2\zeta-9\beta^2-8\beta\zeta+10\beta+4\zeta-5=0,\ 0<\beta<\tfrac{1}{2},\ \beta-\tfrac{1}{3}\neq 0\right\}\quad\cdots\cdots 1.132$$

記　我们定義如下的若干个集合

$$L_1=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,\beta-1=0\right\}$$

$$L_2=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,\beta+\tfrac{2\sqrt{3}}{3}-1=0\right\}$$

$$L_3=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,\beta-\tfrac{5-2\sqrt{3}}{13}=0\right\}$$

$$L_4=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,\beta-\tfrac{5+2\sqrt{3}}{13}=0\right\}$$

$$L_5=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,\beta-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}-1=0\right\}$$

$$L_6=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,4\beta^2\zeta+9\beta^2-8\beta\zeta-10\beta+4\zeta+5=0\right\}$$

$$L_7=\left\{(\beta,\zeta)\,\middle|\,4\beta^2\zeta-9\beta^2-8\beta\zeta+10\beta+4\zeta-5=0\right\}$$

此外，还将退化的八次曲线1.121与退化的十次曲线1.122依次記作集合A与B。如此，我们显然可以得到

$$A=L_1\bigcup L_6\bigcup L_7\quad\cdots\cdots 1.133$$

$$B=L_2\bigcup L_3\bigcup L_4\bigcup L_5\bigcup L_6\bigcup L_7\quad\cdots\cdots 1.134$$

并記

$$T=A\bigcap B\bigcap G\quad\cdots\cdots 1.135$$

为了研究上的方便和清晰起见，我们分为几个段落来进行

1° 若記 H 为集合 B 与集合 G 的交集，那末集合 H 非空且有

$$H=\overline{L}_3\bigcup L \qquad \text{-----1.136}$$

式中

$$\overline{L}_3=\left\{(\beta,\xi)\middle|\ \beta-\frac{5-2\sqrt{3}}{13}=0,\ \xi>0\right\} \qquad \text{-----1.137}$$

証 根据集合 H 的定義我们有

$$H=B\bigcap G \qquad \text{-----1.138}$$

将1.124式代入右边則得到

$$H=(L_2\bigcup L_3\bigcup L_4\bigcup L_5\bigcup L_6\bigcup L_7)\bigcap G=(L_2\bigcap G)\bigcup$$

$$(L_3\bigcap G)\bigcup(L_4\bigcap G)\bigcup(L_5\bigcap G)\bigcup(L_6\bigcap G)\bigcup(L_7\bigcap G) \qquad \text{-----1.139}$$

由諸集合 $L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ 及 G 的定義，我们易得

$$L_2\bigcap G=\phi,\quad L_4\bigcap G=\phi,\quad L_5\bigcap G=\phi,$$

$$L_6\bigcap G=\phi \qquad \text{-----1.140}$$

及

$$L_3 \bigcap G = \overline{L}_3 \quad , \quad L_7 \bigcap G = L \qquad \text{......1.141}$$

为了証明1.140式及1.141式，我们分作两部分来进行

a) $L_2 \bigcap G = \phi$, $L_4 \bigcap G = \phi$, $L_5 \bigcap G = \phi$, $L_6 \bigcap G = \phi$.

証 先来証明 $L_2 \bigcap G = \phi$ ，如若不然設

$$E = L_2 \bigcap G \qquad \text{......1.142}$$

旦E是一非空集合。今設 $m_0 = (\beta_0, \xi_0)$ 是集合E中的任意一个元素，由於 $m_0 \in E$ 故必有

$$m_0 \in L_2 \quad , \quad m_0 \in G \qquad \text{......1.143}$$

由 $m_0 \in L_2$ 我们得知有 $m_0 = \left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \xi_0\right)$ ，但根据开域G的定义我们得知定有 $m_0 \bar{\in} G$ 而与1.143式相違。由此发生矛盾，因此集合E只能是空集。同理可証 $L_4 \bigcap G = \phi$ 及 $L_5 \bigcap G = \phi$ 。

其次再来証明 $L_6 \bigcap G = \phi$ ，如若不然設

$$E_0 = L_6 \bigcap G \qquad \text{......1.144}$$

旦 E_0 是一非空集合。今設 $P_0 = (\beta_0, \xi_0)$ 是集合 E_0 中

的任意一个元素，由於 $P_0 \in E_0$ 故必有

$$P_0 \in L_6 \quad , P_0 \in G \qquad \cdots\cdots 1.145$$

因为 $P_0 \in L_6$ 且 $P_0=(\beta_0, \xi_0)$，故由集合 L_6 的定义得知元素 P_0 必能写成

$$P_0 = \left(\beta_0 \; , \; -\frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2} \right) \qquad \cdots\cdots 1.146$$

注意到对任意的实的 β 均有 $9\beta^2-10\beta+5>0$，因此根据开域 G 的定义我们得知 $P_0 \bar{\in} G$ 而与 1.145 式相违。由此产生矛盾，因此集合 E_0 祇能是空集。这就证明了 a) 的结论。

b) $\quad L_3 \bigcap G = \overline{L_3} \quad , \quad L_7 \bigcap G = L$

证 我们先来证明 $L_3 \bigcap G = \overline{L_3}$。

由集合 $\overline{L_3}$ 的定义得知，集合 $\overline{L_3}$ 决非是空集。今设元素 $g_0=(\beta_0, \xi_0)$ 是非空集合 $\overline{L_3}$ 中的任意一个元素，因为 $g_0 \in \overline{L_3}$ 并根据集合 $\overline{L_3}$ 的定义我们得知元素 g_0 定能写成形式

$$g_0 = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{13} \; , \; \xi_0 \right) \qquad \cdots\cdots 1.147$$

且有 $\xi_0 > 0$。如果注意到不等式

$$0<\frac{5-2\sqrt{3}}{13}<\frac{1}{2}\quad,\quad\frac{5-2\sqrt{3}}{13}-\frac{1}{3}<0$$

那末根据开域 G 的定义及 1.147 式我们得知以有

$$g_0 \leftarrow G \qquad \cdots\cdots 1.148$$

另一方面，根据集合 L_3 的定义及 1.147 式我们又得知定有

$$g_0 \leftarrow L_3 \qquad \cdots\cdots 1.149$$

由 1.148、1.149 两式并根据集合论中交集的定义我们立刻得到 $g_0 \leftarrow L_3 \prod G$，又因 g_0 是集合 $\overline{L}_3$ 中的任意一个元素故有

$$\overline{L}_3 \subset L_3 \prod G \qquad \cdots\cdots 1.150$$

因为集合 $\overline{L}_3$ 是一个非空集合，同时由集合理论得知空集决不可能有一非空子集；由此并根据 1.150 式我们得知集合 $L_3 \prod G$ 是一个非空集合。

既然集合 $L_3 \prod G$ 非空，我们设 $g_0=(\beta_0, \xi_0)$ 是非空集合 $L_3 \prod G$ 中的任意一个元素。由於

$$g_0 \leftarrow L_3 \prod G$$

故知必有

$$g_0 \leftarrow L_3 \quad , \quad g_0 \leftarrow G \qquad \cdots\cdots 1.151$$

根据 $g_0 \leftarrow L_3$ 及集合 L_3 的定义，我们立刻得知元素 g_0 定能写成

$$g_0 = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{13}, z_0\right) \qquad \cdots\cdots 1.152$$

根据 $g_0 \leftarrow G$ 及开域 G 的定义并 1.152 式，我们又能得到

$$g_0 = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{13}, z_0\right) \qquad \cdots\cdots 1.153$$

此处 $z_0 > 0$。由 1.153 式并根据集合 $\overline{L}_3$ 的定义，我们得知定有 $g_0 \leftarrow \overline{L}_3$。由元素 g_0 的任意性我们立刻据此得到

$$L_3 \cap G \subset \overline{L}_3 \qquad \cdots\cdots 1.154$$

根据 1.150、1.154 两式我们立得

$$L_3 \cap G = \overline{L}_3 \qquad \cdots\cdots 1.155$$

这就证明了 b) 的前半部分。

其次，我们来证明 $L_7 \cap G = L$。

由集合 L 的定义得知，集合 L 决非是空集

。现設元素 $g_0=(\beta_0,\gamma_0)$ 是非空集合 L 中的任意一个元素，因为 $g_0\in L$ 并根据集合 L 的定義我们得知元素 g_0 定能写作

$$g_0=\left(\beta_0,\ \frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2}\right) \qquad \cdots\cdots 1.156$$

此处 $0<\beta_0<\frac{1}{3}$ 且 $\beta_0-\frac{1}{3}\neq 0$。由 1.156 式并根据集合 L_7 的定義我们得知必有

$$g_0\in L_7 \qquad \cdots\cdots 1.157$$

另一方面，由 1.156 式并根据开域 G 的定義同時注意到 $9\beta^2-10\beta+5>0$ 的話，那末我们立刻能够得知定有

$$g_0\in G \qquad \cdots\cdots 1.158$$

由 1.157、1.158 兩式并根据交集的定義，我们又能得到

$$g_0\in L_7\bigcap G \qquad \cdots\cdots 1.159$$

因为 g_0 是集合 L 中的任意一个元素，因此我们有

$$L\subset L_7\bigcap G \qquad \cdots\cdots 1.160$$

因为集合L是非空的，故由1.180式得知集合$L_7 \bigcap G$肯定是一个非空集合。如若不然，設集合$L_7 \bigcap G$是一个空集，那末从1.160式可引出

$$L \subset \phi$$

但由集合論得知，一个非空集合决不可能是一个空集的子集。由此产生矛盾，因此集合$L_7 \bigcap G$必定是一个非空集合。

現再設$g_0=(\beta_0, \gamma_0)$是非空集合$L_7 \bigcap G$中的任意一个元素。由於$g_0 \in L_7 \bigcap G$故必有

$$g_0 \in L_7 \quad , \quad g_0 \in G \qquad \cdots\cdots 1.161$$

由$g_0 \in L_7$及集合L_7的定義，我们得知元素g_0定然写为

$$g_0 = \left(\beta_0, \frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2} \right) \qquad \cdots\cdots 1.162$$

另一方面，根据$g_0 \in G$及开域G的定義我们得知1.162式中的β_0必定满足

$$0<\beta_0<\frac{1}{2}, \quad \beta_0-\frac{1}{3} \neq 0 \quad , \quad 9\beta_0^2-10\beta_0+5>0 \qquad \cdots\cdots 1.163$$

由1.162、1.163两式并根据集合L的定義，我们立

刻得知必有

$$g_0 \in L \qquad \cdots\cdots 1.164$$

又因 g_0 是集合 $L_7 \bigcap G$ 中的任意一个元素，故从 1.164 式我们立即能够得出

$$L_7 \bigcap G \subset L \qquad \cdots\cdots 1.165$$

现在，我们从 1.160 及 1.165 两式立即可以得到

$$L_7 \bigcap G = L \qquad \cdots\cdots 1.166$$

这就证明了 b) 的后半部分。结论 b) 至此全部证完。

利用结论 a) 及 b)，我们从 1.139 式立刻可以得出

$$H = \bar{L}_3 \bigcup L \qquad \cdots\cdots 1.167$$

这就证明了 1° 的结论。

2° 若记 T 为集合 A 与 B 在开域 G 上的交，那末集合 T 非空且有

$$T = L \qquad \cdots\cdots 1.168$$

证 根据 1.135 式我们得知有

$$T=A\cap B\cap G=A\cap(B\cap G) \quad \cdots\cdots 1.169$$

由1.169式并利用1.136式我们又有

$$T=A\cap H=A\cap(\bar{L}_3\cup L) \quad \cdots\cdots 1.170$$

从1.170式并根据集合A的定义1.133式我们有

$$T=(L_1\cup L_6\cup L_7)\cap(\bar{L}_3\cup L)=(L_1\cup L_6\cup L_7)\cap\bar{L}_3\cup(L_1\cup L_6\cup L_7)\cap L=(L_1\cap\bar{L}_3)\cup(L_6\cap\bar{L}_3)\cup(L_7\cap\bar{L}_3)\cup(L_1\cap L)\cup(L_6\cap L)\cup(L_7\cap L) \quad \cdots\cdots 1.171$$

由 $L_1, L_6, L_7, \bar{L}_3$ 与 L 诸集合的定义，我们极易证明下列结果

$$L_1\cap\bar{L}_3=\phi, \quad L_6\cap\bar{L}_3=\phi, \quad L_1\cap L=\phi, \quad L_6\cap L=\phi \quad \cdots\cdots 1.172$$

由1.171及1.172两式我们立即有

$$T=(L_7\cap\bar{L}_3)\cup(L_7\cap L) \quad \cdots\cdots 1.173$$

现在，我们需要如下的

a) 若 P 与 Q 是两个非空集合，且有 $P\subset Q$。那末我们恒有

$$P\cap Q=P, \quad P\cup Q=Q$$

证 由交集的定义显然有

$$P \cap Q \subset P \quad \cdots\cdots 1.174$$

又由 $P \subset Q$ 我们又有

$$P \cap P \subset P \cap Q$$

此即

$$P \subset P \cap Q \quad \cdots\cdots 1.175$$

由1.174及1.175两式立得

$$P \cap Q = P \quad \cdots\cdots 1.176$$

另外，由 $P \subset Q$ 显然才有

$$P \cup Q \subset Q \cup Q$$

此即

$$P \cup Q \subset Q \quad \cdots\cdots 1.177$$

另一方面，我们显然有

$$Q \subset P \cup Q \quad \cdots\cdots 1.178$$

由1.177及1.178两式我们立刻得到

$$P \cup Q = Q \quad \cdots\cdots 1.179$$

这就证明了a)的结论。

b) 若 S 是一个单点集且 $S=\left\{(\beta_0,\gamma_0)\;\middle|\;\beta_0=\frac{5-2\sqrt{3}}{13},\ \gamma_0=\frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2}\right\}$，那末集合 S 就是集合 L_7 与 $\overline{L}_3$ 的交集。

证 今设元素 $g_0=(\beta_0,\gamma_0)$ 是集合 S 中的唯一一个元素，由於 $g_0\leftarrow S$ 故知元素 g_0 定能写为

$$g_0=\left(\beta_0,\ \frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2}\right) \qquad \cdots\cdots 1.180$$

此处 $\beta_0=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$。

注意到 $9\beta^2-10\beta+5>0$ 并由集合 L_7 及 $\overline{L}_3$ 的定义得知定有

$$g_0\leftarrow L_7\ ,\quad g_0\leftarrow \overline{L}_3$$

由此得知 $g_0\leftarrow L_7\prod\overline{L}_3$。又因 g_0 是集合 S 中的唯一一个元素，因此有

$$S \doteq L_7\prod\overline{L}_3 \qquad \cdots\cdots 1.181$$

从 1.181 我们得知集合 $L_7\prod\overline{L}_3$ 非空。今设 g_0 为其中的任意一个元素且 $g_0=(\beta_0,\gamma_0)$。因为 $g_0\leftarrow L_7\prod\overline{L}_3$ 故必有 $g_0\leftarrow L_7$ 及 $g_0\leftarrow\overline{L}_3$。由 $g_0\leftarrow L_7$ 及集合 L_7 的定义，我们立刻有

$$g_0=\left(\beta_0,\ \frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2}\right) \quad \cdots\cdots 1.182$$

由1.182式及 $g_0 \leftarrow \overline{L}_3$ 我们立刻得到

$$g_0=\left(\beta_0,\ \frac{9\beta_0^2-10\beta_0+5}{4(\beta_0-1)^2}\right) \quad \cdots\cdots 1.183$$

此处 $\beta_0=\frac{5-2\sqrt{3}}{13}$。由1.183式并根据集合S的定义，我们得知必有

$$g_0 \leftarrow S$$

又因 g_0 是 $L_7 \prod \overline{L}_3$ 中的任意一个元素，故知定有

$$L_7 \prod \overline{L}_3 \subset S \quad \cdots\cdots 1.184$$

由1.181及1.184两式我们立即得到

$$L_7 \prod \overline{L}_3 = S \quad \cdots\cdots 1.185$$

这就证明了b)的结论。

现在由1.173式并利用b)的结果，我们显然可以得到

$$T=S \coprod (L_7 \prod L) \quad \cdots\cdots 1.186$$

此外，由集合 L_7 及 L 的定义可知定有

$$L \subset L_7 \quad \cdots\cdots 1.187$$

由1.187式并利用a)的结果，我们立刻有

$$L_7 \bigcap L = L \quad \cdots\cdots 1.188$$

由1.186及1.188两式我们立刻得到

$$T = S \bigcup L \quad \cdots\cdots 1.189$$

从集合S及L的定义得知定有

$$S \subset L \quad \cdots\cdots 1.190$$

由此并根据结论a)，我们就能得出

$$S \bigcup L = L \quad \cdots\cdots 1.191$$

现在，从1.189及1.191两个式子我们立刻得到

$$T = L \quad \cdots\cdots 1.192$$

这就证明了2°的结论。

根据上述的1°及2°，我们证明了引理5。引理5至此全部证完。

根据引理5我们得知退化的八次曲线1.121与退化的十次曲线1.122有交，且其交是L。由集合L的定义我们立刻能够得到

$$\xi = \frac{9\beta^2 - 10\beta + 5}{4(\beta-1)^2}, \quad \beta \in I_0 \quad \cdots\cdots 1.193$$

此处 $I_0 = \left\{\beta \,\middle|\, 0 < \beta < \frac{1}{2},\ \beta - \frac{1}{3} \neq 0\right\}$

因此我们得知1.193式在事实上是二元高次方程组（1.120~1.122）的解。更进一步，它也是二元高次方程组（1.114~1.116）的解。这样，从1.113及1.193两式我们立刻能够得到关于ξ及η的起定非线性代数方程组1.33、1.37、1.111、1.112的解应是

$$\xi=-\frac{9\beta^2-10\beta+5}{4(\beta-1)^2},\qquad \eta=-\frac{\beta^2+6\beta-3}{4(\beta-1)^2} \qquad \cdots\cdots 1.194$$

此处 $0<\beta<\frac{1}{2}$ 且 $\beta-\frac{1}{3}\neq 0$。

二、流形Q上的子流形

在这一节我们来证明如下的

定理2.1 若Q是由1.7式所表示的在八维欧氏空间E^8中的一个流形，那末在流形Q上有一个一维子流形Q_0且有如下的参数表达式

$$\bar{\alpha}=\frac{4\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}{(1+\bar{\beta})^2}$$

$$\bar{\beta}=\bar{\beta}$$

$$\bar{\xi}=\frac{9\bar{\beta}^2-10\bar{\beta}+5}{4(1-\bar{\beta})^2}$$

$$\bar{\eta}=-\frac{\bar{\beta}^2+6\bar{\beta}-3}{4(1-\bar{\beta})^2}$$

$$P_1=\frac{13\bar{\beta}^2-10\bar{\beta}+1}{2(5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1)} \qquad \cdots\cdots 2.1$$

$$P_2=\frac{2(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}$$

$$P_3=\frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}$$

$$P_4=\frac{1}{2}$$

这里 $\bar{\beta}\in I$ 且 $I=\left\{\bar{\beta}\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3}\neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3}\neq 0\right\}$

证 根据引理2、引理3、引理4、引理5并恢复到原来的记号$\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$，我们得知当四个实参数$\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$满足关系式1.110及1.194时关于

x及y的超定非线性方程组(1.20~1.23)有$Z=(x,0)$的解且$x=\frac{4(1-\beta)^2}{5\beta^2-2\beta+1}$。由1.19、1.39、1.110、1.194諸式并恢复到原来的記号后我们得知当四个实参数$\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\xi},\bar{\eta}$满足如次关係

$$\bar{\alpha}=\frac{4\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}{(1+\bar{\beta})^2},\quad \bar{\xi}=\frac{9\bar{\beta}^2-10\bar{\beta}+5}{4(1-\bar{\beta})^2},\quad \bar{\eta}=-\frac{\bar{\beta}^2+6\bar{\beta}-3}{4(1-\bar{\beta})^2} \qquad \cdots\cdots 2.2$$

時有

$$m=n=\frac{4(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1} \qquad \cdots\cdots 2.3$$

此处$\bar{\beta}\in I_0$且$I_0=\left\{\bar{\beta}\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3}\neq 0\right\}$。

如果将2.3式代入到1.7式中去略加运算后便能发现此時1.7式的前四式正是2.2式而后四个式子正是2.1式中的后四个式子。

此外，如果将2.3式代入到1.7式中R域的定義中去我们立刻得到关於$\bar{\beta}$的不等式组

$$\frac{(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}>0 \qquad \cdots\cdots 2.4$$

$$\frac{(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}<1 \qquad \cdots\cdots 2.5$$

$$\frac{\bar{\beta}^2+6\bar{\beta}-3}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}\neq 0 \qquad \cdots\cdots 2.6$$

$$\left[\frac{(\bar{\beta}+1)(3\bar{\beta}-1)}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}\right]^2>0 \qquad \cdots\cdots 2.7$$

$$-\frac{2\bar{\beta}-1}{5\bar{\beta}^2-2\bar{\beta}+1}>0 \qquad \cdots\cdots 2.8$$

解不等式组（2.4～2.8）我们立得其解为

$$\bar{I}=\{\bar{\beta}\mid \bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}\neq 0,\ \bar{\beta}+1\neq 0,\ 3\bar{\beta}-1\neq 0,\ \bar{\beta}+3+2\sqrt{3}\neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3}\neq 0\} \qquad \cdots\cdots 2.9$$

由2.3式及2.9式，我们得知$\bar{\beta}$的取值范围应是$I=I_0\bigcap\bar{I}$。故有

$$I=\{\bar{\beta}\mid 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3}\neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3}\neq 0\} \qquad \cdots\cdots 2.10$$

这就证明了定理2.1。定理2.1至此全部证完。