新牛顿力学时空变换

—周方变换（广义的伽利略变换）

The Transformation of Space-time for the Neo-Newtonian Mechanics

周 方

作 者 简 介

周 方　男　湖南省华容县人　1932 年 9 月 28 日生于湖南省长沙市 1949 年以前在湖南华容县南山初级中学（现华容县第二中学）、长沙雅礼中学读初中、高中；1950 年就读于大连工学院(现大连理工大学)应用物理系；1951 年秋赴（前）苏联留学；1958 年春毕业于莫斯科航空学院飞机设计与制造系。先后在国防部第五研究院、航天工业部、中国社会科学院从事科研工作；研究员、研究生院教授、博士生导师、享受国务院特殊津贴专家。著述所涉及的专业领域：火箭与导弹工程、军事运筹学与武器系统工程、数理经济学、数量经济学与经济系统分析。

前 言

开宗明义，牛顿巨著《**自然哲学的数学原理**》面世之后创立的仅适应于‘光速为无限大’（存在物质间超距作用）场合的牛顿力学称为**“古典牛顿力学”**或**“经典力学”**；适应于‘光速为有限值’（传递物质讯息的光信号之传播速率为有限值）场合的牛顿力学则可称为**“新牛顿力学”**或**“新古典牛顿力学”**，它是牛顿力学的发展。

17 世纪，荷兰物理学家惠更斯(Christian Huygens，1629—1695)提出了光的波动学说。然而，牛顿（Newton I.）与惠更斯不同，提出了光的粒子学说：根据光的直线传播规律及光的偏振现象，于 1675 年提出假设，认为发光体发出的光线是作直线运动的微粒子流， 在均匀媒质中以一定的速度传播。18 世纪，光的粒子说是主流学说，而在 19 世纪，光的粒子说让位于光的波动学说，后者成为主流。此时以太学说及电磁理论均得到蓬勃发展。麦克斯韦（Maxwell J.C.,1873）提出了电磁理论，完善了光的波动学说。

在麦克斯韦以前，电磁学实验总结出各种经验规律，如库伦定律、法拉第定律、安培定律等，而麦克斯韦则总合了这些经验定律，建立了统一的电磁场方程—著名的麦克斯韦电磁场方程组。麦克斯韦、赫兹（Hertz H.,1892）等人对以太学说及电磁理论都作出了巨大贡献，认为电磁波的传播是：某处电场的变化在其邻近产生磁场，这个变化的磁场又在其邻近产生电场，这样依次地相互变化，从而形成电磁波动。此外，麦克斯韦、赫兹等人还将光和电磁现象统一起来，认为光就是电磁波，是电场与磁场互相感生并向外传播的结果，将光的波动理论与电磁场理论结合起来。

19 世纪末，经典电磁理论的正确性已被大量的实验证实。根据麦克斯韦方程组及很多的实验，人们发现在任何场合下光速总是一个恒定值，于是人们认为可能存在一种传播光的介质 —‘静止以太’，光的速度就是相对以太而言的。人们猜想如果真的有以太，光速就应当遵循速度合成叠加法则，‘光速不变’就是错误的。但是，迈克耳孙—莫雷实验（Michelson A.A.,Morley E.W.,1887）并没有发现以太（实验得到‘零结果’），因而‘光速不变’是正确的。科学家们恰恰也发现无论怎么测量光速都是恒定值。人们发现麦克斯韦方程组不涉及参考系问题，但在经典力学的伽利略变换下却不具有协变性，而经典力学

的伽利略相对性原理却要求一切物理定律在伽利略变换下具有不变性。以麦克斯韦电磁场方程组为基础的电动力学显然与经典力学相抵触。为了消除这一矛盾及解释迈克耳孙—莫雷实验的‘零结果’，菲茨杰拉德（FitzGerald G.F.,1889）提出了长度收缩假设，认为有质量的物体在以太中运动时在运动方向上长度将收缩。荷兰物理学家洛伦兹（Lorentz H.A.,1895）也提出了长度收缩假设，他指出在以太中运动的物体，在运动方向上长度会发生收缩，收缩程度恰好抵消各个方向上以太造成的光速差异，以此解释迈克耳孙—莫雷实验的‘零结果’。人们将这个长度收缩假设称为**‘洛伦兹—菲茨杰拉德收缩’**。洛仑兹还假定以太可以影响在其中运动的钟，钟在运动中变慢，从**‘钟慢尺缩’**及**‘静止以太’**假说导出了洛伦兹变换的雏形[4]。拉莫尔（Larmor J.,1900）研究了以太与物质的相互联系，从而得到了洛伦兹变换的时间变换公式。阿伯拉罕（Abraham M.,1902,1903）试图用麦克斯韦方程组为核心的电动力学取代牛顿力学来作为物理学的基础。但是，1904年洛伦兹指出电磁场作用是独立于整个运动体系而存在的，即电磁场作用与运动并无关系。洛伦兹发表了著名论文**《速度小于光速运动系统中的电磁现象》**，总结出了一个从静止以太系到运动系的变换公式—洛伦兹变换的最终形式，并且证明了麦克斯韦方程组在洛伦兹变换下保持形式不变，但他对洛伦兹变换的解释仍依赖于以太假设。与此同时，庞加莱（Poincare H.,1904）提出了**“相对性原理”**的概念，并将洛伦兹提出的公式正式命名为**“洛伦兹变换”**。**洛伦兹变换**为爱因斯坦创立狭义相对论提供了线索，后来被爱因斯坦引入他的狭义相对论，作为狭义相对论的理论基础与核心。

爱因斯坦坚信，以麦克斯韦方程组为核心的电磁理论是正确的，并肯定电磁场是一种物质的独立存在的特殊形式。但是，麦克斯韦方程对经典力学的**伽利略变换**却不具有协变性。这违反了经典物理学对物理规律所要求的伽利略变换不变性。

人们试图用各种方法和实验证明以太存在，但都失败了。爱因斯坦于是抛弃以太理论及绝对时间的观念，接受了相对空间与相对时间的概念。爱因斯坦认为麦克斯韦方程既然在真空中有效，它也应当在运动物体参考系中有效，而为了使麦克斯韦方程在运动物体参考系中有效，就必须假设‘光速不变’，

即光速不依参考系而变。然而这与经典力学中的速度合成叠加法则相违背。爱因斯坦猜想光与电磁波理论的电动力学定律同牛顿力学定律一样，对时空坐标变换都应该具有协变性。他还认为同时性不是绝对的。

1905 年 6 月，德国**《物理学年鉴》**刊物接受了年仅 26 岁的爱因斯坦为创立他的所谓**"狭义相对论"**而撰写的论文**《论动体的电动力学》**，并于当年 9 月发表了这篇论文。这篇论文阐述了狭义相对论的基本思想、原理和内容，是爱因斯坦狭义相对论的奠基性文章。

尽管爱因斯坦在这篇论文中没有提到洛伦兹和庞卡来的工作，但显然他实际上已经注意到了洛伦兹和庞卡来等人的工作。爱因斯坦坚信，以麦克斯韦方程为核心的电磁理论是正确的，既然麦克斯韦方程在**洛伦兹变换**下保持形式不变，那么牛顿力学的运动定律也应该同光与电磁波理论的电动力学定律一样，对**洛伦兹变换**具有协变性。爱因斯坦把洛伦兹变换当成了'放之四海而皆准'的普适的时空变换，对洛伦兹和庞卡来早前依据经验，通过假设提出的那个形式十分优美的能使光与电磁波动传播方程（麦克斯韦方程）具有协变性的**洛伦兹变换**情有独钟，十分青睐，因而致力于把这个**洛伦兹变换**引入他企图创立的狭义相对论，作为狭义相对论的理论核心。然而，爱因斯坦并不接受洛伦兹提出**洛伦兹变换**所作的推导过程，而是自己另搞一套，在论文**《论动体的电动力学》**中根据他所称的**"相对性原理"**及**"光速为常值原理"**（实际上是**"光传播方程不变原理"**），用一种无论在物理学、数学还是在逻辑上都十分混乱的所谓'推导'，凑出了一组与**洛伦兹变换**相同的数学公式。爱因斯坦就这样把洛伦兹和庞卡来早前依据经验和假设提出的那个**洛伦兹变换**强行塞入了他的**'狭义相对论'**。从此，爱因斯坦就'指鹿为马'，'张冠李戴'，把只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性的**洛伦兹变换**当作了狭义相对论的时空变换。我们把爱因斯坦的这组数学公式特称为**"爱因斯坦变换"**或**"洛伦兹变换数学式"**，以便与洛伦兹和庞卡来等人提出的那个**洛伦兹变换**相区别。应当指出，爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》**中所作的那种无论在物理学、数学还是在逻辑上都十分混乱的所谓'推导'简直是杂乱凑合，逻辑混乱，实际上是得不出**洛伦兹变换**的数学式的。

一个与**洛伦兹变换**有相同数学形式的**'伪时空变换式'—"爱因斯坦变换"**— 就这样成为了爱因斯坦狭义相对论的理论核心。爱因斯坦狭义相对论的一系

列结论及悖论，都源自这个**“爱因斯坦变换”**的数学公式。

1905 年爱因斯坦论文**《论动体的电动力学》**发表以来，狭义相对论被称为当代两大物理学理论基础之一，被奉为颠扑不破的绝对真理。狭义相对论及其创立者爱因斯坦被广泛而持久地宣传，引来了无数的崇拜者。狭义相对论被神化，爱因斯坦被推上神坛。

与此同时，狭义相对论自诞生之日至今一百多年以来，也一直受到不少物理学家的质疑。许多物理学家认为爱因斯坦狭义相对论是一种错误与矛盾百出的学说，对它提出批评和抨击。对爱因斯坦狭义相对论的批评和抨击，并没有随爱因斯坦狭义相对论名声鼓噪而减少，而是越来越猛烈：有些学者撰写了长篇论著对爱因斯坦狭义相对论进行抨击；出现了不少质疑和挑战爱因斯坦狭义相对论的文章、网站及学术刊物。人们越来越多地发现狭义相对论本身存在着众多的悖论，因此认为狭义相对论不过是爱因斯坦用主观臆想及逻辑上十分混乱的思维编造出的一个‘伪命题’而已。国际学术界对爱因斯坦狭义相对论存在着截然不同的三种评价：（一）主流学界的学者认为爱因斯坦狭义相对论是伟大的科学理论，是现代物理学基础。然而，对于大众来说，由于对爱因斯坦狭义相对论缺乏真正的了解，加上长期接受主流学者的各种说教及媒体的反复宣传，许多人盲目地以为爱因斯坦狭义相对论真是伟大的理论，跟着这些学者及媒体大肆追捧，顶礼膜拜；（二）有些学者认为爱因斯坦狭义相对论既有正确的地方，同时也有很多严重的错误；（三）有些学者认为爱因斯坦狭义相对论简直就是一种在物理学与数学上以及在逻辑演绎上都混乱不堪的谬论。爱因斯坦狭义相对论至今并没有得到任何的实验验证，有人吹嘘的所谓“实验结果”只不过是一些人为捏造的，或是被强行贴上‘实验验证’标签的所谓‘结果’。

对爱因斯坦狭义相对论的评价出现如此巨大的反差，在科学发展史上实为罕见，根本原因是人们并没有真正搞清楚狭义相对论，其中也包括这个学说的‘发明者’爱因斯坦本人。爱因斯坦虽然提出了狭义相对论，但他本人对狭义相对论究竟应当是什么其实也并未弄明白，因此他对许多问题的解释就只能是漏洞百出，答非所问。爱因斯坦把微观领域的研究结果凭主观臆想套用到宏观领域的物理现象（如光粒子及有质物体的运动都是宏观的物理现象）。

特别奇怪的是，爱因斯坦狭义相对论的一系列与常理相悖、令人匪夷所思、莫名其妙、难以解释并无法用实验来验证的离奇古怪的结论和‘预言’竟然被人们大肆吹捧为‘新颖奇妙、深奥莫测、令人崇拜的’结论。

年仅 26 岁的青年爱因斯坦所写的一篇物理概念极端荒谬及数学逻辑十分混乱的文章，居然统治了理论物理学长达一个多世纪，实在是科学史上莫大的悲哀。

科学理论总是在不断检讨与扬弃错误之中向前发展的，因此，深入研究并缜密审视爱因斯坦狭义相对论，对物理学的发展具有十分重要的意义。

笔者从物理学、数学与逻辑演绎等多方面缜密审视了爱因斯坦在 1905 年论文**《论动体的电动力学》**中为推导狭义相对论时空变换而建立的基本数学模型，发现并揭示了狭义相对论理论源头上隐匿很深的根本性、全局性、致命性谬误。

爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》** 的‘Ⅰ． **运动学部分**’，§3 中[1]：

（1） 采用（动系内）关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ 作为基础框架，建立了如下荒谬的基本数学模型：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

企图通过求解偏微分方程来推导出时空变换的时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$。

（V — 真空中光速；v — 参考系相对速度）爱因斯坦在对时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中的变量 τ、t、x 进行赋值时**‘不按规则出牌’，违背‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理法则，十分混乱地定义了时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中的变量 τ、t、x 及它们的赋值，致使在一次观测及坐标变换中互作相对运动的两个参考系同时被设为了‘静系’，也就是说在一次观测及坐标变换中同时有两个观测者，各自孤立地对同一事件进行测度。**这违背了‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理规则，因此爱因斯坦得出的那个函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 不仅不是物理意义上真正的时间变换式，而且它根本就没有任何的物理意义，而只能是一个**‘伪时间变换式’**。

（2） 在推导微分方程时，将函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中的变量 x 错误地视为变量

x'。其实x'并不是一个‘变量’，而是变量x对应于事件E_1的赋值，是一个既定数值（常数值）。然而，爱因斯坦却错误地把x'作为变量，并‘取x'为无限小’[2]。不仅如此，爱因斯坦还把x'定义为$x' = x - vt$，这实际上是不合理地掺入了**伽利略变换**的关系式$x' = x - vt$，这是逻辑谬误。

（3） 设计了一个错误的**“动系内闪光反射模型”**来推导时间变换式，因而人为地限制了所导出的坐标变换只能适用于低于光速（$v < V$）的相对运动。

由于混乱不堪地定义了时间变换式$\tau = \tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x及从而错误地给出了这些变量对应于事件的赋值，爱因斯坦得出的函数$\tau = \tau(x,0,0,t)$根本就不具有任何的物理意义，更不是时空坐标变换的时间变换式，而只能是一个**‘伪时间变换式’**。爱因斯坦在其理论源头上的这种根本性全局性谬误，就是爱因斯坦狭义相对论包藏着众多离奇古怪的无法解释的‘悖论’的总根源!!

为了建立一个正确的对应于‘光速为有限值’场合的时空坐标变换，创立一个成功的时空理论，完全依赖于**正确地解决如何认识‘时间’的问题**，而解决这个问题的关键则在于**解决‘光速为有限值’场合下如何定义不同地点发生事件的‘同时性’，即如何对准不同地点的‘时间’的问题**。

为了比较不同地点的时间，必须使不同地点的时钟互相对准。为了实现经典力学的伽利略变换的时间变换，需要使用那种(从一点传至另一点勿需花费任何时间的)瞬时传播信号。然而，在自然界至今尚未找到这样的信号。尽管目前已知传播最快的是光信号，而光信号的传播速率仍为有限值。因此，经典力学的伽利略变换所要求的时间变换在物理上是无法实现的。这也是经典力学的致命硬伤。这样，人们就只能放弃绝对时空的观念、利用传播速率为有限值的光或电磁波信号‘对钟’，为此，**就必须对不同地点发生事件的‘同时性’作出定义**。

直到 1922 年，爱因斯坦总算是已经认识到了上述问题，他在《**相对论的意义**》一书中写道[3]：

《为了测定时间，曾经假定在某处有时计U，相对于K保持静止。然而如果事件到时计的距离不应忽略，就不能用这只时计来确定事件的时刻；因为不存在能用来比较事件时刻和时计时刻的“即时讯号”。为了完成时间的定义，可

以使用真空中光速恒定的原理。假定在 K 系各处放置同样的时计，相对于 K 系保持静止，并按下列安排校准。当某一时计 U_m 指着时刻 t_m 时，从这只时计发出光线，在真空中通过距离 R_{mn} 到时计 U_n；当光线遇着时计 U_n 的时刻，使时计 U_n 对准到时刻 $t_n = t_m + \frac{R_{mn}}{V}$，光速（$V$ ）恒定原理于是断定这样校准时计不会引起矛盾。用这样校准好的时计就能指出发生在任何时计近旁的事件的时刻。》

可是，遗憾的是，爱因斯坦并没有将他的上述想法向前推进，而是就此止步了。实际上，沿着他的上述思路，只要再前进一步就可以推导出正确的时空变换时间变换式。如果真是这样的话，那么他就不得不自己否定他在 1905 年论文《论动体的电动力学》中为推导狭义相对论时空变换而建立的那个基本数学模型（参看论文《论动体的电动力学》的‘Ⅰ． 运动学部分’，§3），甚至不得不全盘否定他的《论动体的电动力学》论文，回归到重新思考与充实发展牛顿的理论。但是，爱因斯坦最终却没有走出这一步，原因何在，至今不得而知，只能留待世人后代去思索了。

爱因斯坦不但自己误入了歧途而终究未能自拔，而且还用荒谬的狭义相对论误导了世人的思维，贻误后代长达一百多年。

笔者在反复仔细研读爱因斯坦狭义相对论奠基性论文《论动体的电动力学》（1905 年）的基础上，切实捋清了爱因斯坦在立论过程中的思维脉络与推演逻辑，从中发现了爱因斯坦狭义相对论理论源头上隐匿深秘的根本性、全局性、致命性的谬误 — 爱因斯坦狭义相对论千疮百孔的总根子。

在此基础上，笔者另辟蹊径，采取了独特的，与爱因斯坦‘大相径庭’的思维路线，终于推导出惟一的适应于**‘光速为有限值且两参考系有相对运动’**场合的时空坐标变换。

笔者在准确理解文字表述的**“相对性原理”**的基础上首次将时空坐标变换方程组满足**“相对性原理”**之充分必要条件用数学语言完整地表达出来，并实际运用于推导过程之中。

笔者认为，为了推导出时空坐标变换式，首先必须推导出正确的时间变换式，然后在时间变换式与空间变换式组成的时空坐标变换方程组中引入**“相对性原

理”的充分必要条件，由此确定方程组的各个系数。

笔者将爱因斯坦论文**《论动体的电动力学》**中的**“动系内闪光反射模型”** 改换为**“动系内闪光模型”**，经过严谨的推导，得出了（动系）时间t'与（静系）时间t之间正确的数学关系式 — 时空坐标变换的**时间变换式**。笔者在推导出时间变换式之后，将这个时间变换式与待定的空间变换式组成联立方程组，运用**“相对性原理”**，终于成功地得出了惟一的适应于**‘光速为有限值且两参考系有相对运动’**场合的时空坐标变换。这个时空坐标变换完全是笔者独立推导出的，为笔者首创，故命名为**“周方变换”**。

十分有趣的是，**周方变换**是一个**“伽利略型”**的时空坐标变换。在‘光速为无限大’（即存在物质间超距作用）时，或在‘光速为有限值’而参考系相对速度与光速相比是很小时，**周方变换**就直接退化为（经典的）**伽利略变换** 。考虑到**伽利略**的伟大历史功绩及其在物理学中的重要地位，可把**周方变换**同时也称为**“广义的伽利略变换”**。

周方变换（广义的伽利略变换）揭示了‘光速为有限值’场合下时间与空间的一系列非常美妙的性质：（1）‘时间’独立于‘空间’而存在，即‘时间’影响‘空间’，但‘空间’不影响‘时间’；（2）‘时间’是相对的，但‘（两事件）同时’是绝对的，‘（两事件）不同时’也是绝对的；（3）在参考系相离运动中发生‘动系时间膨胀’，而在与相离运动方向相反的参考系相合运动中发生‘动系时间收缩’，因此所谓的‘双生子悖论’是不存在的；（4）在参考系相离运动中发生同等程度的‘动系时间膨胀’与‘动系空间膨胀（沿相对运动方向）’，而在参考系相合运动中发生同等程度的‘动系时间收缩’与‘动系空间收缩（沿相对运动方向）’，因此在**周方变换**下‘相对运动方向上速度的模’是一个不变量；（5）速度合成服从叠加法则；（6）物体的质量符合牛顿对‘质量’的定义，物体的质量是绝对的，不随参考系及物体的运动状态而变，即不存在所谓的‘质速关系式’；（7）不存在‘质能关系式’ ；原子核反应释放出的巨大能量实际上就是链式反应中所产生的大量高速运动粒子的动能。

本书中，笔者接受了以下这组前提条件：

（1）**“时空的匀直性”** ：时间和空间是均匀的，时间是单向流逝的，空间是各向同性的；

（2）**“真空中光传播速率为恒定值假设”** ：真空中光信号的传播速率为一个定值C，与光源运动无关，光信号总是以速率C向其观测者传播。爱因斯坦用文字表述为[2]：

《任何光线在“静止的”坐标系中都是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》

笔者根据上面这段文字的原意，将这个假设的文字表述修改为：

《物体发射出来的光线在观测者看来都是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》

（3）**“相对性原理”** ：物理定律（或物理量之间的数学关系式）在互作匀速直线平移相对运动的两参考系内是相同的。爱因斯坦用文字表述为[2]：

《物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。》

（4）**传递物质讯息的光波之传播速率为有限值（‘光速为有限值’）**。

由于笔者能够准确理解并在数学推导中恰当运用这些前提条件，最终推导出的时空变换并不是与**洛伦兹变换**相同的数学式，而是地地道道的**“伽利略型”**的时空坐标变换，当然也不是那个基于‘超距作用’的（经典的）**伽利略变换** ，而是适应于**‘光速为有限值且两参考系有相对运动’**场合的**广义的伽利略变换**。

此外，本书还分出专门的章节，讨论了‘双生子悖论’问题，多普勒效应以及超高速飞船的脉冲雷达测速问题。本书的一个突出特点是以超过一半的篇幅详尽讨论与分析了时空坐标变换的时间变换问题：揭示了爱因斯坦论文**《论动体的电动力学》**推导时间变换式中存在的根本性、原则性谬误，并随之建立了正确的时间变换式。笔者认为，创立一个成功的时空理论，完全依赖于正确地解决如何认识‘时间’的问题。

目　录

第一章

‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理法则及数学描述

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

在**‘光速为有限值且两参考系有相对运动’**的场合下对客观事件进行观测及时空坐标变换，应包含以下必需的要件：

1．位置变量轴 x, y, z 构成的笛卡尔直角坐标系；

2．位置变量轴 x', y', z' 构成的笛卡尔直角坐标系；

3. 观测者，静止在坐标系的原点；

4．两坐标系之间有相对运动 — 匀速直线平移相对运动；

5．被测度（观测、度量、评估、推断）的对象 —‘事件时刻’及‘事件位置’；

6．观测工具 — 传播速率为有限值的光信号；

在**‘光速为有限值且两参考系有相对运动’**的场合下对客观事件进行一次观测及时空坐标变换，就是：静止在一个参考系原点的观测者通过对客观事件发生时刻的观测值（本系时钟指示的时刻）及事件位置的观测值（本系量尺指示的位置）来推知（评估）该客观事件在相对于此参考系作匀速直线平移运动的另一参考系内的时刻及位置。在一次观测及时空坐标变换中，两参考系中必须且只可设一个参考系为**‘静止系’**，简称**‘静系’**，进行这次观测及时空坐标变换的观测者所在的参考系就是这个静系，而另一相对于此参考系作匀速直线平移运动的参考系则是**‘运动系’**，简称**‘动系’**。也就是说，在对客观事件进行一次观测及时空坐标变换时必需且只需有一个观测者—静系观测者。这个静系观测者就是对客观事件的时间坐标及空间坐标进行测度（观测、度量、评估、推断）的‘惟一执行者’，其任务就是通过观测到的客观事件的（静系）时间坐标及空间坐标，来推知（评估）该事件的（动系）时间坐标及空间坐标。

时空坐标变换需借助于一组联立方程，后者被称为**‘时空坐标变换方程组’**。

考虑到时空的匀直性：时间均匀地单向流逝；空间是均匀的，而且是各向同性及各点同性的，如果还假设存在物质间超距作用（即假设‘传递物质讯息的光波之传播速率为无限大’，即‘光速为无限大’），则时空坐标变换方程组可表为如下线性方程组：

$$
\begin{cases}
x' = x'(x, y, z, t, u) \\
y' = y'(x, y, z, t, u) \\
z' = z'(x, y, z, t, u) \\
t' = t'(x, y, z, t, u)
\end{cases}
$$

（自变量x, y, z, t所在的参考系标为‘K系’，因变量x', y', z', t'所在的参考系标为‘K'系’。）

式中：x, y, z, t—方程组的自变量，它们是K系观测者对事件空间坐标及时间坐标的观测值；

x', y', z', t'—方程组的因变量，它们是事件在K'系内的空间坐标及时间坐标；

u—两参考系之间的相对速度。

不失一般性，我们假设K'系沿K系的x轴正方向以匀速u作平移相对运动，并保持y'轴平行于y轴，且$y' = y \equiv 0$；z'轴平行于z轴，且$z' = z \equiv 0$，即事件发生在x（x'）轴上。设：在一次观测及时空坐标变换中，K系为静系，K'系则是动系。

在这种场合下，时空坐标变换方程组就简化为：

$$
\begin{cases}
x' = x'(x, 0, 0, t, u) \\
y' = y'(x, 0, 0, t, u) \equiv 0 \\
z' = z'(x, 0, 0, t, u) \equiv 0 \\
t' = t'(x, 0, 0, t, u)
\end{cases}
$$

即：

$$
\begin{cases}
x' = x'(x, 0, 0, t, u) \\
t' = t'(x, 0, 0, t, u)
\end{cases}
$$

或简写成：

$$\begin{cases} x' = x'(x,t,u) \\ t' = t'(x,t,u) \end{cases}$$

爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》的‘I . 运动学部分’，§3 中给出了关于‘时空坐标变换’的数学定义[1]：

“To every system of values x,y,z,t that determines completely the place and time of an event in the system at rest, there corresponds a system of values ξ,η,ς,τ that fixes this event relative to the system k, and the problem to be solved is to find the system of equations connecting these quantities.”

可以译成：

《某事件在静止系中的一组数据 x,y,z,t 完全确定了此事件的位置和时间，对于每一个事件的数组 x,y,z,t ，都有该事件在 k 系中的相应数组 ξ,η,ς,τ 与之相对应，我们要解决的问题就是寻找联结这两组变量的方程组。》

另外，爱因斯坦在《狭义与广义相对论浅说》中还给出了关于‘时空坐标变换’的下述定义[2]：

《……首先只考虑 x 轴上发生的事件。任何一个这样的事件，对于坐标系 K 是由横坐标 x 和时间 t 来表示，对于坐标系 K' 则由横坐标 x' 和时间 t' 来表示。当给定 x 和 t 时，我们要求出 x' 和 t' 。》

这样的定义显然只指出了一个事件在 K' 系内的空间坐标 x' 及时间坐标 t' 与该事件在 K 系内的空间坐标 x 及时间坐标 t 之间的数量关系，因而它只是一个‘数学定义’，而并未说明 x 和 t 是用怎样的方法‘给定’的以及 x' 和 t' 又是用怎样的方法‘求出’的，也就是说，这个定义没有指出给定 x 和 t 及求出 x' 和 t' 的物理过程及此过程所应遵循的物理法则，它不是时空坐标变换的‘物理定义’。因此，爱因斯坦关于时空坐标变换所给出的这样的定义只能适用于‘光速为无限

大’即直接认可$t' \equiv t$的情况!!满足爱因斯坦所给上述定义的时空坐标变换就只有古典牛顿力学（经典力学）的**伽利略变换**：

$$\begin{cases} x' = x'(x,t,u) = x - ut \\ t' = t'(x,t,u) = t \end{cases}$$

由此可见，在‘光速为无限大’（存在物质间超距作用）的场合下，观测者可以处在任何地点，都不影响时空坐标变换的结果，观测者存在与否，是无关紧要的。也就是说，在这种场合下观测者是不必需的。如果说一定要有一个观测者的话，那么这个观测者就是一个可以处在任意地点的观测者，也就只能是那位‘无处不在’的‘无影无踪的上帝’，即所谓的‘绝对静止空间’了。

‘光速为有限值且两参考系有相对运动’场合下的时空坐标变换方程组中有两个参数 — 真空中光速c及两参考系之间的相对速度u。此情况下，时空坐标变换方程组就是：

$$\begin{cases} x' = x'(x,t,u,c) \\ t' = t'(x,t,u,c) \end{cases}$$

式中：c—真空中光速；

u—两参考系之间的相对速度。

与两个参考系的变量x,t及x',t'共存于同一时空坐标变换方程组之中的参数 — 真空中光速c及参考系相对速度u显然应当是两个参考系都能‘接纳’的‘共用’参数。这就给于我们一个重要暗示：在一个正确的时空坐标变换下，‘速度的模’必须是一个不变量。我们知道，能够满足这一要求的时空坐标变换只有速度合成服从叠加法则的**“伽利略型”**的时空变换。

时空坐标变换方程组中方程式$x' = x'(x,t,u,c)$称为**‘空间变换式’**，方程式$t' = t'(x,t,u,c)$称为**‘时间变换式’**。

关于时空坐标变换，还有人给出如下的定义：

‘时空坐标变换式’就是‘静系内的观测者’测得事件的时间坐标及空间坐标与‘对静系作相对运动的动系内的观测者’测得同一事件的时间坐标及空

间坐标之间的数量关系式。

关于时空坐标变换，还有人定义为：

《'一个参考系的观测者'凭借对某一事件的时间坐标和空间坐标及另一参考系的运动（相对运动）的观测值去推测（推断）出'另一参考系的观测者'对同一事件的时间坐标和空间坐标的观测值。》

我们注意到，在上面这两个定义里，在一次观测及时空坐标变换中出现了互相隔绝，无讯息传递的两个各自独立地对事件作出测度的观测者 —'静系内的观察者'和'对静系作相对运动的动系内的观察者'。然而，'光速为有限值'场合下的时空坐标变换必须遵守的物理法则是：在一次观测及时空坐标变换中必须且只可将两参考系中的一个参考系作为静系。也就是说，在进行一次观测及坐标变换中只可以有一个观测者—静系观测者。这个观测者是对事件的时间坐标及空间坐标进行测度（观测、度量、评估、推断）的'统一执行者'，后者通过观测事件的（静系）时间坐标及空间坐标，来推断出他所评估的该事件的（动系）时间坐标及空间坐标。

笔者以为，**'光速为有限值且两参考系有相对运动'**场合下的**'时空坐标变换'**的正确的定义应当是：

《静止在一个参考系（静系）原点的观测者，利用所测得之客观事件的时间坐标及空间坐标，来推知他所判定（评估）的、该事件在对他所在参考系作匀速直线相对运动的另一参考系（动系）内的时间坐标及空间坐标。》

在一次观测及时空坐标变换中，只能由一个观测者—静系观测者对事件统一进行测度（观测、度量、评估、推断），才能够使他对事件的观测值（自变量）同他对事件所判定（评估）的实际值（因变量）关联起来，构成一个时空坐标变换方程组。

在一次观测及时空坐标变换中，静系观测者所观测到的客观事件的（静系）时间坐标及空间坐标，作为自变量，被放置在时空坐标变换方程组方程式等号的右边；静系观测者欲推知的他所判定（评估）的客观事件的（动系）时间坐标及空间坐标，作为因变量，被放置在方程式等号的左边。

按照时空坐标变换的上述正确的物理定义及时空坐标变换所应遵循的物理法则，时空坐标变换方程组

$$\begin{cases} x' = x'(x, y, z, t, u, c) \\ y' = y'(x, y, z, t, u, c) \\ z' = z'(x, y, z, t, u, c) \\ t' = t'(x, y, z, t, u, c) \end{cases}$$

中等号左变的因变量 x', y', z', t' 应当是：

t' — 静系（K 系）观测者评估的‘事件 E 发生之（K' 系）时刻’（固有时）；

x', y', z' — 静系（K 系）观测者评估的‘事件 E 发生之（K' 系）位置’。

等号右变的自变量 x, y, z, t 应当是：

t —‘静系（K 系）观测者观测到事件 E 时’之（K 系）时刻（坐标时）；

x, y, z —‘静系（K 系）观测者观测到事件 E 时’事件 E 之（K 系）位置。

时空坐标变换的时间变换式中诸变量的物理定义：

时空坐标变换方程组可表为如下线性方程组：

$$\begin{cases} x' = x'(x, y, z, t, u, c) \\ y' = y'(x, y, z, t, u, c) \\ z' = z'(x, y, z, t, u, c) \\ t' = t'(x, y, z, t, u, c) \end{cases}$$

式中：u —参考系相对速度；

c —真空中光速。

不失一般性，我们假设（变量 x', y', z', t' 所在的）K' 系沿着（变量 x, y, z, t 所在的）K 系的 x 轴正方向以匀速 u 作平移相对运动，并保持 y' 轴平行于 y 轴且 $y' = y \equiv 0$，z' 轴平行于 z 轴且 $z' = z \equiv 0$；事件发生在 x（x'）轴上。

设：在一次观测及时空坐标变换中，K 系为静系，另一参考系（K' 系）就是动系。

于是，时空坐标变换方程组为：

$$\begin{cases} x' = x'(x,0,0,t) \\ t' = t'(x,0,0,t) \end{cases}$$

方程组中函数 $x' = x'(x,0,0,t)$ 是空间变换式，函数 $t' = t'(x,0,0,t)$ 是时间变换式。时间变换式 $t' = t'(x,0,0,t)$ 中的三个变量 t' 、t 、x 都是从静系（K 系）进行测度的变量。

A．时间变换式 $t' = t'(x,0,0,t)$ 中变量 t' 、t 、x 的物理定义是：

（1）等号左边的因变量 t' 为《**静系（K 系）观测者评估的‘事件 E 发生之（K' 系）时刻’**》（固有时）；

（2）等号右边的自变量 t 为《**‘静系（K 系）观测者观测到事件 E 时’之（K 系）时刻**》（坐标时）；

（3）等号右边的自变量 x 为《**‘静系（K 系）观测者观测到事件 E 时’事件 E 之（K 系）位置**》。

B．时间变换式 $t_i' = t'(x_i,0,0,t_i)$ 中的（K' 系）时刻 t_i' 与（K 系）时刻 t_i 为对应于事件 E_i 的**‘同一时刻’**，时刻 t_i' 与时刻 t_i 必满足关系式：

$$t_i = t_i' + \frac{x_i}{c},$$

式中：t_i'—事件 E_i 发生之（K' 系）时刻；

t_i—‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻；

x_i—事件 E_i 发生地点至静系（K 系）观测者的距离；

c—真空中光速。

第二章

爱因斯坦严重违背了时空坐标变换的物理法则

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

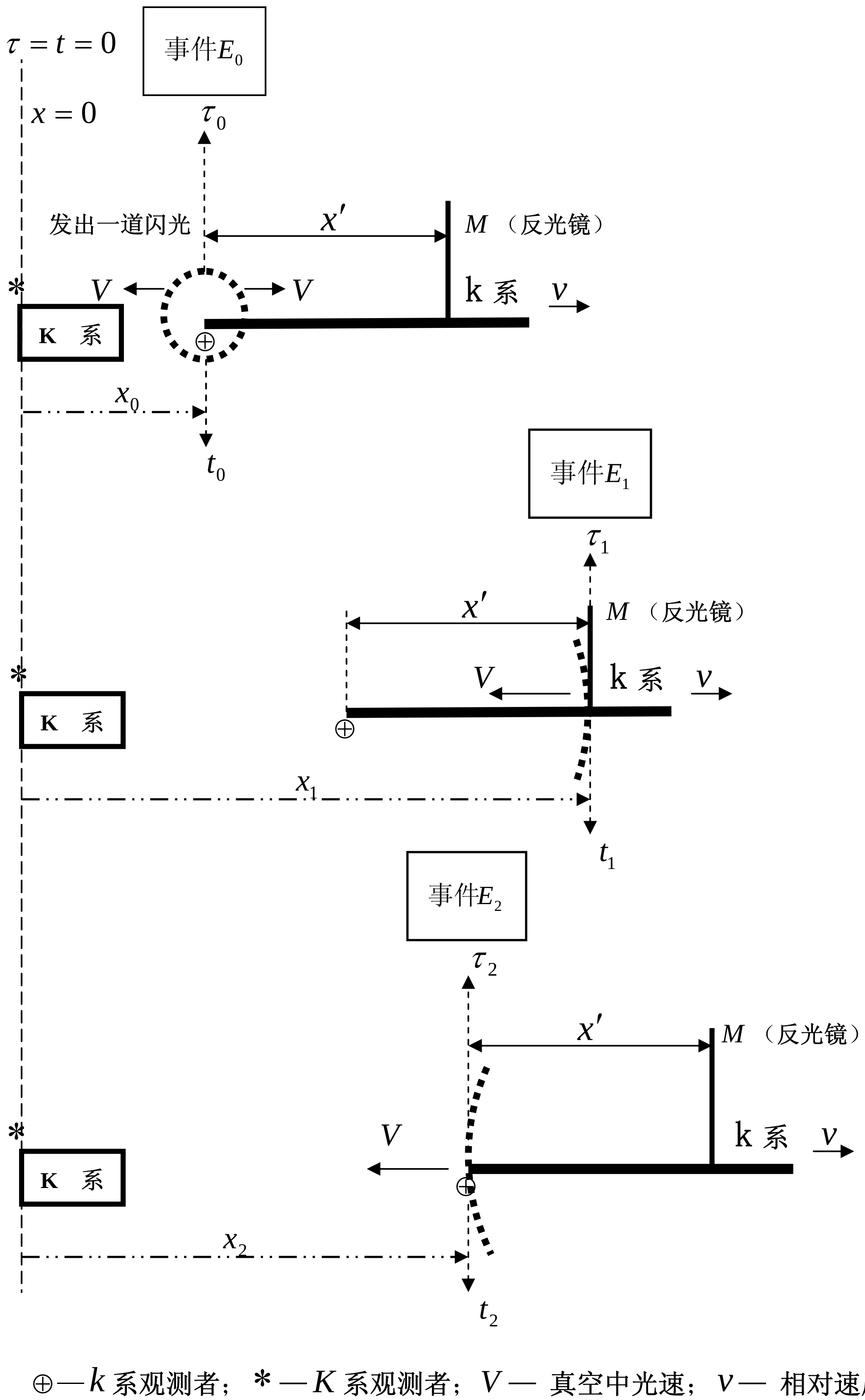
1905 年爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》的‘I . 运动学部分’，§3 中设计了一个**“动系内闪光反射模型”**：《 From the origin of system k let a ray be emitted at the time τ_0 along the X-axis to x', and at the time τ_1 be reflected thence to the origin of the co-ordinates, arriving there at the time τ_2 ; 》 [1]，即：**《从k系的原点在时间τ_0发射一道光线，沿着 X 轴射向x'，在τ_1时从那里反射回坐标系的原点，而在τ_2时到达；……** 》[2]。

参看图 2-1。设有两个参考系：参考系K和参考系k。参考系K简称‘K系’；参考系k简称‘k系’。

参看图 2-1。K系的x轴上有一根具有任意长度的刚性杆。杆子（k系）沿K系的x轴正方向作匀速平移运动，相对速度为v。在K系原点（$x=0$）有一个观测者＊（＊—K系观测者)；在k系原点（$\xi=0$）有一个观测者⊕（⊕—k系观测者)。图 2-1 中，将K系设为静系。

设：K系和k系各配有时钟，在时刻$\tau=t=0$，k系观测者⊕（$\xi=0$）恰好经过K系观测者＊（$x=0$），这时两参考系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在时刻$\tau=\tau_0$，**‘k系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’**（事件E_0)；经过一段时间，**‘闪光到达杆子$\xi=x'$处反光镜，向k系原点（$\xi=0$）反射回去’**（事件E_1)；再经过一段时间，**‘闪光返回到k系原点（$\xi=0$）’**（事件E_2)。



⊕—k 系观测者；*—K 系观测者；V— 真空中光速；v— 相对速度

图 2-1

爱因斯坦采用（动系内）关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$作为基础框架，建立了以下基本数学模型[1]：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

企图通过求解偏微分方程，来推导出时空坐标变换的时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$。

爱因斯坦的基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\ \tau_0=\tau_0;\ \ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V};\ \ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}\ ]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~

函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$**中诸变量对应于各事件的赋值：**

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

从框图所示内容可以看到，爱因斯坦在对时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的因变量τ及自变量t和x进行赋值时‘**不按规则出牌**’，**严重违背了‘光速为有限值’场合下的时空坐标变换的物理法则，十分混乱地定义了时间变换式**$\tau=\tau(x,0,0,t)$**中的因变量**τ**及自变量**t**和**x：

（1）爱因斯坦采用（动系内）关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$作为基本数学模型的框架，

实际上是将函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的因变量τ对应于事件E_0、事件E_1、事件E_2的值取为τ_i：（参见上面的框图）
~~~~~~

$$\tau_0=\tau_0\,,\quad \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}\,,\quad \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$$

这里，爱因斯坦将变量τ错误地取为《在k系内独立测度的‘事件E发生之（k系）时刻’》。

然而，时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的因变量τ应当是《**静系（K系）观测者评估的‘事件E发生之（k系）时刻’**》（固有时）：

$$\tau_0=\tau_0\,,\quad \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V-v}\,,\quad \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$$

（2）爱因斯坦将时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的自变量t取为：

$$t_0=t\,,\quad t_1=t+\frac{x'}{V-v}\,,\quad t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$$

这里，爱因斯坦将变量t错误地取为《**静系（K系）观测者评估的‘事件E发生之（k系）时刻’**》。

然而，时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的自变量t应当是《**‘静系（K系）观测者观测到事件E时’之（K系）时刻**》（坐标时）：

$$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}\,,\quad t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}\,,\quad t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$$

（3）爱因斯坦将时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的自变量x取为：

$$x_0=0\,,\quad x_1=x'\,,\quad x_2=0$$

这里，爱因斯坦将变量x错误地取为《**‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E时’事件E之（K系）位置**》。

然而，时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的自变量x应当是《**‘两参考系有相对运动（$v\neq0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E时’事件E之（K系）位置**》：

$$x_0 = vt_0；\quad x_1 = vt_1 + x'；\quad x_2 = vt_2$$

现将爱因斯坦在狭义相对论理论源头上的根本性、原则性、全局性、致命性的谬误示于下面诸表内：

表 2-1：时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 等号左边的变量 τ 的赋值 τ_i

爱因斯坦的错误的定义	在 k 系内独立测度的'事件 E_i 发生之（k 系）时刻' τ_i
事件 E_0	$\tau_0 = \tau_0$
事件 E_1	$\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}$
事件 E_2	$\tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$

表 2-2：时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 t 的赋值 t_i

爱因斯坦的错误的定义	静系（K 系）观测者评估的'事件 E_i 发生之（k 系）时刻' t_i
事件 E_0	$t_0 = t$
事件 E_1	$t_1 = t + \frac{x'}{V - v}$
事件 E_2	$t_2 = t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}$

表 2-3：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 x 的赋值 x_i

爱因斯坦的错误的定义	‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置 x_i
事件 E_0	$x_0=0$
事件 E_1	$x_1=x'$
事件 E_2	$x_2=0$

表 2-4：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号左边的变量 τ 的赋值 τ_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’： $\tau_0=\tau_0$； $\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$； $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$ 实际上它就是《‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’（固有时）： $\tau_0=\tau_0$； $\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V-v}$； $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V-v}$

表 2-5：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的变量t的赋值t_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’： $t_0=t$； $t_1=t+\frac{x'}{V-v}$； $t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$ 谬误之处： t_i不应是《静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’》， 而应当是《‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’之（K系）时刻》（坐标时）	‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’之（K系）时刻（坐标时）： $t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}$； $t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}$； $t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$ （注 A）

注 A：$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_0$；

$$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_1+\frac{x'}{V}=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{x'}{V-v})+\frac{x'}{V}$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}；$$

$$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_2=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{2V}{V^2-v^2}x')$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}$$

表 2-6：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 x 的赋值 x_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=0$； $x_1=x'$； $x_2=0$ 谬误之处： ‘两参考系无相对运动（$v=0$）’ 实际上它就是《在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）位置’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=vt_0$； $x_1=vt_1+x'$； $x_2=vt_2$ （注 B）

注 B：$x_0=vt_0=v\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$x_1=vt_1+x'=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)+x'=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{V+v}{V-v}x'\text{；}$$

$$x_2=vt_2=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x'$$

由于爱因斯坦在函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中引入的变量 τ 、t 、x 在定义上完全不符合时间变换式的要求，所以从爱因斯坦的上述基本数学模型得出的函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 也就没有任何的物理意义，更谈不上是一个时空坐标变换的时间变换式，而只能是一个物理上荒谬的数学式子，是一个**‘伪时间变换式’**。

参看图 2-1。对于爱因斯坦在论文《**论动体的电动力学**》中所设计的那个“**动系内闪光反射模型**” [1]，如果相对速度为 $v \geq V$，则事件 E_1（‘**闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去**’）将不可能发生，因而事件 E_2 也不会发生了。因此，爱因斯坦设计的这个“**动系内闪光反射模型**”是一个错误的物理模型，它对函数 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 人为地引入了一个限制条件：$v < V$。

第三章

‘光速为有限值’场合下“同时”之概念及变量τ和t之定义

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

设有点A和点B。点A和点B各自携带一只时钟（A钟和B钟），两只钟完全相同。在A钟和B钟均指示时刻$\tau=t=0$时（τ为B钟指示的时刻，t为A钟指示的时刻），点B恰好与点A相重合。

设：点A静止，点B相对于点A作匀速直线运动，相对速度为v。运动中，在B钟指示时刻τ（$\tau>0$）时，点B离点A的距离为$x=v\tau$，在此时刻，点B发出一道闪光。经过一段时间$\dfrac{x}{V}$，点A处的观测者才观测到这道闪光，他见到这道闪光的A钟指示时刻是$t=\tau+\dfrac{x}{V}$，V为真空中光速。这样，我们有如下定义：

《在‘光速为有限值V’的场合下，**‘点B发出一道闪光’**的时刻τ（B钟指示的时刻）与**‘离点B距离为x的点A处的（静止）观测者观测到这道闪光’**的时刻t（A钟指示的时刻）满足关系式$t=\tau+\dfrac{x}{V}$，V为真空中光速，则B钟时刻τ与A钟时刻t被关系式$t=\tau+\dfrac{x}{V}$定义为**‘同时刻’**。》

也就是说，相互对应的B钟时刻τ与A钟时刻t为**‘同时刻’**，其定义条件是$t=\tau+\dfrac{x}{V}$。如果点B以速度v相对于点A作相对运动，并在$\tau=t=0$时点B恰好经过点A，则B钟时刻τ与A钟时刻t为**‘同时刻’**之定义条件就是

$t=\tau+\frac{v\tau}{V}=\left(1+\frac{v}{V}\right)\tau$ 。如果‘光速为无限大’（超距作用，即$V\to+\infty$ ），则B钟时刻τ与A钟时刻t为**‘同时刻’**之条件就是$t=\tau$（这就是**‘牛顿–伽利略’**情况）。

如果点A是K系的原点，点B是k系的原点，那么B钟时刻τ与A钟时刻t之间的上述关系式$t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\tau$ **实际上就是K系与k系之间的时间变换式**$\tau=\tau(x,0,0,t)$，也可以换写成如下形式：

$$\tau=\frac{V}{V+v}t$$

在‘光速为有限值V且两参考系有相对运动v’的场合下，K系与k系之间的时间变换式为：

$$\tau=\tau(x,0,0,t)=\frac{V}{V+v}t$$

式中的时刻τ ［**事件E发生之‘k系时刻’**］与时刻t ［**‘K系原点观测者观测到事件E时’之‘K系时刻’**］为对应于事件E的**‘同时刻’**。因此，时间变换式$\tau=\frac{V}{V+v}t$中的时刻τ与时刻t必满足关系式：

$$t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\tau \text{ 或 } \Delta t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\Delta\tau$$

在时间变换式$\tau=\frac{V}{V+v}t$中，当$V\to+\infty$（超距作用）时，这个时间变换式便退化为$\tau=t$（**伽利略变换**的时间变换式）。

爱因斯坦论文**《论动体的电动力学》**中的根本性致命性谬误是：

（1）爱因斯坦在时间变换式$\tau_i=\tau(x_i,0,0,t_i)$中给出时间变量赋值τ_i（$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$， $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$），以此形成关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，然后将这

个关系式作为他的基本数学模型

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]。$$

的基础框架。

爱因斯坦的基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\ \tau_0=\tau_0\text{；}\ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}\text{；}\ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}\ ]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~

函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中诸变量对应于各事件的赋值：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

爱因斯坦给出的变量赋值 τ_i（$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$）为《在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’》及变量赋值 t_i（$t_0=t$，$t_1=t+\frac{x'}{V-v}$，$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$）为《**静系（$K$ 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’**》。可以看到，变量 τ 及 t 分别是以 k 系及 K 系为‘静系’进行测度的，这样，在一次观测及坐标变换中两个参考系同被作为了‘静系’，也就是说在一次观测及坐标变换中同时出现了两个观测者，这违背了‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理法则。

（2）爱因斯坦给出的时间变量赋值 τ_i 及 t_i（$i=0,1,2$）为：
~~~~~~

1. 爱因斯坦给出的时间变量赋值 τ_i（$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$）也可以被解读为《‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下静系（$K$系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k系）时刻’》;

2. 爱因斯坦给出的时间变量赋值 t_i（$t_0=t$，$t_1=t+\frac{x'}{V-v}$，$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$）为《‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下静系（$K$系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k系）时刻’》。

可以看到，爱因斯坦在函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中定义的时间变量 τ 及 t 分别对应于互不相容的两种场合[‘两参考系无相对运动（$v=0$）’场合及‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’场合]，把在内涵上互相矛盾的 τ 与 t 同放入函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 是极端荒谬的。

（3）如上所述，‘光速为有限值 V 且两参考系有相对运动 v’场合下 K 系与 k 系之间的时间变换式为 $t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\tau$，故 τ 与 t 必满足关系式 $\Delta t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\Delta\tau$。

但是，在爱因斯坦论文的“动系内闪光反射模型”中，对应于事件 E_0（k系原点发出一道闪光）及事件 E_2（该道闪光返回到 k 系原点）的时间变量赋值分别为（$\tau_0=\tau_0$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$）及（$t_0=t$，$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$），由此可得：

$$\begin{cases}\Delta\tau=\tau_2-\tau_0=\dfrac{2x'}{V}, \\ \Delta t=t_2-t_0=\dfrac{2Vx'}{V^2-v^2}\end{cases}$$

从而得关系式：$$\Delta t=\frac{1}{1-\frac{v^2}{V^2}}\Delta\tau$$

由此关系式可见，爱因斯坦在时间变换式$\tau_i=\tau(x_i,0,0,t_i)$中对应于事件E_0（k**系原点发出一道闪光**）及事件E_2（**该道闪光返回到**k**系原点**）给出的时间变量赋值τ_i、t_i（$i=0,2$）所满足的关系是$\Delta t=\frac{1}{1-\frac{v^2}{V^2}}\Delta\tau$，而不是$\Delta t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\Delta\tau$，其根本原因就是爱因斯坦在时间变换式$\tau_i=\tau(x_i,0,0,t_i)$中给出的时间变量$t_i$不是**"'$K$系观测者观测到事件$E_i$时'之（$K$系）时刻"**：$t_i=\tau_i+\frac{v\tau_i}{V}$。（$i=0,2$）

如果我们将对应于事件E_i（$i=0,2$）的时间变量赋值改换为t_i（$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}$，$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$），立即就可以使对应于事件$E_i$的$\tau_i$与$t_i$（$i=0,2$）满足关系式$t_i=\tau_i+\frac{v\tau_i}{V}$或$\Delta t=\left(1+\frac{v}{V}\right)\Delta\tau$。

综上，爱因斯坦对时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的时间变量τ及t给出了极其混乱的定义，在时间变换式$\tau_i=\tau(x_i,0,0,t_i)$内放入了极端错误的时间变量赋值τ_i与t_i。

笔者认为，时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中等号左边的因变量τ和等号右边的自变量t的**正确的**定义及其赋值应为：

1. 时间变量赋值τ_i应当是**《静系（K系）观测者评估的'事件E_i发生之（k系）时刻'》**（固有时）：$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V-v}$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$；

   而不应是爱因斯坦所采用的**《在k系内独立测度的'事件E_i发生之（k系）**

时刻’》：$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$。

2. 时间变量赋值t_i应当是《‘**静系（K系）观测者观测到事件E_i时**’之（K系）**时刻**》（坐标时）：$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}$，$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}$，$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$；

而不应是爱因斯坦所采用的《**静系（K系）观测者评估的**‘事件E_i发生之（k系）时刻’》：$t_0=t$，$t_1=t+\frac{x'}{V-v}$，$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$。

为了建立正确的‘**光速为有限值且两参考系有相对运动**’场合下的时空坐标变换，创立一个成功的时空理论，完全依赖于正确地解决如何认识‘**时间**’的问题，而解决这个问题的关键则在于解决‘真空中光速为有限值V且两参考系有相对运动v’场合下如何定义不同地点发生事件的‘**同时性**’，即如何对准不同地点的时间的问题。

为了比较不同地点的时间，必须使不同地点的时钟互相对准。为了实现经典力学的伽利略坐标变换的时间变换，需要使用那种(从一点传至另一点勿需花费任何时间的)瞬时传播信号。然而，在自然界至今尚未找到这样的信号。尽管目前已知传播最快的是光信号，而光信号的传播速率仍为有限值。因此，经典力学的伽利略坐标变换所要求的时间变换在物理上是无法实现的。这也是经典力学的致命硬伤。在现实中，人们就只能利用光或电磁波信号‘对钟’，为此就必须对不同地点发生事件的‘**同时性**’作出定义。

直到 1922 年，爱因斯坦总算是已经认识到了上述问题，他在《**相对论的意义**》一书中写道[3]：

《为了测定时间，曾经假定在某处有时计U，相对于K保持静止。然而如果事件到时计的距离不应忽略，就不能用这只时计来确定事件的时刻；因为不存在能用来比较事件时刻和时计时刻的“即时讯号”。为了完成时间的定义，可以使用真空中光速恒定的原理。假定在K系各处放置同样的时计，相对于K系保持静止，并按下列安排校准。当某一时计U_m指着时刻t_m时，从这只时计发出

光线，在真空中通过距离R_{mn}到时计U_n；当光线遇着时计U_n的时刻，使时计U_n对准到时刻$t_n = t_m + \frac{R_{mn}}{V}$，光速（$V$）恒定原理于是断定这样校准时计不会引起矛盾。用这样校准好的时计就能指出发生在任何时计近旁的事件的时刻。》

可是，遗憾的是，爱因斯坦并没有将他的上述想法向前推进，而是就此止步了。实际上，沿着他的上述思路，只要再前进一步就可以推导出正确的时空变换时间变换式。如果真是这样的话，那么他就不得不自己否定他在 1905 年论文**《论动体的电动力学》**中为推导狭义相对论时空变换而建立的那个基本数学模型（参看论文**《论动体的电动力学》**的‘**Ⅰ．运动学部分**’，§3），甚至不得不全盘否定他的**《论动体的电动力学》**论文，回归到重新思考与充实发展牛顿的理论。但是，爱因斯坦最终却没有走出这一步，原因何在，至今不得而知，只能留待世人后代去思索了。

爱因斯坦不但自己误入了歧途而未能自拔，而且还用他的‘狭义相对论’误导了世人长达一百多年。

第四章

“真空中光传播速率为恒定值假设”

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》[1]中将“光速为常值原理”（“The principle of the constancy of the velocity of light”）用文字表述为：

《Each ray of light moves in the coordinate system “at rest” with the definite velocity c independent of whether this ray of light is emitted by a body at rest or a body in motion.》[1]:

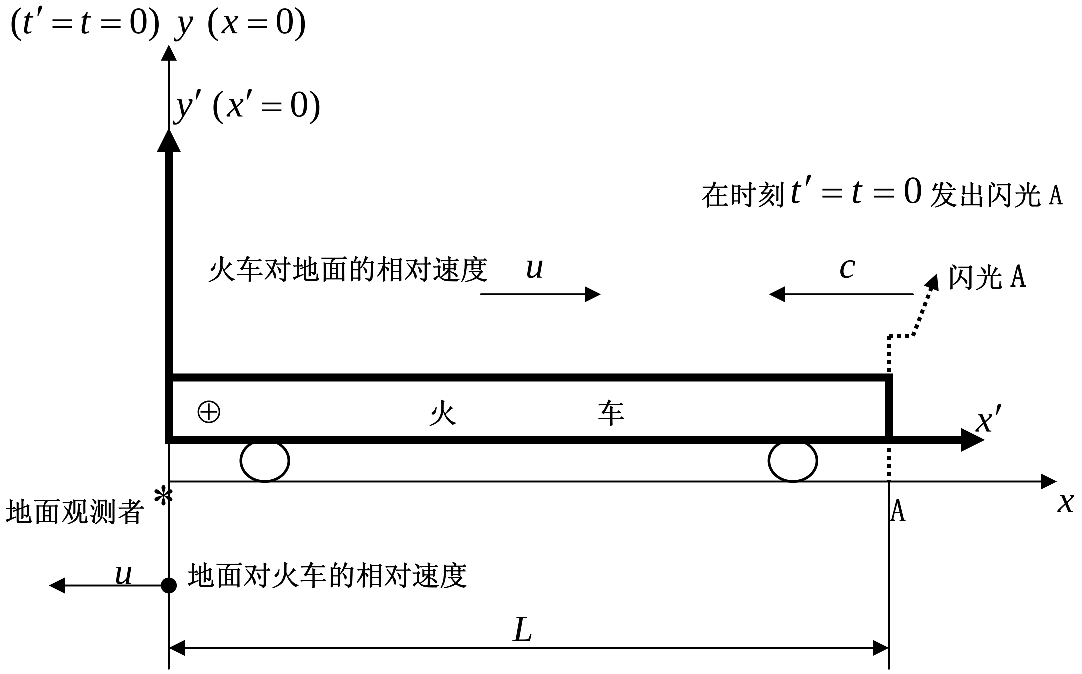
《任何光线在“静止的”坐标系中都是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》[2]

大量的研究与实验表明，光波波前在“静止的”空间内的传播过程具有客观独立性，不受光源及其观测者的状态所影响：光波波前一旦从光源发出，即以发出时刻光源所在地点为中心，作球形传播，在各个方向上以恒定的速度作直线传播，传播速度的大小由空间的性质决定。

笔者将上述“光速为常值原理”（爱因斯坦）改称为“真空中光传播速率为恒定值假设”，并根据爱因斯坦所述上面这段文字的原意修改为：

《物体发射出来的光线在观测者看来都是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》

下面我们用“火车—地基”相对运动思维实验来诠释上述“真空中光传播速率为恒定值假设”。



（⊕—车上观测者；c—真空中光速）

图 4-1

设：在时刻$t'=t=0$，y轴$(x=0)$与y'轴$(x'=0)$相重合，这时，在x (x')轴上 A 点发出一道闪光。

（a）**从地面观测者 * 看：闪光** A 是在‘地面上的’A **点**发出并以真空中光速c迎面传来的，所以他见到**闪光** A 的时刻是$0+\dfrac{L}{c}=\dfrac{L}{c}$，而车上观测者⊕随火车向前运动（即相对于地面观测者 * 以速度u向前运动），故车上观测者⊕见到**闪光** A 的时刻是$0+\dfrac{L}{c+u}=\dfrac{L}{c+u}$。分母中的$c+u$为（地面观测者 * 评估的）‘**闪光** A 对车上观测者⊕的接近速度’，在数值上它等于‘**闪光** A 对地面观测者 * 的速度c（矢量）’减去‘车上观测者⊕对地面观测者 * 的速度u（矢量）’所得之差（矢量）的模。

（b）**从车上观测者⊕看：闪光** A 是在‘火车上的’A **点**发出并以真空中光速c迎面传来的，所以他见到**闪光** A 的时刻是$0+\dfrac{L}{c}=\dfrac{L}{c}$，而地面观测者 * 随地面向

后退离（即相对于车上观测者⊕以速度u向后退离），故地面观测者＊见到**闪光**A的时刻是$0+\dfrac{L}{c-u}=\dfrac{L}{c-u}$。分母中的$c-u$为（车上观测者⊕评估的）‘**闪光**A对地面观测者＊的接近速度’，在数值上它等于‘**闪光**A对车上观测者⊕的速度c（矢量）’减去‘地面观测者＊对车上观测者⊕的速度u（矢量）’所得之差（矢量）的模。

由此可见，尽管地面观测者＊与车上观测者⊕处在相对运动之中，但因为他们各自都作为对光信号的观测者（光信号的接受者），总认为光源（事件）与自己随时随刻都静止在同一个参考系内，所以在他们看来，**闪光**A总是以真空中光速c向自己传来。然而，在评估与自己有（速度为$\pm u$的）相对运动的别个观测者见到闪光的时刻时，就应当计及这个相对速度（$\pm u$）了。

在‘光速为有限值c’的情况下，时空坐标变换方程组中就有两个参数—参考系相对速度u及真空中光速c。在这种场合下，时空坐标变换方程组就是：

$$\begin{cases} x'=x'(x,y,z,t,u,c) \\ y'=y'(x,y,z,t,u,c) \\ z'=z'(x,y,z,t,u,c) \\ t'=t'(x,y,z,t,u,c) \end{cases}$$

式中：c—真空中光速；

u—参考系相对速度。

真空中光速c和参考系之间的相对速度u这两个‘速度参数’，是与x,y,z,t及x',y',z',t'共存于同一个时空坐标变换方程组的参数，它们显然应当是无条件地被两个参考系都‘接纳’的‘共用’的参数。这给于我们一个重要暗示：对于一个正确的时空坐标变换，‘速度的模’必须是变换下的不变量。因此，为了使推导出的时空坐标变换具有这一性质，在推导时空坐标变换式时我们不妨引入**“真空中光传播速率为恒定值假设”**，也就是说在推导过程中实际运用

这一前提条件。如果在这一前提下得出的时空坐标变换果真使得在此变换下‘速度的模’是一个不变量，那么就证明了**“真空中光传播速率为恒定值假设”**确实是一个逻辑自洽的可以接受的‘公设’。

第五章

时空坐标变换满足“相对性原理”的充分必要条件

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

建立科学理论，其目的都是为了认识客观事物的自然规律。这种理论必须使不同的观测者在各自的参考系内都能观测到相同的物理规律，这样的物理理论才具有实际价值。

“相对性原理”（the principle of relativity）通常表述为：
《物理体系的状态据以变化的定律，同描述这些状态变化时所参照的坐标系究竟是用两个在互相匀速移动着的坐标系中的哪一个并无关系。》[2]

“表述客观物理定律的数学方程在互作匀速直线平移相对运动的各参考系内具有完全相同的形式”，即通常所称的**“相对性原理”**，对于我们探索与认识客观事物的自然规律具有特别重要的意义。这里应当指出，**“相对性原理”**所要求的是‘物理定律的数学方程’在各参考系内保持有相同的**‘形式’**，而并不要求数学方程所描述的客观事物在各参考系内表现为相同的**‘规模’，因此“相对性原理”实际上应当准确地称为“相似性原理”**（the principle of similarity）。各种各样的物理模拟实验，如飞机及导弹的风洞空气动力实验、水利系统的室内模拟实验等等，就是依据**“相似性原理”**进行设计的。

为了推导出时空坐标变换的数学表达式，就必须在数学推导过程中实际运用**“相对性原理”**，为此我们必须运用数学语言来表述**“相对性原理”**，找到时空坐标变换方程组满足**“相对性原理”**的充分必要条件，并将此条件引入数学推导之中，以确定时空坐标变换方程组中的各项系数。

下面我们就来讨论时空坐标变换方程组满足**“相对性原理”**的充分必要条件。

现有时间变换式 $t' = A \bullet x + C \bullet t$ 与空间变换式 $x' = B \bullet (x - ut)$ 组成的时空坐标变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B \bullet (x - ut) \\ t' = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

式中u为参考系相对速度。

这个联立方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = B \bullet x - Bu \bullet t \\ t' = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

联立方程组的矩阵T为：

$$T = \begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{vmatrix}$$

矩阵T为可逆矩阵，故必有$\det T = BC + ABu \neq 0$。这时，必存在方程组的逆矩阵T_{inv}：

$$T_{inv} = \frac{1}{\det T} \bullet \{diag(-1,+1) \times T \times diag(-1,+1)\}$$

即：

$$T_{inv} = \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{vmatrix}$$

容易验证，联立方程组的矩阵T与逆矩阵T_{inv}总能够满足以下恒等式：

$$T \times T_{inv} = \begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{vmatrix} \times \frac{1}{\det T} \begin{vmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即：

$$T \times T_{inv} = \begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & C \end{vmatrix} \times \frac{1}{BC + ABu} \begin{vmatrix} C & Bu \\ -A & B \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

在上式中，将C替换为B，上面这个恒等式仍然成立，即：

$$\begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{vmatrix} \times \frac{1}{B^2 + ABu} \begin{vmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

现设：某个时空坐标变换方程组为：

$$\begin{cases} x' = B \bullet (x - ut) \\ t' = A \bullet x + B \bullet t \end{cases}$$

方程组的变换矩阵为$[T]=\begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{vmatrix}$， 式中：$\det[T]=B^2+ABu\neq 0$；

逆变换矩阵为$[T]_{inv}=\dfrac{1}{\det[T]}\begin{vmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{vmatrix}$

显然，这个时空坐标变换方程组具有以下两项性质：

（a） 变换矩阵$[T]=\begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{vmatrix}$与逆变换矩阵$[T]_{inv}=\dfrac{1}{\det[T]}\begin{vmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{vmatrix}$

满足恒等式： $[T]\times[T]_{inv}\equiv\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

（b） 变换矩阵$[T]=\begin{vmatrix} B & -Bu \\ A & B \end{vmatrix}$与逆变换矩阵$[T]_{inv}=\dfrac{1}{\det[T]}\begin{vmatrix} B & Bu \\ -A & B \end{vmatrix}$

具有相同的张量形式。

我们说，具有以上（a）、（b）两项性质的时空坐标变换方程组

$$\begin{cases} x'=B\bullet(x-ut) \\ t'=A\bullet x+B\bullet t \end{cases}$$

满足**“相对性原理”** 。

由此可得：时间变换式$t'=A\bullet x+C\bullet t$与空间变换式$x'=B\bullet(x-ut)$组成的时空坐标变换方程组

$$\begin{cases} x'=B\bullet(x-ut) \\ t'=A\bullet x+C\bullet t \end{cases}$$

满足**“相对性原理”** 之充分必要条件可表为如下联立方程组：

$$\boxed{\begin{aligned} &B=C \\ &BC+ABu=k\neq 0 \end{aligned}}$$

因为并不要求$k\ (k\neq 0)$等于1，所以**“相对性原理”**也可以称为**“相似性原理”**。

由于$k\ (k\neq 0)$可以是任何实数，所以必须利用**“相对性原理”**以外的其它条件给出数值$k\ (k\neq 0)$及A（或B，或C），才能够确定时空坐标变换方程组

$$\begin{cases} x' = B \bullet (x - ut) \\ t' = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

中的各项系数。

对于具有如下特殊形式（**时间变换式中不含‘x’项**）的时空坐标变换方程组：

$$\begin{cases} x' = B \bullet (x - ut) \\ t' = C \bullet t \end{cases}$$

“相对性原理”（**“相似性原理”**）的充分必要条件则很简单，就只有：

$$\boxed{B = C}$$

在此种情况下，我们只要采用在物理上正确的合理的数学模型推导出时间变换式$t' = C \bullet t$，即可惟一地确定时空坐标变换方程组：

$$\begin{cases} x' = C \bullet (x - ut) \\ t' = C \bullet t \end{cases}$$

可以看出，这是一个**“伽利略型”**的时空坐标变换方程组。

容易证明：任何的**“伽利略型”**的时空坐标变换方程组：

$$\begin{cases} x' = C \bullet (x - ut) \\ t' = C \bullet t \end{cases}$$

（式中$C > 0$，但不一定等于 1）

都满足**“相对性原理”**（**“相似性原理”**）。

记：$\dfrac{x'}{C} = X'$及$\dfrac{t'}{C} = T'$，则上面的**“伽利略型”**时空变换方程组就变成：

$$\begin{cases} X' = x - ut \\ T' = t \end{cases}$$

这就是（经典的）**伽利略变换**，它满足**“相对性原理”**（**“相似性原理”**）。

第六章

“爱因斯坦变换”—“洛伦兹变换数学式”

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k 系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

1905 年，爱因斯坦在狭义相对论奠基性论文**《论动体的电动力学》** 的‘I．**运动学部分**’，§3 [1]中，采用（动系内）关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$作为基础框架，建立了他的基本数学模型，企图通过求解偏微分方程，来推导出时空坐标变换的时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$。可是，十分遗憾的是，爱因斯坦在论文中：

（1）采用（动系内）关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$作为基础框架，建立了如下荒谬的基本数学模型：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

企图通过求解偏微分方程来推导出时空变换的时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$。

（V— 真空中光速；v— 参考系相对速度）

爱因斯坦在对时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x进行赋值时**‘不按规则出牌’，违背‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理法则，十分混乱地定义了时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x及它们的赋值，**致使在一次观测及坐标变换中互作相对运动的两个参考系同时被设为了‘静系’，也就是说在一次观测及坐标变换中**同时有两个观测者，各自孤立地对同一事件进行测度**。这违背了‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理规则，因此爱因斯坦得出的那个函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$不仅不能是物理意义上真正的时间变换式，而且它根本就没有任何的物理意义，而只能是一个**‘伪时间变换式’**。

（2）在推导微分方程时，将函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量x错误地视为变量x'。

其实 x' 并不是一个变量，而是变量 x 对应于事件 E_1 的赋值，是一个既定数值（常数值）。然而，爱因斯坦却错误地把 x' 作为变量，并‘取 x' 为无限小’［2］。不仅如此，爱因斯坦还把 x' 定义为 $x' = x - vt$，这实际上是不合理地掺入了伽利略变换的关系式 $x' = x - vt$，这是逻辑谬误。

（3）设计了一个错误的**“动系内闪光反射模型”**来推导时间变换式，因而人为地限制了所导出的坐标变换只能适用于低于光速（$v < V$）的相对运动。

由于混乱不堪地定义了时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 中的变量 τ、t、x，爱因斯坦推导出的函数 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 根本就不具有任何的物理意义，更不是时空坐标变换的时间变换式，而只能是一个**‘伪时间变换式’**。

本章中，笔者将爱因斯坦论文**《论动体的电动力学》**中所得出的偏微分方程的解 $\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)$ 接过来，往下进行推导：

（1）将爱因斯坦定义的关系式 $x' = x - vt$ 代入函数 $\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)$，得到函数 $\tau = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{V^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$，式中 a 为待定系数。由于爱因斯坦对时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 中的变量 τ、t、x 所给出的定义以及这些变量对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的赋值都是极端荒谬的，所以得出的函数 $\tau = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{V^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$ 并不是一个真正的时空坐标变换的时间变换式，而只能是一个**‘伪时间变换式’**；

（2）将**‘伪时间变换式’** $\tau = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{V^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$ 与**空间变换式** $\xi = B(x - vt)$ 组成联立方程组，运用**“相对性原理”**，确定方程组中的待定系数 a 和 B；

（3）引入**“光传播方程不变原理”**：$\{x^2 = V^2 t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2 \tau^2\}$，最终得出

了与荷兰物理学家洛伦兹在爱因斯坦之前依据经验提出的那个**洛伦兹变换**相同的数学式，我们把后者特称为**“爱因斯坦变换”**或**“洛伦兹变换数学式”**，以便与洛伦兹的**洛伦兹变换**相区别。

（一）‘伪时间变换式’

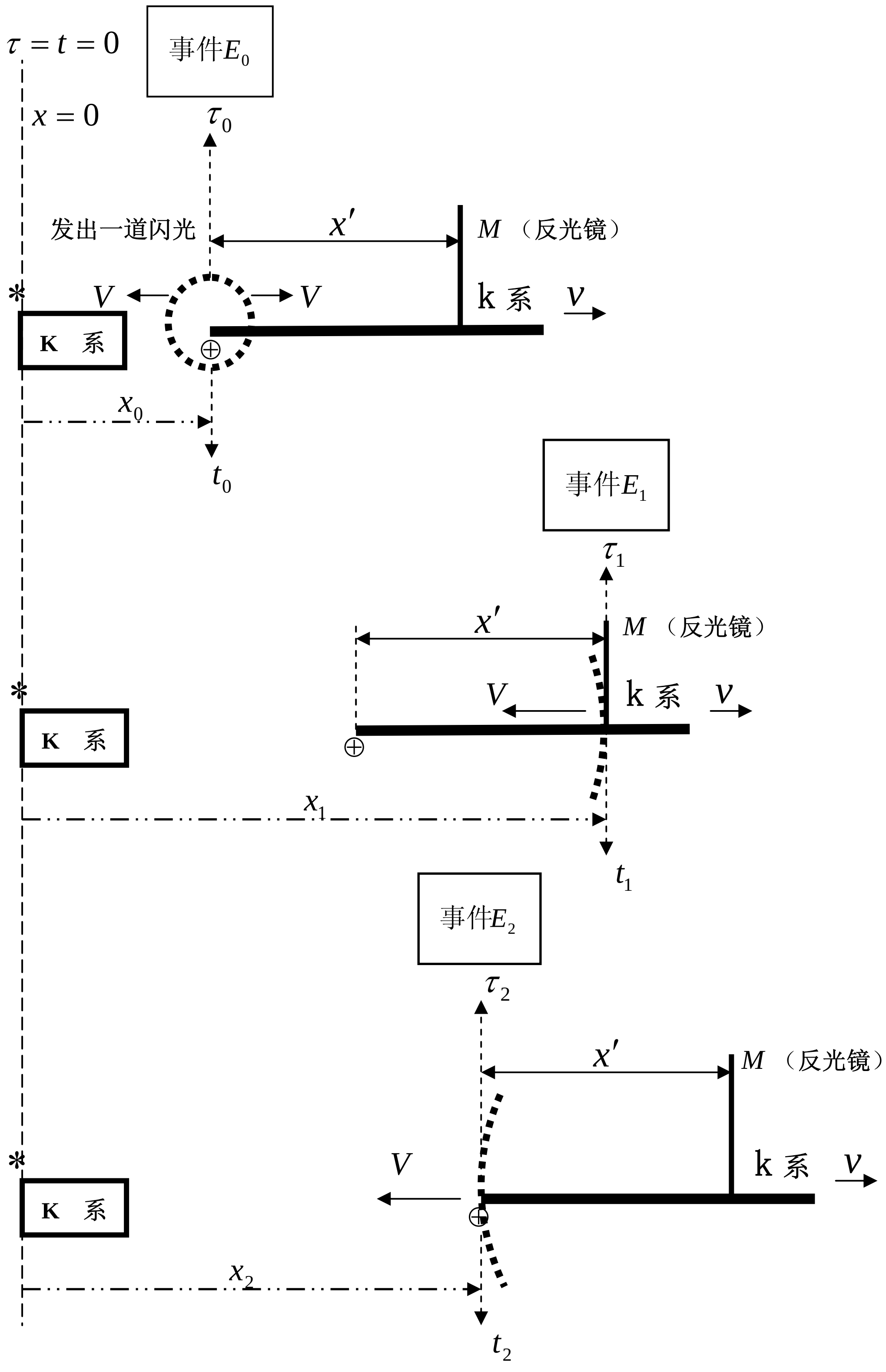
1905 年爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》**的‘**I．运动学部分**’，§3 中设计了一个**“动系内闪光反射模型”**：《 From the origin of system k let a ray be emitted at the time τ_0 along the X-axis to x', and at the time τ_1 be reflected thence to the origin of the co-ordinates, arriving there at the time τ_2；》 [1]，即：**《从 k 系的原点在时间 τ_0 发射一道光线，沿着 X 轴射向 x'，在 τ_1 时从那里反射回坐标系的原点，而在 τ_2 时到达；……** 》[2]。

参看**图 2-1**。设有两个参考系：参考系 K 和参考系 k。参考系 K 简称‘K 系’；参考系 k 简称‘k 系’。

参看**图 2-1**。K 系的 x 轴上有一根具有任意长度的刚性杆。杆子（k 系）沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动，相对速度为 v。在 K 系原点（$x=0$）有一个观测者 *（*—K 系观测者）；在 k 系原点（$\xi=0$）有一个观测者⊕（⊕—k 系观测者）。**图 2-1** 中，将 K 系设为静系。

设：K 系和 k 系各配有时钟，在时刻 $\tau=t=0$，k 系观测者⊕（$\xi=0$）恰好经过 K 系观测者 *（$x=0$），这时两参考系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在时刻 $\tau=\tau_0$，**‘k 系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’**（事件 E_0）；经过一段时间，**‘闪光到达杆子 $\xi=x'$ 处反光镜，向 k 系原点（$\xi=0$）反射回去’**（事件 E_1）；再经过一段时间，**‘闪光返回到 k 系原点（$\xi=0$）’**（事件 E_2）。



⊕—k 系观测者；* —K 系观测者；V— 真空中光速；v— 相对速度

图 2-1

1905 年爱因斯坦在狭义相对论奠基性论文《**论动体的电动力学**》中采用（k 系内）关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ 作为基础框架，建立了以下基本数学模型[1]：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

企图通过求解函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 的偏微分方程，来推导出时空变换的时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$。爱因斯坦的基本数学模型的构成示于以下框内。

[$\tau_0=\tau_0$； $\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$； $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$]

$$\Downarrow$$

数学模型框架： $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~

$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ **中函数** $\tau=\tau(x,0,0,t)$ **的赋值** τ_i：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

现将爱因斯坦在狭义相对论理论源头上的根本性、原则性、全局性、致命性的谬误示于下面诸表内：
~~~~~~

表 2-1：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的变量τ 的赋值τ_i

爱因斯坦的错误的定义	在k系内独立测度的‘事件E_i发生之（k系）时刻’ τ_i
事件E_0	$\tau_0=\tau_0$
事件E_1	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$
事件E_2	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$

表 2-2：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的变量t的赋值t_i

爱因斯坦的错误的定义	静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’ t_i
事件E_0	$t_0=t$
事件E_1	$t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$
事件E_2	$t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$

表 2-3：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的变量x的赋值x_i

爱因斯坦的错误的定义	‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’事件E_i之（K系）位置 x_i
事件E_0	$x_0=0$
事件E_1	$x_1=x'$
事件E_2	$x_2=0$

函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中变量 τ 、t 、x 对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的赋值 τ_i 、t_i、x_i 列于表 6-1。

表 6-1

变 量	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
τ_i	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$
t_i	$t_0=t$	$t_1=t+\frac{x'}{V-v}$	$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$
x_i	$x_0=0$	$x_1=x'$	$x_2=0$

从表中所列变量 τ 、t 、x 的赋值 τ_i 、t_i 、x_i 可以看出，$x_1=x'$ 是变量 x 对应于事件 E_1 的赋值，是一个既定数值（常数值），因此 x' 并不是一个‘变量’，而爱因斯坦却错误地把它指定为一个‘变量’，并‘取 x' 为无限小’[2]，从而得到微分方程：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

关于爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》的‘I．运动学部分’，§3 中如何推导出偏微分方程 $\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$ [1]，爱因斯坦并未给出推导过程的细节。下面，笔者就来补上这一推导过程：

爱因斯坦把 x' 指定为‘变量’并定义：$x'=x-vt$ ，然后‘取 x' 为无限小’[2]。于是，可将：

$$\tau_1=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right] \text{及} \tau_2=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

在 $\tau_0=\tau(0,0,0,t)$ 处展开为泰勒级数，并舍弃泰勒级数中二阶以上的（偏）导数项，由此得：

（a）$\tau_1=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]=\tau\left[(0+x'),0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}\right\}\right]$

$$\approx \tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial x'}\bullet x'+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

（b） $\tau_2=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$

$$\approx \tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right)$$

将 $\tau_0=\tau(0,0,0,t)$， $\tau_1\approx \tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial x'}\bullet x'+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}\right)$ 及

$\tau_2\approx \tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right)$ 代入关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，得：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\left\{\tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right)\right\}\right]$$

$$=\tau(0,0,0,t)+\frac{\partial \tau}{\partial x'}\bullet x'+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\frac{Vx'}{V^2-v^2}=\frac{\partial \tau}{\partial x'}\bullet x'+\frac{\partial \tau}{\partial t}\bullet\frac{x'}{V-v}$$

约去等号两边的 x'，得：

$$\frac{V}{V^2-v^2}\bullet\frac{\partial \tau}{\partial t}=\frac{\partial \tau}{\partial x'}+\frac{1}{V-v}\bullet\frac{\partial \tau}{\partial t}$$

经整理后，即得出爱因斯坦论文《论动体的电动力学》的‘I ． 运动学部分’，§3 中的那个偏微分方程：

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'}+\frac{v}{V^2-v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t}=0$$

解这个微分方程，可得通解[1]：

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x'\right)$$

式中 a 为任意常数。

[笔者对爱因斯坦论文的补充推导至此完毕]

爱因斯坦将原本是变量赋值的 x' 错误地指定为‘变量’，然后‘取 x' 为无限

小’，才得到了上面这个微分方程，因此它已经是一个错误的微分方程。

爱因斯坦在得出函数$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)$之后所作的那样的‘推导’则简直是杂乱凑合，逻辑混乱。实际上，爱因斯坦所作的那样的‘推导’，是得不出**洛伦兹变换**的数学式的！！

下面，我们就从爱因斯坦得出的上面那个函数$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x'\right)$，（$a$为任意常数）出发，接着往下进行推导，看看将得出怎样的结果。

按照爱因斯坦对变量x'的定义：$x' = x - vt$ **[** 实际上，爱因斯坦在这里不合理地掺入了**伽利略变换**的关系式$x' = x - vt$ **]**，将$x' = x - vt$代入上式，可得：

$$\tau = a\left[t - \frac{v}{V^2 - v^2}(x - vt)\right] = a\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}x + \frac{v^2}{V^2 - v^2}t\right)$$
$$= a\left(\frac{V^2}{V^2 - v^2}t - \frac{v}{V^2 - v^2}x\right) = a\frac{V^2}{V^2 - v^2}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

即：

$$\boxed{\tau = \frac{a}{1 - \frac{v^2}{V^2}}\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)}$$

a— 待定系数

上面已指出，这是一个**‘伪时间变换式’**。

参看图 2-1，在爱因斯坦论文《**论动体的电动力学**》中的那个**“动系内闪光反射模型”**中，如果相对速度为$v \geq V$，则事件E_1（**‘闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去’**）将不可能发生，因而事件E_2也不会发生了。因此，爱因斯坦设计的这个**“动系内闪光反射模型”**[1]乃是一个错误的物理模型，它对函数$\tau = \tau(x,0,0,t)$人为地引入了一个限制条件：$v < V$。

（二）空间变换式

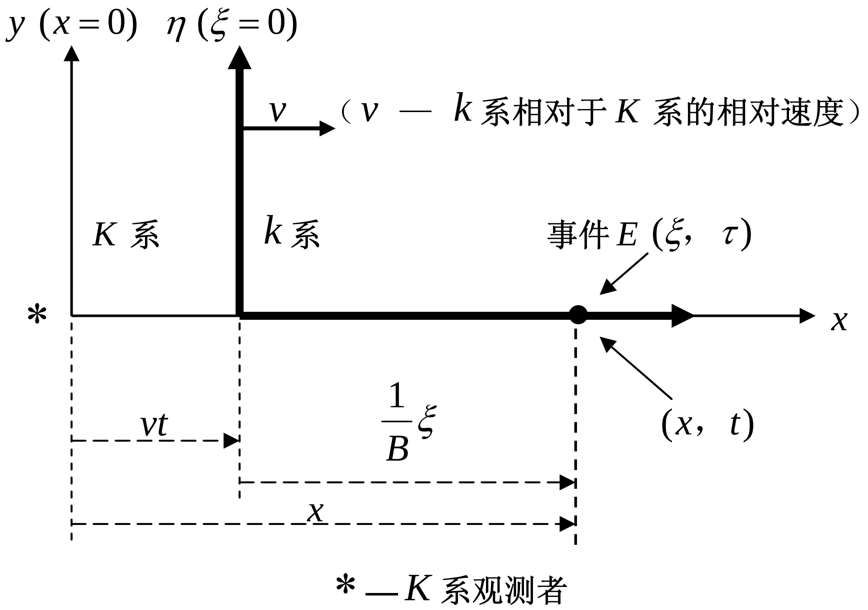


图 6-1　k 系相对于 K 系作匀速直线平移运动

由图 6-1 可知：

$$x=\frac{1}{B}\xi+vt$$

从而得时空变换的空间变换式：

$$\boxed{\begin{array}{l}\xi=B(x-vt)\\ B\text{— 待定系数}\end{array}}$$

（三）“爱因斯坦变换”

我们将‘伪时间变换式’$\tau=\dfrac{a}{1-\dfrac{v^2}{V^2}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)$与空间变换式$\xi=B(x-vt)$

组成的联立方程组：

$$\begin{cases}\xi=B(x-vt)\\ \tau=\dfrac{a}{1-\dfrac{v^2}{V^2}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

式中 B 、a 均为待定系数。

方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = -\dfrac{av}{V^2 - v^2} \bullet x + \dfrac{aV^2}{V^2 - v^2} \bullet t \end{cases}$$

将此方程组与下面标准的变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数 $A = -\dfrac{av}{V^2 - v^2}$ 及系数 $C = \dfrac{aV^2}{V^2 - v^2}$ 。

将系数 $A = -\dfrac{av}{V^2 - v^2}$ 及系数 $C = \dfrac{aV^2}{V^2 - v^2}$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”** 之充分必要条件：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

即：

$$C^2 + ACv = k \neq 0$$

我们取 $k > 0$，得：

$$\left(\frac{aV^2}{V^2 - v^2} \right)^2 - \frac{av}{V^2 - v^2} \times \frac{aV^2}{V^2 - v^2} \times v = k > 0$$

在 $v < V$ 场合下，得：

$$a = k^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

式中 $k(> 0)$ 可以为任意的实数值。

将 $a = k^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{V^2}}$ 代入下式：

$$A=-\frac{av}{V^2-v^2}=-\frac{v}{V^2}\frac{a}{1-\frac{v^2}{V^2}}=-\frac{v}{V^2}\frac{k^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}{1-\frac{v^2}{V^2}}=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将 $a=k^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}$ 代入下式：

$$C=\frac{aV^2}{V^2-v^2}=\frac{a}{1-\frac{v^2}{V^2}}=\frac{k^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}{1-\frac{v^2}{V^2}}=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

故得：

$$B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将 $A=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 及 $B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 代入标准的变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet(x-vt)\\ \tau=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet x+k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet t\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}} (x - vt) \\ \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}} \left(t - \dfrac{v}{V^2} x \right) \end{cases}$$

（$k > 0$）

爱因斯坦的基本数学模型：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left[0,0,0,\left\{t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right] = \tau\left[x',0,0,t + \frac{x'}{V-v}\right]$$

的框架是（k 系内）关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$，式中的 τ_0、τ_1、τ_2 为函数 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的三个赋值：

$$\tau_0 = \tau_0\text{，}\quad \tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}\text{，}\quad \tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$$

将这三个式子联立起来，即可得出关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$，然而由于光速 V 已被消除掉，所以这个关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$ 并不能确定就是用光信号来进行双向对钟的!!

所以，我们引入 **“光传播方程不变原理”**：$\{x^2 = V^2 t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2 \tau^2\}$，来确定 $k\ (>0)$ 的数值。

变换方程组为

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

（$k>0$）

（A）记 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}=\gamma$ 。将变换方程组

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

代入 k 系度量的光传播方程 $\xi^2=V^2\tau^2$, 得:

$$k\gamma^2(x-vt)^2=V^2k\gamma^2\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)^2$$

从而得：

$$x^2=V^2k\gamma^2\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)^2-k\gamma^2(x-vt)^2+x^2$$

$$=V^2k\gamma^2t^2-2tvxk\gamma^2+\frac{k\gamma^2v^2}{V^2}x^2-k\gamma^2x^2+2tvxk\gamma^2-k\gamma^2v^2t^2+x^2$$

$$=k\gamma^2t^2\left(V^2-v^2\right)+k\gamma^2x^2\left(\frac{v^2}{V^2}-1\right)+x^2$$

$$=k\gamma^2t^2\frac{V^2}{\gamma^2}+k\gamma^2x^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)+x^2$$

$$=kV^2t^2+(1-k)x^2$$

当 $k=1$ 时有 $x^2=V^2t^2$ 。

（B）求变换方程组

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(x - vt\right) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t - \dfrac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

的‘逆’变换方程组：

将变换方程组写成

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma \bullet x - k^{\frac{1}{2}}\gamma v \bullet t \\ \tau = -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} \bullet x + k^{\frac{1}{2}}\gamma \bullet t \end{cases}$$

解方程组，得‘逆’变换方程组：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} \xi & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ \tau & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\xi + v\tau) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi + v\tau) \\ t = \dfrac{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & \xi \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & \tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1 - \dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

将‘逆’变换方程组

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi + v\tau) \\ t = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

代入 K 系度量的光传播方程 $x^2=V^2t^2$, 得:

$$\frac{\gamma^2}{k}(\xi+v\tau)^2=V^2\frac{\gamma^2}{k}\left(\tau+\frac{v}{V^2}\xi\right)^2$$

从而得: $$\xi^2=V^2\frac{\gamma^2}{k}\left(\tau+\frac{v}{V^2}\xi\right)^2-\frac{\gamma^2}{k}(\xi+v\tau)^2+\xi^2$$

$$=V^2\frac{\gamma^2}{k}\tau^2+2\tau v\xi\frac{\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{k}\frac{v^2}{V^2}\xi^2-\frac{\gamma^2}{k}\xi^2-2\tau v\xi\frac{\gamma^2}{k}-\frac{\gamma^2}{k}v^2\tau^2+\xi^2$$

$$=\frac{\gamma^2}{k}\tau^2\left(V^2-v^2\right)+\frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(\frac{v^2}{V^2}-1\right)+\xi^2$$

$$=\frac{\gamma^2}{k}\tau^2\frac{V^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)+\xi^2$$

$$=\frac{1}{k}V^2\tau^2+\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi^2$$

当 $k=1$ 时有 $\xi^2=V^2\tau^2$ 。

综上可得：$\{x^2=V^2t^2\}$ $\Leftrightarrow$ $\{\xi^2=V^2\tau^2\}$，即：当且仅当 $k=1$ 时，变换方程组

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex] \tau=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$）

满足**“光传播方程不变原理”**。

上面这个方程组就变成在数学形式上与荷兰物理学家洛伦兹提出的那个**洛伦兹变换**完全相同的变换方程组：

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x - vt) \\ \tau = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t - \dfrac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

这样，我们得到了满足两条基本原理（**“相对性原理”**和**“光传播方程不变原理”**）的惟一的变换方程组 — 与**洛伦兹变换**有相同数学形式的方程组，我们把它特称为**“爱因斯坦变换”**，或**“洛伦兹变换数学式”**，以便与荷兰物理学家洛伦兹在爱因斯坦之前依据经验提出的那个**洛伦兹变换**相区别。

真可谓‘歪打正着’，最终得到了与**洛伦兹变换**有相同数学式的变换方程组。尽管如此，这个**“爱因斯坦变换”**毕竟是从一个没有任何物理意义的彻底谬误的**‘伪时间变换式’** $\tau = \dfrac{a}{1-\dfrac{v^2}{V^2}}\left(t - \dfrac{v}{V^2}x\right)$ 推导出来的，所以**“爱因斯坦变换”**根本就不是一个真正的参考系时空坐标变换式。

上面，为了使光与电磁波动传播规律对推导出的时空变换具有不变性，我们在数学推导中取了 $k=1$，即人为地引入了**“光传播方程不变原理”** $\{x^2 = V^2 t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2 \tau^2\}$ 这一前提条件，才惟一地得出了这个**“洛伦兹变换数学式”**。因此**“光传播方程不变原理”** $\{x^2 = V^2 t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2 \tau^2\}$ 是**“洛伦兹变换数学式”**得以成立的充要条件。由此可见，**“洛伦兹变换数学式”**只不过是一个**‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参考系内保持相同’**的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

物理上荒谬的“爱因斯坦变换”的导出过程

数学模型框架	（k 系内）关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$
伪时间变换式	$\tau=\frac{a}{1-\frac{v^2}{V^2}}\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)$　（a — 待定系数）
空 间变换式	$\xi=B(x-vt)$　（B — 待定系数 ）
	运用“相对性原理”，确定系数 a 和 B
爱因斯坦变换式	运用“光传播方程不变原理”：$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$ 惟一地确定“爱因斯坦变换” $\begin{cases}\xi=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\ \tau=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$ $(v<V)$
	V — 真空中光速；v — 相对速度

第七章

“洛伦兹变换数学式”的又一种推导

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

我们在前面指出，在‘光速为有限值’场合下，时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中时刻τ与时刻t是对应于事件的**‘同时刻’**，其定义式为$t=\tau+\dfrac{x}{V}$。为了指出相对运动中的**‘当地时间’**，洛伦兹引入了一个因子v/V，与式中x/V项相乘，使得时刻τ与时刻t为**‘同时刻’**之定义式变为$t=\tau+\dfrac{x}{V}\bullet\dfrac{v}{V}$。这样才能够满足“两参考系无相对运动（$v=0$）的场合下$t\equiv\tau$” 之要求。

这样，时刻τ与时刻t为**‘同时’**之定义条件就从$t=\tau+\dfrac{x}{V}$变为$t=\tau+\dfrac{x}{V}\bullet\dfrac{v}{V}=\tau+\dfrac{v}{V^2}x$，即得：$\tau=t-\dfrac{v}{V^2}x$。

下面我们证明，只要时间变换式的形式为$\tau=\varphi(v)\bullet\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)$，$\varphi(v)$为任意的实函数，就可以从它惟一地推导出**“洛伦兹变换数学式”**。

设：时间变换式为：

$$\tau=\varphi(v)\bullet\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)$$

式中：$\varphi(v)$为任意的实函数，$\varphi(v)\neq 0$；

V—真空中光速；

v—参考系相对速度。

将时间变换式$\tau=\varphi(v)\bullet\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)$与空间变换式$\xi=B\bullet(x-vt)$组成待求的变换方程组：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = \varphi(v) \bullet \left(t - \dfrac{v}{V^2} x\right) \end{cases}$$

式中：B 为待定系数；实函数 $\varphi(v) \neq 0$ 。

方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = -\dfrac{v}{V^2} \varphi(v) \bullet x + \varphi(v) \bullet t \end{cases}$$

将此方程组与下面的标准方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数 $A = -\dfrac{v}{V^2} \varphi(v)$ 及系数 $C = \varphi(v)$

将系数 $A = -\dfrac{v}{V^2} \varphi(v)$ 及系数 $C = \varphi(v)$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”**之充分必要条件：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

即：$$C^2 + ACv = k \neq 0$$

我们取 $k > 0$，得：

$$[\varphi(v)]^2 - \frac{v}{V^2} \varphi(v) \times \varphi(v) \times v = k > 0$$

$$[\varphi(v)]^2 - \frac{v^2}{V^2} [\varphi(v)]^2 = k > 0$$

在 $v < V$ 场合下，得：

$$\varphi(v)=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

式中$k(>0)$可以取任意的实数值。

将$\varphi(v)=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$代入$A=-\frac{v}{V^2}\varphi(v)$，得：

$$A=-\frac{v}{V^2}\varphi(v)=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将$\varphi(v)=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$代入$C=\varphi(v)$，得：

$$C=\varphi(v)=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

故得：

$$B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将$A=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 及 $B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$代入变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\xi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet(x-vt)$$

$$\tau = -\frac{v}{V^2} k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} \bullet x + k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} \bullet t$$

即：

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} (x - vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \end{cases}$$

（$k > 0$）

我们引入 **“光传播方程不变原理”**：$\{x^2 = V^2 t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2 \tau^2\}$，以确定 $k\ (>0)$ 的数值。

变换方程组为

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} (x - vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} \left(t - \frac{v}{V^2} x \right) \end{cases}$$

（$k > 0$）

（A） 记 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} = \gamma$ 。将变换方程组

$$\xi = k^{\frac{1}{2}} \gamma (x - vt)$$

$$\tau = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$$

代入k系度量的光传播方程$\xi^2 = V^2\tau^2$，得:

$$k\gamma^2(x - vt)^2 = V^2 k\gamma^2\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)^2$$

从而得: $$x^2 = V^2 k\gamma^2\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)^2 - k\gamma^2(x - vt)^2 + x^2$$

$$= V^2 k\gamma^2 t^2 - 2tvxk\gamma^2 + \frac{k\gamma^2 v^2}{V^2}x^2 - k\gamma^2 x^2 + 2tvxk\gamma^2 - k\gamma^2 v^2 t^2 + x^2$$

$$= k\gamma^2 t^2\left(V^2 - v^2\right) + k\gamma^2 x^2\left(\frac{v^2}{V^2} - 1\right) + x^2$$

$$= k\gamma^2 t^2\frac{V^2}{\gamma^2} + k\gamma^2 x^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) + x^2$$

$$= kV^2 t^2 + (1 - k)x^2$$

当$k = 1$时有$x^2 = V^2 t^2$。

（B）求变换方程组

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma(x - vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t - \frac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

的‘逆’变换方程组：

将变换方程组写成

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma \bullet x - k^{\frac{1}{2}}\gamma v \bullet t \\ \tau = -k^{\frac{1}{2}}\gamma\frac{v}{V^2} \bullet x + k^{\frac{1}{2}}\gamma \bullet t \end{cases}$$

解方程组，得‘逆’变换方程组：

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} \xi & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ \tau & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1-\dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\xi + v\tau) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi + v\tau) \\ t = \dfrac{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & \xi \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & \tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1-\dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

将‘逆’变换方程组

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi + v\tau) \\ t = \dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau + \dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

代入 K 系度量的光传播方程 $x^2 = V^2 t^2$，得:

$$\frac{\gamma^2}{k}(\xi + v\tau)^2 = V^2 \frac{\gamma^2}{k}\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right)^2$$

从而得: $$\xi^2 = V^2 \frac{\gamma^2}{k}\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right)^2 - \frac{\gamma^2}{k}(\xi + v\tau)^2 + \xi^2$$

$$= V^2 \frac{\gamma^2}{k}\tau^2 + 2\tau v\xi \frac{\gamma^2}{k} + \frac{\gamma^2}{k}\frac{v^2}{V^2}\xi^2 - \frac{\gamma^2}{k}\xi^2 - 2\tau v\xi \frac{\gamma^2}{k} - \frac{\gamma^2}{k}v^2\tau^2 + \xi^2$$

$$= \frac{\gamma^2}{k}\tau^2\left(V^2 - v^2\right) + \frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(\frac{v^2}{V^2} - 1\right) + \xi^2$$

$$= \frac{\gamma^2}{k}\tau^2 \frac{V^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right) + \xi^2$$

$$=\frac{1}{k}V^2\tau^2+\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi^2$$

当$k=1$时有$\xi^2=V^2\tau^2$。

综上可得：$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$，即：当且仅当$k=1$时，变换方程组

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex]\tau=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$）

满足**“光传播方程不变原理”**。

上面这个方程组就变为在数学形式上与荷兰物理学家洛伦兹提出的那个**洛伦兹变换**完全相同的**“洛伦兹变换数学式”**：

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex]\tau=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

上面，为了使光与电磁波动传播规律对推导出的时空变换具有不变性，我们在数学推导中取了$k=1$，即人为地引入了**“光传播方程不变原理”**$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$这一前提条件，才惟一地得出了这个**“洛伦兹变换数学式”**。因此**“光传播方程不变原理”**$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$是**“洛伦兹变换数学式”**得以成立的充要条件。由此可见，**“洛伦兹变换数学式”**只不过是一个**‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参**

考系内保持相同’的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

第八章

“洛伦兹变换数学式”的一种最简捷的推导

[本章中：(x',y',z',t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

按以下前提条件推导出“洛伦兹变换数学式”：

（1）“时空的匀直性” ：时间和空间是均匀的，时间是单向流逝的，空间是各向同性的；

（2）“相对性原理”（“相似性原理”） ：爱因斯坦的文字表述为：“物质运动状态据以变化的定律，与描述此状态变化所参照的坐标系究竟是使用相互匀速平移的两个坐标系中的哪一个无关”[2]。

根据（1）和（2），可以建立以下两个方程：

$$\begin{cases} x' = \gamma(c,u) \bullet (x - ut) \\ x = \gamma(c,u) \bullet (x' + ut') \end{cases}$$

（3）真空中光速为有限值c；

（4）“光传播方程不变原理”：$\{x = ct\} \Leftrightarrow \{x' = ct'\}$

根据（3）和（4），可以建立以下两个方程：

$$\begin{cases} x' = ct' \\ x = ct \end{cases}$$

将 $x' = ct'$ 及 $x = ct$ 代入上面的方程 $x' = \gamma(c,u) \bullet (x - ut)$ 及 $x = \gamma(c,u) \bullet (x' + ut')$，得：

$$\begin{cases} ct' = \gamma(c,u) \bullet (ct - ut) \\ ct = \gamma(c,u) \bullet (ct' + ut') \end{cases}$$

两式相乘，得： $c^2 t't = [\gamma(c,u)]^2 \bullet (c^2 - u^2) t't$

约去等式两边的$t't$，在$u < c$条件下，得：

$$[\gamma(c,u)]^2=\frac{c^2}{c^2-u^2}=\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

即：

$$\gamma(c,u)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

将 $\gamma(c,u)$ 代入方程 $x'=\gamma(c,u)\bullet(x-ut)$，得：

$$x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut)$$

将 $x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut)$ 代入方程 $x'=ct'$，得：

$$t'=\frac{x'}{c}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\frac{x}{c}-\frac{u}{c}t)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t-\frac{u}{c}\frac{x}{c}\right)$$

即：

$$t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$$

即**“洛伦兹变换数学式”**：

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut) \\ t'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t-\frac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

上面，为了使光与电磁波动传播规律对推导出的时空变换具有不变性，我们在数学推导中人为地引入了**“光传播方程不变原理”**$\{x=ct\}\Leftrightarrow\{x'=ct'\}$这一前提条件，才惟一地得出了这个**“洛伦兹变换数学式”**。因此**“光传播方程不变原理”**$\{x=ct\}\Leftrightarrow\{x'=ct'\}$是**“洛伦兹变换数学式”**得以成立的充要条件。可

见，**“洛伦兹变换数学式”**只不过是一个**‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参考系内保持相同’**的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

第九章

“洛伦兹型”的变换式

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

下面我们证明，只要时间变换式的形式为$\tau=\varphi(V,v)\bullet\left(t-\dfrac{1}{f(V,v)}x\right)$，$\varphi(V,v)$和$f(V,v)$均为任意的非零的实函数，就可以从它惟一地推导出“洛伦兹型”的变换式。

设：时间变换式为：

$$\tau=\varphi(V,v)\bullet\left(t-\frac{1}{f(V,v)}x\right)$$

式中：$\varphi(V,v)$和$f(V,v)$均为任意的实函数；

V—真空中光速；

v—参考系相对速度。

将时间变换式$\tau=\varphi(V,v)\bullet\left(t-\dfrac{1}{f(V,v)}x\right)$与空间变换式$\xi=B\bullet(x-vt)$组成待求的变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=\varphi(V,v)\bullet\left(t-\dfrac{1}{f(V,v)}x\right)\end{cases}$$

式中：B为待定系数。

方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=-\dfrac{\varphi}{f}\bullet x+\varphi\bullet t\end{cases}$$

式中：φ为$\varphi(V,v)$的简写；f为$f(V,v)$的简写。

将此方程组与下面的标准方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数 $A = -\dfrac{\varphi}{f}$ 及系数 $C = \varphi$

将系数 $A = -\dfrac{\varphi}{f}$ 及系数 $C = \varphi$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”** 之充分必要条件：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

即：

$$C^2 + ACv = k \neq 0$$

我们取 $k > 0$，得：

$$\varphi^2 - \frac{\varphi}{f} \times \varphi \times v = k > 0$$

$$\varphi^2 - \frac{v}{f}\varphi^2 = k > 0$$

$$\left(1 - \frac{v}{f}\right)\varphi^2 = k > 0$$

在 $v < f$ 场合下，得：

$$\varphi = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{f}}}$$

式中 $k(>0)$ 可以取任意的实数值。

将 $\varphi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v}{f}}}$ 代入 $A = -\dfrac{\varphi}{f}$，得：

$$A=-\frac{\varphi}{f}=-\frac{1}{f}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$$

将$\varphi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$代入$C=\varphi$，得：

$$C=\varphi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$$

故得：

$$B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$$

将$A=-\frac{1}{f}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$ 及 $B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}$代入变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}(x-vt)\\ \tau=-\frac{1}{f}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}\bullet x+k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v}{f}}}\bullet t\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f(V,v)}}}(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f(V,v)}}}\left(t-\dfrac{1}{f(V,v)}x\right) \end{cases}$$

（$k>0$）

这是一个**"洛伦兹型"**的变换式，它与时间变换式$\tau=\varphi(V,v)\bullet\left(t-\dfrac{1}{f(V,v)}x\right)$中的$\varphi(V,v)$是怎样的函数无关。

下面，我们引入**"光传播方程不变原理"**：$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$，以确定上述**"洛伦兹型"**变换式中的函数 $f(V,v)$ 及系数k (>0)，从而确定具体的变换式。

变换方程组为

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f}}}(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f}}}\left(t-\dfrac{1}{f}x\right) \end{cases}$$

（$k>0$）

记$\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f}}}=\gamma$。将变换方程组

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(x - vt\right) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t - \dfrac{1}{f}x\right) \end{cases}$$

代入k系度量的光传播方程$\xi^2 = V^2\tau^2$, 得:

$$k\gamma^2\left(x - vt\right)^2 = V^2k\gamma^2\left(t - \frac{1}{f}x\right)^2$$

从而得: $$x^2 = V^2k\gamma^2\left(t - \frac{1}{f}x\right)^2 - k\gamma^2\left(x - vt\right)^2 + x^2$$

$$= V^2k\gamma^2t^2 - \frac{2txV^2k\gamma^2}{f} + \frac{V^2k\gamma^2}{f^2}x^2 - k\gamma^2x^2 + 2tvxk\gamma^2 - k\gamma^2v^2t^2 + x^2$$

$$= k\gamma^2t^2\left(V^2 - v^2\right) + 2txk\gamma^2\left(v - \frac{V^2}{f}\right) + k\gamma^2x^2\left(\frac{V^2}{f^2} - 1\right) + x^2$$

$$= k\frac{f}{f-v}t^2\left(V^2 - v^2\right) + 2txk\frac{f}{f-v}\frac{fv - V^2}{f} + k\frac{f}{f-v}x^2\frac{V^2 - f^2}{f^2} + x^2$$

$$= k\frac{f}{f-v}t^2\left(V^2 - v^2\right) + 2txk\frac{fv - V^2}{f-v} + \left(k\frac{V^2 - f^2}{f(f-v)} + 1\right)x^2$$

若将$f(V,v) = \dfrac{V^2}{v}$及$k = 1$代入, 则得:

$$x^2 = \frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{V^2}}t^2\left(V^2 - v^2\right) + 2tx\frac{V^2 - V^2}{f-v} + \left(\frac{fv - f^2}{f(f-v)} + 1\right)x^2$$

$$= V^2t^2$$

这就是说，在$f(V,v) = \dfrac{V^2}{v}$及$k = 1$时, $\{\xi^2 = V^2\tau^2\} \Rightarrow \{x^2 = V^2t^2\}$成立。

同样也可证明：在$f(V,v) = \dfrac{V^2}{v}$及$k = 1$时, $\{x^2 = V^2t^2\} \Rightarrow \{\xi^2 = V^2\tau^2\}$成立。

因此，当且仅当 $f(V,v)=\dfrac{V^2}{v}$ 及 $k=1$ 时，**“洛伦兹型”**的变换方程组

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f(V,v)}}} \left(x - vt\right) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{f(V,v)}}} \left(t - \dfrac{1}{f(V,v)} x\right) \end{cases}$$

（$k>0$）

就成为**“洛伦兹变换数学式”**：

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}} \left(x - vt\right) \\ \tau = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}} \left(t - \dfrac{v}{V^2} x\right) \end{cases}$$

它满足**“光传播方程不变原理”**。

上面，为了使光与电磁波动传播规律对推导出的时空变换具有不变性，我们在数学推导中人为地引入了**“光传播方程不变原理”** $\{x^2=V^2t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2=V^2\tau^2\}$ 这一前提条件，才惟一地得出了这个**“洛伦兹变换数学式”**。因此**“光传播方程不变原理”** $\{x^2=V^2t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2=V^2\tau^2\}$ 是**“洛伦兹变换数学式”**得以成立的充要条件。由此可见，**“洛伦兹变换数学式”**只不过是一个**‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参考系内保持相同’**的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

第十章

时间变换式的四种变量赋值方案及导出的结果

[本章中：(ξ,η,ζ,τ)—k 系的坐标，V—真空中光速，v—参考系相对速度]

爱因斯坦对时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中变量 τ 、t 、x 给出的错误的定义及变量 τ 、t 、x 对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的赋值列于表 10−1：

表 10−1

	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
τ	在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’		
$A(\tau)$:	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$
t	静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’		
$A(t)$:	$t_0=t$	$t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$	$t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$
x	‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置		
$A(x)$:	$x_0=0$	$x_1=x'$	$x_2=0$

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中变量τ、t、x的正确的定义及变量τ、t、x对应于事件E_0、事件E_1、事件E_2的赋值列于表 10-2：

表 10-2

	事件E_0	事件E_1	事件E_2
τ	静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’		
$B(\tau)$:	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}$	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$
t	‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’之（K系）时刻		
$B(t)$:	$t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}$	$t_1=\tau_1+\dfrac{v\tau_1+x'}{V}$	$t_2=\tau_2+\dfrac{v\tau_2}{V}$
x	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’事件E_i之（K系）位置		
$B(x)$:	$x_0=vt_0$	$x_1=vt_1+x'$	$x_2=vt_2$

（一）变量赋值方案（V0）— 爱因斯坦的方案

（1）‘伪时间变换式’

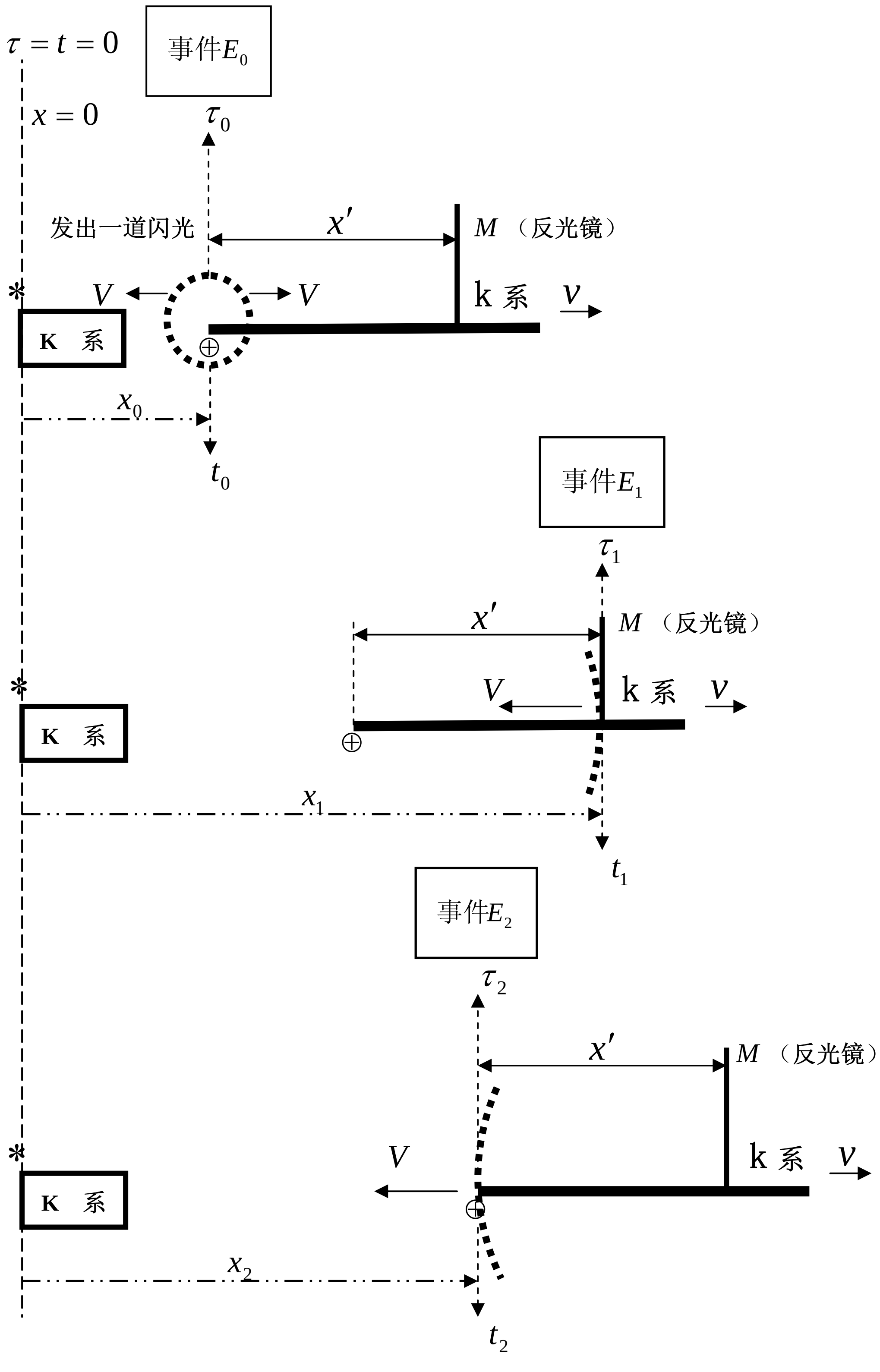
1905 年爱因斯坦在论文《论动体的电动力学》的‘I . 运动学部分’，§3 中设计了一个“动系内闪光反射模型”：《 From the origin of system k let a ray be emitted at the time τ_0 along the X-axis to x', and at the time τ_1 be reflected thence to the origin of the co-ordinates, arriving there at the time τ_2 ; 》 [1]，即：《从 k 系的原点在时间 τ_0 发射一道光线，沿着 X 轴射向 x'，在 τ_1 时从那里反射回坐标系的原点，而在 τ_2 时到达；…… 》[2]。

参看图 2-1。设有两个参考系：参考系 K 和参考系 k。参考系 K 简称‘K 系’；参考系 k 简称‘k 系’。

参看图 2-1。K 系的 x 轴上有一根具有任意长度的刚性杆。杆子（k 系）沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动，相对速度为 v。在 K 系原点（$x=0$）有一个观测者 *（ *—K 系观测者)；在 k 系原点（$\xi=0$）有一个观测者⊕（⊕—k 系观测者）。图 2-1 中，将 K 系设为静系。

设：K 系和 k 系各配有时钟，在时刻 $\tau=t=0$，k 系观测者⊕（$\xi=0$）恰好经过 K 系观测者 *（$x=0$），这时两参考系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在时刻 $\tau=\tau_0$，‘k 系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’（事件 E_0）；经过一段时间，‘闪光到达杆子 $\xi=x'$ 处反光镜，向 k 系原点（$\xi=0$）反射回去’（事件 E_1）；再经过一段时间，‘闪光返回到 k 系原点（$\xi=0$）’（事件 E_2）。



⊕—k 系观测者；*—K 系观测者；V— 真空中光速；v— 相对速度

图 2-1

表 2-1：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的变量τ 的赋值τ_i

爱因斯坦的错误的定义	在k系内独立测度的‘事件E_i发生之（k系）时刻’ τ_i
事件E_0	$\tau_0=\tau_0$
事件E_1	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$
事件E_2	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$

表 2-2：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的变量t的赋值t_i

爱因斯坦的错误的定义	静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’ t_i
事件E_0	$t_0=t$
事件E_1	$t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$
事件E_2	$t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$

表 2-3：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号右边的变量x的赋值x_i

爱因斯坦的错误的定义	‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’事件E_i之（K系）位置 x_i
事件E_0	$x_0=0$
事件E_1	$x_1=x'$
事件E_2	$x_2=0$

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中变量τ 、t 、x 的赋值方案(V0)—爱因斯坦的方案：

方案(V0)	事件E_0	事件E_1	事件E_2
$A(\tau)$ 错	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$
$A(t)$ 错	$t_0=t$	$t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$	$t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$
$A(x)$ 错	$x_0=0$	$x_1=x'$	$x_2=0$

事件E_0发生之（k 系）时刻为：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$$

式中：$\tau_0=\tau_0$ ，$t_0=t$ ，$x_0=0$

事件E_1发生之（k 系）时刻为：

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

式中：$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$ ，$t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$ ，$x_1=x'$

事件E_2发生之（k 系）时刻为：

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

式中：$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$，$t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$，$x_2=0$

爱因斯坦的基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\ \tau_0=\tau_0\text{；}\ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}\text{；}\ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}\ ]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~

函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$中诸变量对应于各事件的赋值：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

为了得出微分方程，将：

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

及
$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]$$

在$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(0,0,0,t)$处展开为泰勒级数，并舍弃泰勒级数中二阶以上的（偏）导数项，得：

$$\tau_1=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

及
$$\tau_2=\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2Vx'}{V^2-v^2}$$

将$\tau_1=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$及$\tau_2=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2Vx'}{V^2-v^2}$代入关系式

$$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$$
~~~~~~

得：

$$\frac{1}{2}\left(2\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right)=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

$$\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{Vx'}{V^2-v^2}=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{x'}{V-v}$$

约去等式两边的 x'，经整理后得偏微分方程：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}+\left(\frac{v}{V^2-v^2}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

解偏微分方程 $\frac{\partial\tau}{\partial x}+\left(\frac{v}{V^2-v^2}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$，即可得出：

$$\boxed{\begin{array}{c}\tau=a\left(t-\dfrac{v}{V^2-v^2}x\right)\\ a\text{— 待定系数}\end{array}}$$

由于函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中变量 τ 、t 、x 的定义以及它们对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的赋值都是错误的，所以上面这个函数式并不是真正的时空坐标变换的时间变换式，而是一个**‘伪时间变换式’**。

参看图 2-1，对于爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》**中所设计的这个**“动系内闪光反射模型”**，如果相对速度为 $v\geq V$ ，则事件 E_1（**‘闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去’**）将不可能发生，因而事件 E_2 也不会发生了。因此，爱因斯坦设计的这个**“动系内闪光反射模型”**[1]是一个错误的物理模型，它对函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 人为地引入了一个限制条件：$v<V$ 。

（2）空间变换式

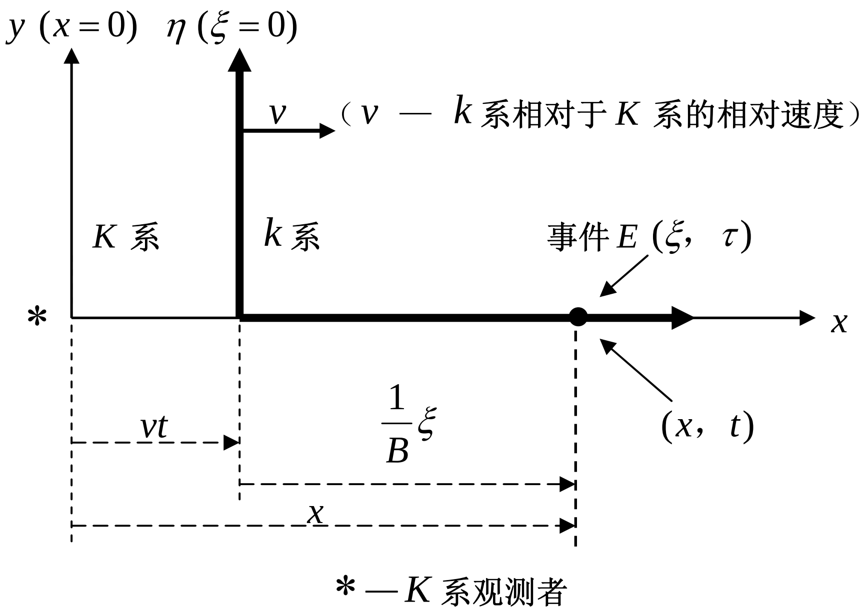


图 6-1　k 系相对于 K 系作匀速直线平移运动

由图 6-1 可知：

$$x=\frac{1}{B}\xi+vt$$

从而得时空变换的空间变换式：

$$\boxed{\begin{array}{c}\xi=B(x-vt)\\[1em] B\text{— 待定系数}\end{array}}$$

（3）‘伪时空变换式’

我们将‘伪时间变换式’$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x\right)$与空间变换式$\xi=B(x-vt)$组成联立方程组：

$$\begin{cases}\xi=B(x-vt)\\[1em] \tau=a\left(t-\dfrac{v}{V^2-v^2}x\right)\end{cases}$$

式中 B 、a 均为待定系数。

此方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = -\dfrac{av}{V^2 - v^2} \bullet x + a \bullet t \end{cases}$$

将此方程组与标准的时空变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数 $A = -\dfrac{av}{V^2 - v^2}$ 及系数 $C = a$ 。

将系数 $A = -\dfrac{av}{V^2 - v^2}$ 及系数 $C = a$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”** 之充分必要条件：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

即：

$$C^2 + ACv = k \neq 0$$

我们取 $k > 0$ 。

将 $A = -\dfrac{av}{V^2 - v^2}$ 及 $C = a$ 代入 $C^2 + ACv = k > 0$，得：

$$a^2 \left(1 - \frac{v^2}{V^2 - v^2} \right) = k > 0$$

从而得：

$$a = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{V^2 - v^2}}}$$

式中 $k(> 0)$ 可以取任意的实数值。

将 $a=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$ 代入下式：

$$A=-\frac{av}{V^2-v^2}=-k^{\frac{1}{2}}\frac{\dfrac{v}{V^2-v^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$$

将 $a=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$ 代入下式：

$$C=a=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$$

由此得：

$$B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$$

将 $A=-k^{\frac{1}{2}}\dfrac{\dfrac{v}{V^2-v^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$ 及 $B=C=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}$ 代入时空变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}(x-vt)\\ \tau=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2-v^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$，但k不一定等于 1）

所得之变换方程组是一个**‘伪时空变换式’**。

还可看到，**‘伪时间变换式’**

$$\tau = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2-v^2}}}\left(t-\frac{v}{V^2-v^2}x\right)$$

（$k>0$，但k不一定等于 1）

显然不满足“两参考系无相对运动（$v=0$）的场合下$\tau \equiv t$” 之要求。

（二）变量赋值方案（V1）

（1）‘伪时间变换式’

我们仍采用 1905 年爱因斯坦论文《论动体的电动力学》的‘I ．运动学部分’，§3 中的“动系内闪光反射模型”:《从k系的原点在时间τ_0发射一道光线，沿着 X 轴射向x'，在τ_1时从那里反射回坐标系的原点，而在τ_2时到达；…… 》[2]。参看图 2-1。

设：在时刻$\tau=\tau_0$，‘k系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’（事件E_0）；经过一段时间，**‘闪光到达杆子$\xi=x'$处反光镜，向k系原点（$\xi=0$）反射回去’**（事件E_1）；再经过一段时间，**‘闪光返回到k系原点（$\xi=0$）’**（事件E_2）。

这里，我们将时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$的三个变量τ 、t、x中的变量τ 及t仍保留爱因斯坦所采用的定义：

τ —在k系内独立测度的‘事件E发生之（k系）时刻’；

t—静系（K系）观测者评估的‘事件E发生之（k系）时刻’；

而仅将变量x对应于事件E_0、事件E_1、事件E_2的赋值x_0、x_1、x_2由爱因斯坦所采用的《**‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’**事件E_i之（K系）位置：$x_0=0$；$x_1=x'$；$x_2=0$》改为《‘两

参考系有相对运动（$v \neq 0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置：$x_0 = vt_0$；$x_1 = vt_1 + x'$；$x_2 = vt_2$》。

表 2-1：时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 等号左边的变量 τ 的赋值 τ_i

爱因斯坦的错误的定义	在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’ τ_i
事件 E_0	$\tau_0 = \tau_0$
事件 E_1	$\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}$
事件 E_2	$\tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$

表 2-2：时间变换式 $\tau = \tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 t 的赋值 t_i

爱因斯坦的错误的定义	静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’ t_i
事件 E_0	$t_0 = t$
事件 E_1	$t_1 = t + \frac{x'}{V - v}$
事件 E_2	$t_2 = t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}$

表 2-6：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 x 的赋值 x_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=0$； $x_1=x'$； $x_2=0$ 谬误之处： ‘两参考系无相对运动（$v=0$）’ 实际上它就是《在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）位置’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=vt_0$； $x_1=vt_1+x'$； $x_2=vt_2$ （注 B）

注 B：$x_0=vt_0=v\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$x_1=vt_1+x'=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)+x'=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{V+v}{V-v}x'\text{；}$$

$$x_2=vt_2=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x'$$

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x的赋值方案(V1)：

方案(V1)	事件E_0	事件E_1	事件E_2
$A(\tau)$ 错	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$
$A(t)$ 错	$t_0=t$	$t_1=t+\frac{x'}{V-v}$	$t_2=t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$
$B(x)$ 正确	$x_0=vt_0$	$x_1=vt_1+x'$	$x_2=vt_2$

事件E_0、事件E_1、事件E_2在两参考系中的时间坐标及空间坐标的赋值τ_i、t_i、x_i列于下表：

	事件E_0	事件E_1	事件E_2	
τ_i	τ_0	$\tau_0+\frac{x'}{V}$	$\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$	
t_i	t	$t+\frac{x'}{V-v}$	$t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}$	
x_i	0	x'	0	爱因斯坦的错误的变量赋值方案
	vt_0	vt_1+x'	vt_2	这里采用的变量赋值方案

事件E_0发生之（k系）时刻为：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(vt,0,0,t)$$

式中：　$\tau_0=\tau_0$；

$t_0=t$；

$x_0=vt_0=vt$

事件E_1发生之（k系）时刻为：

$$\tau_1 = \tau(x_1, 0, 0, t_1) = \tau\left[vt + \frac{Vx'}{V-v}, 0, 0, t + \frac{x'}{V-v}\right]$$

式中：$\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V}$；

$$t_1 = t + \frac{x'}{V-v};$$

$$x_1 = vt_1 + x' = v\left(t + \frac{x'}{V-v}\right) + x' = vt + \frac{Vx'}{V-v}$$

事件E_2发生之（k系）时刻为：

$$\tau_2 = \tau(x_2, 0, 0, t_2) = \tau\left[vt + \frac{2Vvx'}{V^2 - v^2}, 0, 0, t + \frac{2Vx'}{V^2 - v^2}\right]$$

式中：$\tau_2 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V} + \dfrac{x'}{V}$；

$$t_2 = t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v} = t + \frac{2Vx'}{V^2 - v^2};$$

$$x_2 = vt_2 = v\left(t + \frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V+v}\right) = vt + \frac{2Vvx'}{V^2 - v^2}$$

基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\tau_0=\tau_0;\ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V};\ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~

函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中诸变量对应于各事件的赋值：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(vt,0,0,t)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[vt+\frac{Vx'}{V-v},0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[vt+\frac{2Vvx'}{V^2-v^2},0,0,t+\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right]$$

为了得出微分方程，将：

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left[vt+\frac{Vx'}{V-v},0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

及 $$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left[vt+\frac{2Vvx'}{V^2-v^2},0,0,t+\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right]$$

在 $\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau(vt,0,0,t)$ 处展开为泰勒级数，并舍弃泰勒级数中二阶以上的（偏）导数项，得：

$$\tau_1=\tau\left[vt+\frac{Vx'}{V-v},0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

$$=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{Vx'}{V-v}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

及 $$\tau_2=\tau\left[vt+\frac{2Vvx'}{V^2-v^2},0,0,t+\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right]$$
~~~~~~

$$=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{2Vvx'}{V^2-v^2}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right)$$

将

$$\tau_1=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{Vx'}{V-v}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

及 $$\tau_2=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{2Vvx'}{V^2-v^2}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right)$$

代入关系式$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，得：

$$\frac{1}{2}\left[2\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{2Vvx'}{V^2-v^2}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right)\right]=\tau_0+\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{Vx'}{V-v}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{x'}{V-v}\right)$$

约去等号两边的x'，得：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{Vv}{V^2-v^2}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{V}{V^2-v^2}\right)=\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{V}{V-v}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{1}{V-v}\right)$$

经整理后，得 $\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{V^2}{V^2-v^2}\right)+\frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{v}{V^2-v^2}\right)=0$

在$v<V$场合下，方可约去分母中的V^2-v^2，从而得偏微分方程：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{v}{V^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

解偏微分方程$\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{v}{V^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$，即可得：

$$\boxed{\begin{array}{l}\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)\\ a\text{— 待定系数}\end{array}}$$

由于爱因斯坦所采用的函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$中变量τ和变量t的定义以及它们对应于事件E_0、事件E_1、事件E_2的赋值都是错误的：在一次观测及时空坐标变换中同时有两个各自独立地对事件作出测度的观测者 —某事件的时刻t由

‘静系内的观察者’作出测度，而同一事件的时刻τ则由**‘对静系作相对运动的动系内的观察者’**独自度量。然而，时空坐标变换必须遵守的物理法则是：在一次观测及时空坐标变换中只可将两参考系中的一个参考系作为静系。也就是说，在进行一次观测及坐标变换时只可有一个观测者—静系观测者。

所以，得到的函数$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$是一个**‘伪时间变换式’**。

参看图 2-1，对于爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》**中所设计的这个**“动系内闪光反射模型”**，如果相对速度为$v \geq V$，则事件E_1（**‘闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去’**）将不可能发生，因而事件E_2也不会发生了。因此，爱因斯坦设计的这个**“动系内闪光反射模型”**[1]是一个错误的物理模型，它对函数$\tau = \tau(x,0,0,t)$人为地引入了一个限制条件：$v < V$。

（2）“爱因斯坦变换”

由**‘伪时间变换式’**$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$与空间变换式$\xi = B(x - vt)$（参看图 6-1）组成联立方程组：

$$\begin{cases} \xi = B(x - vt) \\ \tau = a\left(t - \dfrac{v}{V^2}x\right) \end{cases}$$

式中B、a均为待定系数。

这个方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = -\dfrac{av}{V^2} \bullet x + a \bullet t \end{cases}$$

将此方程组与标准形式的时空变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数$A = -\frac{av}{V^2}$及系数$C = a$。

将系数 $A=-\dfrac{av}{V^2}$ 及系数 $C=a$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”**之充分必要条件：

$$\begin{cases} B=C \\ BC+ABv=k\neq 0 \end{cases}$$

即：$$C^2+ACv=k\neq 0$$

我们取 $k>0$，得：

$$a^2-\frac{av}{V^2}\times a\times v=k>0$$

$$a^2-\frac{a^2v^2}{V^2}=k>0$$

$$a^2\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)=k>0$$

在 $v<V$ 场合下，得：$$a=\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

式中 $k(>0)$ 可以取任意的实数值。

将 $a=\dfrac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 代入下式：

$$A=-\frac{av}{V^2}=-\frac{v}{V^2}a=-\frac{v}{V^2}\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将 $a=\dfrac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 代入下式：

$$C=a=\frac{k^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

从而得：

$$B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

将 $A=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 及 $B=C=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$ 代入变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet(x-vt)\\ \tau=-\frac{v}{V^2}k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet x+k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\bullet t\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\ \tau=k^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$）

（k 系内）关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ 中 τ_0 、τ_1 、τ_2 为函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 的三个赋值：　　　　$\tau_0=\tau_0$，$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$，$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$

将这三个式子联立起来，即得出关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，然而由于光速 V 已被消除掉，所以这个关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$ 并不确定就是用光信号来进行（k 系内）双向对钟的!!

因此，我们引入**“光传播方程不变原理”**：$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$，以确定 $k\ (>0)$ 的数值。

变换方程组为

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex]\tau=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$）

（A）记 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}=\gamma$ 。将变换方程组

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\gamma(x-vt)\\ \tau=k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

代入 k 系度量的光波传播方程 $\xi^2=V^2\tau^2$，得：

$$k\gamma^2(x-vt)^2=V^2k\gamma^2\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)^2$$

从而得: $$x^2=V^2k\gamma^2\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)^2-k\gamma^2(x-vt)^2+x^2$$

$$=V^2k\gamma^2t^2-2tvxk\gamma^2+\frac{k\gamma^2v^2}{V^2}x^2-k\gamma^2x^2+2tvxk\gamma^2-k\gamma^2v^2t^2+x^2$$

$$=k\gamma^2t^2\left(V^2-v^2\right)+k\gamma^2x^2\left(\frac{v^2}{V^2}-1\right)+x^2$$

$$=k\gamma^2t^2\frac{V^2}{\gamma^2}+k\gamma^2x^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)+x^2$$

$$=kV^2t^2+(1-k)x^2$$

当$k=1$时有$x^2=V^2t^2$。

（B）求变换方程组

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\gamma(x-vt)\\ \tau=k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

的‘逆’变换方程组：

将变换方程组写成

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\gamma\bullet x-k^{\frac{1}{2}}\gamma v\bullet t\\ \tau=-k^{\frac{1}{2}}\gamma\frac{v}{V^2}\bullet x+k^{\frac{1}{2}}\gamma\bullet t\end{cases}$$

解方程组，得‘逆’变换方程组：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} \xi & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ \tau & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}}=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1-\dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\xi+v\tau)=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi+v\tau) \\ t=\dfrac{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & \xi \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & \tau \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^{\frac{1}{2}}\gamma & -k^{\frac{1}{2}}\gamma v \\ -k^{\frac{1}{2}}\gamma \dfrac{v}{V^2} & k^{\frac{1}{2}}\gamma \end{vmatrix}}=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}\gamma\left(1-\dfrac{v^2}{V^2}\right)}(\tau+\dfrac{v}{V^2}\xi)=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau+\dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

将‘逆’变换方程组

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\xi+v\tau) \\ t=\dfrac{1}{k^{\frac{1}{2}}}\gamma(\tau+\dfrac{v}{V^2}\xi) \end{cases}$$

代入 K 系度量的光波传播方程 $x^2=V^2t^2$，得:

$$\frac{\gamma^2}{k}(\xi+v\tau)^2=V^2\frac{\gamma^2}{k}\left(\tau+\frac{v}{V^2}\xi\right)^2$$

从而得: $$\xi^2=V^2\frac{\gamma^2}{k}\left(\tau+\frac{v}{V^2}\xi\right)^2-\frac{\gamma^2}{k}(\xi+v\tau)^2+\xi^2$$

$$=V^2\frac{\gamma^2}{k}\tau^2+2\tau v\xi\frac{\gamma^2}{k}+\frac{\gamma^2}{k}\frac{v^2}{V^2}\xi^2-\frac{\gamma^2}{k}\xi^2-2\tau v\xi\frac{\gamma^2}{k}-\frac{\gamma^2}{k}v^2\tau^2+\xi^2$$

$$=\frac{\gamma^2}{k}\tau^2\left(V^2-v^2\right)+\frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(\frac{v^2}{V^2}-1\right)+\xi^2$$

$$=\frac{\gamma^2}{k}\tau^2\frac{V^2}{\gamma^2}+\frac{\gamma^2}{k}\xi^2\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)+\xi^2$$

$$=\frac{1}{k}V^2\tau^2+\left(1-\frac{1}{k}\right)\xi^2$$

当$k=1$时有$\xi^2=V^2\tau^2$。

综上可得：$\{x^2=V^2t^2\}\Leftrightarrow\{\xi^2=V^2\tau^2\}$，即：当且仅当$k=1$时，变换方程组

$$\begin{cases}\xi=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex] \tau=k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

（$k>0$）

满足**“光传播方程不变原理”**。上面这个方程组就变为在数学形式上与荷兰物理学家洛伦兹提出的那个**洛伦兹变换**完全相同的**“洛伦兹变换数学式”**：

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)\\[2ex] \tau=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)\end{cases}$$

这样，笔者：

（1）将函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$的三个变量τ、t、x中的一个变量x的三个赋值x_0、x_1、x_2由爱因斯坦所采用的赋值x_i（$x_0=0$；$x_1=x'$；$x_2=0$）改换为：$x_0=vt_0$；$x_1=vt_1+x'$；$x_2=vt_2$，从而得到一个**‘伪时间变换式’**$\tau=a\left(t-\frac{v}{V^2}x\right)$。（$a$为待定系数）

（2） 将这个‘伪时间变换式’$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$与空间变换式$\xi = B(x - vt)$组成联立方程组。然后，运用“相对性原理”，确定系数a和B。

（3）引入“光传播方程不变原理”$\{x^2 = V^2t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2\tau^2\}$，从而惟一地得出了与洛伦兹变换有相同数学式的“爱因斯坦变换”（“洛伦兹变换数学式”）。

尽管得到了与洛伦兹变换有完全相同数学形式的“爱因斯坦变换”，然而后者毕竟是从一个物理上谬误的‘伪时间变换式’$\tau = a\left(t - \frac{v}{V^2}x\right)$推导出来的，所以这个“爱因斯坦变换”根本就不是一个真正的参考系时空坐标变换式，而是一个‘伪时空变换式’。

为了使光与电磁波动传播规律对推导出的时空变换具有不变性，我们在数学推导中取$k=1$，即人为地引入了“光传播方程不变原理”$\{x^2 = V^2t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2\tau^2\}$这一前提条件，才惟一地得出了这个“洛伦兹变换数学式”。因此“光传播方程不变原理”$\{x^2 = V^2t^2\} \Leftrightarrow \{\xi^2 = V^2\tau^2\}$是“洛伦兹变换数学式”得以成立的充要条件。由此可见，“洛伦兹变换数学式”只不过是一个‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参考系内保持相同’的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个洛伦兹变换充其量也只能使光与电磁波动传播方程具有不变性，仅此而已。洛伦兹变换并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

（三）变量赋值方案（V2）

（1）‘伪时间变换式’

我们仍采用 1905 年爱因斯坦论文《论动体的电动力学》的‘Ⅰ．运动学部分’，§3 中的“动系内闪光反射模型”:《从k系的原点在时间τ_0发射一道光线，沿着 X 轴射向x'，在τ_1时从那里反射回坐标系的原点，而在τ_2时到

达；…… 》[2]。参看图 2-1。

设：在时刻$\tau=\tau_0$，‘k系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’（事件E_0）；经过一段时间，‘闪光到达杆子$\xi=x'$处反光镜，向k系原点（$\xi=0$）反射回去’（事件E_1）；再经过一段时间，‘闪光返回到k系原点（$\xi=0$）’（事件E_2）。

表 2-1：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的变量τ 的赋值τ_i

爱因斯坦的错误的定义	在k系内独立测度的‘事件E_i发生之（k系）时刻’ τ_i
事件E_0	$\tau_0=\tau_0$
事件E_1	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V}$
事件E_2	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V}+\dfrac{x'}{V}$

表 2-5：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 t 的赋值 t_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’： $t_0=t$； $t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$； $t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$ 谬误之处： t_i 不应是《静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’》， 而应当是《‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻》（坐标时）	‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻（坐标时）： $t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}$； $t_1=\tau_1+\dfrac{v\tau_1+x'}{V}$； $t_2=\tau_2+\dfrac{v\tau_2}{V}$ （注 A）

注 A：$t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}=\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_1+\frac{x'}{V}=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{x'}{V-v})+\frac{x'}{V}$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v};$$

$$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_2=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{2V}{V^2-v^2}x')$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}$$

表 2-6：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 x 的赋值 x_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=0$； $x_1=x'$； $x_2=0$ 谬误之处： ‘两参考系无相对运动（$v=0$）’ 实际上它就是《在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）位置’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=vt_0$； $x_1=vt_1+x'$； $x_2=vt_2$ （注 B）

注 B：$x_0=vt_0=v\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$x_1=vt_1+x'=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)+x'=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{V+v}{V-v}x'\text{；}$$

$$x_2=vt_2=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x'$$

时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中的变量 τ 、 t 、 x 的赋值方案(V2)：

方案(V2)	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
$A(\tau)$ 错	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$
$B(t)$ 正确	$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}$	$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}$	$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$
$B(x)$ 正确	$x_0=vt_0$	$x_1=vt_1+x'$	$x_2=vt_2$

事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 在两参考系中的时间坐标及空间坐标的赋值 τ_i、t_i、x_i 列于下表：

	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
τ_i	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$	$\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$
t_i	$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}$ $=\frac{V+v}{V}\tau_0$	$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}$ $=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+v}{V^2}x'$	$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}$ $=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+2v}{V^2}x'$
x_i	$x_0=vt_0$ $=v\frac{V+v}{V}\tau_0$	$x_1=vt_1+x'$ $=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{(V+v)^2}{V^2}x'$	$x_2=vt_2$ $=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x'$

事件 E_0 发生之（k 系）时刻为：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

式中： $\tau_0=\tau_0$；

$$t_0=\tau_0+\frac{v\tau_0}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_0;$$

$$x_0 = vt_0 = v\frac{V+v}{V}\tau_0$$

事件E_1发生之（k系）时刻为：

$$\tau_1 = \tau(x_1,0,0,t_1) = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{(V+v)^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2V+v}{V^2}x'\right)$$

式中：$\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V}$；

$$t_1 = \tau_1 + \frac{v\tau_1 + x'}{V} = \frac{(V+v)}{V}\tau_1 + \frac{x'}{V} = \frac{V+v}{V}(\tau_0 + \frac{x'}{V}) + \frac{x'}{V}$$

$$= \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2V+v}{V^2}x'\text{；}$$

$$x_1 = vt_1 + x' = v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2Vv+v^2}{V^2}x' + x'$$

$$= v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{(V+v)^2}{V^2}x'$$

事件E_2发生之（k系）时刻为：

$$\tau_2 = \tau(x_2,0,0,t_2) = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2Vv+2v^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2V+2v}{V^2}x'\right)$$

式中：$\tau_2 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V} + \dfrac{x'}{V}$；

$$t_2 = \tau_2 + \frac{v\tau_2}{V} = \frac{V+v}{V}\tau_2 = \frac{V+v}{V}(\tau_0 + \frac{2x'}{V}) = \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2V+2v}{V^2}x'\text{；}$$

$$x_2 = vt_2 = v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2Vv+2v^2}{V^2}x'$$

基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\,\tau_0=\tau_0\text{；}\ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}\text{；}\ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}\,]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\dfrac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中诸变量对应于各事件的赋值：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{(V+v)^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+v}{V^2}x'\right)$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+2v}{V^2}x'\right)$$

将：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{(V+v)^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+v}{V^2}x'\right)$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+2v}{V^2}x'\right)$$

代入关系式：

$$\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$$

得：

$$\frac{1}{2}\left[\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)\right.$$
$$\left.+\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+2v}{V^2}x'\right)\right]$$
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

$$=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{(V+v)^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+v}{V^2}x'\right)$$

为了得出微分方程，将上式中的函数

$$\tau_1=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{(V+v)^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+v}{V^2}x'\right)$$

及

$$\tau_2=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2V+2v}{V^2}x'\right)$$

在 $\tau_0=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$ 处展开为泰勒级数，并舍弃泰勒级数中二阶以上的（偏）导数项，得：

1． $\tau_1=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)+\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{(V+v)^2}{V^2}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2V+v}{V^2}x'$

2． $\tau_2=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)+\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{2Vv+2v^2}{V^2}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2V+2v}{V^2}x'$

将 1. 和 2. 及 $\tau_0=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$ 代入关系式 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，得：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{Vv+v^2}{V^2}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{V+v}{V^2}x'=\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{(V+v)^2}{V^2}x'+\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{2V+v}{V^2}x'$$

约去等号两边的 $\frac{x'}{V^2}$，得偏微分方程：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}(Vv+v^2)+\frac{\partial\tau}{\partial t}(V+v)=\frac{\partial\tau}{\partial x}(V+v)^2+\frac{\partial\tau}{\partial t}(2V+v)$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}(V+v)+\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

即：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{1}{V+v}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

解微分方程，得：

$$\boxed{\begin{gathered}\tau = a\left(t - \frac{1}{V+v}x\right)\\ a\text{— 待定系数}\end{gathered}}$$

由于函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中变量 τ 的定义及它对应于事件 E_0、事件 E_1、事件 E_2 的赋值是错误的，所以上面这个函数式并不是真正的时间变换式，而是一个**‘伪时间变换式’**。

参看图 2-1，对于爱因斯坦在论文**《论动体的电动力学》**中所设计的这个**“动系内闪光反射模型”**，如果相对速度为 $v \geq V$，则事件 E_1（**‘闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去’**）将不可能发生，因而事件 E_2 也不会发生了。因此，爱因斯坦设计的这个**“动系内闪光反射模型”**[1]是一个错误的物理模型，它对函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 人为地引入了一个限制条件：$v<V$。

（2）**‘伪时空变换式’**

我们将**‘伪时间变换式’** $\tau = a\left(t - \frac{1}{V+v}x\right)$ **与空间变换式** $\xi = B(x - vt)$（参看图 6-1）组成联立方程组：

$$\begin{cases}\xi = B(x - vt)\\ \tau = a\left(t - \dfrac{1}{V+v}x\right)\end{cases}$$

式中 B、a 均为待定系数。

方程组可以换写成如下形式：

$$\begin{cases}\xi = B\bullet(x - vt)\\ \tau = -\dfrac{a}{V+v}\bullet x + a\bullet t\end{cases}$$

将此方程组与标准的时空变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

相对照，得：系数 $A = -\dfrac{a}{V+v}$ 及系数 $C = a$ 。

将系数 $A = -\dfrac{a}{V+v}$ 及系数 $C = a$ 代入时空变换方程组满足**“相对性原理”**之充分必要条件：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

即：
$$C^2 + ACv = k \neq 0$$

我们取 $k > 0$ 。

将 $A = -\dfrac{a}{V+v}$ 及 $C = a$ 代入 $C^2 + ACv = k > 0$，得：

$$a^2\left(1 - \frac{v}{V+v}\right) = k > 0$$

得：
$$a = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{V+v}{V}}$$

式中 $k(>0)$ 可以取任意的实数值。

将 $a = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{V+v}{V}}$ 代入公式：$A = -k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{V(V+v)}}$

将 $a = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{V+v}{V}}$ 代入公式：$C = a = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{V+v}{V}}$

从而得：

$$B = C = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{V+v}{V}}$$

将 $A = -k^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{V(V+v)}}$ 及 $B = C = k^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{V+v}{V}}$ 代入时空变换方程组：

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

得‘伪时空变换式’：

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{V+v}{V}} (x - vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{V+v}{V}} \left(t - \dfrac{1}{V+v} x \right) \end{cases}$$

或写成：

$$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{V+v}}} (x - vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{V+v}}} \left(t - \dfrac{1}{V+v} x \right) \end{cases}$$

（$k > 0$，但 k 不一定等于 1）

所得之变换方程组是一个**‘伪时空变换式’**。

还可看到，**‘伪时间变换式’**

$$\tau = k^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{V+v}}} \left(t - \frac{1}{V+v} x \right)$$

（$k > 0$，但 k 不一定等于 1）

显然不满足“两参考系无相对运动（$v = 0$）的场合下 $\tau \equiv t$” 之要求。

本章所采用的变量赋值 τ_i 为《**在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’**》：

$$\tau_0 = \tau_0 \text{，} \quad \tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V} \text{，} \quad \tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$$

恰巧符合下面这个错误的关于**“时空坐标变换”**的定义：

《“时空坐标变换”就是：两参考系中一个参考系的观测者凭借对客观事件的时间坐标及空间坐标的观测值去推知另一参考系内独立测度的同一事件的时间坐标及空间坐标实际值。》

（四）变量赋值方案（V3）

（1）时间变换式

我们仍采用 1905 年爱因斯坦论文《论动体的电动力学》的‘I . 运动学部分’，§3 中的“动系内闪光反射模型”：《从 k 系的原点在时间 τ_0 发射一道光线，沿着 X 轴射向 x'，在 τ_1 时从那里反射回坐标系的原点，而在 τ_2 时到达；…… 》[2]。参看图 2-1。

设：在时刻 $\tau = \tau_0$，‘k 系原点（$\xi = 0$）发出一道闪光’（事件 E_0）；经过一段时间，‘闪光到达杆子 $\xi = x'$ 处反光镜，向 k 系原点（$\xi = 0$）反射回去’（事件 E_1）；再经过一段时间，‘闪光返回到 k 系原点（$\xi = 0$）’（事件 E_2）。

这里，时间变换式 $\tau_i = \tau(x_i, 0, 0, t_i)$ 等号左边的变量赋值 τ_i 及等号右边的变量赋值 t_i、x_i 的定义是：

（1）τ_i：静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’（固有时）；

（2）t_i：‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻（坐标时）；

（3）x_i：‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置。

表 2-4：时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$等号左边的变量τ 的赋值τ_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
在k系内独立测度的‘事件E_i发生之（k系）时刻’： $\tau_0=\tau_0$； $\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V}$； $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V}+\frac{x'}{V}$ 实际上它就是《‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq 0$）’下静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’（固有时）： $\tau_0=\tau_0$； $\tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V-v}$； $\tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V-v}$

表 2-5：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 t 的赋值 t_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’： $t_0=t$； $t_1=t+\dfrac{x'}{V-v}$； $t_2=t+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$ 谬误之处： t_i 不应是《静系（K 系）观测者评估的‘事件 E_i 发生之（k 系）时刻’》, 而应当是《‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻》（坐标时）	‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’之（K 系）时刻（坐标时）： $t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}$； $t_1=\tau_1+\dfrac{v\tau_1+x'}{V}$； $t_2=\tau_2+\dfrac{v\tau_2}{V}$ （注 A）

注 A：$t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}=\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$t_1=\tau_1+\frac{v\tau_1+x'}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_1+\frac{x'}{V}=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{x'}{V-v})+\frac{x'}{V}$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}；$$

$$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_2=\frac{V+v}{V}(\tau_0+\frac{2V}{V^2-v^2}x')$$

$$=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}$$

表 2-6：时间变换式 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 等号右边的变量 x 的赋值 x_i

爱因斯坦的错误的定义	正 确 的 定 义
‘两参考系无相对运动（$v=0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=0$； $x_1=x'$； $x_2=0$ 谬误之处： ‘两参考系无相对运动（$v=0$）’ 实际上它就是《在 k 系内独立测度的‘事件 E_i 发生之（k 系）位置’》	‘两参考系有相对运动（$v\neq0$）’下‘静系（K 系）观测者观测到事件 E_i 时’事件 E_i 之（K 系）位置： $x_0=vt_0$； $x_1=vt_1+x'$； $x_2=vt_2$ （注 B）

注 B：$x_0=vt_0=v\dfrac{V+v}{V}\tau_0$；

$$x_1=vt_1+x'=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)+x'=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{V+v}{V-v}x'\text{；}$$

$$x_2=vt_2=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x'$$

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x的赋值方案(V3)：

方案(V3)	事件E_0	事件E_1	事件E_2
$B(\tau)$ 正确	$\tau_0=\tau_0$	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}$	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$
$B(t)$ 正确	$t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}$	$t_1=\tau_1+\dfrac{v\tau_1+x'}{V}$	$t_2=\tau_2+\dfrac{v\tau_2}{V}$
$B(x)$ 正确	$x_0=vt_0$	$x_1=vt_1+x'$	$x_2=vt_2$

事件E_0、事件E_1、事件E_2在两参考系中的时间坐标及空间坐标的赋值τ_i、t_i、x_i列于下表：

变量的定义：	静系（K系）观测者评估的‘事件E_i发生之（k系）时刻’（固有时）τ_i	‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’之（K系）时刻（坐标时）t_i
事件E_0	$\tau_0=\tau_0$	$t_0=\tau_0+\dfrac{v\tau_0}{V}=\dfrac{V+v}{V}\tau_0$
事件E_1	$\tau_1=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}$	$t_1=\tau_1+\dfrac{v\tau_1+x'}{V}$ $=\dfrac{V+v}{V}\tau_0+\dfrac{2x'}{V-v}$
事件E_2	$\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}$	$t_2=\tau_2+\dfrac{v\tau_2}{V}$ $=\dfrac{V+v}{V}\tau_0+\dfrac{2x'}{V-v}$

变量的定义：	‘静系（K系）观测者观测到事件E_i时’事件E_i之（K系）位置 x_i
事件E_0	$x_0 = vt_0 = v\frac{V+v}{V}\tau_0$
事件E_1	$x_1 = vt_1 + x' = v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{V+v}{V-v}x'$
事件E_2	$x_2 = vt_2 = v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2v}{V-v}x'$

事件E_0发生之（k系）时刻为：

$$\tau_0 = \tau(x_0,0,0,t_0) = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

式中： $\tau_0 = \tau_0$；

$$t_0 = \tau_0 + \frac{v\tau_0}{V} = \frac{V+v}{V}\tau_0\text{；}$$

$$x_0 = vt_0 = v\frac{V+v}{V}\tau_0$$

事件E_1发生之（k系）时刻为：

$$\tau_1 = \tau(x_1,0,0,t_1) = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{V+v}{V-v}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\right)$$

式中： $\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V-v}$；

$$t_1 = \tau_1 + \frac{v\tau_1 + x'}{V} = \frac{(V+v)\tau_1 + x'}{V} = \frac{V+v}{V}\left(\tau_0 + \frac{x'}{V-v}\right) + \frac{x'}{V}$$

$$= \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{V+v}{V}\frac{x'}{V-v} + \frac{x'}{V} = \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\text{；}$$

$$x_1 = vt_1 + x' = v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\right) + x' = v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{V+v}{V-v}x'$$

事件E_2发生之（k系）时刻为：

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)$$

式中： $\tau_2=\tau_0+\dfrac{x'}{V-v}+\dfrac{x'}{V+v}=\tau_0+\dfrac{2Vx'}{V^2-v^2}$；

$$t_2=\tau_2+\frac{v\tau_2}{V}=\frac{V+v}{V}\tau_2=\frac{V+v}{V}\left(\tau_0+\frac{2Vx'}{V^2-v^2}\right)=\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}；$$

$$x_2=vt_2=v\left(\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)=v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x'$$

基本数学模型的构成示于以下框图内。

$$[\ \tau_0=\tau_0；\ \tau_1=\tau_0+\frac{x'}{V-v}；\ \tau_2=\tau_0+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\ ]$$

$$\Downarrow$$

数学模型框架：$\tau_2-\tau_0=\dfrac{2Vx'}{V^2-v^2}$

~~~~~~

函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$中诸变量对应于各事件的赋值：

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

$$\tau_1=\tau(x_1,0,0,t_1)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{V+v}{V-v}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)$$

$$\tau_2=\tau(x_2,0,0,t_2)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2v}{V-v}x',0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0+\frac{2x'}{V-v}\right)$$

将

$$\tau_0=\tau(x_0,0,0,t_0)=\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0,0,0,\frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

及
~~~~~~

$$\tau_2 = \tau(x_2, 0, 0, t_2) = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2v}{V-v}x', 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\right)$$

代入关系式： $$\tau_2 - \tau_0 = \frac{2Vx'}{V^2 - v^2}$$

得:

$$\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2v}{V-v}x', 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\right) - \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0, 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0\right)$$

$$= \frac{2Vx'}{V^2 - v^2}$$

为了得出微分方程，将上式中的$\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2v}{V-v}x', 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0 + \frac{2x'}{V-v}\right)$

在$\tau_0 = \tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0, 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0\right)$处展开为泰勒级数，并舍弃泰勒级数中二阶以上的（偏）导数项，得：

$$\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0, 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0\right) + \frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{2v}{V-v}x'\right) + \frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{2x'}{V-v}\right)$$

$$-\tau\left(v\frac{V+v}{V}\tau_0, 0, 0, \frac{V+v}{V}\tau_0\right) = \frac{2Vx'}{V^2 - v^2}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\left(\frac{2v}{V-v}x'\right) + \frac{\partial\tau}{\partial t}\left(\frac{2x'}{V-v}\right) = \frac{2Vx'}{V^2 - v^2}$$

在$0 < v < V$场合下，方可约去等号两边的$\frac{2x'}{V-v}$，得偏微分方程：

$$v\frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{V}{V+v}$$

（2）周方变换（广义的伽利略变换）

时空变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

的时间变换式可以写成

$$\tau = A \bullet x + C \bullet t = \frac{\partial \tau}{\partial x} \bullet x + \frac{\partial \tau}{\partial t} \bullet t$$

从而得：

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = A \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = C > 0$$

代入微分方程

$$v\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{V}{V + v}$$

得方程：

$$Av + C = \frac{V}{V + v}$$

时空变换方程组

$$\begin{cases} \xi = B \bullet (x - vt) \\ \tau = A \bullet x + C \bullet t \end{cases}$$

满足**“相对性原理”**（**“相似性原理”**） 的充分必要条件是：

$$\begin{cases} B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

将方程 $Av + C = \dfrac{V}{V + v}$ 与时空变换满足**“相对性原理”**的充分必要条件联立起来，构成联立方程组

$$\begin{cases} Av + C = \dfrac{V}{V + v} \\ B = C \\ BC + ABv = k \neq 0 \end{cases}$$

解此方程组：

从 $B = C$ 与 $BC + ABv = k$ 得：

$$C(C+Av)=k\neq 0\text{，}C>0$$

考虑到$Av+C=\dfrac{V}{V+v}$，得：$C\dfrac{V}{V+v}=k\neq 0$

$$C=k\frac{V+v}{V}$$

将$C=k\dfrac{V+v}{V}$代入$Av+C=\dfrac{V}{V+v}$，得：

$$A=\frac{1}{v}\left(\frac{V}{V+v}-k\frac{V+v}{V}\right)=\frac{1}{v}\frac{V^2-k(V+v)^2}{V(V+v)}$$

k（$k\neq 0$）可以取任意值，我们取$k=\left(\dfrac{V}{V+v}\right)^2>0$，则得$A=0$，因此，从

方程$Av+C=\dfrac{V}{V+v}$可得： $C=\dfrac{V}{V+v}$

从而得： $B=C=\dfrac{V}{V+v}$

将$A=0$及$B=C=\dfrac{V}{V+v}$代入时空变换方程组：

$$\begin{cases}\xi=B\bullet(x-vt)\\ \tau=A\bullet x+C\bullet t\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{V}{V+v}(x-vt)\\ \tau=\dfrac{V}{V+v}t\end{cases}$$

或写成：

$$\boxed{\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{1+\frac{v}{V}}(x-vt)\\ \tau &= \frac{1}{1+\frac{v}{V}}t\end{aligned}}$$

应当指出的是，从表面上看，时间变换式$\tau=\dfrac{V}{V+v}t$对相对速度v没有限制，然而实际上却隐藏着一个限制条件：$v<V$。因为我们采用的物理模型是爱因斯坦论文《**论动体的电动力学**》中的“**动系内闪光反射模型**”，对于这个模型，如果相对速度为$v\geq V$，则事件E_1（‘**闪光到达杆子头部反光镜，向杆子尾端⊕反射回去**’）将不可能发生，因而事件E_2也不会发生了，参看**图** 2-1。因此，爱因斯坦在论文《**论动体的电动力学**》中设计的这个“**动系内闪光反射模型**”[1]是一个错误的物理模型，它对函数$\tau=\tau(x,0,0,t)$人为地引入了一个限制条件：$v<V$。

（五）四种变量赋值方案之比较

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$的四种变量赋值方案列于下表：

事件E_0：‘k系原点（$\xi=0$）发出一道闪光’；

事件E_1：‘闪光到达杆子$\xi=x'$处反光镜，向k系原点（$\xi=0$）反射回去’；

事件E_2：‘闪光返回到k系原点（$\xi=0$）’。

（1）变量赋值方案(V0) — 爱因斯坦的方案

(V0)：	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
$A(\tau)$	$\tau_0 = \tau_0$	$\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}$	$\tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$
$A(t)$	$t_0 = t$	$t_1 = t + \frac{x'}{V - v}$	$t_2 = t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}$
$A(x)$	$x_0 = 0$	$x_1 = x'$	$x_2 = 0$

（2）变量赋值方案(V1)

(V1)：	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
$A(\tau)$	$\tau_0 = \tau_0$	$\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}$	$\tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$
$A(t)$	$t_0 = t$	$t_1 = t + \frac{x'}{V - v}$	$t_2 = t + \frac{x'}{V - v} + \frac{x'}{V + v}$
$B(x)$	$x_0 = vt_0$	$x_1 = vt_1 + x'$	$x_2 = vt_2$

（3）变量赋值方案(V2)

(V2)：	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
$A(\tau)$	$\tau_0 = \tau_0$	$\tau_1 = \tau_0 + \frac{x'}{V}$	$\tau_2 = \tau_0 + \frac{x'}{V} + \frac{x'}{V}$
$B(t)$	$t_0 = \tau_0 + \frac{v\tau_0}{V}$	$t_1 = \tau_1 + \frac{v\tau_1 + x'}{V}$	$t_2 = \tau_2 + \frac{v\tau_2}{V}$
$B(x)$	$x_0 = vt_0$	$x_1 = vt_1 + x'$	$x_2 = vt_2$

（4）变量赋值方案(V3)

(V3)：	事件 E_0	事件 E_1	事件 E_2
$B(\tau)$	$\tau_0 = \tau_0$	$\tau_1 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V-v}$	$\tau_2 = \tau_0 + \dfrac{x'}{V-v} + \dfrac{x'}{V+v}$
$B(t)$	$t_0 = \tau_0 + \dfrac{v\tau_0}{V}$	$t_1 = \tau_1 + \dfrac{v\tau_1 + x'}{V}$	$t_2 = \tau_2 + \dfrac{v\tau_2}{V}$
$B(x)$	$x_0 = vt_0$	$x_1 = vt_1 + x'$	$x_2 = vt_2$

变量赋值方案		推　导　出　的　变　换　式
(V0)	$A(\tau)$ $A(t)$ $A(x)$	$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2-v^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2-v^2}x\right) \end{cases}$ （$k>0$，但 k 不一定等于 1）
(V1)	$A(\tau)$ $A(t)$ $B(x)$	“爱因斯坦变换” $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}(x-vt)$，$\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{V^2}}}\left(t-\dfrac{v}{V^2}x\right)$
(V2)	$A(\tau)$ $B(t)$ $B(x)$	$\begin{cases} \xi = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{V+v}}}(x-vt) \\ \tau = k^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v}{V+v}}}\left(t-\dfrac{1}{V+v}x\right) \end{cases}$ （$k>0$，但 k 不一定等于 1）
(V3)	$B(\tau)$ $B(t)$ $B(x)$	周方变换（广义的伽利略变换） $\xi = \dfrac{1}{1+\dfrac{v}{V}}(x-vt)$，$\tau = \dfrac{1}{1+\dfrac{v}{V}}t$ （隐含着限制条件：$0<v<V$）

时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$的四种变量赋值方案之比较

变量赋值方案	方案(V0)（爱因斯坦的方案）	方案(V1)	方案(V2)	方案(V3)
因变量τ	$A(\tau)$ 错	$A(\tau)$ 错	$A(\tau)$ 错	$B(\tau)$ 正确
自变量t	$A(t)$ 错	$A(t)$ 错	$B(t)$ 正确	$B(t)$ 正确
自变量x	$A(x)$ 错	$B(x)$ 正确	$B(x)$ 正确	$B(x)$ 正确
导出的结果：	不正确的变换式	爱因斯坦变换 —伪时空变换式	不正确的变换式	周方变换（广义的伽利略变换） 但是，爱因斯坦的“动系内闪光反射模型” 使得推导出的时空坐标变换隐含着限制条件： $v<V$

结论：

所有四种变量赋值方案都不能推导出正确的时空坐标变换式，其根源是爱因斯坦论文《论动体的电动力学》中存在着以下根本性、原则性、全局性、致命性的谬误：

（1）爱因斯坦在对时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x进行赋值时‘不按规则出牌’，违背了‘光速为有限值’场合下时空坐标变换的物理法则，混乱不堪地定义了时间变换式$\tau=\tau(x,0,0,t)$中的变量τ、t、x及它们的赋值，从而建立了如下荒谬的基本数学模型：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left[0,0,0,\left\{t+\frac{x'}{V-v}+\frac{x'}{V+v}\right\}\right]\right]=\tau\left[x',0,0,t+\frac{x'}{V-v}\right]$$

（2）在推导微分方程时，将函数 $\tau=\tau(x,0,0,t)$ 中的变量 x 错误地取为 x'；x' 并不是一个‘变量’，而是变量 x 对应于事件 E_1 的赋值，是一个既定数值（常数值），然而爱因斯坦却错误地把 x' 指定为一个‘变量’，并‘取 x' 为无限小’[2]。此外，爱因斯坦还把 x' 定义为 $x'=x-vt$，这实际上是不合理地掺入了**伽利略变换**的关系式 $x'=x-vt$。

（3）采用了一个错误的**“动系内闪光反射模型”**来推导时间变换式，因而人为地限制了所导出的坐标变换只适用于低于光速（$v<V$）的相对运动。

第十一章

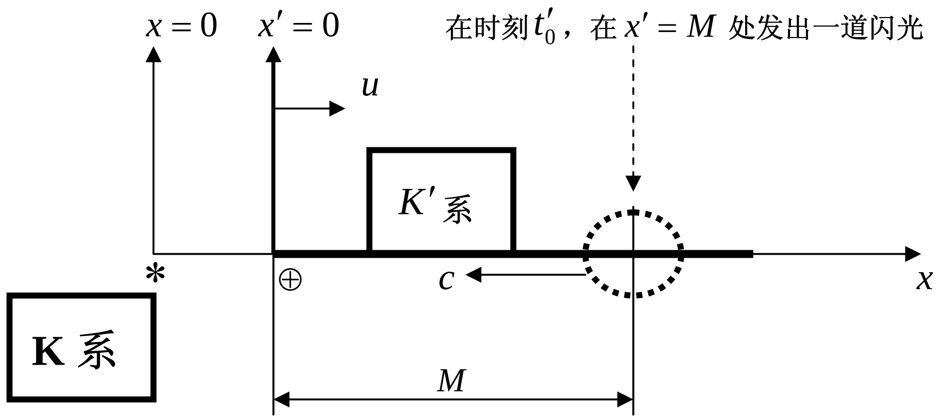
时间变换式的正确推导方法

[本章中：(x',y',z',t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

（一）推导方法（A）

将爱因斯坦论文《论动体的电动力学》的‘I． 运动学部分’，§3 中的“动系内闪光反射模型” [1] 改为“动系内闪光模型”，示于图 11-1。

设有两个参考系：K 系和 K' 系，将 K 系设为静系。



$*$—K 系观测者；⊕ —K' 系观测者；c— 真空中光速；u— 相对速度

图 11-1

参看图 11-1。K 系的 x 轴上有一根具有任意长度的刚性杆子。杆子（K' 系）沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动，相对速度为 u 。观测者被设置在参考系的原点。

设：K 系（K 系观测者 $*$ ）和 K' 系（K' 系观测者⊕）各持有时钟，在时刻 $t'=t=0$ ，K' 系观测者⊕（$x'=0$）恰好经过 K 系观测者 $*$ （$x=0$），这时两参考系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在任意时刻 t'_0，在杆上任意的 $x'=M$ 处发出一道闪光，参看图 11-1。

（1）K 系观测者＊评估的‘K' 系观测者⊕见到该道闪光’之（K' 系）时刻为 t_1'：

$$t_1' = t_0' + \frac{M}{c+u} = \frac{(c+u)t_0' + M}{c+u}$$

（2）‘K 系观测者＊见到该道闪光’之（K 系）时刻为 t_1：

$$t_1 = t_0' + \frac{ut_0' + M}{c} = \frac{(c+u)t_0' + M}{c}$$

从（1）与（2）约去分子中的 $(c+u)t_0' + M$，得：

$$\frac{t_1'}{t_1} = \frac{c}{c+u}$$

由于 $t' = t = 0$，故有： $$t' = \frac{c}{c+u}t$$

即时间变换式：

$$\boxed{\begin{gathered} t' = \frac{c}{c+u}t \\ 0 < u < +\infty \end{gathered}}$$

这个时间变换式的物理意义是：在‘真空中光速为有限值 c’及‘两参考系有相对运动（$u \neq 0$）’的场合下，静系（K 系）观测者＊在（K 系）时刻 t 观测到的某个事件 E 实际上是在（K' 系）时刻 $t' = \dfrac{c}{c+u}t$ 发生的；或者说，在（K' 系）时刻 t' 发生的某个事件 E 将在（K 系）时刻 $t = \dfrac{c+u}{c}t'$ 才被静系（K 系）观测者＊观测到。

时间变换式 $t' = \dfrac{c}{c+u}t$ 的一个极其重要的特点是：它只取决于真空中光信号传播速率 c 及参考系相对速度 u，而与事件发生的时刻及地点均无关系，即关系

式$t'=\dfrac{c}{c+u}t$是针对两个参考系（K系与K'系）的整体而成立的关系式。这种不含‘x项’的时间变换式必然导致推导出的时空坐标变换必定是**‘伽利略型’**的时空变换。时间变换式$t'=\dfrac{c}{c+u}t$中变量t'及变量t的定义为：

（1）等号左边的变量t'为：**静系（K系）观测者＊评估的‘某事件发生之（K'系）时刻’**（固有时）；

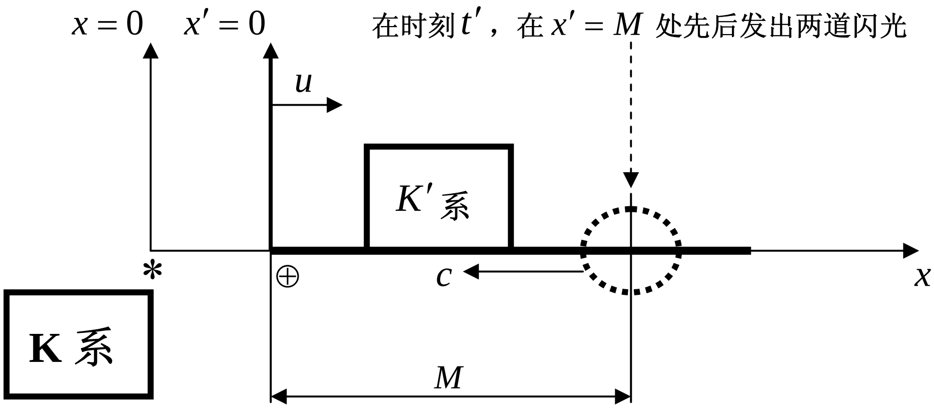
（2）等号右边的变量t为：**‘静系（K系）观测者＊观测到该事件时’**之（**K系）时刻**（坐标时）。

必须指出，时间变换式$t'=\dfrac{c}{c+u}t$适用于超光速（$u>c$）的参考系相离运动!!

（二）推导方法（B）

将爱因斯坦论文《**论动体的电动力学**》的‘Ⅰ．**运动学部分**’，§3 中的“**动系内闪光反射模型**”［1］改为“**动系内闪光模型**”，示于图 11-2。

设有两个参考系：K系和K'系，将K系设为静系。



＊—K系观测者；　c— 真空中光速；u— 相对速度

图 11-2

参看图 11-2。K 系的 x 轴上有一根具有任意长度的刚性杆子。杆子（K' 系）沿 K 系的 x 轴正方向作匀速平移运动，相对速度为 u 。

设：K 系（K 系观测者 * ）和 K' 系（杆子尾端⊕）各持有时钟，在时刻 $t'=t=0$，杆子尾端⊕（$x'=0$）恰好经过 K 系观测者 * （$x=0$），这时两参考系的时钟相互对准到零点，而且两时钟完全同步运行。

设：在**任意时刻** t'，在杆上**任意的** $x'=M$ **处**发出一道闪光，参看图 11-2。

（1） **K 系观测者 * 评估的‘在杆上 $x'=M$ 处发出一道闪光’之（K' 系）时刻为 t'；**

（2）**‘K 系观测者 * 见到该闪光时’之（K 系）时刻为 t：**

$$t = t' + \frac{ut'+M}{c} = \frac{c+u}{c}t' + \frac{M}{c}$$

从（1）式得‘**$x'=M$ 处先后发出两道闪光**’的时间间隔 $\Delta t'$ 。

从（2）式得‘**K 系观测者 * 先后见到两道闪光**’的时间间隔 Δt ：

$$\Delta t = \frac{c+u}{c}\Delta t' + \frac{\Delta M}{c}$$

由于两道闪光均在杆上 $x'=M$ 处发出，故 $\Delta M = 0$，因此‘**K 系观测者 * 先后见到（从杆上任何地点发出的）两道闪光**’的时间间隔是：

$$\Delta t = \frac{c+u}{c}\Delta t'$$

因为 $t'=t=0$，故有：
$$t = \frac{c+u}{c}t'$$

从而得时间变换式：

$$\boxed{\begin{array}{c} t' = \dfrac{c}{c+u}t \\[2ex] 0 < u < +\infty \end{array}}$$

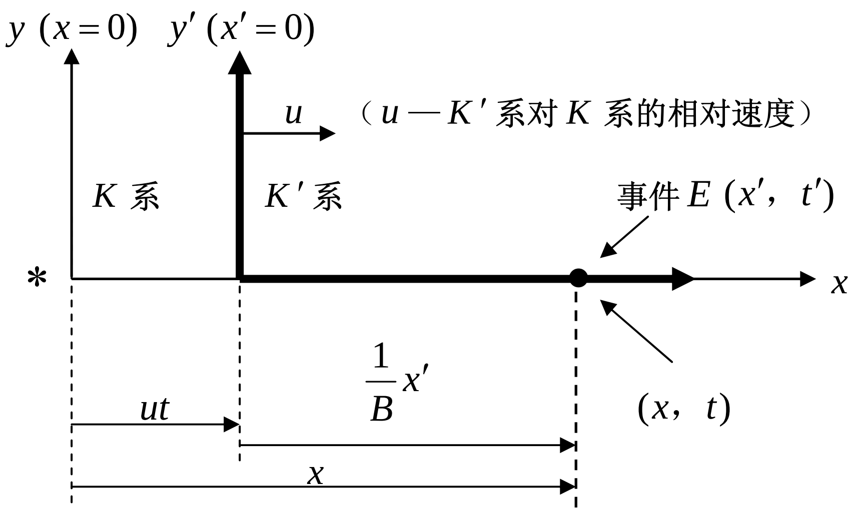
第十二章

新牛顿力学时空变换

— 周方变换（广义的伽利略变换）

[本章中：(x',y',z',t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

（一）空间变换式



*—K系观测者

图 12-1 K'系相对于K系作匀速直线平移运动

由图 12-1 可知：

$$x = \frac{1}{B}x' + ut$$

从而得时空变换的空间变换式：

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = B(x-ut) \\ B\text{— 待定系数} \end{array}}$$

（二）周方变换（广义的伽利略变换）

我们知道，时空坐标变换方程组

$$\begin{cases} x' = B \bullet (x - ut) \\ t' = B \bullet t \end{cases}$$

能够满足**“相对性原理”**。

时间变换式为 $t' = \dfrac{c}{c+u} t$，将它与 $t' = B \bullet t$ 相对照，得：

$$B = \frac{c}{c+u}$$

将 $B = \dfrac{c}{c+u}$ 代入上面的时空变换方程组，得：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{c}{c+u}(x - ut) \\ t' = \dfrac{c}{c+u} t \end{cases}$$

也可以写成如下形式：

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x - ut) \\ t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} t \\ 0 < u < +\infty \end{array}}$$

这就是‘真空中光速为有限值 c 且两参考系有相对运动 u’场合下的时空坐标变换，为笔者首次发现，可命名为**“周方变换”**，它实际上是**‘广义的伽利略变换’**。

周方变换（广义的伽利略变换）在 $c \to +\infty$ 或 $\dfrac{u}{c} \approx 0$（参考系相对速度 u 与

真空中光速c相比较是很小）的时候就退化为经典的**伽利略变换**。经典的**伽利略变换**只是作为一个特例被包含在**周方变换（广义的伽利略变换）**之中。

（三）"相对性原理"检验

周方变换为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

换写成如下形式：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}x - \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}ut \\ t' = 0\bullet x + \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

方程组的变换矩阵为：

$$A = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & -\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}u \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+\dfrac{u}{c}}\bullet\begin{vmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

逆变换矩阵为：

$$A_{inv} = \left(1+\frac{u}{c}\right)^2 \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}u \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} \end{vmatrix} = \left(1+\frac{u}{c}\right)\bullet\begin{vmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

从而有：

$$A\times A_{inv}=\left[\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\bullet\begin{vmatrix}1 & -u\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right]\times\left[\left(1+\frac{u}{c}\right)\bullet\begin{vmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right]=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$

~~~~~~

验证：

从周方变换的‘正变换式’：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut) \\ t'=\dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}t \end{cases}$$

解出‘逆变换式’：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} x' & -\dfrac{u}{1+\frac{u}{c}} \\ t' & \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}} & -\dfrac{u}{1+\frac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}} \end{vmatrix}}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^2\left(\frac{1}{1+\frac{u}{c}}x'+\frac{u}{1+\frac{u}{c}}t'\right)$$

$$=\left(1+\frac{u}{c}\right)^2\bullet\frac{1}{1+\frac{u}{c}}\left(x'+ut'\right)$$
~~~~~~

$$t=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & x' \\ 0 & t'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}} & -\dfrac{u}{1+\dfrac{u}{c}} \\ 0 & \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}\end{vmatrix}}=\left(1+\frac{u}{c}\right)^2\bullet\frac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t'$$

即：

$$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^2\bullet\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}\left(x'+ut'\right) \\ t=\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^2\bullet\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t' \end{cases}$$

从这个‘逆变换式’解出‘正变换式’：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\begin{vmatrix} x & \left(1+\dfrac{u}{c}\right)u \\ t & 1+\dfrac{u}{c}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\dfrac{u}{c} & \left(1+\dfrac{u}{c}\right)u \\ 0 & 1+\dfrac{u}{c}\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^2}\left[\left(1+\dfrac{u}{c}\right)x-\left(1+\dfrac{u}{c}\right)ut\right]=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ t'=\dfrac{\begin{vmatrix}1+\dfrac{u}{c} & x \\ 0 & t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+\dfrac{u}{c} & \left(1+\dfrac{u}{c}\right)u \\ 0 & 1+\dfrac{u}{c}\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{u}{c}\right)^2}\left(1+\dfrac{u}{c}\right)t=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

验证毕。

~~~~~~
~~~~~~

（四）周方变换（广义的伽利略变换）下的不变量

1．取时间变换式：
$$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} t$$

等式两边取增量：
$$\Delta t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} \Delta t$$

$t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}} t$ — t' 只是 t 的函数，而与 x 无关；$\Delta t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}} \Delta t$ — $\Delta t'$ 只是 Δt 的函数，而与 Δx 无关。这就是说，‘时间是相对的’（$t' \neq t$），但是‘（两事件）同时’是绝对的，‘（两事件）不同时’也是绝对的。

2．在参考系相离运动中（$0 < u < +\infty$），发生同等程度的**‘动系时间膨胀’**（注A）与**‘动系空间膨胀（沿相对运动方向）’**（注C）：

取时间变换式：
$$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} t$$

即：
$$t = \left(1+\frac{u}{c}\right) t'$$

等式两边取增量：
$$\Delta t = \left(1+\frac{u}{c}\right) \Delta t' > \Delta t'$$

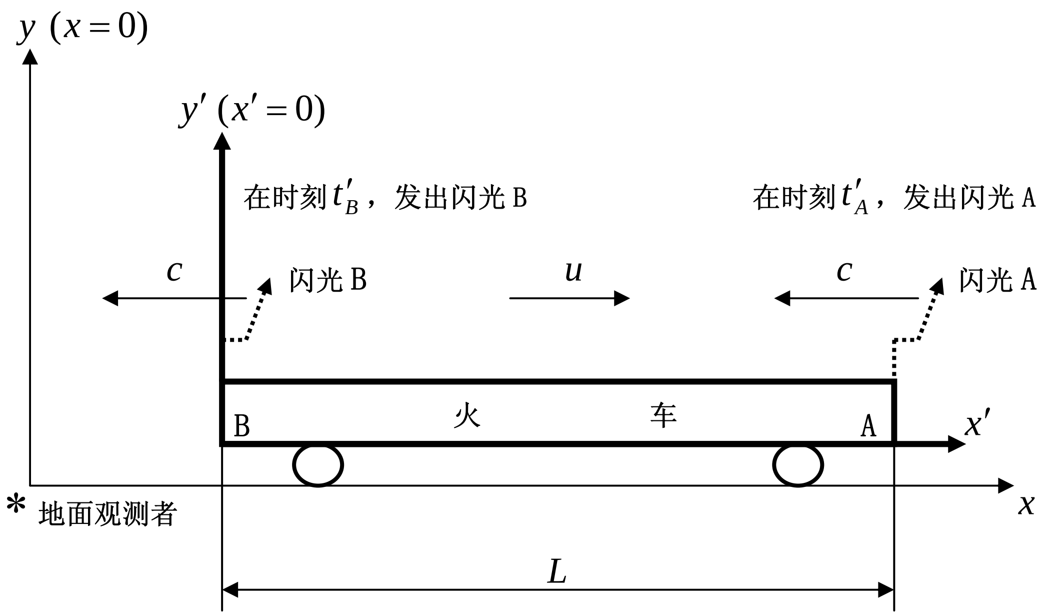
取空间变换式：
$$x' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} (x - ut)$$

等式两边取增量：
$$\Delta x' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} (\Delta x - u\Delta t)$$

令 $\Delta t = 0$，经整理，得：
$$\Delta x = \left(1+\frac{u}{c}\right) \Delta x' > \Delta x'$$

故有：
$$\Delta x \big/ \Delta t = \Delta x' \big/ \Delta t'$$

参看图 12-2。在时刻$t' = t = 0$，火车尾端 B$(x' = 0)$恰好经过地面观测者＊$(x = 0)$。



（u— 火车对地面的相对速度；c—真空中光速）

图 12-2

在时刻t'_A，在火车头部 A 发出一道闪光 A。地面观测者＊见到闪光 A 的时刻为t_A：

$$t_A = t'_A + \frac{ut'_A + L}{c} = \frac{(c+u)t'_A + L}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'_A + \frac{L}{c}$$

闪光 A 到达火车尾端 B 的时刻为t'_B：

$$t'_B = t'_A + \frac{L}{c+u}$$

在此时刻t'_B，在火车尾端 B 发出一道闪光 B。地面观测者＊见到闪光 B 的时刻为t_B：

$$t_B = t'_B + \frac{ut'_B}{c} = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'_B = \frac{c+u}{c}\left(t'_A + \frac{L}{c+u}\right) = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t'_A + \frac{L}{c}$$

由此可见，$t_A = t_B$，也就是说，地面观测者＊在同一时刻见到闪光 A 及闪光 B。

在时刻t_A，地面观测者＊见到火车头部（点 A）的**闪光** A 时该点 A 之位置为$(ut_A+\Delta x)$。地面观测者＊见到火车尾端（点 B）的**闪光** B 时该点 B 之位置为ut_B。因此，在时刻$t_A=t_B$，地面观测者＊观测到的火车长度（图 12-2 中点 A 与点 B 之间的距离）为：

$$(ut_A+\Delta x)-ut_B=\Delta x=\left(1+\frac{u}{c}\right)\Delta x'=\left(1+\frac{u}{c}\right)L>L$$

［**‘动系空间膨胀（沿相对运动方向）’**］

3．在参考系相合运动中（$0<u_f<c$），发生同等程度的**‘动系时间收缩’**（注 B）与**‘动系空间收缩（沿相对运动方向）’**（注 D）：

取时间变换式：
$$t'=\frac{1}{1-\frac{u_f}{c}}t$$

即：
$$t=\left(1-\frac{u_f}{c}\right)t'$$

等式两边取增量：
$$\Delta t=\left(1-\frac{u_f}{c}\right)\Delta t'<\Delta t'$$

取空间变换式：
$$x'=\frac{1}{1-\frac{u_f}{c}}(x+u_ft)$$

等式两边取增量：
$$\Delta x'=\frac{1}{1-\frac{u_f}{c}}(\Delta x+u_f\Delta t)$$

令$\Delta t=0$，经整理，得：
$$\Delta x=\left(1-\frac{u_f}{c}\right)\Delta x'<\Delta x'$$

故有：
$$\Delta x/\Delta t=\Delta x'/\Delta t'$$

4．由以上 2．和 3．两项可知：在**周方变换**（**广义的伽利略变换**）下，$\Delta x/\Delta t$ 是一个**不变量**（invariance）,即：在**周方变换**（**广义的伽利略变换**）下，在相对运动方向上两事件的**‘空间间隔Δx与时间间隔Δt之比率$\Delta x/\Delta t$’**是一个**不变量**。

周方变换的这一重要性质的意义在于：它使光速（光波传播速度）c 及参考系之间的相对速度 u 可被互作匀速直线相对运动的两个参考系作为‘两系通用的’参数而‘接纳’，因而光速 c 和参考系之间的相对速度 u 都能与两参考系之内的事件速度（质点速度）‘跨系叠加’。

~~~~~~

注 A：**‘动系时间膨胀’**就是**“从静系观测者看，动系时间过程显得变缓慢了”**。
注 B：**‘动系时间收缩’**就是**“从静系观测者看，动系时间过程显得变迅速了”**。
注 C：**‘动系空间膨胀（沿相对运动方向）’**就是**“从静系观测者看，动系距离长度显得变大了”**。
注 D：**‘动系空间收缩（沿相对运动方向）’**就是**“从静系观测者看，动系距离长度显得变小了”**。

（五）速度合成

定义：

1．$\dfrac{dx}{dt}=v_x$—某质点在 K 系内的速度，即**‘绝对速度’**；

2．$\dfrac{dx'}{dt'}=v'_x$—该质点在 K' 系内的速度，即**‘相对速度’**；

3．u— K' 系对 K 系的相对速度，即**‘牵连速度’**。

周方变换（广义的伽利略变换）为：

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\ t'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} dx'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(dx-udt) \\ dt'=\dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}dt \end{cases}$$
~~~~~~

从而得：

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{1}{1+\frac{u}{c}}(dx - udt)}{\frac{1}{1+\frac{u}{c}}dt} = \frac{dx}{dt} - u$$

即：

$$v_x' = v_x - u$$

由此得（同一参考系内的）**速度合成公式**：

$$\boxed{v_x = v_x' + u}$$

式中：v_x — 绝对速度；

v_x' — 相对速度；

u — 牵连速度。

如前面所述，在**周方变换（广义的伽利略变换）**下,沿相对运动方向的两事件的**‘空间间隔**Δx**与时间间隔**Δt**之比率**$\Delta x/\Delta t$**’**满足恒等式$\Delta x/\Delta t \equiv \Delta x'/\Delta t'$，即$\Delta x/\Delta t - \Delta x'/\Delta t' \equiv 0$，即：$\Delta x/\Delta t$是一个**不变量**（invariance）。也就是说，在**周方变换（广义的伽利略变换）**下**‘相对运动方向上速度的模**$\Delta x/\Delta t$**’**是一个不变量。因此，两参考系之间的相对速度u就可以与两参考系之内的事件速度（质点速度）v_x'、v_x跨系叠加：

$$v_x' = v_x - u \text{ 及 } v_x = v_x' + u$$

（同一参考系内）速度合成$v_x = v_x' + u$服从叠加法则。这一重要结论恰好证明**周方变换（广义的伽利略变换）**是正确的时空坐标变换。

由此可得：一个正确的时空坐标变换必须具有如下性质：在变换下**‘相对运动方向上速度的模**$\Delta x/\Delta t$**’是一个不变量，即恒等式**$\Delta x/\Delta t - \Delta x'/\Delta t' \equiv 0$**成立**，这样，两参考系之间的相对速度$u$与两参考系之内的事件速度$v_x'$、$v_x$就可以跨系叠加，使得（同一参考系内）速度合成服从叠加法则。否则，如果在变换下‘相

对运动方向上速度的模 $\Delta x/\Delta t$ ’不是不变量，那么两参考系之间的相对速度 u 就不能与两参考系之内的事件速度 v'_x、v_x 跨系叠加，（同一参考系内）速度合成就不服从叠加法则，这样的变换就不是正确的时空变换。例如，在**洛伦兹变换**下‘相对运动方向上速度的模 $\Delta x/\Delta t$ ’不是一个不变量（在**洛伦兹变换**下‘Δx 与 Δt 之乘积 $\Delta x \bullet \Delta t$ ’满足恒等式 $\Delta x \bullet \Delta t - \Delta x' \bullet \Delta t' \equiv 0$，即变换下的不变量是 $\Delta x \bullet \Delta t$，而不是**‘相对运动方向上速度的模** $\Delta x/\Delta t$ ’）。**洛伦兹变换**的速度变换式为 $v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2}$：

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u / c^2} \quad \Leftrightarrow \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u / c^2}$$

可以看到，**洛伦兹变换**的（同一参考系内）速度合成 $v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + v'_x u / c^2}$ 显然不服从叠加法则。这再一次证明**洛伦兹变换**不是正确的参考系时空坐标变换。

由此可得，两参考系之间的相对速度 u 能跨系叠加，使（同一参考系内）速度合成服从叠加法则，其充要条件是：**‘相对运动方向上速度的模** $\Delta x/\Delta t$ ’在时空坐标变换下是一个不变量，**周方变换（广义的伽利略变换）**能够满足这一条件，而**洛伦兹变换**则不满足这一条件。

周方变换（广义的伽利略变换）的速度合成 $v_x = v'_x + u$（即 $\dfrac{v_x}{c} = \dfrac{v'_x}{c} + \dfrac{u}{c}$），服从叠加法则，如图 12-3 所示。

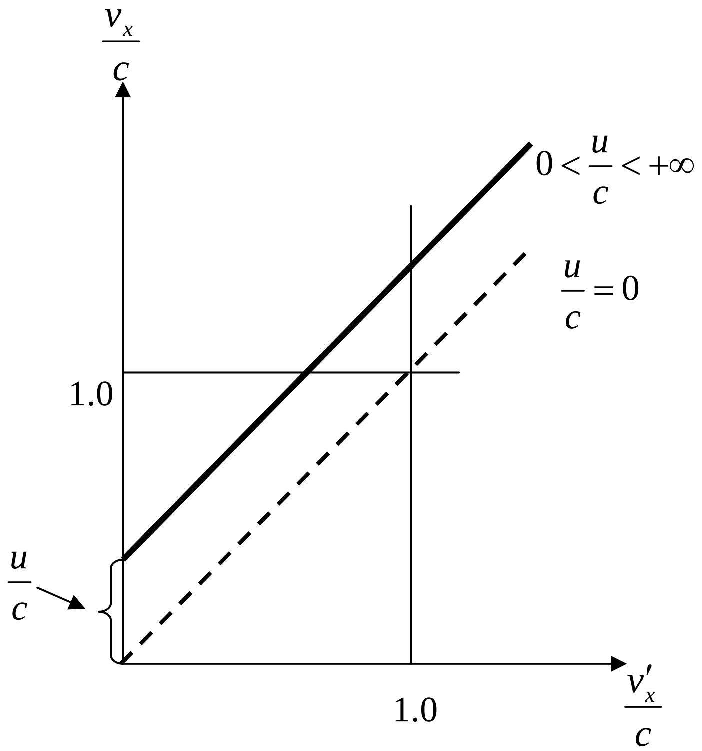


图 12-3

（六）加速度变换

从速度变换式

$$v'_x = v_x - u$$

得：

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \frac{d(v_x - u)}{dt} \bullet \frac{dt}{dt'}$$

$$= \frac{dv_x}{dt} \bullet \frac{dt}{dt'}$$

从而得：

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv_x}{dt} \bullet \frac{dt}{dt'} = a_x \bullet \frac{dt}{dt'} = a_x \bullet \left(1 + \frac{u}{c}\right)$$

即加速度变换式：

$$\boxed{a_x = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} \bullet a_x'}$$

（七）周方变换（广义的伽利略变换）下不存在‘质速关系’

参看图 12-4。

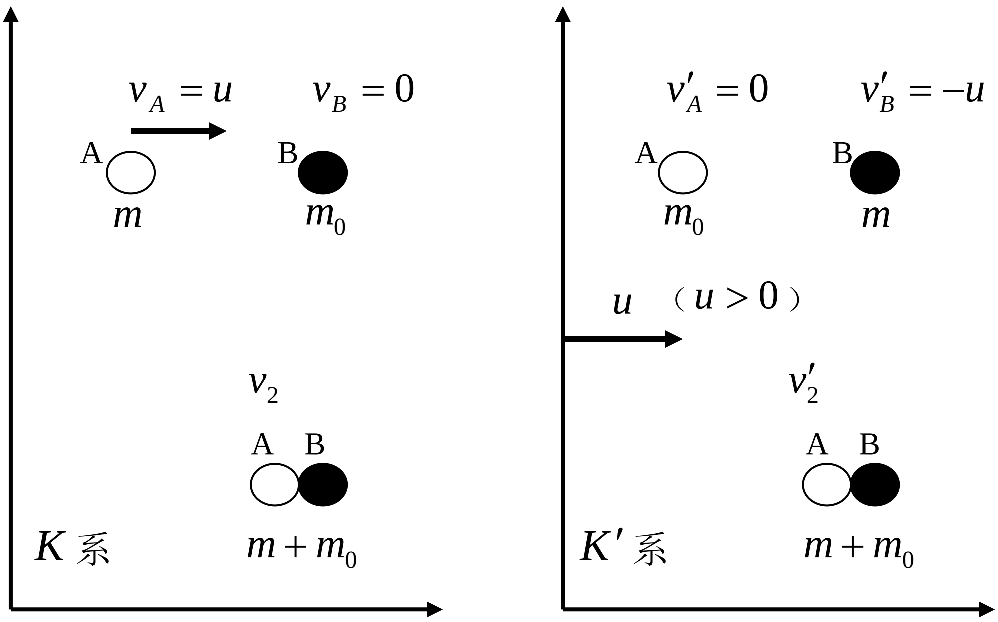


图 12-4

设有两个球：A 球和 B 球，（静止）质量均为 m_0；两球始终位于一条与 x 轴平行的直线上。又设：B 球静止（$v_B = 0$），A 球向右运动，以速度 $v_A = u$（速度 v_A 的方向沿 x 轴正方向）与 B 球碰撞。在两球碰撞过程中，从 K 系度量：B 球静止（$v_B = 0$），其质量为 m_0；A 球作速度为 v_A（$v_A = u$）的匀速运动，其质量为 m。又设两球发生的碰撞是完全非弹性碰撞，即两球在碰撞后合为一体，以同一速度 v_2 运动。

从 K 系度量：

B 球静止（$v_B=0$），A 球向右运动，以速度 $v_A=u$ 与 B 球碰撞。两球在碰撞合一之后的运动速度为 v_2 。

按动量守恒及质量守恒定律，有：

$$m_0 \bullet v_B + m \bullet v_A = (m+m_0) \bullet v_2$$

$$m_0 \bullet 0 + m \bullet u = (m+m_0) \bullet v_2$$

$$m \bullet u = (m+m_0) \bullet v_2$$

$$v_2 = \frac{m}{m+m_0} u \qquad (12\text{-}1)$$

从 K' 系度量：

A 球静止（$v'_A=0$），B 球向左运动，以速度 $v'_B=-u$ 与 A 球碰撞。两球在碰撞之前的运动速度分别为 v'_A 和 v'_B：

$$v'_A = v_A - u = u - u = 0$$

$$v'_B = v_B - u = 0 - u = -u$$

两球在碰撞合一之后的运动速度为 v'_2：

$$v'_2 = v_2 - u \qquad (12\text{-}2)$$

按动量守恒及质量守恒定律，有：

$$m_0 \bullet v'_A + m \bullet v'_B = (m+m_0) \bullet v'_2$$

$$m_0 \bullet 0 - m \bullet u = (m+m_0) \bullet v'_2$$

$$-m \bullet u = (m+m_0) \bullet v'_2$$

$$v'_2 = -\frac{m}{m+m_0} u \qquad (12\text{-}3)$$

将（12-1）式及（12-3）式代入（12-2）式：

$$-\frac{m}{m+m_0} u = \frac{m}{m+m_0} u - u$$

$$\frac{2m}{m+m_0}u = u$$

$$m + m_0 = 2m$$

$$\boxed{m = m_0}$$

由此可得，物体的质量不随参考系及物体的运动状态而变；物体的质量**是绝对的**，符合牛顿对‘质量’的定义。根本就不存在所谓的**‘质速关系’**。

（八）有质物体的总能量 E

$$dE = F \bullet dx = \frac{d}{dt}(mv_x) \bullet dx = m\frac{dv_x}{dt} \bullet dx = mdv_x \bullet v_x$$

考虑到关系式 $v_x = v'_x + u$ 及 $dv_x = dv'_x$，得：

$$dE = mdv_x \bullet v_x = mdv'_x(v'_x + u) = mv'_x dv'_x + mudv'_x$$

求积分，得：

$$E = \int_0^{v'_x} dE = \int_0^{v'_x} mv'_x dv'_x + \int_0^{v'_x} mudv'_x = \frac{1}{2}mv'^2_x + muv'_x$$

考虑到：

$$m = m_0$$

故有：

$$E = \frac{1}{2}m_0 v'^2_x + m_0 v'_x \bullet u = E_k + p_x \bullet u$$

式中：E— 总能量；

$E_k = \frac{1}{2}m_0 v'^2_x$— 固有动能；

$p_x = m_0 v'_x$— 固有动量；

u— 参考系相对速度。

$$E = E_k + p_x \bullet u$$

E— 总能量；

$E_k = \frac{1}{2} m_0 {v'_x}^2$— 固有动能；

$p_x = m_0 v'_x$— 固有动量；

u— 参考系相对速度。

设：有一个飞行器，携带核反应物质质量为m_0的核弹，飞行器抵达目标引爆核弹时的运动速度为u。核弹爆炸时地面观测站测得的核爆炸总能量为：

$$E = \frac{1}{2} m_0 c^2 + m_0 cu = m_0 c^2 (\frac{1}{2} + \frac{u}{c})$$

若$u << c$，即当飞行器在抵达目标引爆核弹时的运动速度u与真空中光速c相比较是很小时，或者是静止地在地面做核爆炸试验时，地面观测站测得的核爆炸总能量为：

$$E_{BZ} = \lim_{\frac{u}{c} \to 0} E = \lim_{\frac{u}{c} \to 0} \left[m_0 c^2 (\frac{1}{2} + \frac{u}{c}) \right] = \frac{1}{2} m_0 c^2$$

第十三章

周方变换（广义的伽利略变换）的重要性质

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

周方变换（广义的伽利略变换）的重要性质

时间变换式

$$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} t$$

$$(-c < u < +\infty)$$

无‘x项’：

‘时间’独立于‘空间’

‘时间’是相对的

‘同时’是绝对的

时间变换因子：

空间变换式

$$x' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}} (x - ut)$$

$$(-c < u < +\infty)$$

空间变换因子：

$$\frac{1}{1+\frac{u}{c}} < 1$$

— 是 u 的‘非偶函数’

相离运动中，时空变换系数为：

$$\left(1+\frac{u}{c}\right) > 1$$

— 动系内时间间隔及两点间距离按同等程度变大

相合运动中，时空变换系数为：

$$\left(1-\frac{u_f}{c}\right) < 1$$

— 动系内时间间隔及两点间距离按同等程度变小

（1）变换不变量：$[\Delta x / \Delta t]$

（相对运动方向上速度的模）

（2）不存在‘双生子悖论’

速度合成服从‘叠加法则’

不存在‘质速关系’

在 $c \to +\infty$ 时，或者在 c 为有限值而 $\frac{u}{c}$ 值很小时，退化为（经典的）伽利略变换：

$t' = t$，$x' = x - ut$

<table>
<tr><th>周方变换
（广义的伽利略变换）</th><th>（经典的）伽利略变换</th></tr>
<tr><td>$x' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut)$ ， $t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}t$
（$-c < u < +\infty$）
可适用于超光速相离运动</td><td>$x' = x-ut$ ， $t' = t$
[（经典）伽利略变换成立的前提条件：光信号传播速率为无穷大]</td></tr>
<tr><td>时间变换式 t' 中，无 ‘ x 项’：
$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}t$
‘时间’ 是相对的，独立于‘空间’</td><td>时间变换式 t' 中，无 ‘ x 项’：
$t' = t$
‘时间’是绝对的，独立于‘空间’</td></tr>
<tr><td>$\Delta t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}\Delta t$
‘同时’（‘不同时’）是绝对的</td><td>$\Delta t' = \Delta t$
‘同时’ （ ‘不同时’ ）是绝对的</td></tr>
<tr><td>相离运动中：
时间膨胀，空间也膨胀
相合运动中：
时间收缩，空间也收缩</td><td>时空既不膨胀，也不收缩</td></tr>
<tr><td colspan="2">不存在‘双生子悖论’</td></tr>
<tr><td>时空变换下的不变量是：
$[\Delta x / \Delta t]$</td><td>时空变换下的不变量是：
Δx ， Δt</td></tr>
<tr><td colspan="2">速度合成服从‘叠加法则’；不存在‘质速关系’</td></tr>
<tr><td>在 $c \to +\infty$ 时，或者在 c 为有限值而 $\frac{u}{c}$ 值很小时，退化为（经典的）伽利略变换：
$t' = t$ ， $x' = x-ut$</td><td></td></tr>
</table>

虽然，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。然而，将**周方变换**（**广义的伽利略变换**）同**洛伦兹变换**在形式上作一个对照，还是有意义的。

周方变换 （广义的伽利略变换）	洛伦兹变换
$x' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}(x-ut)$ $t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}t$ （$-c<u<+\infty$） 可适用于超光速相离运动	$x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(x-ut)$ $t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t-\dfrac{u}{c^2}x\right)$ （$-c<u<+c$） 不适用于超光速相对运动
时间变换式中无‘x项’： $t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}t$ ‘时间’是相对的，独立于‘空间’	时间变换式中有‘x项’： $t' = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}x + \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}t$ ‘时间’是相对的，不独立于‘空间’
$\Delta t' = \dfrac{1}{1+\frac{u}{c}}\Delta t$ —‘同时’（‘不同时’）是绝对的	$\Delta t' = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta x + \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t$ —‘同时’（‘不同时’）是相对的
相离运动中：　时间膨胀，空间也膨胀 相合运动中：　时间收缩，空间也收缩	相离运动中：　时间膨胀，空间收缩 相合运动中：　时间膨胀，空间收缩
不存在‘双生子悖论’	存在‘双生子悖论’
时空变换下的不变量是： $[\Delta x / \Delta t]$	时空变换下的不变量是： $[\Delta x \bullet \Delta t]$
速度合成服从‘叠加法则’； 不存在‘质速关系’	速度合成不服从‘叠加法则’； 存在‘质速关系’
在$c\to+\infty$时，或者在c为有限值而$\dfrac{u}{c}$值很小时，退化为（经典的）伽利略变换： $t'=t$，$x'=x-ut$	

第十四章

周方变换与洛伦兹变换的速度合成之比较

[本章中：(x',y',z',t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

（一）周方变换（广义的伽利略变换）

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}(x-ut) \\[2ex]
t' = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{c}}t
\end{cases}
$$

速度合成公式为： $v_x = v'_x + u$

周方变换（广义的伽利略变换）的速度合成$v_x = v'_x + u$（即$\dfrac{v_x}{c} = \dfrac{v'_x}{c} + \dfrac{u}{c}$），服从叠加法则，如图 14-1 所示。

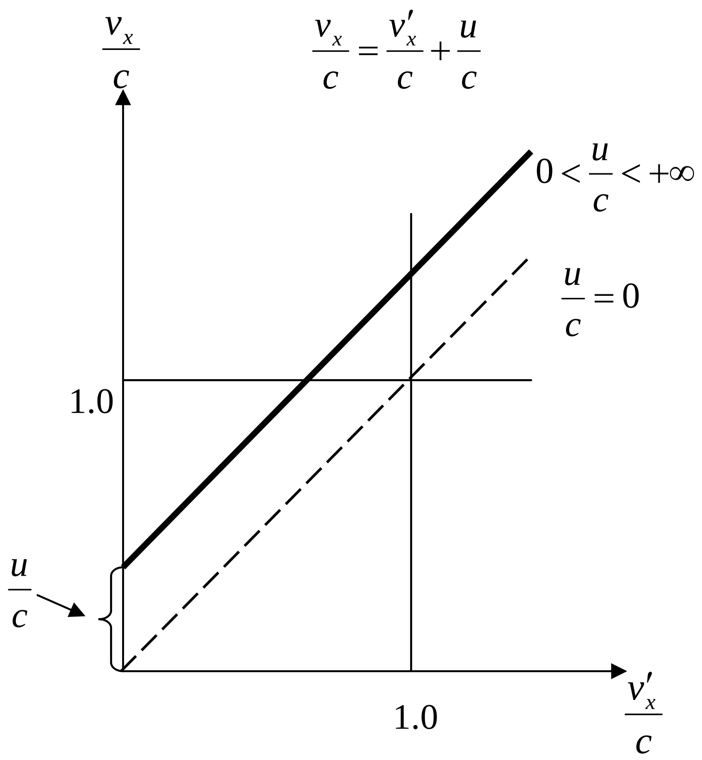


图 14-1

（二）洛伦兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}(x-ut) \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\left(t-\dfrac{u}{c^2}x\right) \end{cases}$$

速度变换式为：
$$v_x' = \frac{v_x - u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}$$

速度逆变换式（速度合成）为：

$$v_x'\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right) = v_x - u$$

$$v_x' - \frac{u}{c^2}v_x v_x' = v_x - u$$

$$v_x' + u = v_x + \frac{u}{c^2}v_x v_x'$$

$$v_x' + u = v_x\left(1+\frac{u}{c^2}v_x'\right)$$

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1+\dfrac{u}{c^2}v_x'}$$

洛伦兹变换的速度合成$v_x = \dfrac{v_x' + u}{1+\dfrac{u}{c^2}v_x'}$，即：

$$\frac{v_x}{c} = \frac{\dfrac{v_x'}{c}+\dfrac{u}{c}}{1+\dfrac{u}{c}\bullet\dfrac{v_x'}{c}}$$

它不服从叠加法则，如图 14-2 所示。

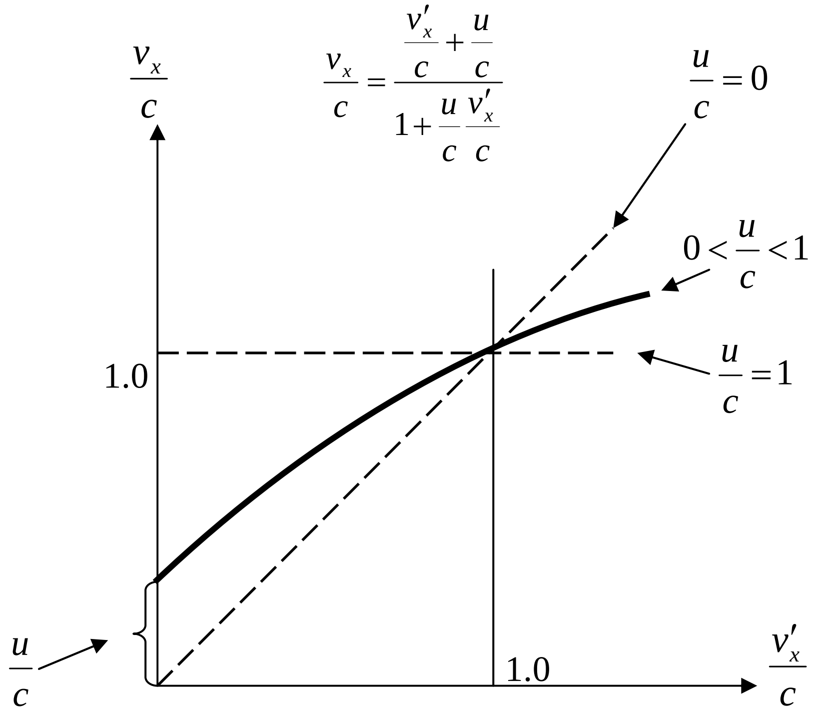


图 14-2

从速度合成公式 $v_x=\dfrac{v'_x+u}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x}$ 可知，当且仅当 $v'_x=c$（真空中光速）时才有 $v_x=c$，从图 14-2 也可看出，当且仅当 $\dfrac{v'_x}{c}=1.0$ 时才有 $\dfrac{v_x}{c}=1.0$，由此可知，速度合成 $v_x=\dfrac{v'_x+u}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x}$ 不服从叠加法则的**洛伦兹变换**，能够且只能够使光与电磁波动传播过程具有不变性，即能够且只能够使**“光传播方程不变原理”** $\{x'=ct'\}\Leftrightarrow\{x=ct\}$ 成立，仅此而已。

这样，**“洛伦兹变换数学式”**只不过是一个**‘仅能使光与电磁波动传播方程在互作匀速直线相对运动的两参考系内保持相同’**的数学转换式。

由此可见，针对麦克斯韦方程组，依据经验与假设总结出的那个**洛伦兹变换**充其量也只能使**光与电磁波动传播方程**具有不变性，仅此而已。**洛伦兹变换**并不是一个能使任何物质运动规律具有协变性的参考系时空坐标变换。

周方变换（广义的伽利略变换）的速度合成 $v_x=v'_x+u$（即 $\dfrac{v_x}{c}=\dfrac{v'_x}{c}+\dfrac{u}{c}$）

及**洛伦兹变换**的速度合成（即$\frac{v_x}{c}=\frac{\frac{v'_x}{c}+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\bullet\frac{v'_x}{c}}$）示于图 14-3。

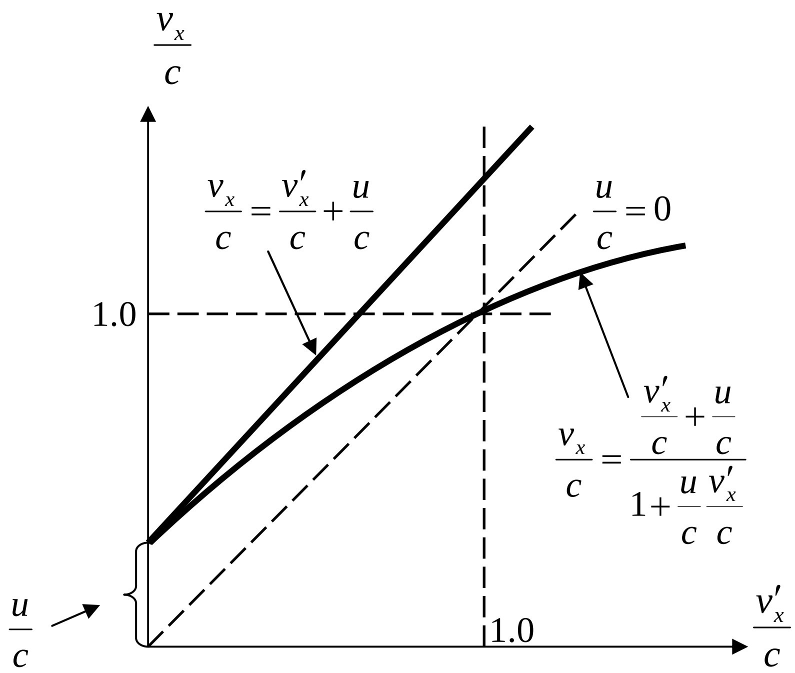


图 14-3

第十五章

周方变换（广义的伽利略变换）与“双生子悖论”

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

在 1911 年 4 月波隆哲学大会上，法国物理学家 P. 朗之万（Langevin P.）用双生子实验对狭义相对论的时间膨胀效应提出了质疑，设想的实验是这样的：一对双胞胎，一个留在地球上，另一个乘坐火箭到太空旅行，飞行速度接近光速。在太空旅行的那一个回到地球时只不过两岁，而他的兄弟早已老死了，因为地球上已过了 200 年了。这就是著名的**‘双生子悖论’**（Twin Paradox）。

在观测者与被观测对象之距离不断增大的相离运动中，**周方变换**（**广义的伽利略变换**）的时间变换式为$t = \dfrac{c+u}{c}t'$，产生‘动系时间膨胀’运动学观测效应。在观测者与被观测对象之距离不断减小的相合运动中时间变换式为$t = \dfrac{c-u}{c}t'$，产生‘动系时间收缩’运动学观测效应。然而，与**洛伦兹变换**有相同数学形式的**“爱因斯坦变换”**的时间变换因子在相离运动及相合运动中均为$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$，在两种运动中均产生‘动系时间膨胀’，因而产生**‘双生子悖论’**。**‘双生子悖论’**是法国物理学家朗之万教授在 1911 年为了质疑爱因斯坦的狭义相对论而设计的一个思维实验。这个**‘双生子悖论’**困扰了人们长达一百多年，至今未得其解，成为了最难以回答的疑难问题。

本章通过双生子中的**‘甲’**在运动中以一定的时间间隔向静止的**‘乙’**不断发送闪光信号的思维实验，破解了**‘双生子悖论’**的真谛，得到的结论是：**“不管甲怎样改变运动的路线和速度，以及运动经历多么长的时间，只要甲返回，最终与乙会合，会合时他们二人的钟就必定指在同一时刻，因此二人年龄仍是相同的”**。**‘双生子悖论’**足以证明爱因斯坦狭义相对论是逻辑上不自洽的谬论。

爱因斯坦狭义相对论的理论核心是与**洛伦兹变换**有完全相同数学形式的**“爱**

因斯坦变换”。**“爱因斯坦变换”** 的时间变换式为 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right)$，由此

式可得下式： $$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

令 $\Delta x'=0$，则有： $$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'>\Delta t'$$

$\Delta t'$ 为动系中同一位置上先后发生两个事件之间的（动系）时间间隔，即（静系）观测者评估的这两个事件之间的（动系）时间间隔。Δt 为（静系）观测者观测到该两事件时之间的（静系）时间间隔，即（静系）观测者观测到该两事件时按自己的钟进行度量的时间间隔。u 为两参考系之间的相对速度。c 为真空中光速。

$\Delta t>\Delta t'$ 说明：（静系）观测者观测到动系中同一位置上先后发生的两事件之间的，按观测者自己的钟进行度量的时间间隔（Δt），总是比该两事件发生之实际时间间隔 $\Delta t'$ 要大，也就是说，依（静系）观测者看来，似乎是动系的时间‘膨胀’了。上面这个式子的一个特点是：时间变换因子 $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ 是参考系相对速度 u 的偶函数，因此无论是在两参考系之距离不断增大的相离运动中（$u>0$），还是在两参考系之距离不断减小的相合运动中（$u<0$），均产生‘动系时间膨胀’运动学观测效应（$\Delta t>\Delta t'$）。

在相离运动（$u>0$）及相合运动（$u<0$）中均产生‘动系时间膨胀’运动学观测效应（$\Delta t>\Delta t'$），因此就产生了那个著名的 **‘双生子悖论’**。

法国物理学家朗之万教授在质疑爱因斯坦狭义相对论的时间膨胀效应时提出的 **‘双生子悖论’** 所设想的实验是：

有双生子甲、乙二人。甲乘坐高速飞船到 太空去旅行，乙留在地球上，等待甲归来。按地球上的乙对飞船上的甲进行观测，甲处在 运动中，甲的时间过程进行得比乙慢（‘动系时间膨胀’观测效应）。因此，地球上的乙认为，在若干年后飞船返回地球时，飞船上的甲比自己年轻。然而，按照狭义相对论的对称性原则，依飞船上的甲对地球上的乙进行观测，乙同时也处在（反向）运动中，乙的时间过程进行得比甲慢（‘动系时间膨胀’观测效应）。因此，飞船上的甲认为，飞船返回地球时地球上的乙比自己年轻。按照狭义相对论的对称性原则，甲、乙二人的结论各自都是正确的，然而，二人的结论却截然相反，互不相容，二者不能并存。这就是著名的**‘双生子悖论’**。

关于对狭义相对论时间膨胀效应所提出的质疑 —**‘双生子悖论’**，爱因斯坦生前曾作过解释。但他的解释极为简单粗糙，且模糊不清，而且仅仅是定性的，因而引起更多的歧义。他解释说，以近光速飞行的飞船在离开地球及返回地球时都要经历加速及减速过程，这样就不能认为飞船上的甲与地球上的乙相互对称而具有平等的地位，即飞船上的甲与地球上的乙分别处于非惯性系与惯性系，因而不是相互对称的。这样，爱因斯坦本人就否定了用（只涉及惯性系的）狭义相对论的理论来解释狭义相对论问题的可能性，因而陷入了‘自悖’而不能自拔的尴尬境地。

爱因斯坦狭义相对论中的**‘双生子悖论’**困扰了人们长达一百多年，给人们的思想造成很大混乱，至今没有获得一个合理的解释与答案。众多的对这个**‘双生子悖论’**的解释都是站不住脚的。人们给出了各种各样、五花八门的解释，但总是让人觉得十分牵强附会，不能使人信服。尤其是，更未见有人运用逻辑推演作出理论证明，从而得出确切的结论。众多的解释都是这个‘惯性系’、那个‘非惯性系’的；这个套用‘狭义相对论’，那个则套用‘广义相对论’的；只是倒来倒去，套来套去，在原地打转，让人晕头转向，莫衷一是，最后还是不能自圆其说。这种臆造出来的‘解释’只能是“以其昏昏，使人昭昭”。

上面已提到，在法国物理学家朗之万教授所设想的思维实验中，按照狭义相对论的理论原则，双生子甲、乙二人的结论虽然各自都是正确的，但二人的结论却是不相容的，不能并存。可行的二人一致的结论只能是如下三者之一：甲比乙年轻，乙比甲年轻，二人年岁相同。迄今，维护爱因斯坦狭

义相对论的人士共识的‘结论’是：“飞船返回地球时飞船上的甲比留在地球上的乙年轻” 。他们总是不厌其烦地‘解释’，直到说出“飞船上的甲比地球上的乙年轻” 这一预定的‘结论’才作罢休。此外，他们还总是抬出那个还没有经受‘可重复性检验’的所谓‘实验’来‘佐证’他们的所谓‘解释’（据说，最近还有人指出该‘实验’的结果似有作假之嫌）。

周方变换（广义的伽利略变换）的时间变换式为$t=\dfrac{c+u}{c}t'$，由此式可得：

$$\Delta t=\frac{c+u}{c}\Delta t'$$

上面这个式子的一个特点是：时间变换因子$\dfrac{c+u}{c}$是相对速度u的非偶函数。因此，在两参考系之距离不断增大的相离运动中（$u>0$），产生‘动系时间膨胀’运动学观测效应（$\Delta t>\Delta t'$）。在两参考系之距离不断减小的相合运动中（$u<0$），时间变换式为$t=\dfrac{c-u}{c}t'$，可得下式：

$$\Delta t=\frac{c-u}{c}\Delta t'$$

因而产生‘动系时间收缩’运动学观测效应（$\Delta t<\Delta t'$）。

我们通过飞船上的甲在运动中以一定时间间隔向地球上的乙不断发送闪光信号的思维实验，对**‘双生子悖论’**作出分析与论证，得到的结论是：**“不管甲怎样改变运动的路线和速度，以及运动经历多么长的时间，只要甲返回，最终与乙会合，会合时他们二人的钟就必定指在同一时刻，因此二人年龄仍是相同的”**。参看图 15-0。

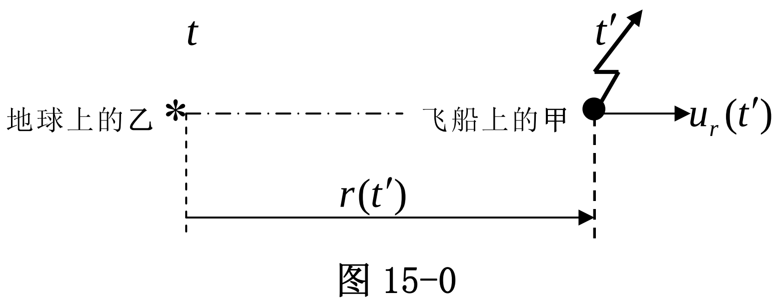


图 15-0

设：观测者*（地球上的乙）和被观测对象（飞船上的甲）各自持有一只钟，两只钟互相完全对准，而且在任何条件下都同步地运行。t 为乙的钟所指示的时刻，t' 为甲的钟所指示的时刻。在时刻 $t'=t=0$，甲与乙处在同一地点，两只钟互相对准到零点。

甲相对于乙作相离运动，如图 15-0 所示。图中 $u_r(t')$ 为在时刻 t' 甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度。在时刻 t'，甲离乙沿‘乙—甲’连线的径向距离 $r(t')$ 为：

$$r(t')=\int_0^{t'} u_r(w)dw$$

在时刻 t'，甲发出一道闪光，这道闪光脱离甲（光源）后即在真空中以速率 c 独立地向各方传播。当闪光传达到乙时，乙的钟恰好指在时刻 t：

$$t=t'+\frac{r(t')}{c}=t'+\frac{\int_0^{t'} u_r(w)dw}{c} \qquad (c\text{ 为真空中光速})$$

$\frac{r(t')}{c}$ 就是甲在时刻 t' 发出的这道闪光传达到乙所需的时间。因此，可将‘**甲发出闪光的时刻** t'’同‘**乙测到闪光的时刻** t’一一对应起来，实现这个对应的数学关系式就是上面这个式子：

$$t=t'+\frac{\int_0^{t'} u_r(w)dw}{c}$$

此式说明，在时刻 $t'=t=0$，甲与乙处在同一地点。在时刻 $t'=0$，甲发出第一道闪光，乙立即在时刻 $t=0$ 测到这道闪光。之后，在任一时刻 t'，甲发出一道闪光，这道闪光脱离甲（光源）后即在真空中以速率 c 独立地向各方传播，

当闪光传达到乙时，乙的钟恰好指在时刻t。

设：甲在某个时刻$t'=T'$返回到原出发地点，与留在那里的乙会合。此刻，甲发出最后一道闪光，乙立即就测到这道闪光。由于甲的运动轨迹是封闭的，故有：

$$r(T')=\int_0^{T'}u_r(w)dw=0$$

这样，当甲在时刻$t'=T'$返回到原出发地点与乙会合时，乙的钟指在时刻t：

$$t=T'+\frac{\int_0^{T'}u_r(w)dw}{c}=T'+\frac{r(T')}{c}=T'$$

即：
$$t=T'$$

此式说明，当甲在时刻$t'=T'$返回到原出发地点与乙会合时，甲和乙重又同处一地。这时，甲发出最后一道闪光，乙立即就测到这道闪光。此时甲、乙二人对钟，二人的钟指在同一时刻：$t=t'=T'$。

由此可得：**不管甲怎样改变运动的路线和速度，以及运动经历多么长的时间，只要甲返回与乙会合，会合时他们二人的钟就必定指在同一时刻。**

下面我们演示上面所作的分析。

（一）平面圆周匀速运动

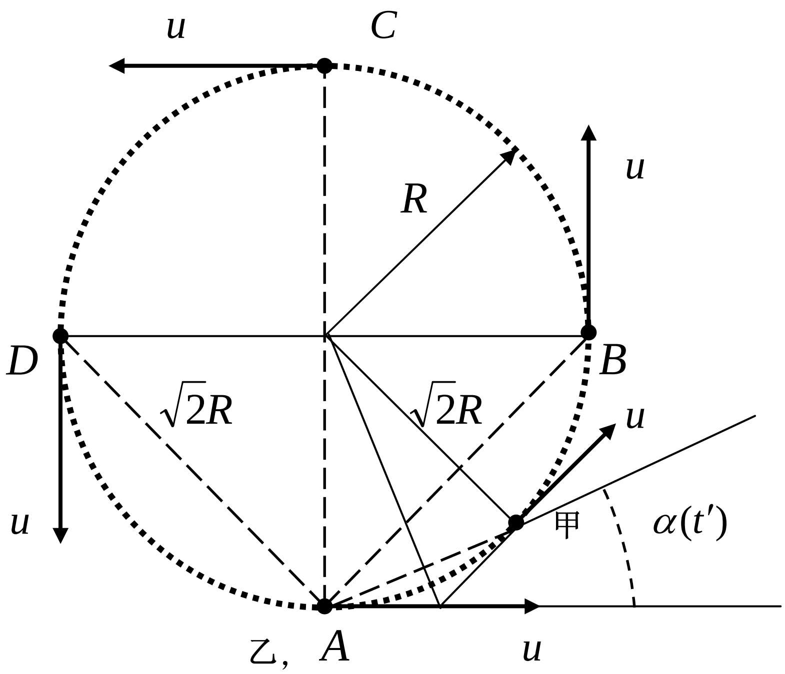


图 15-1

参看图 15-1。我们设计一个思维实验：在时刻$t'=t=0$，甲和乙二人处在同一地点A，并各自持有一只钟，两只钟互相完全对准到零点，而且在任何条件下都同步地运行。设乙停留在原地A，甲以接近光速c的速度u离开乙，作平面圆周匀速运动。甲在运动中按一定时间间隔发出闪光信号，乙不断收到甲发出的闪光信号。甲运行一个周期（T）后返回，在地点A与乙会合。

参看图 15-1。甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的速度是：

$$u_r(t')=u\bullet\cos\alpha(t')$$

式中：

$$2\bullet\alpha(t')=\left(\frac{2\pi}{T}t'\right)$$

得：

$$\alpha(t')=\frac{\pi}{T}t'$$

故有：$u_r(t')=u\bullet\cos(\frac{\pi}{T}t')$，$u_r(t')$的图形示于图 15-2。

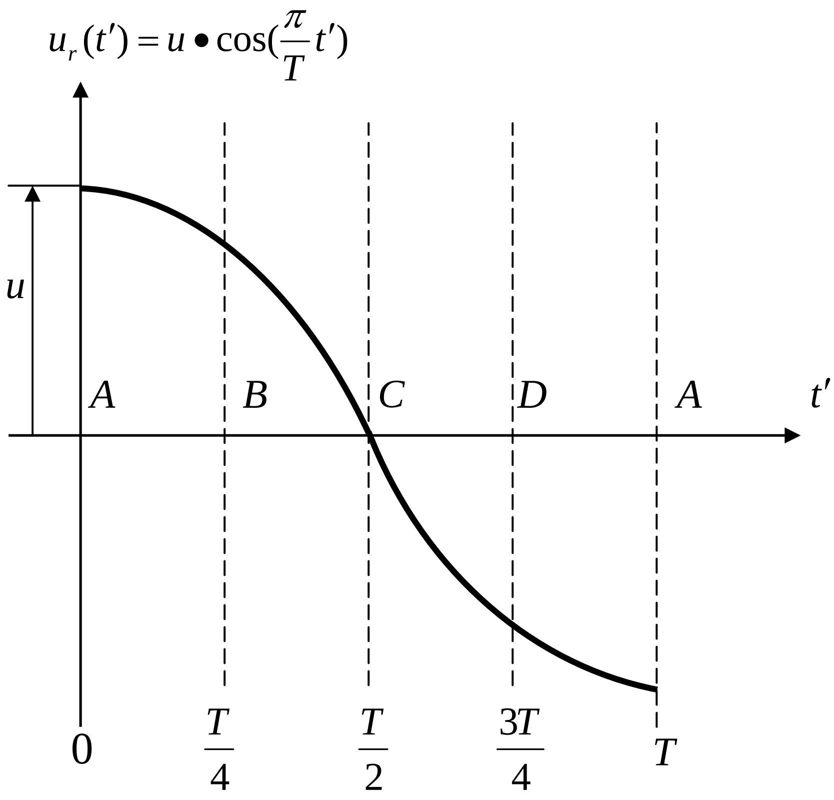


图 15-2

下面的 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 、$\overline{AA}$ 分别是各个时刻甲至乙的距离：

$$\overline{AB}=\int_0^{T/4}u_r dt'=\int_0^{T/4}u\bullet\cos(\frac{\pi}{T}t')dt'=\int_0^{T/4}\frac{uT}{\pi}\cos(\frac{\pi}{T}t')d(\frac{\pi}{T}t')$$

$$=\frac{uT}{\pi}\sin(\frac{\pi}{T}t')\Big|_{t'=0}^{t'=T/4}=\frac{uT}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{u}{2\pi/T}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}R$$

$$\overline{AC}=\int_0^{T/2}u_r dt'=\int_0^{T/2}u\bullet\cos(\frac{\pi}{T}t')dt'=\int_0^{T/2}\frac{uT}{\pi}\cos(\frac{\pi}{T}t')d(\frac{\pi}{T}t')$$

$$=\frac{uT}{\pi}\sin(\frac{\pi}{T}t')\Big|_{t'=0}^{t'=T/2}=\frac{uT}{\pi}=\frac{u}{2\pi/T}\times 2=2R$$

$$\overline{AD}=\int_0^{3T/4}u_r dt'=\int_0^{3T/4}u\bullet\cos(\frac{\pi}{T}t')dt'=\int_0^{3T/4}\frac{uT}{\pi}\cos(\frac{\pi}{T}t')d(\frac{\pi}{T}t')$$

$$=\frac{uT}{\pi}\sin(\frac{\pi}{T}t')\Big|_{t'=0}^{t'=3T/4}=\frac{uT}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{u}{2\pi/T}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}R$$

$$\overline{AA}=\int_0^T u_r dt'=\int_0^T u\bullet\cos(\frac{\pi}{T}t')dt'=\int_0^T\frac{uT}{\pi}\cos(\frac{\pi}{T}t')d(\frac{\pi}{T}t')$$

$$=\frac{uT}{\pi}\sin(\frac{\pi}{T}t')\Big|_{t'=0}^{t'=T}=0$$

（甲返回到原出发地点 A，与乙会合）

下面的 $t(\overline{AB})$、$t(\overline{AC})$、$t(\overline{AD})$、$t(\overline{AA})$ 分别为乙收到甲发出的闪光信号时，乙的钟所指示的各个时刻：

相离运动中，产生‘动系时间膨胀’：

$$t(\overline{AB})=\frac{T}{4}+\frac{\overline{AB}}{c}=\frac{T}{4}+\frac{\sqrt{2}R}{c}$$

$$t(\overline{AC})=\frac{T}{2}+\frac{\overline{AC}}{c}=\frac{T}{2}+\frac{2R}{c}>\frac{T}{2}$$

相合运动中，产生‘动系时间收缩’：

$$t(\overline{AD})=\frac{3T}{4}+\frac{\overline{AD}}{c}=\frac{3T}{4}+\frac{\sqrt{2}R}{c}$$

$$t(\overline{AA})=T+\frac{\overline{AA}}{c}=T+\frac{0}{c}=T$$

（甲返回到地点 A 与乙会合时，二人的钟指在同一时刻 T）

（二）沿空间封闭路线的运动

情况 1：甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$是任意的。

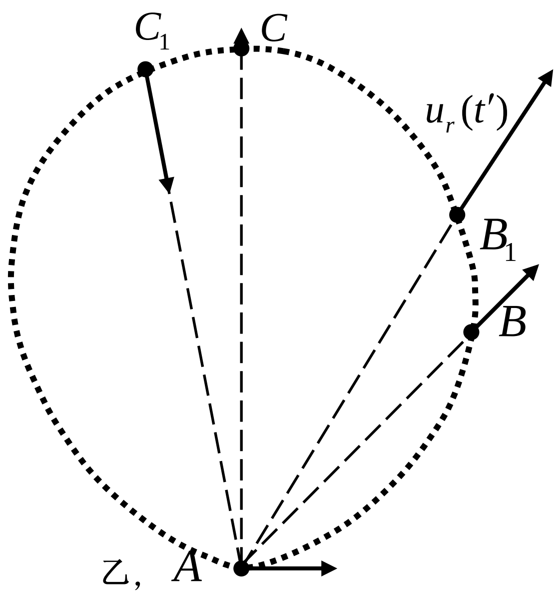


图 15-3

参看图 15-3。我们设计一个思维实验：设在甲出发地点A竖立一根很长很长的绝对刚性的钢轨，一头用球形铰链固定在地球上，另一头指向太空。钢轨可以任意地摆动，改变指向。钢轨上停泊一辆轨道车。

设：在时刻$t'=t=0$，甲和乙二人处在同一地点A，并各自持有一只钟，两只钟互相完全对准到零点，而且在任何条件下都同步地运行。乙留在原地A，甲坐上轨道车，轨道车沿轨道以速度$u_r(t')$离乙远去，此时钢轨也不断任意地摆动。这样，甲的运动是空间变速运动。甲在运动中按一定时间间隔（$\Delta t'$）发出闪光信号，乙不断收到甲发出的闪光信号。轨道车驶至轨道的C点（参看图 15-3）立即返回，驶回甲出发地点A，甲在出发地点A与乙会合。

甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$的图形示于图 15-4。

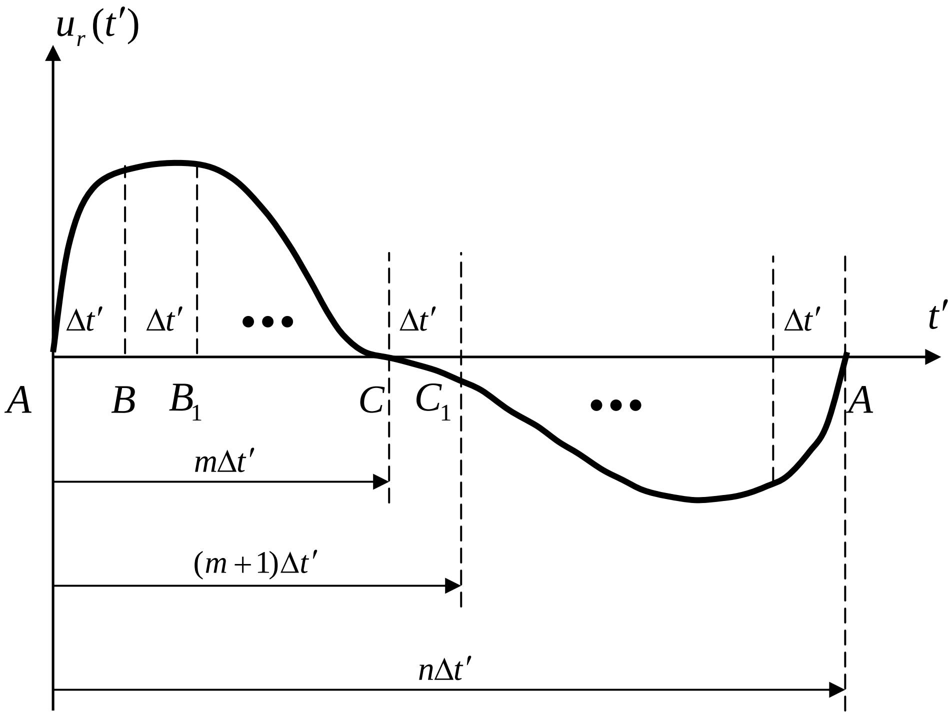


图 15-4

显然，有：

$$\int_0^{m\Delta t'} u_r(t')dt' = -\int_{m\Delta t'}^{n\Delta t'} u_r(t')dt'$$

从而得：

$$\int_0^{n\Delta t'} u_r(t')dt' = \int_0^{m\Delta t'} u_r(t')dt' + \int_{m\Delta t'}^{n\Delta t'} u_r(t')dt' = 0$$

下面的 $\overline{AB}$ 、$\overline{AB_1}$ 、$\overline{AC}$ 、$\overline{AC_1}$ 、$\overline{AA}$ 分别为各个时刻甲至乙的距离：

$$\overline{AB} = \int_0^{\Delta t'} u_r(t')dt'$$

$$\overline{AB_1} = \int_0^{\Delta t'} u_r(t')dt' + \int_{\Delta t'}^{2\Delta t'} u_r(t')dt' = \int_0^{2\Delta t'} u_r(t')dt'$$

$$\vdots$$

$$\overline{AC}=\int_0^{\Delta t'}u_r(t')dt'+\int_{\Delta t'}^{2\Delta t'}u_r(t')dt'+......+\int_{(m-1)\Delta t'}^{m\Delta t'}u_r(t')dt'=\int_0^{m\Delta t'}u_r(t')dt'$$

$$\overline{AC_1}=\left[\int_0^{\Delta t'}u_r(t')dt'+\int_{\Delta t'}^{2\Delta t'}u_r(t')dt'+......+\int_{(m-1)\Delta t'}^{m\Delta t'}u_r(t')dt'\right]+\int_{m\Delta t'}^{(m+1)\Delta t'}u_r(t')dt'$$

$$=\int_0^{m\Delta t'}u_r(t')dt'+\int_{m\Delta t'}^{(m+1)\Delta t'}u_r(t')dt'$$

•
•
•

$$\overline{AA}=\int_0^{\Delta t'}u_r(t')dt'+\int_{\Delta t'}^{2\Delta t'}u_r(t')dt'+......+\int_{(n-1)\Delta t'}^{n\Delta t'}u_r(t')dt'$$

$$=\int_0^{n\Delta t'}u_r(t')dt'=0$$

（甲返回到原出发地点 A，与乙会合）

下面的$t(\overline{AB})$、$t(\overline{AB_1})$、$t(\overline{AC})$、$t(\overline{AC_1})$、$t(\overline{AA})$分别为乙收到甲发出的闪光信号时，乙的钟所指示的各个时刻：

相离运动中，产生‘动系时间膨胀’：

$$t(\overline{AB})=\Delta t'+\frac{\overline{AB}}{c}=\Delta t'+\frac{1}{c}\int_0^{\Delta t'}u_r(t')dt'$$

$$t(\overline{AB_1})=2\Delta t'+\frac{\overline{AB_1}}{c}=2\Delta t'+\frac{1}{c}\int_0^{2\Delta t'}u_r(t')dt'$$

•
•
•

$$t(\overline{AC}) = m\Delta t' + \frac{\overline{AC}}{c} = m\Delta t' + \frac{1}{c}\int_{0}^{m\Delta t'} u_r(t')dt' > m\Delta t'$$

相合运动中，产生‘动系时间收缩’：

$$t(\overline{AC_1}) = (m+1)\Delta t' + \frac{\overline{AC_1}}{c} = (m+1)\Delta t' + \frac{1}{c}\left[\int_{0}^{m\Delta t'} u_r(t')dt' + \int_{m\Delta t'}^{(m+1)\Delta t'} u_r(t')dt'\right]$$

$$\vdots$$

$$t(\overline{AA}) = n\Delta t' + \frac{\overline{AA}}{c} = n\Delta t' + \frac{1}{c}\int_{0}^{n\Delta t'} u_r(t')dt' = n\Delta t'$$

（甲返回到地点 A 与乙会合时，二人的钟指在同一时刻 $n\Delta t'$ ）

表 15-1

	甲发出信号（序号）	甲的钟指示时刻	乙收到信号时，钟指示时刻：
甲离去过程	**1**	$\Delta t'$	$\Delta t' + \frac{1}{c}\int_0^{\Delta t'} u_r(t')dt'$
	2	$2\Delta t'$	$2\Delta t' + \frac{1}{c}\int_0^{2\Delta t'} u_r(t')dt'$
	⋮	⋮	⋮
	m	$m\Delta t'$	$m\Delta t' + \frac{1}{c}\int_0^{m\Delta t'} u_r(t')dt'$
甲返回过程	**m+1**	$(m+1)\Delta t'$	$(m+1)\Delta t' + \frac{1}{c}\left[\int_0^{m\Delta t'} u_r(t')dt' + \int_{m\Delta t'}^{(m+1)\Delta t'} u_r(t')dt'\right]$
	⋮	⋮	⋮
	n	$n\Delta t'$	$n\Delta t' + \frac{1}{c}\left[\int_0^{m\Delta t'} u_r(t')dt' + \int_{m\Delta t'}^{n\Delta t'} u_r(t')dt'\right]$ $= n\Delta t' + \frac{1}{c}\int_0^{n\Delta t'} u_r(t')dt'$ $= n\Delta t'$

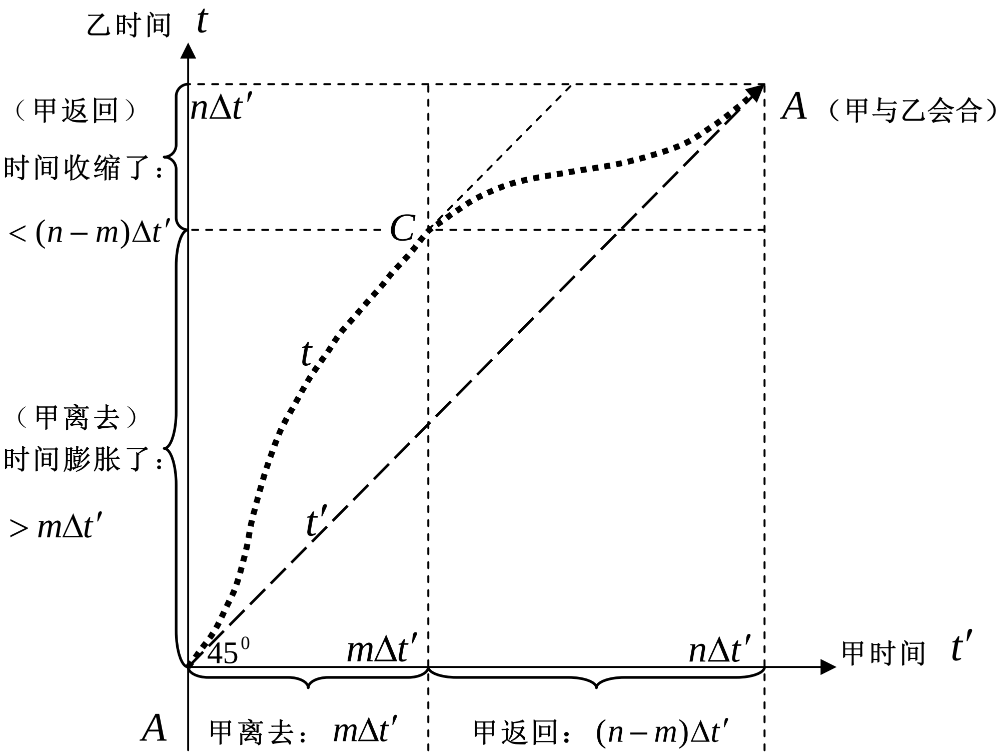


图 15-5

情况 2：甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$为：

‘相离’时为匀速，‘相合’时为匀速，但两个速度不相同。

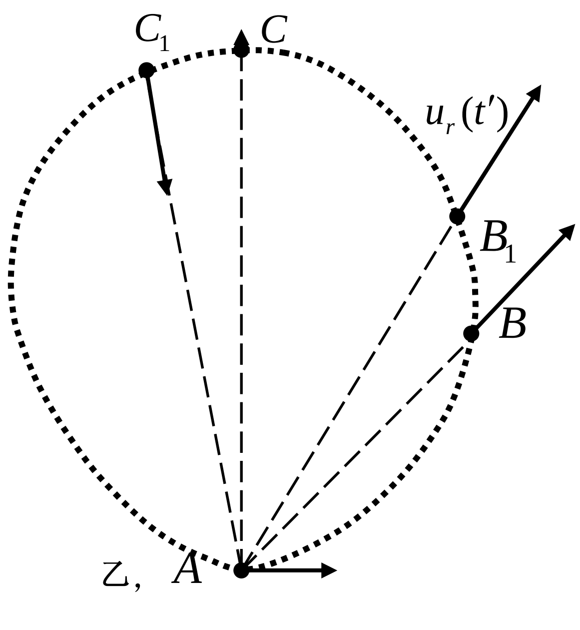


图 15-6

甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$的图形示于图 15-7。

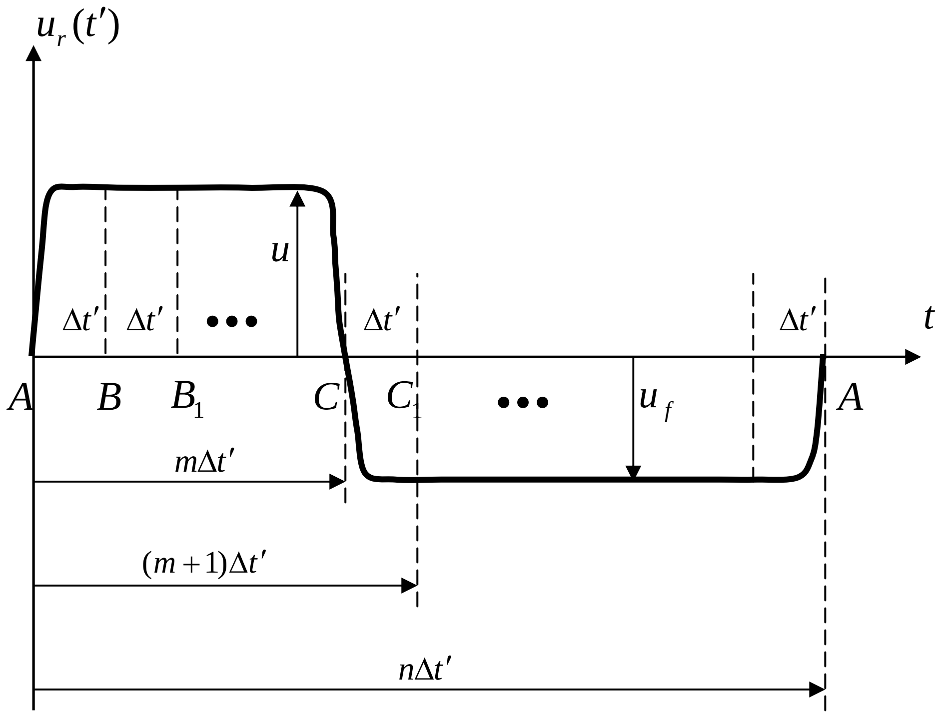


图 15-7

显然，有：

$$u \bullet m\Delta t' = u_f \bullet (n-m)\Delta t'$$

下面的$\overline{AB}$、$\overline{AB_1}$、$\overline{AC}$、$\overline{AC_1}$、$\overline{AA}$分别是各个时刻甲至乙的距离：

$$\overline{AB} = u\Delta t'$$

$$\overline{AB_1} = 2u\Delta t'$$

$$\vdots$$

$$\overline{AC} = mu\Delta t'$$

$$\overline{AC_1} = mu\Delta t' - u_f\Delta t'$$

$$\vdots$$

$$\overline{AA} = mu\Delta t' - (n-m)u_f\Delta t' = 0$$

（甲返回到原出发地点A，与乙会合）

下面的$t(\overline{AB})$、$t(\overline{AB_1})$、$t(\overline{AC})$、$t(\overline{AC_1})$、$t(\overline{AA})$分别为乙收到甲发出的闪光信号时，乙的钟所指示的各个时刻：

相离运动中，产生‘动系时间膨胀’：

$$t(\overline{AB}) = \Delta t' + \frac{\overline{AB}}{c} = \Delta t' + \frac{u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet \Delta t'$$

$$t(\overline{AB_1}) = 2\Delta t' + \frac{\overline{AB_1}}{c} = 2\Delta t' + \frac{2u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet 2\Delta t'$$

•

•

•

$$t(\overline{AC}) = m\Delta t' + \frac{\overline{AC}}{c} = m\Delta t' + \frac{mu\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' > m\Delta t'$$

相合运动中，产生‘动系时间收缩’：

$$t(\overline{AC_1}) = (m+1)\Delta t' + \frac{\overline{AC_1}}{c} = (m+1)\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - u_f \Delta t'}{c}$$

$$= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u_f}{c}\Delta t'$$

•

•

•

$$t(\overline{AA}) = n\Delta t' + \frac{\overline{AA}}{c} = n\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - (n-m)u_f \Delta t'}{c}$$

$$= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u_f}{c} \bullet (n-m)\Delta t'$$

$$= n\Delta t'$$

（甲返回到地点A与乙会合时，二人的钟指在同一时刻$n\Delta t'$）

表 15-2

	甲发出信号（序号）	甲的钟指示时刻	乙收到信号时，钟指示时刻：
甲离去过程	**1**	$\Delta t'$	$\Delta t' + \frac{u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet \Delta t'$
	2	$2\Delta t'$	$2\Delta t' + \frac{2u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet 2\Delta t'$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	$m\Delta t'$	$m\Delta t' + \frac{mu\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t'$
甲返回过程	**M+1**	$(m+1)\Delta t'$	$(m+1)\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - u_f \Delta t'}{c}$ $= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u_f}{c}\Delta t'$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	$n\Delta t'$	$n\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - (n-m)u_f \Delta t'}{c}$ $= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u_f}{c} \bullet (n-m)\Delta t'$ $= n\Delta t'$

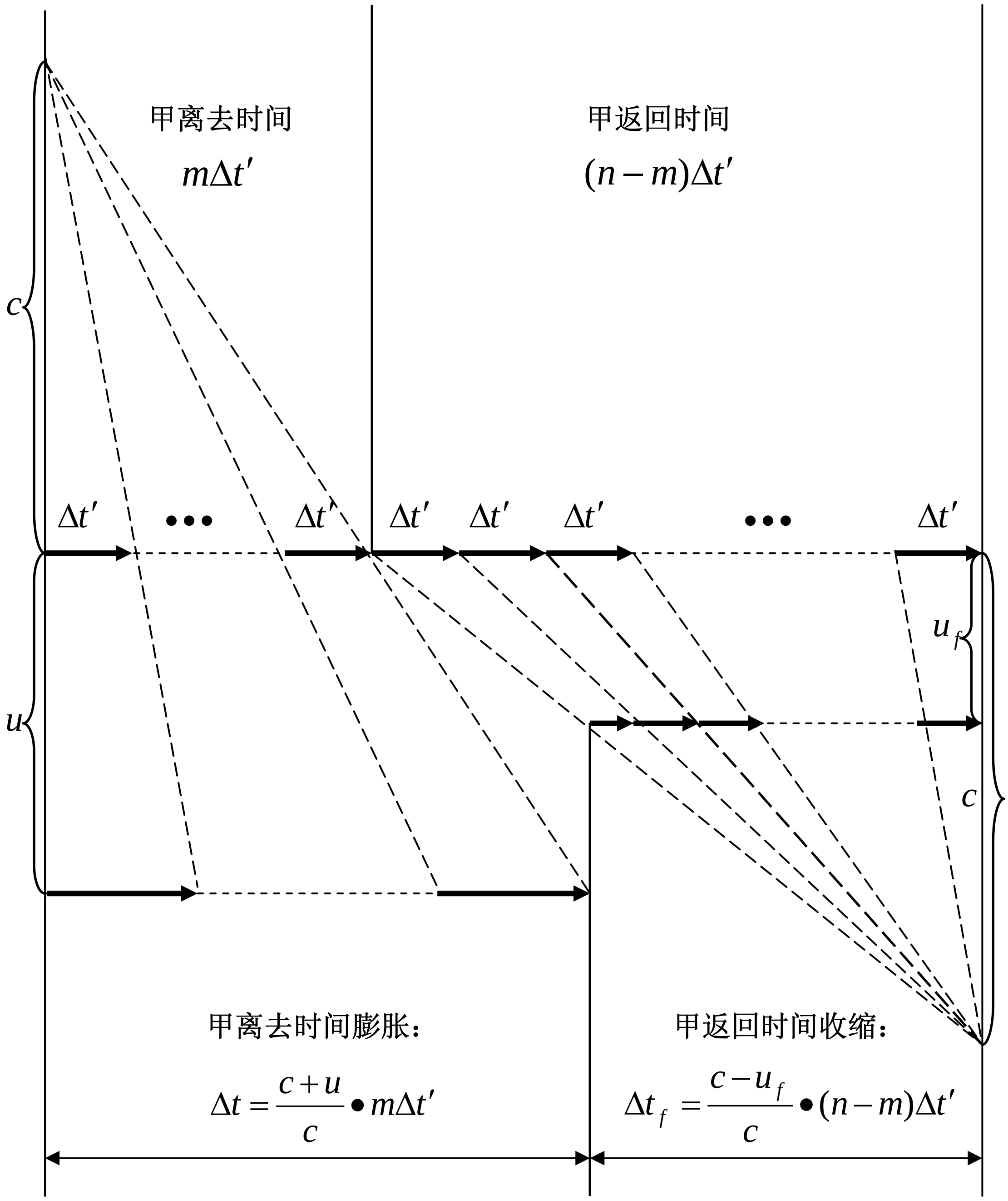

甲离去时间
$m\Delta t'$
甲返回时间
$(n-m)\Delta t'$
c
u
$\Delta t'$
$\Delta t'$
$\Delta t'$
$\Delta t'$
$\Delta t'$
$\Delta t'$
u_f
c
甲离去时间膨胀：
$\Delta t = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t'$
甲返回时间收缩：
$\Delta t_f = \frac{c-u_f}{c} \bullet (n-m)\Delta t'$

图 15-8

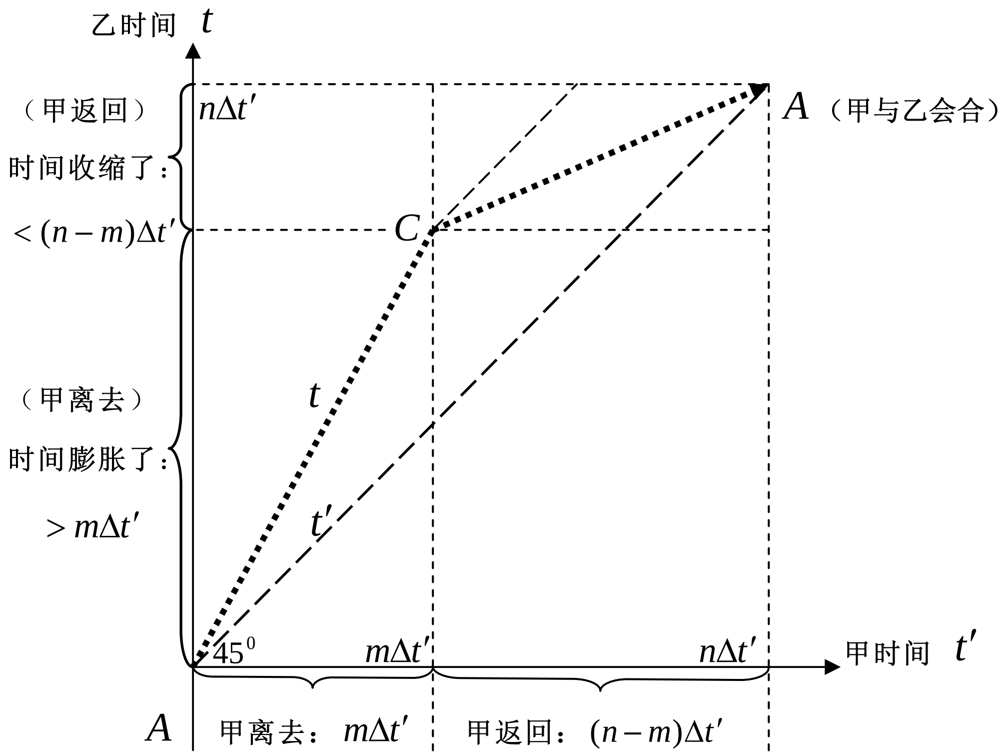


图 15-9

情况 3：甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$为：

‘相离’时为匀速，‘相合’时为匀速，而且两个速度相同。

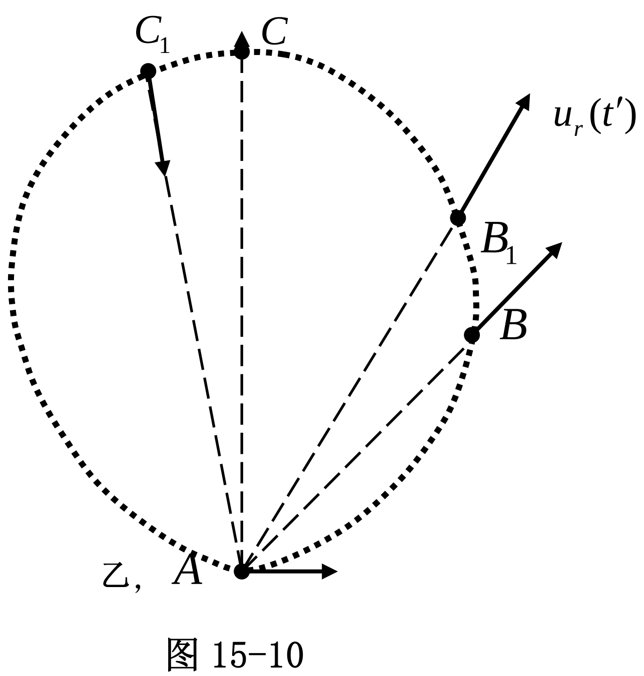


图 15-10

甲相对于乙沿‘乙—甲’连线的径向速度$u_r(t')$的图形示于图 15-11。

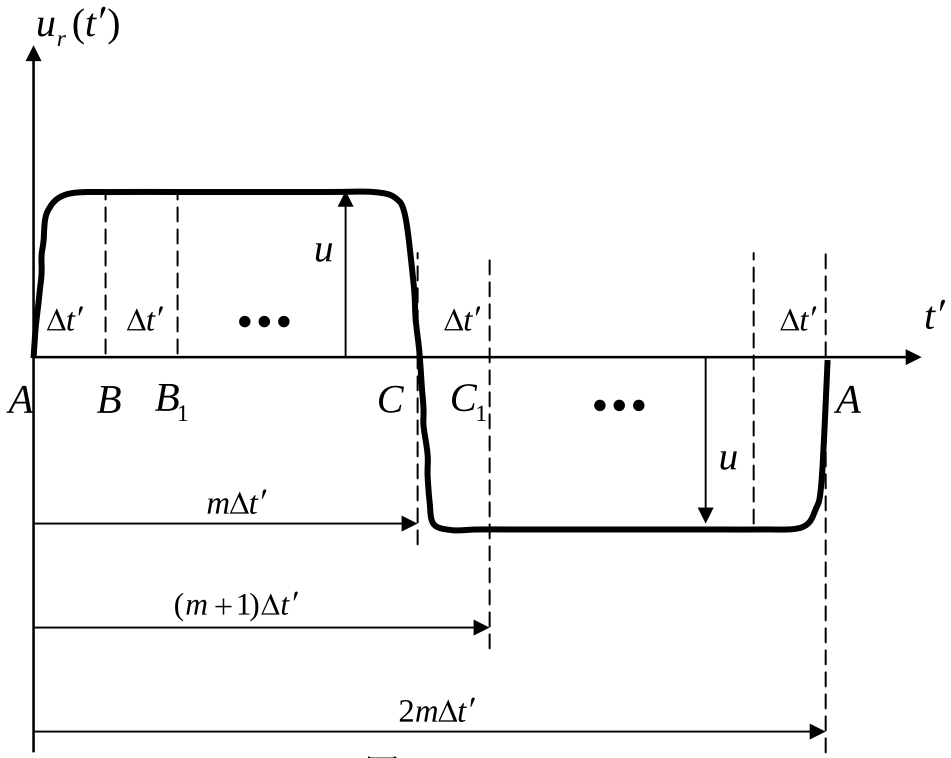


图 15-11

下面的$\overline{AB}$、$\overline{AB_1}$、$\overline{AC}$、$\overline{AC_1}$、$\overline{AA}$分别为各个时刻甲至乙的距离：

$$\overline{AB} = u\Delta t'$$

$$\overline{AB_1} = 2u\Delta t'$$

$$\vdots$$

$$\overline{AC} = mu\Delta t'$$

$$\overline{AC_1} = mu\Delta t' - u\Delta t' = (m-1)u\Delta t'$$

$$\vdots$$

$$\overline{AA} = mu\Delta t' - (2m-m)u\Delta t' = mu\Delta t' - mu\Delta t' = 0$$

（甲返回到原出发地点A，与乙会合）

下面的$t(\overline{AB})$、$t(\overline{AB_1})$、$t(\overline{AC})$、$t(\overline{AC_1})$、$t(\overline{AA})$分别为乙收到甲发出的闪光信号时，乙的钟所指示的各个时刻：

相离运动中，产生‘动系时间膨胀’：

$$t(\overline{AB}) = \Delta t' + \frac{\overline{AB}}{c} = \Delta t' + \frac{u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet \Delta t'$$

$$t(\overline{AB_1}) = 2\Delta t' + \frac{\overline{AB_1}}{c} = 2\Delta t' + \frac{2u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet 2\Delta t'$$

•

•

•

$$t(\overline{AC}) = m\Delta t' + \frac{\overline{AC}}{c} = m\Delta t' + \frac{mu\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' > m\Delta t'$$

相合运动中，产生‘动系时间收缩’：

$$t(\overline{AC_1}) = (m+1)\Delta t' + \frac{\overline{AC_1}}{c} = (m+1)\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - u\Delta t'}{c}$$

$$= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u}{c} \bullet \Delta t'$$

•

•

•

$$t(\overline{AA}) = 2m\Delta t' + \frac{\overline{AA}}{c} = 2m\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - mu\Delta t'}{c}$$

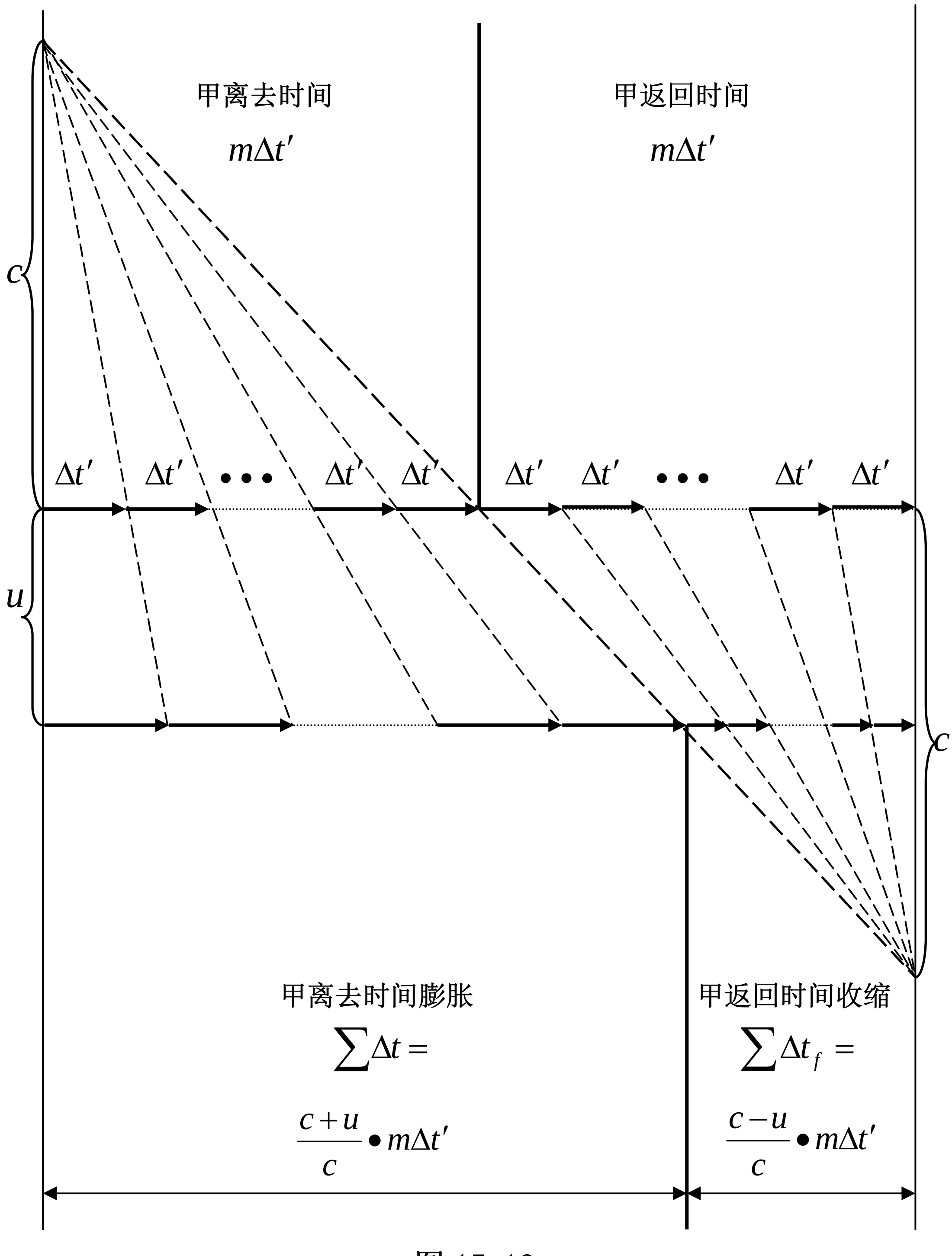
$$= \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u}{c} \bullet m\Delta t'$$

$$= 2m\Delta t'$$

（甲返回到地点A与乙会合时，二人的钟指在同一时刻$2m\Delta t'$）

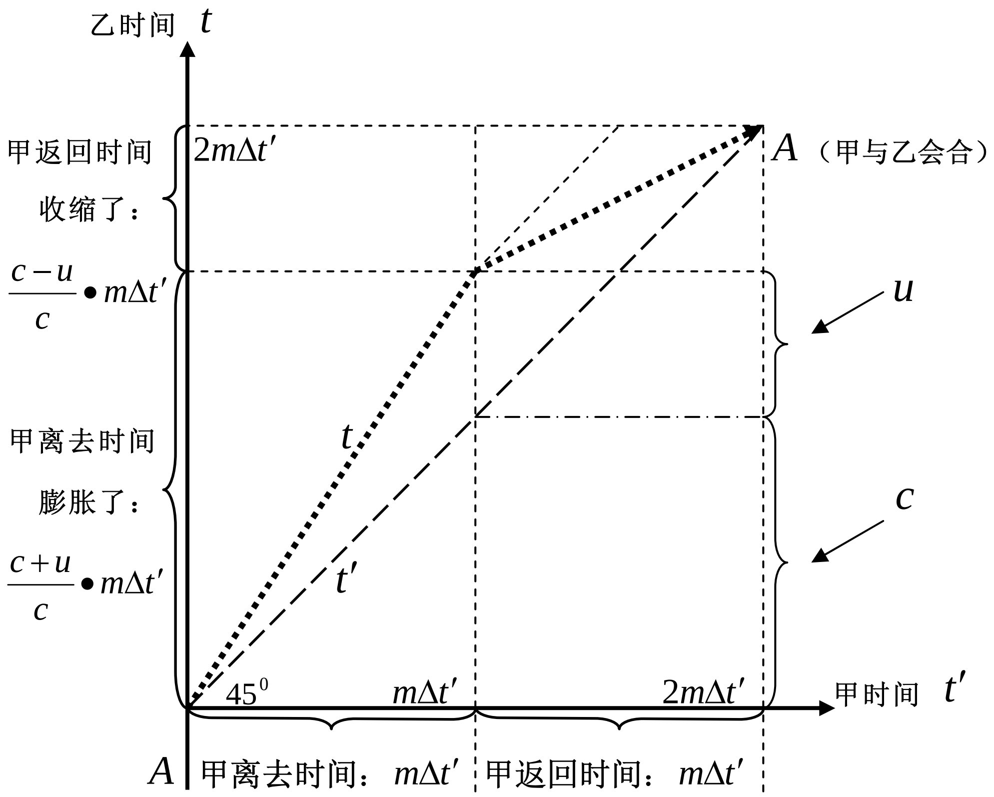
表 15-3

	甲发出信号（ 序号 ）	甲的钟指示时刻	乙收到信号时，钟指示时刻：
甲离去过程	**1**	$\Delta t'$	$\Delta t' + \frac{u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet \Delta t'$
	2	$2\Delta t'$	$2\Delta t' + \frac{2u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet 2\Delta t'$
	• • •	• • •	• • •
	m	$m\Delta t'$	$m\Delta t' + \frac{mu\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t'$
甲返回过程	**M+1**	$(m+1)\Delta t'$	$(m+1)\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - u\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u}{c} \bullet \Delta t'$
	• • •	• • •	• • •
	2m	$2m\Delta t'$	$2m\Delta t' + \frac{mu\Delta t' - mu\Delta t'}{c} = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t' + \frac{c-u}{c} \bullet m\Delta t' = 2m\Delta t'$



甲离去时间
$m\Delta t'$
甲返回时间
$m\Delta t'$
c
$\Delta t'$ $\Delta t'$ ••• $\Delta t'$ $\Delta t'$ $\Delta t'$ $\Delta t'$ ••• $\Delta t'$ $\Delta t'$
u
c
甲离去时间膨胀
$\sum \Delta t = \frac{c+u}{c} \bullet m\Delta t'$
甲返回时间收缩
$\sum \Delta t_f = \frac{c-u}{c} \bullet m\Delta t'$

图 15-12



乙时间 t
甲返回时间
收缩了：
$\frac{c-u}{c}\bullet m\Delta t'$
甲离去时间
膨胀了：
$\frac{c+u}{c}\bullet m\Delta t'$
$2m\Delta t'$
A（甲与乙会合）
u
c
t
t'
45^0
$m\Delta t'$
$2m\Delta t'$
甲时间 t'
A
甲离去时间：$m\Delta t'$
甲返回时间：$m\Delta t'$

图 15-13

第十六章

周方变换（广义的伽利略变换）与多普勒效应

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

对于**周方变换（广义的伽利略变换）**，在两参考系之距离不断增大的**相离运动**中，发生**‘动系时间间隔变大’**（**‘动系时间膨胀’**）运动学效应。在两参考系之距离不断减小的**相合运动**中，发生**‘动系时间间隔变小’**（**‘动系时间收缩’**）运动学效应。产生**多普勒效应**的原因是：

1．光源对观测者有相对运动（u）；

2．真空中光传播速率为恒定值（c），与光源对观测者之相对运动（u）无关。

（A） 相离运动中**周方变换（广义的伽利略变换）**的时间变换式为：

$$t' = \frac{1}{1+\frac{u}{c}}t \qquad (0 < u < +\infty)$$

即：

$$t = \left(1+\frac{u}{c}\right)t'$$

在静系观测者看来，动系时间间隔变大了：

$$\Delta t = \left(1+\frac{u}{c}\right)\Delta t' > \Delta t'$$

（B） 相合运动中**周方变换（广义的伽利略变换）**的时间变换式为：

$$t' = \frac{1}{1-\frac{u}{c}}t \qquad (0 < u < c)$$

即：

$$t = \left(1-\frac{u}{c}\right)t'$$

在静系观测者看来，动系时间间隔变小了：

$$\Delta t = \left(1-\frac{u}{c}\right)\Delta t' < \Delta t'$$

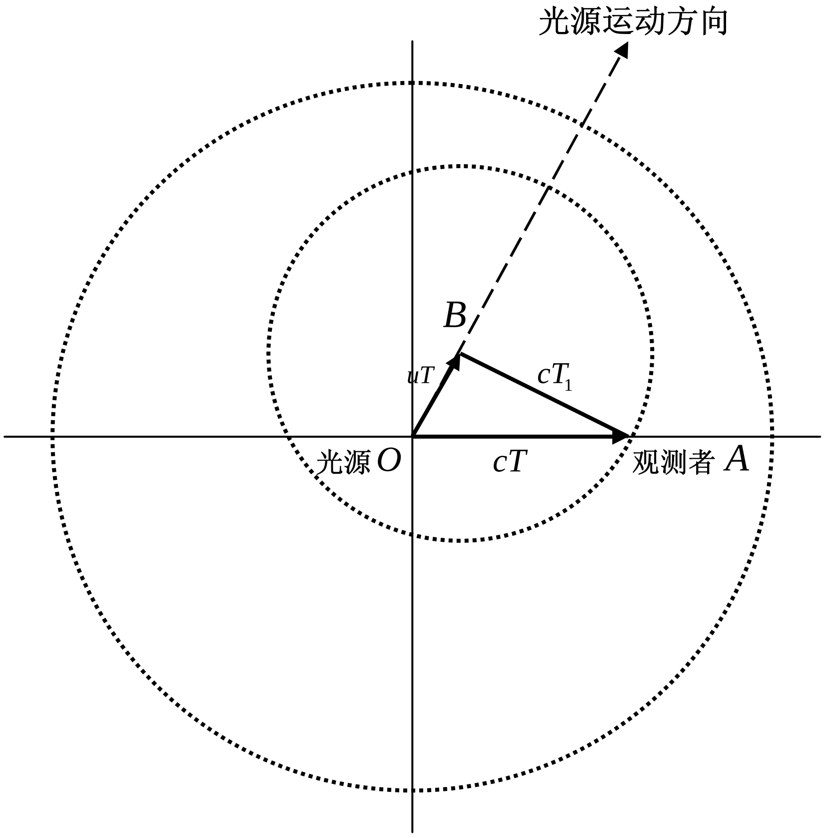


图 16-1

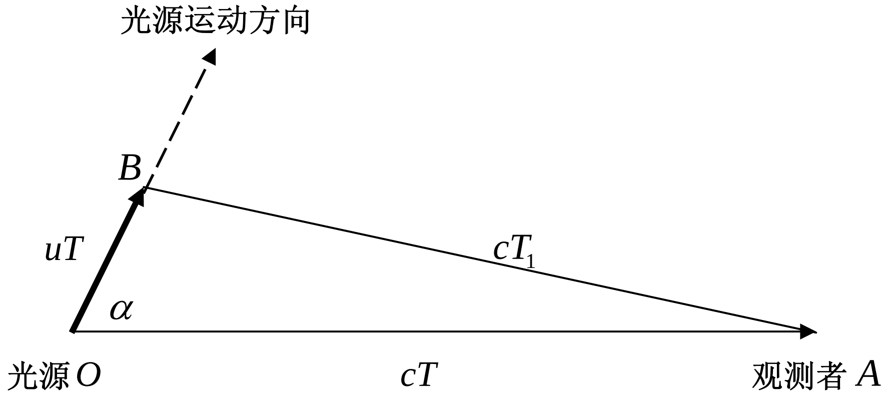


图 16-2

图 16-1 及图 **16-**2 中：c—真空中光速；T—光波的发射周期（即**‘固有周期’**）；T_1—光波的接收周期（即**‘多普勒周期’**）。光源运动速度 u 对**‘光源 O—观测者 A’**连线的夹角为 α，即 $\overline{OB}$ 对 $\overline{OA}$ 的夹角为 α，即图中 $\angle BOA = \alpha$。

参看上面的**图 16-1** 及**图 16-2**。$\left|\overline{OA}\right| = cT$ 及 $\left|\overline{BA}\right| = cT_1$。$\left|\overline{OA}\right| = cT$ 为光波在固有周期内的行程，$\left|\overline{BA}\right| = cT_1$ 为光波在多普勒周期内的行程。$\left|\overline{OB}\right| = uT$ 为光源（发光体）在固有周期内的行程。

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$$

得：

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$$

从而有：

$$\left|\overline{BA}\right| = \sqrt{\left|\overline{OA}\right|^2 + \left|\overline{OB}\right|^2 - 2 \bullet \left|\overline{OA}\right| \bullet \left|\overline{OB}\right| \cos \angle BOA}$$

即：

$$cT_1 = \sqrt{(cT)^2 + (uT)^2 - 2(cT)(uT)\cos\alpha}$$

$$= cT\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2} - 2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

从而得：

$$T_1 = T\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2} - 2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

（$u > 0$）

考虑到（发射）光波的**‘固有频率’**为 $\eta = 1/T$ 及（接收）光波的**‘多普勒频率’**为 $\eta_1 = 1/T_1$，得：

$$\boxed{\begin{array}{c} \eta_1 = \dfrac{\eta}{\sqrt{1 + \dfrac{u^2}{c^2} - 2\dfrac{u}{c}\cos\alpha}} \\ (u > 0) \end{array}}$$

式中：c — 真空中光速；u — 光源运动速度；α — 光源运动速度 u 对**‘光源 O—观测者 A’**连线的夹角；$\eta = 1/T$ —（发射）光波的固有频率；$\eta_1 = 1/T_1$ —（接收）光波的多普勒频率。

（一）纵向多普勒效应

（**A**） 当光源O向着观测者A运动时，$\alpha=0$；这时发生**‘多普勒蓝移’**：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}}=\left(1-\frac{u}{c}\right)T$$

得：

$$\boxed{\eta_1=\frac{\eta}{1-\frac{u}{c}}>\eta \quad (0<u<c)}$$

（B） 当光源O背离观测者A运动时，$\alpha=\pi$；这时发生**‘多普勒红移’**：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}+2\frac{u}{c}}=\left(1+\frac{u}{c}\right)T$$

得：

$$\boxed{\eta_1=\frac{\eta}{1+\frac{u}{c}}<\eta \quad (0<u<+\infty)}$$

（二）侧向多普勒效应

若光源运动速度u对**‘光源O—观测者A’**连线的夹角α处在以下范围：

$0<\alpha<\pi/2$ 及 $\pi/2<\alpha<\pi$，则有：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}$$

得：

$$\boxed{\eta_1=\frac{\eta}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}-2\frac{u}{c}\cos\alpha}}}$$

（三）横向多普勒效应

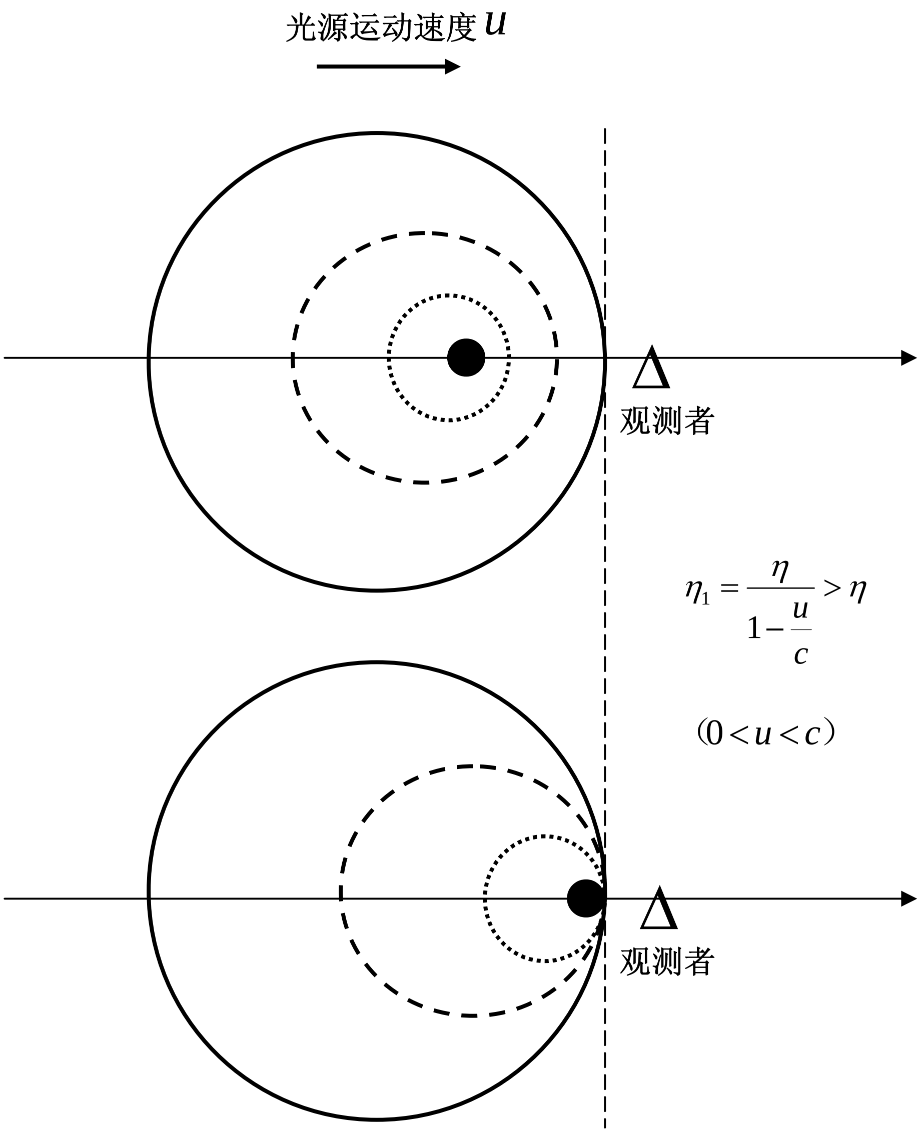
若光源运动速度u垂直于‘**光源O—观测者A**’连线，即$\alpha=\pi/2$，这时发生‘**多普勒红移**’：

$$T_1=T\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}$$

得：

$$\boxed{\begin{gathered}\eta_1=\frac{\eta}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}}}<\eta\\ (0<u<+\infty)\end{gathered}}$$

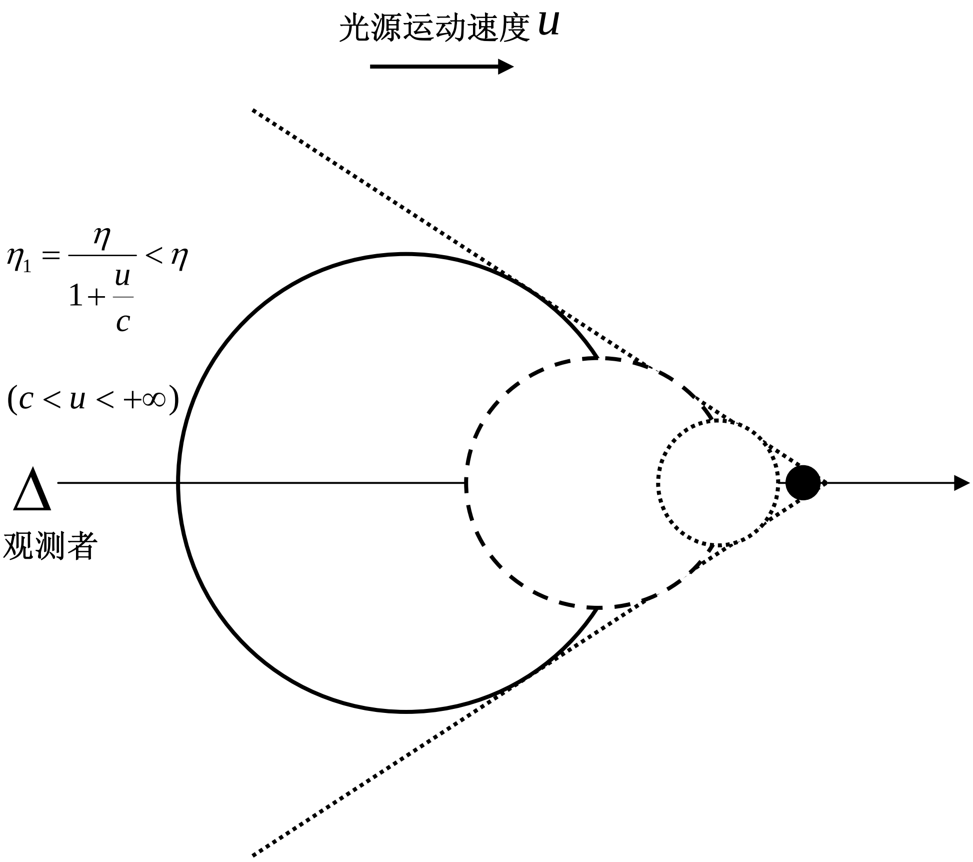
多普勒蓝移



$$\eta_1 = \frac{\eta}{1-\frac{u}{c}} > \eta$$

$(0 < u < c)$

多普勒红移



第十七章

超高速太空飞船测速原理

[本章中：(x', y', z', t')—K'系的坐标，c—真空中光速，u—参考系相对速度]

我们可以利用**周方变换（广义的伽利略变换）**在相离运动中产生的‘动系时间膨胀’效应及在相合运动中产生的‘动系时间收缩’效应，建立高速运动物体测速原理，藉以测量超高速太空飞船的径向相对速度。

（一）主动式脉冲雷达测速

主动式脉冲雷达测速，就是将雷达站置于地面观测点（如太空飞船出发地点），向运动物体（如太空飞船）发射一定重复周期Δt_0（或重复频率$1/\Delta t_0$）的电磁脉冲信号，根据回波脉冲重复周期Δt_2（或重复频率$1/\Delta t_2$）与发射脉冲重复周期Δt_0（或重复频率$1/\Delta t_0$）之比值$\Delta t_2/\Delta t_0$，计算出运动物体（如太空飞船）相对于地面观测点（如飞船出发地点）的径向相对速度u。

（1）相离运动

设：在时刻$t=0$，飞船起飞（$x=0$，x为 飞船至飞船出发地点雷达站之距离）。在某个时刻t_0，飞船与地面雷达站之间的距离为$x_0 = u(t_0 - 0) = ut_0$，在此时刻地面雷达向飞船发出第一个电磁脉冲信号。在此后的某时刻t_1，脉冲信号到达飞船，立刻向地面雷达反射回去。由于电磁脉冲信号与飞船同向运动，故电磁脉冲信号从发出时刻t_0至抵达飞船时刻t_1之间的时间间隔$\delta t = t_1 - t_0$满足以下关系：

$$\delta t = t_1 - t_0 = \frac{x_0}{c-u}$$

$$\delta t = t_1 - t_0 = \frac{ut_0}{c-u}$$

因此，脉冲信号到达飞船的时刻t_1为：

$$t_1 = t_0 + \frac{ut_0}{c-u}$$

即：
$$t_1 = \frac{c}{c-u} t_0 \qquad （17-1）$$

在时刻t_1，脉冲信号从飞船向地面雷达站反射。此时飞船与地面雷达站之间的距离为$x_1 = u(t_1 - 0) = ut_1$。根据“真空中光传播速率为恒定值假设”：

《物体发射出来的光线在观测者看来都是以确定的速度c运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》

地面雷达站接收到脉冲信号的时刻t_2为：

$$t_2 = t_1 + \frac{ut_1}{c}$$

即：
$$t_2 = \frac{c+u}{c} t_1 \qquad （17-2）$$

从（17-1）式和（17-2）式得：

$$t_2 = \frac{c+u}{c} \bullet \frac{c}{c-u} t_0 = \frac{c+u}{c-u} t_0$$

等式两边取增量，得：

$$\Delta t_2 = \frac{c+u}{c-u} \Delta t_0 \geq \Delta t_0$$

式中：Δt_0 — 雷达发射脉冲重复周期（秒）；

Δt_2 — 雷达接收脉冲重复周期（秒）。

记：$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \lambda \geq 1$，上式可以写成：

$$\lambda = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_0} = \frac{c+u}{c-u} = \frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}} \geq 1$$

由此式得：

$$\lambda\left(1-\frac{u}{c}\right)=1+\frac{u}{c}$$

$$(\lambda+1)\frac{u}{c}-(\lambda-1)=0$$

解出：

$$\frac{u}{c}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

（$\lambda\geq 1$）

这样，在相离运动中：$\lambda\geq 1$，主动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\frac{u}{c}=\frac{\lambda-1}{\lambda+1},\quad \lambda\geq 1}$$

（2）**相合运动**

实际上，相合运动就是相离运动实现**'相对速度反演'**（$u_f=-u$）而得到的相对运动。所以，只需在相离运动的公式中将u代之以$-u_f$（$u_f>0$），即可得到相合运动下的相应公式，故有：

$$\lambda=\frac{\Delta t_2}{\Delta t_0}=\frac{c-u_f}{c+u_f}=\frac{1-\frac{u_f}{c}}{1+\frac{u_f}{c}}\leq 1$$

由此式得：

$$\lambda\left(1+\frac{u_f}{c}\right)=1-\frac{u_f}{c}$$

$$(\lambda+1)\frac{u_f}{c}+(\lambda-1)=0$$

解出：

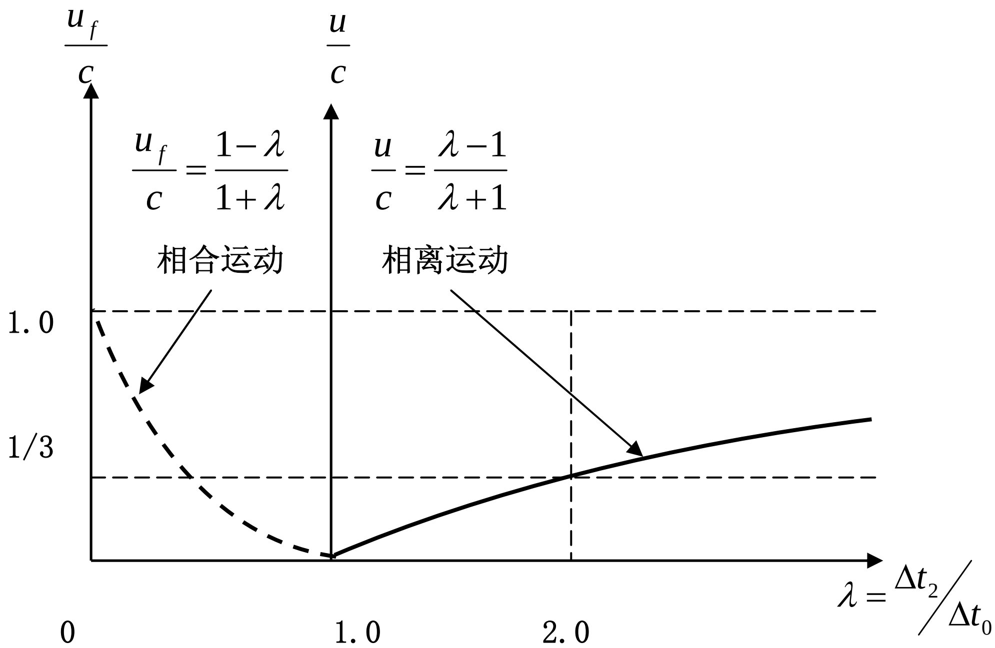
$$\frac{u_f}{c}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

（$0\leq\lambda\leq 1$）

这样，在相合运动中：$0\leq\lambda\leq 1$，主动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\frac{u_f}{c}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda},\quad 0\le\lambda\le 1}$$

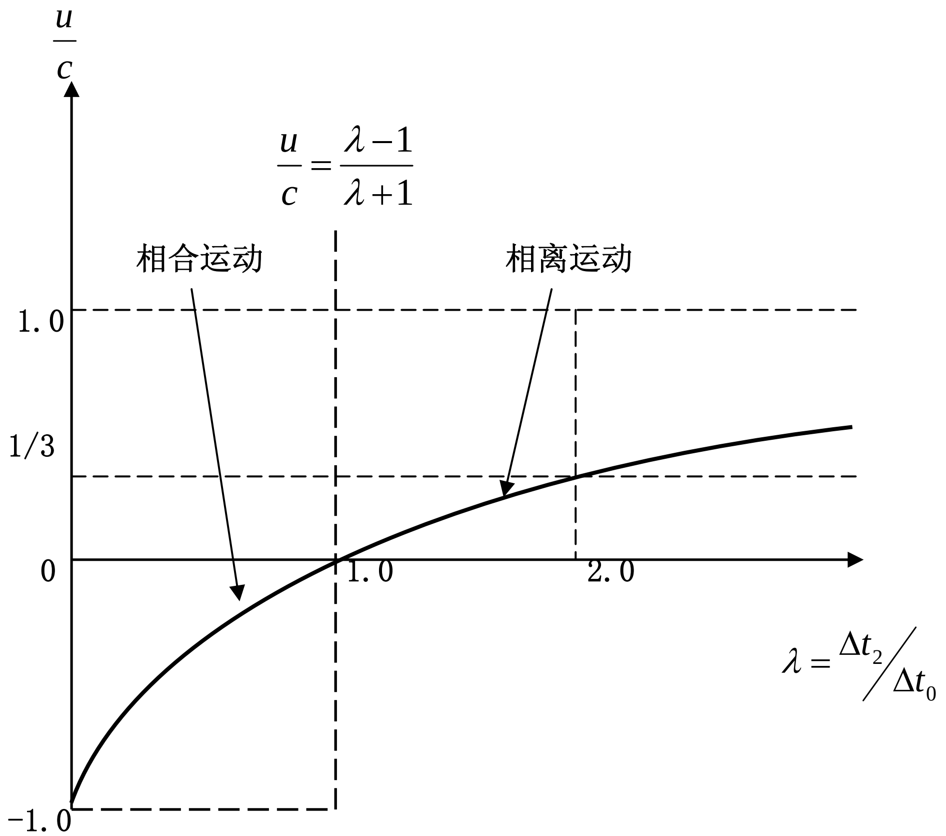
主动式脉冲雷达测速曲线如图 17-1 所示。



u— 相离相对速度；u_f— 相合相对速度；c — 光速

图 17-1

主动式脉冲雷达测速曲线同样也可表为图 17-2。



u— 相对速度；c — 光速

图 17-2

由以上分析可以看到，主动式脉冲雷达测速只适用于低于光速的相对运动。

（二）被动式脉冲雷达测速

被动式脉冲雷达测速，就是将雷达发射装置安置在运动物体（如太空飞船）上，向观测者（飞船出发地点的雷达接收装置）发射一定重复周期（重复频率）的电磁脉冲信号，根据接收脉冲重复周期Δt_2（重复频率）与发射脉冲重复周期Δt_1（重复频率）之比值$\Delta t_2/\Delta t_1$，计算出运动物体（如太空飞船）相对于飞船出发地点的径向相对速度u。

（1）相离运动

设：在时刻$t=0$，飞船起飞（$x=0$，x为 飞船至飞船出发地点雷达站之距离）。在某个时刻t_1，飞船与地面雷达站之间的距离为$x_1=ut_1$。在此时刻飞

船上的雷达发射装置向地面雷达接收装置发射一个电磁脉冲信号。根据**“真空中光传播速率为恒定值假设”**：

《物体发射出来的光线在观测者看来都是以确定的速度 c 运动着，不管这道光线是由静止的还是运动的物体发射出来的。》

地面雷达接收装置接收到脉冲信号的时刻为 t_2：

$$t_2 = t_1 + \frac{ut_1}{c}$$

$$t_2 = \left(1 + \frac{u}{c}\right)t_1$$

等式两边取增量，得：

$$\Delta t_2 = \left(1 + \frac{u}{c}\right)\Delta t_1$$

式中：Δt_1 — 飞船雷达发射脉冲重复周期（秒）；

Δt_2 — 地面雷达接收脉冲重复周期（秒）。

记：$\dfrac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \mu$，上式可以写成：

$$\mu = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 1 + \frac{u}{c} \geq 1$$

这样，在相离运动中：$\mu \geq 1$，被动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\frac{u}{c} = \mu - 1,\quad \mu \geq 1}$$

（2）相合运动

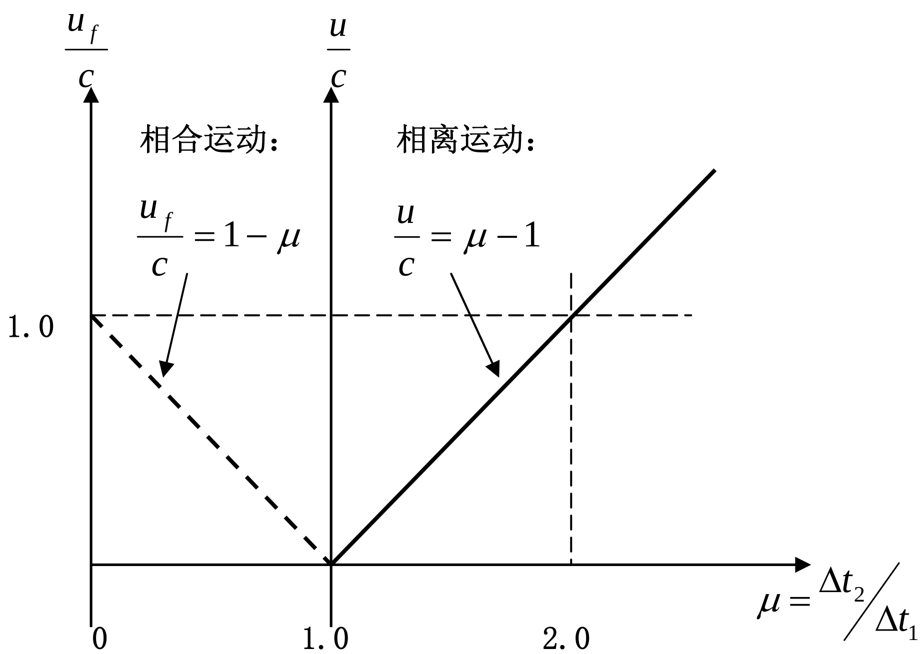
在相离运动的公式中将 u 代之以 $-u_f$（$u_f > 0$），即可得到相合运动的相应公式，故有：

$$\mu = 1 - \frac{u_f}{c} \leq 1$$

这样，在相合运动中：$0 \le \mu \le 1$，被动式脉冲雷达测速公式为：

$$\boxed{\frac{u_f}{c} = 1 - \mu，\ 0 \le \mu \le 1}$$

被动式脉冲雷达测速曲线如图 17-3 所示。



u — 相离相对速度；u_f — 相合相对速度；c — 光速

图 17-3

被动式脉冲雷达测速曲线同样也可表为图 17-4。

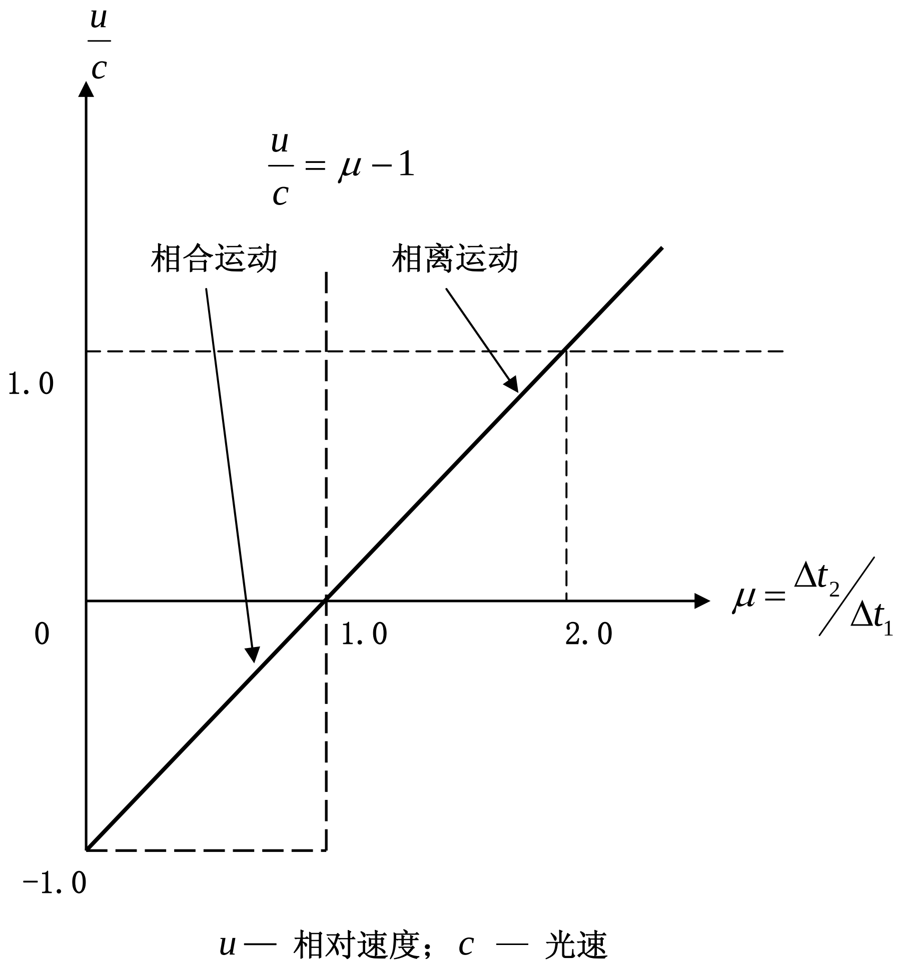


图 17-4

由以上分析可以看到，被动式脉冲雷达测速可以用于超光速的相离运动。

两种测速方法之比较：

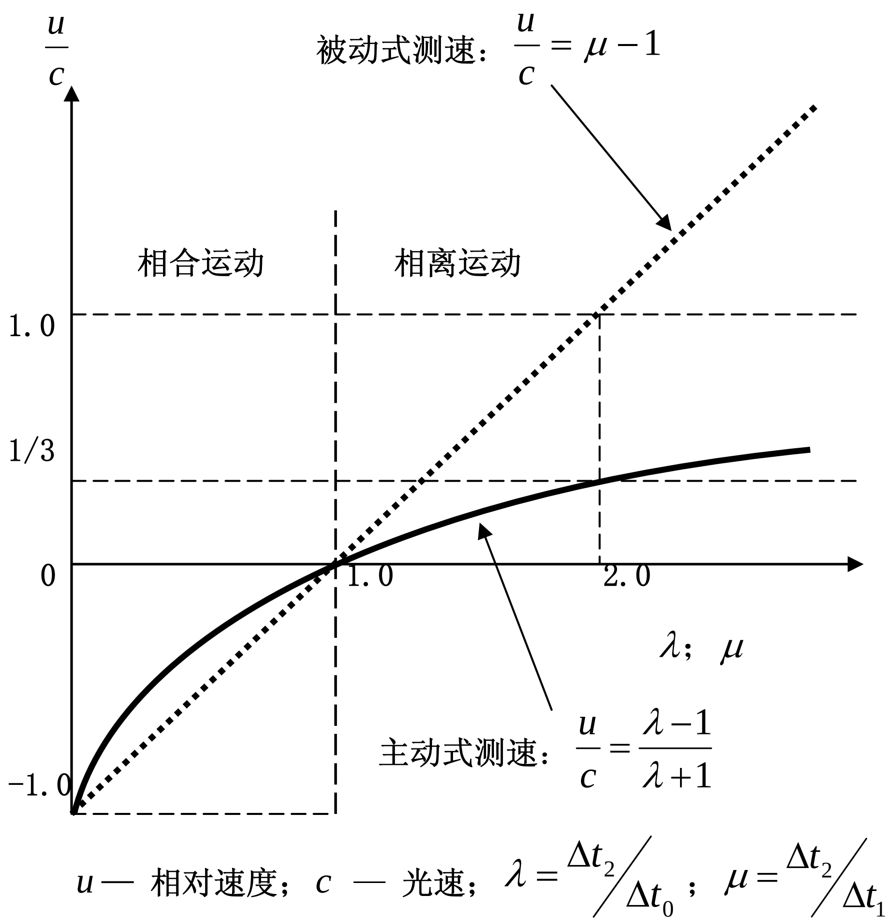


图 17-5

参 考 文 献

[1] A . Einstein, “On the Electrodynamics of Moving Bodies”,《The Collected Papers of Albert Einstein》, Edit. John Stachel, Vol.2, pp. 140-171,The Princeton University Press, 1987.

[2]《狭义与广义相对论浅说》 （美）爱因斯坦 著 杨润殷 译 北京大学出版社 2006

[3]《相对论的意义》 （美）爱因斯坦 著 郝建纲/刘道军 译 上海科教出版社 2005

[4]《相对论引论》 P.G.柏格曼 著 周奇、郝苹 译 人民教育出版社 1961