The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 3

黎曼采他函数的复零点(Ⅲ)

王天筹

（哈尔滨大电机研究所）

摘要

本文是上一篇文章的继续，本文将对上一篇文章中得到的那组超定超越方程组再进行变形。利用拓扑映射，我们得到了一组以广义实数 α,β,ξ,η 为变量的新的超定超越方程组。同时指出，若Riemann猜测不真，那末我们得到的这组新的超定超越方程组在区域

$$U=\left\{(\alpha,\beta,\xi,\eta)\ \middle|\ \frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}>0,\ \frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0,\ \alpha\beta\xi\eta\neq 0,\right.$$
$$\frac{(1-\beta)\eta}{(1-2\beta)\xi-\eta}\neq 0,\ \frac{(1-2\beta)\left[(1-2\beta)\xi^2-2\beta\xi\eta-\eta^2\right]-(1-\beta)^2}{(1-\beta)^2}\neq 0,$$
$$\left.\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\eta-\beta+1}{1-\beta}\neq 0,\ \frac{(1-2\beta)\xi\eta-\eta^2+\beta-1}{1-\beta}\neq 0.\right\}$$

上恒有实数解。

一、引　言

1901年，H. von Koch 发表了一篇論文，在該文中他証明了如下定理：

von Koch 定理[1,47] 若 Riemann 猜想真实，那末恒有

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

这个关於 $\pi(x)$ 的漸近表示其結果是优美的，而且它困惑了人类将近數百年之久；但是却是在黎曼猜想真实这一未經証明的假定下得到的。

关於相继两素数的差距问题，在 Riemann 猜想成立的假定下，Cramér[1,50] 証明了

$$p_{n+1}-p_n=O(p_n^{\frac{1}{2}}\log p_n).$$

在 Riemann 猜想真实的假定下，能夠証明如下的 Lindelöf 猜想[2,283]

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it)=O(t^{\varepsilon})$$

对每一个 $\varepsilon>0$ 均成立。

在 Lindelöf 猜想成立的假定下，对於几何

数论中的广义除数问题[2,263]，其误差项 $\Delta_k(x)$ 有下述结果[2,270]

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Delta_k^2(y)\,dy = O\left(x^{2\beta_k+\varepsilon}\right)$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立，这里 $\beta_k=\frac{k-1}{2k}$ $(k=2,3,4,\cdots)$[2,278]

特别地取 $k=2$ 立刻得到除数问题的误差项为

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Delta^2(y)\,dy = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$$

对任意 $\varepsilon>0$ 成立。由上可见黎曼猜想之重要。

在文献[3]中，我们证明了：若 Riemann 猜想不真，那末超定超越方程组

$$\frac{1}{2}-\frac{\mu(1+\lambda)}{1+\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\sin\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\sin\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\lambda+2}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.1$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cos\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\cos\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\lambda+2}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.2$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\lambda\mu(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\sin\left[\frac{\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\sin\left[\frac{\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.3$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cos\left[\frac{\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cos\left[\frac{\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.4$$

在开域

$$G=\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\ \lambda\neq 1,\ \mu>0,\ \lambda\mu-1\neq 0,\ \lambda^2\mu-\lambda\mu+2\neq 0,\ \lambda\mu-\mu-2\neq 0\}$$

上有实数解。

与文献[3]中的方法完全类似，在 E^9 中再取一六维欧氏空间 E_2^6，其中一点之位置由数组

$$(\bar{\lambda},\bar{\mu},K_1,K_2,K_3,K_4)$$

所确定。完全类似于域 D，G 域由六个开域组成，若用 τ 表示集合 G 之子集族；则因 $G\subset E_2^2$，故 G 仍是度量空间，易验证 τ 满足 τ 是集合 G 的一个拓扑的三个公理。因此，τ 的确是集合 G 的一个拓扑，而 (G,τ) 是一个拓扑空间。

现在我们定义一个从 E_2^2 中 G 域到 E_2^6 中的映射 h：

$$\bar{\lambda}=\lambda,\quad \bar{\mu}=\mu,\quad K_1=\frac{\mu(1+\lambda)}{1+\mu}-\frac{1}{2},\quad K_2=\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\mu},$$

$$K_3=\frac{\lambda\mu(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}-\frac{1}{2},\quad K_4=\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}\quad \cdots\cdots h$$

由于 $\mu>0$，所以这个映射对 G 域中的所有点都

有意義。今設 G 域中的元素在 f 作用下於 E_2^6 中所生成的像的全体为 F，则我们有如下的

定理 1.1　映射 f 是拓扑映射，且 $G \cong F$。

証　我们分几部分来証：

$1°$　G 与 F 都是度量空间。

因为 $G \subset E_2^2$ 及 $F \subset E_2^6$，由於欧氏空间是度量空间以及度量空间的子空间仍是度量空间这二结论，推得 G 与 F 均是度量空间。

$2°$　$G \to F$ 是在 f 作用下的連續的、一一的满映射。

由 f 的定義可知，諸表达式均为关於变数 λ 与 μ 的二元連續实函数，所以是連續的。

今設 $g_0=(\lambda_0, \mu_0)$ 是 G 域中的任一元素，那末由映射 f 必有惟一的一个像元素 $f_0=(\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0, K_{10}, K_{20}, K_{30}, K_{40})$，这里

$$\bar{\lambda}_0=\lambda_0,\quad \bar{\mu}_0=\mu_0,\quad K_{10}=\frac{\mu_0(1+\lambda_0)}{1+\mu_0}-\frac{1}{2},\quad K_{20}=\frac{\sqrt{\mu_0}(1+\lambda_0)}{1+\mu_0},$$

$$K_{30}=\frac{\lambda_0\mu_0(1+\lambda_0)}{1+\lambda_0^2\mu_0}-\frac{1}{2},\quad K_{40}=\frac{\sqrt{\mu_0}(1+\lambda_0)}{1+\lambda_0^2\mu_0}.$$

而且由集合F之定义知必有$f_0 \subset F$。又因g_0是任取的，所以在h作用下$G \to F$是连续、一一的满映射。

3° h^{-1}存在且连续，$F \to G$是在h^{-1}作用下的连续、一一的满映射。

现设$f_0 = (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0, K_{10}, K_{20}, K_{30}, K_{40})$是集合F中的任一元素，记$f_0$在$\bar{\lambda}-\bar{\mu}$坐标平面上的"投影"为$f_0'$，则显然这样的投影是有且只有一个，这里

$$f_0' = (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0, 0, 0, 0, 0).$$

若记集合$F' = \{f_0'\}$，则显然集合F'与集合G是同構的。这是因为此時在G中恒有唯一的元素$g_0 = (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0)$与$f_0'$相对应，且由$f_0'$之任意性即得集合$F'$与集合G是同構的。如此有

$$f_0 \to f_0' \to g_0$$

这說明逆对应h^{-1}存在。又因投影映射及同構映射不会破坏集束F之連續性，所以h^{-1}又是連續的。而且可以看出$f_0 \to g_0$的g_0是唯一的。根据

以上结论可知 h^{-1} 存在且连续。所以在 h^{-1} 作用下 $F\to G$ 是连续、一一的满映射。

由 1°、2°、3° 及拓扑映射的定义可知 h 的确是一个拓扑映射，且 $G\cong F$。定理1.1证毕。

事实上 F 可看作六维欧氏空间 E_2^6 中的二维流形。为了得到二维流形 F 在 E_2^6 中的表达式，我们在拓扑映射 h 中消去 λ 与 μ，立刻得到

$$2\bar{\lambda}\bar{\mu}+(1-2K_1)\bar{\mu}-(1+2K_1)=0$$

$$\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu}}-K_2\bar{\mu}+\sqrt{\bar{\mu}}-K_2=0,$$

$$(1-2K_3)\bar{\lambda}^2\bar{\mu}+2\bar{\lambda}\bar{\mu}-(1+2K_3)=0$$

$$K_4\bar{\lambda}^2\bar{\mu}-\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu}}-\sqrt{\bar{\mu}}+K_4=0$$

为了便于研究，作关于变数 $\bar{\lambda}$ 及 $\bar{\mu}$ 的代换

$$\bar{\lambda}\sqrt{\bar{\mu}}=u=x+y,\quad \sqrt{\bar{\mu}}=v=x-y.$$

代入后得到

$$(3-2K_1)x^2-2(1-2K_1)xy-(1+2K_1)y^2-(1+2K_1)=0 \quad \cdots\cdots 1.5$$

$$K_2x^2-2K_2xy+K_2y^2-2x+K_2=0 \quad \cdots\cdots 1.6$$

$$(3-2K_3)x^2+2(1-2K_3)xy-(1+2K_3)y^2-(1+2K_3)=0 \quad \cdots\cdots 1.7$$

$$K_4x^2+2K_4xy+K_4y^2-2x+K_4=0 \qquad \cdots\cdots 1.$$

在方程组（1.5~1.8）中我们将 $K_i\ (i=1,2,3,4)$ 看作实参数。我们有如下的

引理 1. 若 $(\lambda,\mu)\in G$，则恒有

$$K_2K_4\neq 0\ ,\ 3-2K_1\neq 0\ ,\ 3-2K_3\neq 0 .$$

证 由拓扑映射 f 之定义可知

$$K_2=\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\mu}>0\ ,\quad K_4=\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}>0 .$$

及

$$3-2K_1=-\frac{2(\lambda\mu-\mu-2)}{1+\mu}\ ,\ 3-2K_3=-\frac{2(\lambda^2\mu-\lambda\mu+2)}{1+\lambda^2\mu}$$

故知 $3-2K_1$ 当且仅当 $\lambda\mu-\mu-2=0$ 时为零，$3-2K_3$ 当且仅当 $\lambda^2\mu-\lambda\mu+2=0$ 时为零。若记集合

$$L_1=\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda>0,\mu>0,\lambda\mu-\mu-2=0\}$$

$$L_2=\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda>0,\mu>0,\lambda^2\mu-\lambda\mu+2=0\}$$

则由域 G 之定义知

$$L_1\not\subset G\ ,\quad L_2\not\subset G$$

引理 1 证完。

现在我们引进四个新的实参数 α,β,ξ,η。

它们的定义是

$$\alpha=\frac{1-2K_1}{3-2K_1}\,,\quad \beta=\frac{1-2K_3}{3-2K_3}\,,\quad \xi=\frac{K_2+K_4}{2K_2K_4}\,, \qquad \cdots\cdots 1.9$$

$$\eta=\frac{K_2-K_4}{2K_2K_4}\,.$$

易知其逆是

$$K_1=\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)}\,,\quad K_2=\frac{1}{\xi-\eta}\,,\quad K_3=\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}\,, \qquad \cdots\cdots 1.10$$

$$K_4=\frac{1}{\xi+\eta}$$

这要求 $\alpha-1\neq 0$，$\beta-1\neq 0$，$\xi-\eta\neq 0$，$\xi+\eta\neq 0$。但我们有如下的

引理2. 若 $(\lambda,\mu)\in G$，则恒有，

$$\alpha-1\neq 0\,,\quad \beta-1\neq 0\,,\quad \xi-\eta\neq 0\,,\quad \xi+\eta\neq 0\,。$$

证 由1.9式及映射 h 可得

$$\alpha-1=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-\mu-2}\,,\quad \beta-1=-\frac{\lambda^2\mu+1}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}$$

$$\xi-\eta=\frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}\,(1+\lambda)}\,,\quad \xi+\eta=\frac{1+\lambda^2\mu}{\sqrt{\mu}\,(1+\lambda)}$$

由于在G域中 $\mu>0$，立得诸分式之分子恒正，引理证完。

由引理1及引理2得知1.9式及1.10式均有意义。利用1.9式及1.10式方程组(1.5~1.8)成为

$$x^2-2\alpha xy-(1-2\alpha)y^2-(1-2\alpha)=0 \qquad \cdots\cdots 1.11$$

$$x^2-2xy+y^2-2(\xi-\eta)x+1=0 \qquad \cdots\cdots 1.12$$

$$x^2+2\beta xy-(1-2\beta)y^2-(1-2\beta)=0 \qquad \cdots\cdots 1.13$$

$$x^2+2xy+y^2-2(\xi+\eta)x+1=0 \qquad \cdots\cdots 1.14$$

从解析几何知道，方程组(1.11~1.14)的每一个方程在几何上各表示一条二次曲线，其相应之諸不变量[4, 150]

$$I_1=a_{11}+a_{22}$$

$$I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & C \end{vmatrix}.$$

可依次求出为

$$I_1=2\alpha\,,\quad I_2=-(\alpha-1)^2\,,\quad I_3=(1-2\alpha)(\alpha-1)^2.$$

$$I_1=2\,,\quad I_2=0\,,\quad I_3=-(\xi-\eta)^2.$$

$$I_1=2\beta\,,\quad I_2=-(\beta-1)^2\,,\quad I_3=(1-2\beta)(\beta-1)^2.$$

$$I_1=2\,,\quad I_2=0\,,\quad I_3=-(\xi+\eta)^2.$$

我们还有如下的

引理3. 若$(\lambda,\mu)\in G$，则恒有

$$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ 2\alpha-1\neq 0,\ 2\beta-1\neq 0.$$

证. 由α与β之定义及映射f易得

$$\alpha=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu-\mu-2},\quad \beta=\frac{-(\lambda\mu-1)}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}.$$

$$2\alpha-1=\frac{\mu(\lambda+1)}{\lambda\mu-\mu-2},\quad 2\beta-1=\frac{-\lambda\mu(\lambda+1)}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}.$$

若再记集合

$$L_3=\left\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\lambda\neq 1,\mu>0,\lambda\mu-1=0\right\}$$

则可知α与β当且仅当$\lambda\mu-1=0$时为零，由G域之定义知$L_3\not\subset G$，故得$\alpha\beta\neq 0$.

又因$\lambda>0,\mu>0$，故$2\alpha-1$与$2\beta-1$的分式中其分子恒不等於零，所以有$(2\alpha-1)(2\beta-1)\neq 0$. 引理3得证。

根据引理2及引理3得知上述四条二次曲线中它们各自的不变量I_1及I_3均不为零。相应於二次曲线的特徵方程[4,149]

$$S^2-I_1S+I_2=0$$

的根也可依次求得。由於方程1.11及1.13其相应之不变量 $I_2=-(\alpha-1)^2\neq0$，$I_2=-(\beta-1)^2\neq0$。所以它们的特征方程依次是 $s^2-2\alpha s-(\alpha-1)^2=0$ 及 $s^2-2\beta s-(\beta-1)^2=0$ [4,151]。故它们的标准形式依次是

$$\left(\sqrt{\alpha^2+(\alpha-1)^2}+\alpha\right)\bar{x}_1^2-\left(\sqrt{\alpha^2+(\alpha-1)^2}-\alpha\right)\bar{y}_1^2+2\alpha-1=0$$

$$\left(\sqrt{\beta^2+(\beta-1)^2}+\beta\right)\bar{x}_3^2-\left(\sqrt{\beta^2+(\beta-1)^2}-\beta\right)\bar{y}_3^2+2\beta-1=0$$

显然，它们均代表一对双曲线。而方程1.12及1.14由於其不变量 $I_2=0$，故它们相应之标准形式依次是

$$\bar{y}_2^2\pm\sqrt{\frac{(3-7)^2}{2}}\,\bar{x}_2=0$$

$$\bar{y}_4^2\pm\sqrt{\frac{(3+7)^2}{2}}\,\bar{x}_4=0$$

因此它们各自代表一条抛物线（正、负号只取其之一）。

由以上结果我们可更进一步得出两对双曲线相应的渐近线方程及其焦点的位置以及两条抛物线相应的准线方程及焦点的位置，关於这些以及其它的一些几何性质这里不再赘述了。

二、超定代数方程组

现在我们来研究超定代数方程组（1.11～1.14）。从解析几何得知，方程组（1.11～1.14）有解在几何上意味着相应的四条二次曲线要共点。与文献[3]中处理超定代数方程组的方法相类似，我们作变数的代换

$$x_1=x^2,\quad x_2=xy,\quad x_3=y^2,\quad x_4=x. \qquad \cdots\cdots 2.1$$

这样方程组（1.11～1.14）变为下列的关于 x_1, x_2, x_3, x_4 的线性方程组：

$$x_1-2\alpha x_2-(1-2\alpha)x_3=1-2\alpha \qquad \cdots\cdots 2.2$$

$$x_1-2x_2+x_3-2(\xi-\eta)x_4=-1 \qquad \cdots\cdots 2.3$$

$$x_1+2\beta x_2-(1-2\beta)x_3=1-2\beta \qquad \cdots\cdots 2.4$$

$$x_1+2x_2+x_3-2(\xi+\eta)x_4=-1 \qquad \cdots\cdots 2.5$$

由2.1式还可得出两个非线性关系

$$x_1=x_4^2,\quad x_2^2=x_1x_3 \qquad \cdots\cdots 2.6$$

现在方程组（1.11～1.14）与方程组（2.2～2.6）完全等价，这一点很易验证。但是，后者的优点在于将

非线性超定代数方程组(1.11~1.14)的线性内涵与非线性内涵分离开来了。现在若设 $Z=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 是线性方程组(2.2~2.5)的一个解，设 $\bar{Z}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$ 是方程组(2.2~2.6)的一个解；一般来说，Z 不一定恰好满足2.6式中的二个非线性关系，但是 $\bar{Z}$ 肯定是解Z。因此，我们仅需在解Z中寻找 $\bar{Z}$ 即可。下面来研究线性方程组(2.2~2.5)，现设其相应之係数矩阵及增广矩阵依次为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & -(1-2\alpha) & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2(\xi-\eta) \\ 1 & 2\beta & -(1-2\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2(\xi+\eta) \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & -(1-2\alpha) & 0 & 1-2\alpha \\ 1 & -2 & 1 & -2(\xi-\eta) & -1 \\ 1 & 2\beta & -(1-2\beta) & 0 & 1-2\beta \\ 1 & 2 & 1 & -2(\xi+\eta) & -1 \end{pmatrix}$$

增广矩阵B的五个四阶子式依次为

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2\alpha & -(1-2\alpha) & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2(\xi-\eta) \\ 1 & 2\beta & -(1-2\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2(\xi+\eta) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1-2\alpha & -2\alpha & -(1-2\alpha) & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2(\xi-\eta) \\ 1-2\beta & 2\beta & -(1-2\beta) & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2(\xi+\eta) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1-2\alpha & -(1-2\alpha) & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2(\xi-\eta) \\ 1 & 1-2\beta & -(1-2\beta) & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2(\xi+\eta) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -2\alpha & 1-2\alpha & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2(\xi-\eta) \\ 1 & 2\beta & 1-2\beta & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2(\xi+\eta) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2\alpha & -(1-2\alpha) & 1-2\alpha \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2\beta & -(1-2\beta) & 1-2\beta \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

由行列式理论可知恒有

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 = 0 \quad , \quad \Delta_3 = -\Delta \qquad \cdots\cdots 2.7$$

故我们有如下的

引理 4. 线性方程组(2.2～2.5)有全不为零解的必要条件是其係数行列式 $\Delta = 0$.

証. 今用反証法証明。設 $\Delta \neq 0$，则立即可用 Cramer 法则来解，并用 2.7 式有

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0 \quad , \quad x_3 = -1 \qquad \cdots\cdots 2.8$$

但由 2.1 式知 $x_3 = y^2$，故得 $1 + y^2 = 0$。这在实解时是不可能的。由此导出矛盾，故必须 $\Delta = 0$. 事实上 $z_0 = (0, 0, -1, 0)$ 确是方程组 (2.2～2.5) 的一个解，甚至满足 2.6 式但与 2.1 式相违。故知 z_0 绝不能是解云，我们对解 z_0 不感兴趣，并称其为“无聊

解”。这就证明了引理4。

其次再证明下述的

引理5. 若矩阵A的定义如前，那么矩阵A的秩满足条件 $\mathrm{rank}\,A\geq 3$。

证. 考虑矩阵A的一个三阶子式

$$I=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2\beta & -(1-2\beta) \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8(1-\beta) \qquad -2.9$$

由引理2知 $\beta-1\neq 0$，故有 $I\neq 0$。根据矩阵秩的定义知 $\mathrm{rank}\,A\geq 3$。引理5证完。

实际上我们有

引理6. 若超定二次代数方程组(1.11~1.14)有解，那么它的穗解方程组（2.2~2.5）有解的充分和必要条件是

$$\Delta=-16\left[(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta\right]=0 \qquad ---2.10$$

证. 必要性。由假设知(1.11~1.14)有实数解，根据引理4必有 $\Delta=0$，否则与假设相违。再由行

列式中的降阶计算法可算出

$$\Delta = -16\left[(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta\right]$$

这就证明了必要性。

充分性。由 Δ 之定义及引前的假设 $\Delta=0$ 知 $\Delta=|A|=0$，故知 $\text{rank } A<4$。与引理5相结合立刻推得 $\text{rank } A=3$。另一方面，当 $\Delta=0$ 时，由2.7式得知此时增广矩阵B的所有四阶子式

$$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=0$$

故有 $\text{rank } B<4$。又因引理5中A的三阶子式 I 同时也是B的一个三阶子式，故由2.9式可知也有 $\text{rank } B\geq 3$。此即得到 $\text{rank } B=3$，因此我们有

$$\text{rank } A=\text{rank } B=3 \qquad \text{—2.11}$$

由线性方程组的理论可知，$\text{rank}A=\text{rank}B$ 是线性方程组(2.2~2.5)有解的充要条件，这就证明了充分性。至此引理6全部证完。

现在来证明下面的

引理7. 线性方程组(2.2~2.5)的通解是

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta}x_4 \\
x_2 &= \eta x_4 \\
x_3 &= \frac{\xi+\beta\eta}{1-\beta}x_4-1 \qquad \cdots\cdots 2.12 \\
x_4 &= x_4
\end{aligned}
$$

証. 由引理6知此時必有$\Delta=0$及$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B=3$。所以线性方程组(2.2~2.5)此時只有三个式子是线性无关的。不失一般性，并为了明確起見我们就取其係数矩陣含2.9式的三阶子式I的三个线性方程2.3、2.4、2.5，并将它们改写为

$$x_1-2x_2+x_3=-1+2(\xi-\eta)x_4 \qquad \cdots 2.13$$

$$x_1+2\beta x_2-(1-2\beta)x_3=1-2\beta \qquad \cdots 2.14$$

$$x_1+2x_2+x_3=-1+2(\xi+\eta)x_4 \qquad \cdots 2.15$$

暂将x_4看作参数，这是一组关於x_1, x_2, x_3的线性方程组，且其係数行列式

$$D=I=8(1-\beta)\neq 0.$$

現在可以用Cramer法则来求解x_1, x_2, x_3了，所以我们有

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D},\qquad x_3=\frac{D_3}{D}\qquad \text{---- 2.16}$$

这里

$$D_1=\begin{vmatrix} -1+2(\xi-\eta)x_4 & -2 & 1 \\ 1-2\beta & 2\beta & -(1-2\beta) \\ -1+2(\xi+\eta)x_4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=8\left[(1-2\beta)\xi-\beta\eta\right]x_4$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -1+2(\xi-\eta)x_4 & 1 \\ 1 & 1-2\beta & -(1-2\beta) \\ 1 & -1+2(\xi+\eta)x_4 & 1 \end{vmatrix}=8(1-\beta)\eta x_4$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1+2(\xi-\eta)x_4 \\ 1 & 2\beta & 1-2\beta \\ 1 & 2 & -1+2(\xi+\eta)x_4 \end{vmatrix}=8\left[(\xi+\beta\eta)x_4+\beta-1\right]$$

由2.16式立刻得到

$$x_1=\frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta}x_4$$

$$x_2=\eta x_4$$

$$x_3=\frac{\xi+\beta\eta}{1-\beta}x_4-1$$

这就证明了引理7。

现在解2.12式所得的是我们在这一节开始時談到的解z，它亦一定恰好满足2.6式中的两个非线性关系

$$x_4^2 - x_1 = 0 \quad , \quad x_2^2 - x_1 x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots 2.6$$

然而我们有如下的

定理2.1 超定代数方程组(1.11~1.14)有全不为零实数解 $w=(x,y)$ 的充分而必要条件是实参数 α,β,ξ,η 满足下列二个关系式：

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \qquad \cdots\cdots 2.17$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0 \qquad \cdots\cdots 2.18$$

且有解

$$x=\frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta}, \qquad y=\eta \qquad \cdots\cdots 2.19$$

证. 先证明实数解 $w=(x,y)$ 中的 x 与 y 不能有一个为零。我们用反证法证明，假设不然，

那末就有结论：

1° $w=(0,y)$ 不可能是决定代数方程组 (1.11~1.14) 的实数解。

假设不然，设 $w=(0,y)$ 是一个实数解，所以它应满足方程组 (1.11~1.14)，代入后并注意到引理 3 立刻得到此时四个式子都化为同一个式子

$$y^2+1=0$$

故得 $y=\pm i$。但此与实数解之定义相违，引出矛盾。所以 $w=(0,y)$ 不可能是实数解。

2° $w=(x,0)$ 也不可能是一个实数解。

假设不然，设 $w=(x,0)$ 是一个实数解，那么它应满足方程组 (1.11~1.14)。代入后得相应的四个式子写成

$$x^2+2\alpha=1 \quad \cdots 2.20$$

$$x^2-2\xi x+2\eta x=-1 \quad \cdots 2.21$$

$$x^2+2\beta=1 \quad \cdots 2.22$$

$$x^2-2\xi x-2\eta x=-1 \quad \cdots 2.23$$

作关于变数的代换

$$u_1=x^2,\quad u_2=\xi x,\quad u_3=\eta x,\quad u_4=\alpha,\quad u_5=\beta. \qquad \cdots\cdots 2.24$$

利用2.24式方程组(2.20~2.23)成为

$$u_1+2u_4=1 \qquad \cdots\cdots 2.25$$

$$u_1-2u_2+2u_3=-1 \qquad \cdots\cdots 2.26$$

$$u_1+2u_5=1 \qquad \cdots\cdots 2.27$$

$$u_1-2u_2-2u_3=-1 \qquad \cdots\cdots 2.28$$

此外，由2.24式还给出二个关系式

$$\eta u_2-\xi u_3=0,\quad \xi\eta u_1-u_2u_3=0 \qquad \cdots\cdots 2.29$$

现在暂将u_1看作参数，易得线性方程组(2.25~2.28)之通解为

$$u_1=u_1$$

$$u_2=\frac{1+u_1}{2}$$

$$u_3=0 \qquad \cdots\cdots 2.30$$

$$u_4=\frac{1-u_1}{2}$$

$$u_5=\frac{1-u_1}{2}$$

但是，我们知道方程组(2.20~2.23)与方程组(2.25~2.29)是完全等价的。因此，方程组(2.25~2.29)的解也必且只能在通解2.30中找到。将通解2.30式代入到2.29式中两个关系式里去，立刻得到二个式子

$$\frac{1+u_1}{2}\eta=0 \quad , \quad 8\eta u_1=0 \qquad \cdots\cdots 2.31$$

由于 $u_1=x^2\geq 0$，故知2.31式两个式子成立的充分而必要条件是 $\eta=0$。但我们有下述的

引理8. 若 $(\lambda,\mu)\in G$，则恒有 $\eta\neq 0$。

证. 由1.9式中 η 之定义及映射 f 的定义易知有 $\eta=\frac{\sqrt{\mu}}{2}(\lambda-1)$。若记集合

$$L_4=\{(\lambda,\mu)\,|\,\lambda>0,\mu>0,\lambda-1=0\}$$

则显然有 $L_4\notin G$。又因 η 当且仅当 $\lambda-1$ 等于零时为零，故知必有 $\eta\neq 0$。这就证明了引理8。

由于充要条件与引理8相违，故引出矛盾。所以 $w=(x,0)$ 也不可能是一个实数解。

根据结论1°与2°，超定代数方程组的实数解 $w=(x,y)$ 必定是一个全不为零的实数解。

因此由2.1式知解$\bar{Z}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\bar{x}_4)$是一个全不为零的解。它根本且只能在引理4中所说的线性方程组(2.2~2.5)的全不为零解$Z=(x_1,x_2,x_3,x_4)$中找到。

由引理6及引理7知此時恒有2.10式及通解2.12式。因为要在全不为零的解$Z=(x_1,x_2,x_3,x_4)$中寻找解$\bar{Z}$，所以必需有如下的

推论1. 若$Z=(x_1,x_2,x_3,x_4)$是线性方程组(2.2~2.5)的一个全不为零解，那末其充分而必要条件是

$$x_4\neq 0\,,\qquad x_4\neq\frac{1-\beta}{\xi+\beta\eta}\qquad\cdots\cdots 2.32$$

証 必要性是显然的，否则$Z=(0,0,-1,0)$尤不是一組全不为零的解。

充分性。当2.32式成立時，根据通解2.12式及引理8得知此時恒有$x_2\neq 0$，$x_3\neq 0$，$x_4\neq 0$。再根据下面的

引理9. 若$(\lambda,\mu)\in G$，则恒有

$$(1-2\beta)\xi-\beta\eta\neq 0\qquad\cdots\cdots 2.33$$

证. 由引理2、引理3及引理8可有

$$\alpha=\frac{\lambda\mu-1}{\lambda\mu-\mu-2}\ ,\quad \beta=\frac{-(\lambda\mu-1)}{\lambda^2\mu-\lambda\mu+2}\ ,$$
$$\xi=\frac{\mu(\lambda^2+1)+2}{2\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\ ,\quad \eta=\frac{\sqrt{\mu}(\lambda-1)}{2}\ . \qquad \text{--- 2.34}$$

故得

$$(1-2\beta)\xi-\beta\eta=\frac{\sqrt{\mu}(\lambda^2\mu+1)(\lambda+1)}{2(\lambda^2\mu-\lambda\mu+2)}$$

当$(\lambda,\mu)\in G$时，因$\lambda>0,\mu>0$立得上式右端分子恒正。这证明了引理9。

我们还可由2.12式得出$x_1\neq 0$。由此，当2.32式成立时由通解2.12式的确给出一个全不为零的解

$$z=(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

来，充分性证完。至此推论1全部证完。

现在我们设2.32式的二个条件恒被满足。再将全不为零的通解2.12式去满足2.6式中的两个非线性关系。如此便有

$$x_4^2-\frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta}x_4=0$$

$$\eta^2x_4^2=\frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta}x_4\left(\frac{\xi+\beta\eta}{1-\beta}x_4-1\right)$$

经整理立刻得到

$$[(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2]x_4^2-(1-\beta)[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]x_4$$
$$=0 \quad \cdots\cdots 2.35$$

$$(1-\beta)x_4^2-[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]x_4=0 \quad \cdots\cdots 2.36$$

事实上我们有下述的

引理 10. 若 $(\lambda,\mu)\in G$，则恒有 $J(\beta,\xi,\eta)\neq 0$，这里

$$J(\beta,\xi,\eta)=(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2$$

证. 注意到恒等式

$$J(\beta,\xi,\eta)=(\xi+\eta)[(1-2\beta)\xi-(1-2\beta+2\beta^2)\eta] \quad \cdots\cdots 2.37$$

將 2.34 中諸式代入 2.37 式中右立刻得到（经过一些简单的运算后）：

$$J(\beta,\xi,\eta)=\frac{(1+\lambda^2\mu)^2}{(\lambda^2\mu-\lambda\mu+2)^2} \quad \cdots\cdots 2.38$$

由於当 $(\lambda,\mu)\in G$ 时恒有 $\lambda>0$，$\mu>0$，立刻得到

$$J(\beta,\xi,\eta)>0$$

这就证明了引理 10。

现在由引理 9 及引理 10 得知，二次方程 2.35 及 2.36 中二次项与一次项的係数全不为零。

由2.35式及2.36式与2.32式的条件 $x_4\neq 0$ 可断言：二次方程2.35与2.36同时成立的充分而必要条件是它们有非零公根。因此，不妨设 $x_0\neq 0$ 是它们的一个非零公根。此时由2.35可得

$$x_0=\frac{(1-\beta)\left[(1-2\beta)\xi-\beta\eta\right]}{(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2} \qquad \text{----2.39}$$

由2.36可得

$$x_0=\frac{(1-2\beta)\xi-\beta\eta}{1-\beta} \qquad \text{--2.40}$$

比较2.39与2.40两个解并注意到引理9，我们就有2.18式。而由引理6的2.10式显然可推得2.17式。至此，定理2.1证完。因为2.19式由 $x_4=x_0$ 及2.1式与2.12式极易得出。

这里需要说明的是这样得出的 $x_4=x_0$ 是否满足推论1中2.32式中的第二个条件

$$x_4\neq\frac{1-\beta}{\xi+\beta\eta}$$

？由2.40式上述条件成为

$$\frac{(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-\beta^2\eta^2-(1-\beta)^2}{(1-\beta)(\xi+\beta\eta)}\neq 0 \qquad \text{----2.41}$$

但我们有如下的

引理11　若$(\lambda,\mu)\in G$，则2.41式恒成立。

證　由定理2.1得知，此時四个实参数α,β,ξ,η必須满足2.17式与2.18式二个式子。因此它们当中只有两个参数是独立的。利用2.18式立刻能够得到

$$\frac{(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-\beta^2\eta^2-(1-\beta)^2}{(1-\beta)(\xi+\beta\eta)}=\frac{1-\beta}{\xi+\beta\eta}\eta^2$$

再由引理2及引理8立即得出

$$\frac{(1-\beta)\eta^2}{\xi+\beta\eta}\neq 0$$

引理11得證。

因此，由引理11可知2.32式中的第二个条件

$$x_4-\frac{1-\beta}{\xi+\beta\eta}\neq 0$$

恒被满足。

我们因此有下述的

定理2.2　若F是域G在映射f的作用下於六维欧氏空间E_3^6中所生成的像，那末二维流形F恒有参数表示式

$$\bar{\lambda}=\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta},\quad \bar{\mu}=\left[\frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}\right]^2$$

$$K_1=\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)}\ ,\quad K_2=\frac{1}{\xi-\eta}\ ,\quad K_3=\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}\ ,$$

$$K_4=\frac{1}{\xi+\eta}\ . \qquad \cdots\cdots 2.42$$

这里参数 α,β,ξ,η 是参数空间 V 中的四个实参数，它们在 V 中的如下的二维流形上取值：

$$\begin{cases}(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0\\ (1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0\end{cases}$$

证. 由定理2.1的2.19式及原先的变数代换关系

$$\bar\lambda\sqrt{\bar\mu}=x+y\ ,\qquad \sqrt{\bar\mu}=x-y\ .$$

立刻得到

$$\bar\lambda=\frac{x+y}{x-y}=\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}$$

$$\bar\mu=(x-y)^2=\left[\frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}\right]^2$$

再由1.10式及定理2.1中的2.17式与2.18式立刻得到2.42式及所需结果。定理2.2证完。

现在来看四个实参数 α,β,ξ,η 的几何意义。我们有如下的

引理1.2. 若 $(\sigma,t)\in D$ 且 $(\alpha,\beta,\xi,\eta)\in V$，那末恒有关系式

$$\alpha = \frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-3\sigma+1}, \quad \beta = \frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{2\sigma^2+2t^2-\sigma},$$

$$\xi = \frac{(\sigma-1)^2+\sigma^2+2t^2}{2t}, \quad \eta = \frac{\sigma-\frac{1}{2}}{t}. \qquad \cdots\cdots 2.43$$

证. 由2.34式及文献[3]中λ、μ与σ、t之关系

$$\lambda = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad \mu = \frac{1-\sigma}{t}$$

代入后即得2.43式，引理12证毕。

由2.43式立即可得如下的

推论2. 若$(\sigma, t)\in D$，则恒有 $\alpha\beta\xi\eta \neq 0$。

推论2的部分结果$\alpha\beta\eta\neq 0$我们已在引理3及引理8中得到过。

在图1中画出了D域的三个边界圆周O_1、圆O_2及圆O_3。由文献[5]中关于D域之定义知，这三个圆并不在开域D内。因此2.43式对D域中的一切点均有意义。现设P为开域D内之任一点，联结O_1P、O_3P

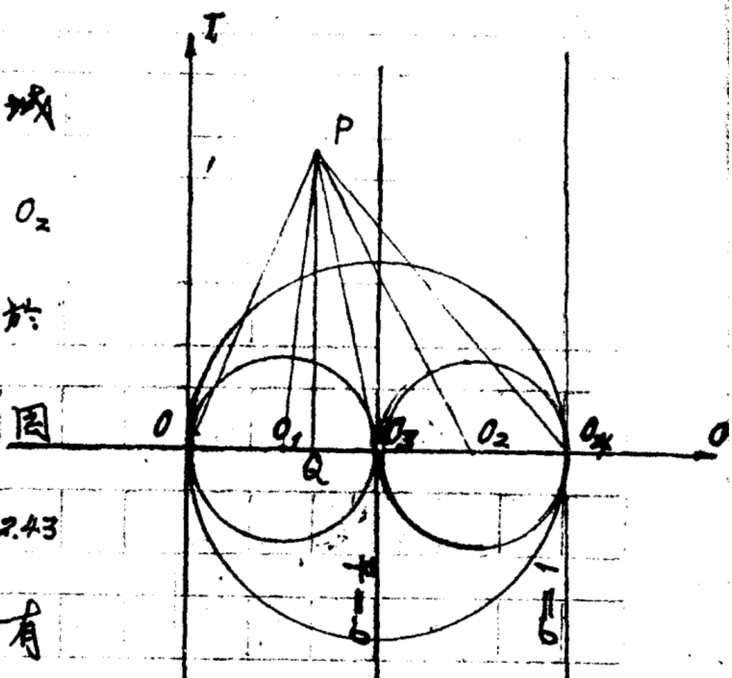

图1. D域

O_2P；若用 $S(r)$ 表示半径为 r 的圆面积，那末 α 与 β 是些可以写成

$$\alpha=\frac{S(\overline{O_3P})-S(\frac{1}{2})}{2\left[S(\overline{O_2P})-S(\frac{1}{4})\right]},\quad \beta=\frac{S(\overline{O_3P})-S(\frac{1}{2})}{2\left[S(\overline{O_1P})-S(\frac{1}{4})\right]} \qquad \text{---}2.44$$

再联结 OP、O_4P，并用 $C(r)$ 表示半径为 r 的圆周长，则易知有

$$\xi=\frac{S(\overline{OP})+S(\overline{O_4P})}{C(\overline{PQ})},\quad \eta=\mathrm{ctg}\,\theta \qquad \text{---}2.45$$

这里 $\theta=\angle PO_3O_4$，而 $\overline{PQ}$ 为 P 点到 O 轴的距离。式 2.44 与 2.45 具体地说明了四个度量坐标 α,β,ξ,η 的几何意义。

5

三、超定超越方程组的映射

由定理1.1得知映射h是拓扑映射，且$G\cong F$。因假設Riemann猜想不真，故而超定超越方程组(1.1~1.4)在开域G上要有实数解。今记其实数解的全体为集合N_0，由假設集合N_0是一个非空集合。显然，由实数解之定义知必有$N_0\subset G$。今在拓扑映射h的作用下，开域G在六维欧氏空间E_2^6中生成一个二维流形F，而且由定理2.2得知这个二维流形有参数表示式2.42。

超定超越方程组(1.1~1.4)在开域G上有实数解之几何意义是它确定了一个在开域G上的非空集合N_0。既然$N_0\subset G$及$F=h(G)$，那么在拓扑映射h的作用下，N_0也将於六维欧氏空间E_2^6中生成一个非空集合，我们记其为A_0。显然应有$A_0\subset F$，由$G\cong F$知集合N_0与集合A_0是等势的。

现在来求集合A_0中每一个元素所须满足的

方程组。在拓扑映射τ作用下，由于 $A_0 \subset F$，所以集合 A_0 中任一元素能而且只能在二维流形 F 上找到。因此，A_0 中的每一个元素都必须具有二维流形 F 上的真的性质。如此，利用拓扑映射τ可将超定超越方程组映射成为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\sin\left[\frac{\bar\lambda\theta}{1+\bar\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\sin\left[\frac{\bar\lambda\theta}{1+\bar\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\bar\lambda+2}{\bar\lambda+1}}}{e^{2\pi\lg\theta}-1}\,d\theta-K_1=0 \quad\cdots 3.1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\cos\left[\frac{\bar\lambda\theta}{1+\bar\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\cos\left[\frac{\bar\lambda\theta}{1+\bar\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\bar\lambda+2}{\bar\lambda+1}}}{e^{2\pi\lg\theta}-1}\,d\theta-K_2=0 \quad\cdots 3.2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\sin\left[\frac{\theta}{1+\bar\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\sin\left[\frac{\theta}{1+\bar\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\bar\lambda+1}{\bar\lambda+1}}}{e^{2\pi\lg\theta}-1}\,d\theta-K_3=0 \quad\cdots 3.3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\cos\left[\frac{\theta}{1+\bar\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}}\cos\left[\frac{\theta}{1+\bar\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\bar\mu}(1+\bar\lambda)}\right]\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\bar\lambda+1}{\bar\lambda+1}}}{e^{2\pi\lg\theta}-1}\,d\theta-K_4=0 \quad\cdots 3.4$$

$$2\bar\lambda\bar\mu+(1-2K_1)\bar\mu-(1+2K_1)=0 \quad\cdots 3.5$$

$$\bar\lambda\sqrt{\bar\mu}-K_2\sqrt{\bar\mu}+\sqrt{\bar\mu}-K_2=0 \quad\cdots 3.6$$

$$(1-2K_3)\bar\lambda^2\bar\mu+2\bar\lambda\bar\mu-(1+2K_3)=0 \quad\cdots 3.7$$

$$K_4\bar\lambda^2\bar\mu-\bar\lambda\sqrt{\bar\mu}-\sqrt{\bar\mu}+K_4=0 \quad\cdots 3.8$$

方程组(3.5~3.8)在本文第一节中定理1.1的证明后已经见到过了。它实质上是六维欧氏空间E_2^6中的二维流形下之隐式。我们有如下的

引理13. 方程组(1.1~1.4)与方程组(3.1~3.8)完全等价。

证. 设$s_0 \in N_0$且$s_0=(\lambda_0, \mu_0)$是超定超越方程组(1.1~1.4)在开域G上的一个实数解，那末极易验证$m_0 \in A_0$且$m_0=(\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0, K_{10}, K_{20}, K_{30}, K_{40})$也是超定超越方程组(3.1~3.8)的一个实数解；这里$\bar{\lambda}_0=\lambda_0$，$\bar{\mu}_0=\mu_0$，$K_{10}=\frac{\mu_0(1+\lambda_0)}{1+\mu_0}-\frac{1}{2}$，$K_{20}=\frac{\sqrt{\mu_0}(1+\lambda_0)}{1+\mu_0}$，$K_{30}=\frac{\lambda_0\mu_0(1+\lambda_0)}{1+\lambda_0^2\mu_0}-\frac{1}{2}$，$K_{40}=\frac{\sqrt{\mu_0}(1+\lambda_0)}{1+\lambda_0^2\mu_0}$。反之，若超定超越方程组(3.1~3.8)有一个实数解$m_0 \in A_0$且$m_0=(\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0, K_{10}, K_{20}, K_{30}, K_{40})$的话，那末消去$K_{10}, K_{20}, K_{30}, K_{40}$后立即可以看出超定超越方程组(1.1~1.4)亦有一实数解$s_0 \in N_0$且$s_0=(\lambda_0, \mu_0)$，这里有$\lambda_0=\bar{\lambda}_0$及$\mu_0=\bar{\mu}_0$。又因为前半部分的$s_0$及后面的$m_0$是随意选取的，这就证明了引理13。

且知集合N_0与集合A_0是等势的。

利用定理2.2中的公式，并注意到

$$\sqrt{\pi}-\frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0$$

代入到超定超越方程组(3.1~3.8)中后我们立刻很快得到一组关于 α,β,ξ,η 的超定超越方程组

$$-\frac{1-3\alpha}{2(1-\alpha)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}+e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi-(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\cdot d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 3.9$$

$$-\frac{1}{\xi-\eta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}-e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi-(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\cdot d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 3.10$$

$$-\frac{1-3\beta}{2(1-\beta)}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}+e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\sin\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi+(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\cdot d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 3.11$$

$$-\frac{1}{\xi+\eta}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta-(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}-e^{-\frac{(1-\beta)\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}\cos\frac{[(1-2\beta)\xi-\eta]\theta+(1-\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\beta)\xi+(1+2\beta)\eta}{2[(1-2\beta)\xi-\beta\eta]}}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\cdot d\theta=0 \qquad \cdots\cdots 3.12$$

显然，这里的变数 α,β,ξ,η 只有二个是独立的

。由定理22得知它们只能在参数空间V中的如下的二维流形上取值：

$$(\alpha-\beta)\xi-(\alpha+\beta-2\alpha\beta)\eta=0 \qquad \cdots\cdots 3.13$$

$$(1-2\beta)\xi^2-2\beta^2\xi\eta-(1-2\beta+2\beta^2)\eta^2-(1-\beta)^2=0 \qquad \cdots\cdots 3.14$$

由於关於α,β,ξ,η的超定超越方程组$(3.9\sim3.14)$是超定方程组$(3.1\sim3.8)$演化来的，所以我们并有如下的

引理14. 超定超越方程组$(3.9\sim3.14)$与超定超越方程组$(3.1\sim3.8)$完全等价。

证. 今设有一解$n_0=(\alpha_0,\beta_0,\xi_0,\eta_0)$满足超定超越方程组$(3.9\sim3.14)$而且$n_0\in B_0$，这里$B_0$是解的全体所构成的集合。那末，极易验证(必然)有一个解$m_0=(\bar{\lambda}_0,\bar{\mu}_0,K_{10},K_{20},K_{30},K_{40})$且$m_0\in A_0$，这里

$$\bar{\lambda}_0=\frac{(1-2\beta_0)(\xi_0+\eta_0)}{(1-2\beta_0)\xi_0-\eta_0}, \quad \sqrt{\bar{\mu}_0}=\frac{(1-2\beta_0)\xi_0-\eta_0}{1-\beta_0},$$

$$K_{10}=\frac{1-3\alpha_0}{2(1-\alpha_0)}, \quad K_{20}=\frac{1}{\xi_0-\eta_0},$$

$$K_{30}=\frac{1-3\beta_0}{2(1-\beta_0)}, \quad K_{40}=\frac{1}{\xi_0+\eta_0}.$$

反之，若有一解$m_0=(\bar{\lambda}_0,\bar{\mu}_0,K_{10},K_{20},K_{30},K_{40})$且

$\eta_0 \in A_0$ 满足方程组 (3.1~3.8)。那末，也易验证此时方程组 (3.9~3.14) 也相应地有一解 $\eta_0=(\alpha_0, \beta_0, \xi_0, \eta_0)$ 且 $\eta_0 \in B_0$，这里

$$\alpha_0=\frac{1-2K_{10}}{3-2K_{10}}, \quad \beta_0=\frac{1-2K_{30}}{3-2K_{30}},$$

$$\xi_0=\frac{K_{20}+K_{40}}{2K_{20}K_{40}}, \quad \eta_0=\frac{K_{20}-K_{40}}{2K_{20}K_{40}}.$$

故知集合 A_0 与集合 B_0 等势。引理14证毕。

将超定超越方程组 (1.1~1.4) 与超定超越方程组 (3.9~3.14) 相比较，并根据引理13及引理14以及方程组等价的传递性，我们显然有如下的

推论3. 超定超越方程组 (1.1~1.4) 与超定超越方程组 (3.9~3.14) 完全等价，其解之间有关系

$$\lambda=\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}, \quad \sqrt{\mu}=\frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0 \quad \cdots\cdots 3.15$$

其逆关系可由上二个式子以及3.13及3.14两式来确定。事实上，逆关系即是引理9中的2.34式。

现在来研究域G在映射 f 的作用下将如何变化？若将 α, β, ξ, η 之取值域记为 U，且将3.15式之两关系代入到G域的定义(见第4页)中去后

，我们立刻得到一个四维欧氏空间V中的一个开领域

$$U=\left\{(\alpha,\beta,\xi,\eta)\ \middle|\ \frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)}{(1-2\beta)\xi-\eta}>0,\ \frac{(1-2\beta)\xi-\eta}{1-\beta}>0,\ \alpha\beta\xi\eta\neq0,\right.$$
$$\frac{(1-\beta)\eta}{(1-2\beta)\xi-\eta}\neq0,\ \frac{(1-2\beta)\left[(1-2\beta)\xi^2-2\beta\xi\eta-\eta^2\right]-(1-\beta)^2}{(1-\beta)^2}\neq0$$
$$\left.\frac{(1-2\beta)(\xi+\eta)\eta-\beta+1}{1-\beta}\neq0,\ \frac{(1-2\beta)\xi\eta-\eta^2+\beta-1}{1-\beta}\neq0.\right\} \quad \cdots\cdots 3.16$$

这里，显然有 $U\subset V\subset E^9$，E^9 是我们在第一节中提到的九维欧氏空间。

综上所述，我们就能够得到如下的

定理3.1 若 Riemann 猜测不真，那末超定超越方程组（3.9~3.14）在开区域U上恒有实数解。如果它的解的全体记为 M_0，则集合 M_0 是一个非空集合。

参考文献

[1] 华罗庚，指数和的估計及其在数論中的应用，科學出版社，1963.

[2] E.C.Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta function, Clarendon Press, Oxford, 1951.

[3] 王天筹，黎曼采他函数的复零点(II)，

[4] 苏步青、华宣积、忻元龙、张国樑，空间解析几何，上海科學技术出版社，1984.

[5] 王天筹，黎曼采他函数的复零点(I)，