The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 2

黎曼泽他函数的复零点(II)

王天寿

（哈尔滨大电机研究所）

摘要

本文是上一篇文章的后续文章。从本文开始，将用反证法去证明黎曼假设的真实性。因此，我们以后的全部研究都是在黎曼假设不真这一假定下进行的。以后将会看到，由此导引出矛盾。我们利用拓扑映射最后将上文中的一组超定超越方程进行了变形，得到了一组新的、以广义坐标λ与μ为变数的超定超越方程。指出Riemann猜测的真伪问题等价于本文得到的方程组在开域 $G=\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\ \lambda\neq 1,\ \mu>0,\ \lambda\mu-1\neq 0,\ \lambda^2\mu-\lambda\mu+2\neq 0,\ \lambda\mu-\mu-2\neq 0\}$ 上无实数解或有实数解的问题了。

一、引言

1900年，D. Hilbert在巴黎第二届国际数学家代表大會上作了名为"数学问题"的著名讲演[1,93]。在讲演的总论部分里，他列举了当時还未解决的23个重大的数学问题。在他的第八个问题里，郑重地提到了黎曼假設这一重要问题。時至今日，这23个问题总的来说仅解决了将近一半左右，个别的仍是纹丝未动。

长期以来，人们习惯於用单纯的函数论方法以及指数和估計的方法去攻黎曼猜想这一极端困难的问题。以今日的眼光来看，单纯的函数论方法在这一问题上並不奏效；而指数和估計的方法对这一问题大体上也祇能得到某种改进，对人们想往的结果似乎是可望而不可及。

关於黎曼宗他函数，前人做了大量细致而艰巨的工作。有关它的极大部分研究成果，已由E.C. Titchmarsh很好地整理在他的专著[2]中了。有

人在研究黎曼猜测的工作中，得到了一些与黎曼假設等价的结果[2,327~328]。如果我們能夠直接証明其中之一的話，那末也就証明了黎曼假設。遗憾的是它們中间没有一个比直接証明黎曼猜测更容易些。

在文献[4]中，我們証明了Riemann猜测的真伪问题相当於去研究超定超越方程组

$$\frac{1}{2}-\frac{1-\sigma}{(\sigma-1)^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\sin(\sigma\theta-t\log\cos\theta)+e^{-t\theta}\sin(\sigma\theta+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.1$$

$$-\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\cos(\sigma\theta-t\log\cos\theta)-e^{-t\theta}\cos(\sigma\theta+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.2$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{\sigma^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\sin[(1-\sigma)\theta-t\log\cos\theta]+e^{-t\theta}\sin[(1-\sigma)\theta+t\log\cos\theta]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.3$$

$$-\frac{t}{\sigma^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\cos[(1-\sigma)\theta-t\log\cos\theta]-e^{-t\theta}\cos[(1-\sigma)\theta+t\log\cos\theta]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 1.4$$

在开域

$$S=\left\{(\sigma,t)\,\middle|\,\sigma^2+t^2-\sigma>0,\ 0<\sigma<1,\ \sigma\neq\tfrac{1}{2},\ t\neq 0\right\}$$

上无解或有解的问题。从本质上讲，直接研究超定超越方程组(1.1~1.4)在开域S上有无实数解的问题是极为困难的。我们的基本想法是对超定超越方程组进行变形，为此我们要用到拓扑映射。

为了以后的研究，在这里郑重声明：从现在开始，所有的研究和讨论都是在九维欧氏空间E^9中进行的，以后不再一一指出了。现在在E^9中任取一六维欧氏空间E_1^6，其内任一点之位置由数组$(\bar{\sigma}, \bar{t}, k_1, k_2, k_3, k_4)$确定。此外，还用$E_1^2$来记我们的$\sigma-t$实平面。在$E_1^2$中我们定义一个集合

$$D=\left\{(\sigma,t)\,\middle|\,0<\sigma<1,\ \sigma\neq\tfrac{1}{2},\ t\neq 0,\ \sigma^2+t^2-\sigma\neq 0,\ \sigma^2+t^2-\tfrac{\sigma}{2}\neq 0,\ \sigma^2+t^2-\tfrac{3}{2}\sigma+\tfrac{1}{2}\neq 0\right\}$$

则域D由12个开域组成，它们分别以直线$\sigma=0$，$\sigma=\frac{1}{2}$，$\sigma=1$，$t=0$及圆$(\sigma-\frac{1}{2})^2+t^2=(\frac{1}{2})^2$，$(\sigma-\frac{1}{4})^2+t^2=(\frac{1}{4}$ $(\sigma-\frac{3}{4})^2+t^2=(\frac{1}{4})^2$为其边界。

由於D是E_1^2的一个子空间，故由度量空间理论知D仍是一个度量空间。因而D必定具有度量空间的开集所具有的三个性質[3,7]。現在根据定义D是一个集合。設τ是D的一个子集族，τ中的成員叫作D的开集，极易验证τ满足τ是集合D的一个拓扑所需满足的三个公理[3,26]。因此，根据拓扑的定义可知τ確是D的一个拓扑，而(D,τ)是一个拓扑空间。

現在我们取E_1^2中集合D到六维空间E_1^6上的一个映射f：

$$\bar{\sigma}=\sigma, \quad \bar{t}=t, \quad k_1=\frac{(\sigma-1)^2+t^2}{1-\sigma}, \quad k_2=\frac{(\sigma-1)^2+t^2}{t},$$

$$k_3=\frac{\sigma^2+t^2}{\sigma}, \quad k_4=\frac{\sigma^2+t^2}{t}. \qquad \cdots\cdots f$$

由D的定义可知，映射f对於D内每一点都有意义。設集合D中每一点在映射f作用下在E_1^6中的像的集合为M。显然，M是六维欧氏空间E_1^6中的二维流形。我们有下述的

定理1.1 映射f是拓扑映射，且$D\cong M$。

证. 如上所述，D是一个度量空间。又因$M\subset E_1^6$，故M也是一个度量空间。我们有

1° $D\to M$是在f作用下从D到M的、一一对应的、连续的满映射。

证. 由於映射f的每个式子均为关於σ及t的两元连续单值函数。因之，映射f在D中连续。今设$d_0=(\sigma_0,t_0)$为集D中任一元素，m_0为d_0在映射f作用下的像。由M的定义知必有$m_0\in M$。这就证明了D中每一元素d_0都有一个在M中的元素m_0与之对应。又因映射f是单值的，所以对於每一个d_0来说这样的m_0有且祇有一个。这就证明了$f: D\to M$.

2° $M\to D$是在f^{-1}作用下从M到D的、一一对应的、连续的满映射。

证. 设m_0为二维流形M中的任一元素，且有

$$m_0=(\bar{\sigma}_0,\bar{t}_0,h_{10},h_{20},h_{30},h_{40})$$

现在我们将元素m_0投影到E_1^6中的$\bar{\sigma}-\bar{t}$坐标平面

上去，若记其投影点为m_0'，易知恒有

$$m_0'=(\bar{\sigma}_0,\bar{t}_0,0,0,0,0)$$

由投影几何知，对每一个m_0来说，这样的m_0'是存在且唯一的。再在D中取一元素$d_0=(\bar{\sigma}_0,\bar{t}_0)$，那末这样的$d_0$也是唯一的。若记$M'=\{m_0'\}$，那末$M'$与D显然是同构的。这样，在$f^{-1}$的作用下，我们有逆对应

$$m_0\longrightarrow m_0'\longrightarrow d_0 .$$

又由於元素m_0是任取的，这样就得到$M\longrightarrow D$。此外，我们使用的投影映射及恒同映射并不会改变二维流形M的连续性质；因之，在f^{-1}的作用下，从$M\rightarrow D$的映射也是连续、一一对应的。

综上所述，D与M都是度量空间。而且对应$f: D\rightarrow M$是从D到M的、一一的、连续的满映射，而且逆对应$f^{-1}: M\rightarrow D$也是连续的。因此，由拓扑映射及同胚的定义可知[3,14]，f是拓

扑映射，M与D同胚，或記为$D\cong M$。定理1.1証毕。

关於二维流形M的一些几何上的性质，由於与我们的主要目的无关，所以我们不打算在这里作更进一步的研究和討論。我们感兴趣的是寻找二维流形M的用参数表示的解析式。为此，在映射f中消去σ及t，这样得到

$$(\bar{\sigma}-1)^2+\bar{t}^2+k_1(\bar{\sigma}-1)=0 \quad \cdots\cdots 1.5$$

$$(\bar{\sigma}-1)^2+\bar{t}^2-k_2\bar{t}=0 \quad \cdots\cdots 1.6$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_3\bar{\sigma}=0 \quad \cdots\cdots 1.7$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_4\bar{t}=0 \quad \cdots\cdots 1.8$$

如果将k_1、k_2、k_3、k_4看为实参数，并将上述四式改写为

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2+(k_1-2)\bar{\sigma}-(k_1-1)=0 \quad \cdots\cdots 1.9$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-2\bar{\sigma}-k_2\bar{t}+1=0 \quad \cdots\cdots 1.10$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_3\bar{\sigma}=0 \quad \cdots\cdots 1.11$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_4\bar{t}=0 \quad \cdots\cdots 1.12$$

由解析几何知道，方程组(1.9~1.12)是四个依次以

$$\left(1-\frac{k_1}{2},\ 0\right);\ \left(1,\ \frac{k_2}{2}\right);\ \left(\frac{k_3}{2},\ 0\right);\ \left(0,\ \frac{k_4}{2}\right)$$

为圆心，依次以 $\frac{k_1}{2}$, $\frac{|k_2|}{2}$, $\frac{k_3}{2}$, $\frac{|k_4|}{2}$；为半径的圆。

从方程组的角度来看，(1.9~1.12) 是一组二元二次超定代數方程。它若有解的話在几何上表示上述四个圆要共点。

二、超定代数方程组

在这一节我们来研究超定代数方程组(1.9~1.12)。仅仅是为了书写上的方便，我们在研究上述方程组時用σ、t代替$\bar{\sigma}$、$\bar{t}$，这并不会使我们的概念发生混淆。这样，我们得到

$$\sigma^2+t^2+(k_1-2)\sigma=k_1-1 \quad \cdots\cdots 2.1$$

$$\sigma^2+t^2-2\sigma-k_2t=-1 \quad \cdots\cdots 2.2$$

$$\sigma^2+t^2-k_3\sigma=0 \quad \cdots\cdots 2.3$$

$$\sigma^2+t^2-k_4t=0 \quad \cdots\cdots 2.4$$

对于超定代数方程组(2.1~2.4)有下述的

定理2.1　超定代数方程组(2.1~2.4)有解

$$\sigma=\frac{k_3-1}{k_1+k_3-2}, \quad t=\frac{k_1(k_3-1)}{k_2(k_1+k_3-2)}$$

的充分而必要条件是参数k_i($i=1,2,3,4$)满足关系式

$$k_2k_3(k_1-1)-k_1k_4(k_3-1)=0 \quad \cdots\cdots 2.5$$

$$k_2^2(k_1-1)(k_1+k_3-1)-k_1^2(k_3-1)=0 \quad \cdots\cdots 2.6$$

証. 現在来改寫非线性超定代数方程组(2.1~2.4)

尽管非线性方程组有与线性方程组相类似的某些结果，但是它是更为复杂了。为了不使我们离题太远，不打算在这里对这个一般性问题去进行讨论。我们仅研究目前的这个具体的非线性方程组。为此，作变数代换

$$x_1=\sigma^2+t^2,\quad x_2=\sigma,\quad x_3=t \qquad \cdots\cdots 2.7$$

立得关于 x_j ($j=1,2,3$) 的线性方程组

$$x_1+(k_1-2)x_2=k_1-1 \qquad \cdots\cdots 2.8$$

$$x_1-2x_2-k_2x_3=-1 \qquad \cdots\cdots 2.9$$

$$x_1-k_3x_2=0 \qquad \cdots\cdots 2.10$$

$$x_1-k_4x_3=0 \qquad \cdots\cdots 2.11$$

由2.7式消去 σ 及 t 可有

$$x_1=x_2^2+x_3^2 \qquad \cdots\cdots 2.12$$

现在方程组（2.1～2.4）与方程组（2.8～2.12）完全等价。设线性方程组（2.8～2.11）的解为

$$x=(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

方程组（2.8～2.12）的解为 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$。由于 $\bar{x}$

也满足方程组 (2.8~2.11)，所以它至少是线性方程组 (2.8~2.11) 的解。因此，我们先研究线性方程组。现记其係数矩陣及相应的增广矩陣依次为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 1 & -2 & -k_2 \\ 1 & -k_3 & 0 \\ 1 & 0 & -k_4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & k_1-2 & 0 & k_1- \\ 1 & -2 & -k_2 & -1 \\ 1 & -k_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k_4 & 0 \end{pmatrix}$$

由线性方程组的理論知道，方程组 (2.8~2.11 有解的充分和必要条件是 rank A = rank B。下面分别来研究矩陣 A 与矩陣 B 的秩。先对係数矩陣 A 施行初等変换：

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -(k_1+k_3-2) & 0 \\ 0 & -(k_1-2) & -k_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -(k_1+k_3-2) & 0 \\ 0 & -(k_1-2)+\frac{k_1k_4}{k_2} & 0 \end{pmatrix}$$

由映射 f 及域 D 之定義可知，若 $(\sigma,t)\in D$，则恒

有 $k_2 \neq 0$，所以最后一步的变换是合法的。现在我们記

$$C = \begin{pmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -(k_1+k_3-2) & 0 \\ 0 & -(k_1-2)+\frac{k_1k_4}{k_2} & 0 \end{pmatrix}$$

由於 C 矩陣是由係数矩陣 A 经过一系列的初等变换得到的；由矩陣理論知道，对一个矩陣施行初等变换并不改变該矩陣原有之秩。故我们得到 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C$。但我们有下述的

引理 1. $\operatorname{rank} C = 3$.

証 分为 $k_1+k_3-2=0$ 及 $k_1+k_3-2\neq 0$ 两种情况来討論。首先研究

1° $k_1+k_3-2=0$

此時矩陣 C 祇有唯一的三阶子式

$$I = \begin{vmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -(k_1-2)+\frac{k_1k_4}{k_2} & 0 \end{vmatrix} = k_2(2-k_1)+k_1k_4$$

注意到条件 $k_1+k_3-2=0$ ，可有

$$I=k_2(2-k_1)+k_1k_4=k_2k_3+k_1k_4 .$$

由映射 f 及域 D 之定义可知恒有

$$k_1>0\ ,\quad k_3>0\ ,\quad k_2k_4>0 .$$

故知 $I\neq 0$ ，根据矩阵的秩的定义， $\operatorname{rank} C=3$ 。其次再研究

2° $k_1+k_3-2\neq 0$

此时矩阵 C 的一个三阶子式

$$J=\begin{vmatrix} 1 & k_1-2 & 0 \\ 0 & -k_1 & -k_2 \\ 0 & -(k_1+k_3-2) & 0 \end{vmatrix}=-k_2(k_1+k_3-2)\neq 0$$

因此也有 $\operatorname{rank} C=3$ 。这就证明了引理 1 。

由引理 1 我们可得出线性方程组 (2.8~2.11) 有解之充分而必要条件为 $\operatorname{rank} B=3$ 。这要求矩阵 B 之唯一四阶子式 $K=0$ 。用行列式计算中的降阶方法极易算出这个四阶行列式 ~~[illegible]~~ 。所以我们有

$$K=\begin{vmatrix}1 & k_1-2 & 0 & k_1-1\\ 1 & -2 & -k_2 & -1\\ 1 & -k_3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -k_4 & 0\end{vmatrix}=k_2k_3(k_1-1)-k_1k_4(k_3-1)$$

$$=0$$

因此，我们证明了

引理2　线性方程组(2.8~2.11)有解之充分而必要条件是参数k_1, k_2, k_3, k_4满足条件

$$k_2k_3(k_1-1)-k_1k_4(k_3-1)=0$$

这正是2.5式。

现在设引理2中的条件恒被满足，那末线性方程组(2.8~2.11)中只有三个方程是相互独立的。不失一般性并为了明确起见，我们就取2.8、2.9、2.10三式，这三个式子其係数行列式是

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & k_1-2 & 0\\ 1 & -2 & -k_2\\ 1 & -k_3 & 0\end{vmatrix}=-k_2(k_1+k_3-2)$$

这要求行列式 $\Delta \neq 0$。但是我们有如下的

引理 3. 若 $(\sigma,t) \in D$，则总有 $k_1+k_3-2 \neq 0$。

証. 由第一节中关於映射 f 的定義可知有

$$k_1+k_3-2=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{\sigma(1-\sigma)}$$

故知 k_1+k_3-2 当而且仅当 $\sigma^2+t^2-\sigma=0$ 時为零。今記集合 $C_0=\{(\sigma,t) \mid \sigma^2+t^2-\sigma=0\}$，显然 $C_0 \not\subset D$，这就証明了本引理。所以我们恒有 $\Delta \neq 0$。

现在我们可用 Cramér 法则来解 2.8、2.9、2.10 这三个线性无关的式子了。因而有

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad \cdots\cdots 2.13$$

式中

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} k_1-1 & k_1-2 & 0 \\ -1 & -2 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & 0 \end{vmatrix}=-k_2k_3(k_1-1).$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & k_1-1 & 0 \\ 1 & -1 & -k_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-k_2(k_1-1)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & k_1-2 & k_1-1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -k_3 & 0 \end{vmatrix} = -k_1(k_3-1)$$

但是由2.13式得到的一组解 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 一般来说并不满足非线性关系式 2.12。将解 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 代入2.12式中后，立刻得到

$$\Delta\Delta_1 = \Delta_2^2 + \Delta_3^2 \qquad \cdots\cdots 2.14$$

将 Δ 及 Δ_j（$j=1,2,3$）的值代入2.14式中后，就得到参数 k_1, k_2, k_3, k_4 所需满足之另一条件

$$k_2^2(k_1-1)(k_1+k_3-1)-k_1^2(k_3-1)=0$$

这正是2.6式，但在这里我们用到了 $k_3-1\neq 0$。这是因为我们有

引理 4. 若 $(\sigma, t)\in D$，则恒有 $k_3-1\neq 0$。

证 由映射 f 的表达式可知有

$$k_3-1=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{\sigma}$$

故知 k_3-1 当而且仅当 $\sigma^2+t^2-\sigma=0$ 时为零。又根据引理 3 中集合 C_0 及第一节中集合 D 之定义可

知 $G_3 \neq D$，故得所述。

再由2.7式及2.13式立刻得到

$$\sigma = x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{k_1 - 1}{k_1 + k_3 - 2}, \quad t = x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{k_1(k_3 - 1)}{k_2(k_1 + k_3 - 2)}$$

至此定理2.1全部証完。

从定理2.1中的2.5式及2.6式两个关係式来看，説明参数 k_1, k_2, k_3, k_4 之间只有二个是独立的。从原则上来讲，我们可以随意选取其中任何二个参数作为独立参数。例如，我们选取 k_1, k_2 作为独立参数，这样就有

$$k_3 = \frac{k_1^2 + k_2^2(k_1 - 1)^2}{k_1^2 - k_2^2(k_1 - 1)}, \quad k_4 = \frac{k_1^2 + k_2^2(k_1 - 1)^2}{k_1^2 k_2}$$

事实上我们可将2.5、2.6两式看作四维实空间K中的二维流形。这里K是参数空间。因此，我们完全可以去合理地选取参数的独立变量以使二维流形的表示式尽可能地简单。所以，我们并不选取 k_1, k_2 作为独立变量，因为这样将引向高次。此外，从流形的理论可知，一个流形的参数表示形式可以不止一种，但是它们所

描述的却是同一个流形。由此，我们有下述的

定理2.2 若用F来记四维参数空间K中由2.5式及2.6式两个式子所确定的二维流形，则流形F恒有参数式

$$k_1=\frac{1+\mu}{\mu(1+\lambda)},\quad k_2=\pm\frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)},\quad k_3=\frac{1+\lambda^2\mu}{\lambda\mu(1+\lambda)},\quad k_4=\pm\frac{1+\lambda^2\mu}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}.$$

这里 λ、μ 是新引进的两个独立参数。

证. 我们在证明本定理之前，先证如下的

引理5. 若 $(\sigma,t)\in D$，且 C_0 是引理3中所定义的集合，那末恒有 $k_1-1\neq 0$，$k_1+k_3-1\neq 0$。

证. 由映射 f 的表达式得到

$$k_1+k_3-1=\frac{t^2}{\sigma(1-\sigma)},\quad k_1-1=\frac{\sigma^2+t^2-\sigma}{1-\sigma}$$

因为 $C_0\neq D$，而 k_1-1 当且仅当 $\sigma^2+t^2-\sigma=0$ 时为零；故若 $(\sigma,t)\in D$，总有 $k_1-1\neq 0$。另外，根据集合D之定义，显然有 $k_1+k_3-1\neq 0$。引理5证完。

现在将2.5式及2.6式两式改写为

$$\frac{k_2k_4}{k_1k_3}=\frac{k_1-1}{k_3-1}\qquad\cdots\cdots 2.15$$

$$\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2=\frac{k_3-1}{(k_1-1)(k_1+k_3-1)} \qquad \text{----}2.16$$

由映射 f 的表示式易知 $k_1k_2k_3k_4 \neq 0$，再由引理 4 及引理 5 得知，我们选择的设置是合法的。今設 λ 及 μ 为 2.15 式及 2.16 式两个式子的比，这样有

$$\frac{k_1k_4}{k_2k_3}=\frac{k_1-1}{k_3-1}=\lambda$$

$$\frac{k_2^2}{k_1^2}=\frac{k_3-1}{(k_1-1)(k_1+k_3-1)}=\mu$$

上述两个比式相當於

$$\frac{k_1-1}{k_3-1}=\lambda \qquad \text{----}2.17$$

$$\frac{k_3-1}{(k_1-1)(k_1+k_3-1)}=\mu \qquad \text{----}2.18$$

$$\frac{k_1k_4}{k_2k_3}=\lambda \qquad \text{----}2.19$$

$$\frac{k_2^2}{k_1^2}=\mu \qquad \text{----}2.20$$

我们先求解 2.17 式与 2.18 式两式。将 k_1 与 k_3 看作未知数，用 2.17 式簡化 2.18 式并整理后有

$$k_1-\lambda k_3=1-\lambda$$

$$k_1+k_3=1+\frac{1}{\lambda\mu}$$

这要求其係数行列式之值 $1+\lambda\neq 0$。但由映射 f

的表示式可知，若$(\sigma,t)\in D$，那末恒有

$$k_1>0,\quad k_3>0\quad k_2k_4>0$$

再由λ的定义可知有$\lambda=\frac{k_1k_4}{k_2k_3}>0$，立刻得到係数行列式的值$1+\lambda>0$。所以我们可用Cramer法则来解上述联立方程组。解之，有

$$k_1=\frac{1+\mu}{\mu(1+\lambda)},\quad k_3=\frac{1+\lambda^2\mu}{\lambda\mu(1+\lambda)}\qquad\text{---}2.21$$

由2.20式可解得

$$k_2=\pm k_1\sqrt{\mu}=\pm\frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\qquad\text{----}2.22$$

将2.21式及2.22式代入2.19式右立得

$$k_4=\frac{\lambda k_2k_3}{k_1}=\pm\frac{1+\lambda^2\mu}{\sqrt{\mu}\,(1+\lambda)}\qquad\text{-----}2.23$$

现在来谈k_2,k_4的正负号取法问题。由映射f的表示式获知，k_2,k_4取相同的符号，且有$k_it>0$（$i=2,4$）。而且参数μ由其定义显然恒正。定理2.2证完。

因此我们有如下的

推论1　二维流形M有以λ,μ为独立参数的表达式

$$\bar{\sigma}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\quad \bar{t}=\operatorname{sgn} t\,\frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)},\quad k_1=\frac{1+\mu}{\mu(1+\lambda)},$$

$$k_2=\operatorname{sgn} t\,\frac{1+\mu}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)},\quad k_3=\frac{1+\lambda^2\mu}{\lambda\mu(1+\lambda)},\quad k_4=\operatorname{sgn} t\,\frac{1+\lambda^2\mu}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}.$$

証. 将定理2.2中关於k_1, k_2, k_3, k_4的四个参数表达式代入到定理2.1中的解

$$\sigma=\frac{k_1-1}{k_1+k_3-2},\quad t=\frac{k_1(k_3-1)}{k_2(k_1+k_3-2)}$$

里面去，並恢复原来的記号，我们有

$$\bar{\sigma}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\quad \bar{t}=\operatorname{sgn} t\,\frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}$$

但是在运算过程中用到了$\lambda\mu-1\neq 0$. 然而我们有如下的

引理6. 若$(\sigma, t)\in D$，λ与μ为定理2.2中所定義之实参数，則恒有$\lambda\mu-1\neq 0$.

証. 由定理2.2中关於λ与μ之定義知

$$\lambda=\frac{k_1-1}{k_3-1},\quad \mu=\frac{k_3-1}{(k_1-1)(k_1+k_3-1)}$$

由上述两式立刻可以得到

$$\lambda\mu-1=-\frac{k_1+k_3-2}{k_1+k_3-1}$$

由此并根据引理3立得$\lambda\mu-1\neq 0$. 这就証明了引理6. 推论1証完.

三、超定超越方程组的变形

在这一节中我们将对超定超越方程组(1.1~1.4)进行变形。由于$\zeta(s)$的复零点关于$\sigma=\frac{1}{2}$直线及σ轴呈对称分布，所以我们仅需研究函数$\zeta(s)$在开域

$$R=\left\{(\sigma,t)\,\middle|\,0<\sigma<1,\ \sigma\neq\frac{1}{2},\ t>0;\ \sigma^2+t^2-\sigma\neq0,\right.$$
$$\left.\sigma^2+t^2-\frac{\sigma}{2}\neq0,\ \sigma^2+t^2-\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{2}\neq0\right\}$$

中的复零点分布状况即可。正如我们在第一节中所指出的那样，现在Riemann假设的真伪问题等价于超定超越方程组(1.1~1.4)在开域R中无实数解或有实数解的问题。

从现在开始，我们将逐步地去证明Riemann假设。为了证明它是真实的，我们将用反证法去证明它。也就是说，将假定Riemann猜测是不真实的，因而超定超越方程组(1.1~1.4)在开域R上有实数解(σ,t_i)，且将解的全体记作E_0。由假定知集合E_0非空。由此出发并经过冗长而复

来的逻辑和推理，最后得引出矛盾。所以在这里郑重声明：从现在开始的一切研究均是在假定 Riemann 猜测不真的情况下进行的，以后不再重复指出了。

由假定知集合 E_0 非空，且由解之定义显然有 $E_0 \subset R$，由集合 R 之定义可知 $R \subset D$。从定理 1.1 知映射 f 是拓扑映射，且 $M \cong D$。因此可写 $M = f(D)$，对于开域 R，也有 $M_1 = f(R)$，这里的二维流形 M_1 的参数表达式就是推论 1 中当 $\mathrm{sgn}\, t = 1$ 时的情形。现设 M_0 是集合 E_0 在拓扑映射 f 作用下在空间 E_1^6 中生成的像，且记为 $M_0 = f(E_0)$，显然应有 $M_0 \subset M_1$。既然超定超越方程组 (1.1~1.4) 在我们的假定下它的几何意义是在开域 R 中确定一个非空真子集 E_0，那末现在我们来看超定超越方程组 (1.1~1.4) 在拓扑映射 f 的作用下将如何变化。

利用第一节中映射 f 的表示式并消去 σ 与

t，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\bar{t}\theta}\sin\left(\bar{\sigma}\theta-\bar{t}\log\cos\theta\right)+e^{-\bar{t}\theta}\sin\left(\bar{\sigma}\theta+\bar{t}\log\cos\theta\right)\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{\bar{\sigma}-2}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}d\theta-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots\cdots 3.1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\bar{t}\theta}\cos\left(\bar{\sigma}\theta-\bar{t}\log\cos\theta\right)-e^{-\bar{t}\theta}\cos\left(\bar{\sigma}\theta+\bar{t}\log\cos\theta\right)\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{\bar{\sigma}-2}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}d\theta-\frac{1}{k_2}=0 \quad \cdots\cdots 3.2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\bar{t}\theta}\sin\left[(1-\bar{\sigma})\theta-\bar{t}\log\cos\theta\right]+e^{-\bar{t}\theta}\sin\left[(1-\bar{\sigma})\theta+\bar{t}\log\cos\theta\right]\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\bar{\sigma}-1}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}d\theta-\frac{1}{k_3}+\frac{1}{2}=0 \quad \cdots\cdots 3.3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\bar{t}\theta}\cos\left[(1-\bar{\sigma})\theta-\bar{t}\log\cos\theta\right]-e^{-\bar{t}\theta}\cos\left[(1-\bar{\sigma})\theta+\bar{t}\log\cos\theta\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\bar{\sigma}-1}}{e^{2\pi\,\mathrm{tg}\,\theta}-1}d\theta-\frac{1}{k_4}=0 \quad \cdots\cdots 3.4$$

由上知 $M_0\subset M_1\subset M$，因此集合 E_0 的像 M_0 中的元素 $m=(\bar{\sigma},\bar{t},k_1,k_2,k_3,k_4)$ 更应具有二维流形 M 中元素的一些性质。因此，$\bar{\sigma},\bar{t},k_1,k_2,k_3,k_4$ 还满足(1.9~1.12)式

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2+(k_1-2)\bar{\sigma}-(k_1-1)=0 \quad \cdots\cdots 3.5$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-2\bar{\sigma}-k_2\bar{t}+1=0 \quad \cdots\cdots 3.6$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_3\bar{\sigma}=0 \quad \cdots\cdots 3.7$$

$$\bar{\sigma}^2+\bar{t}^2-k_4\bar{t}=0 \quad \cdots\cdots 3.8$$

事实上我们有下述的

引理 7. 超定方程组 (3.1~3.8) 与超定超越方程组 (1.1~1.4) 等价。

证. 设有一组实数 ($\bar{\sigma}_0, \bar{t}_0, k_{10}, k_{20}, k_{30}, k_{40}$) 满足方程组 (3.1~3.8)，简记 $x_0=(\bar{\sigma}_0, \bar{t}_0, k_{10}, k_{20}, k_{30}, k_{40})$ 并称其为方程组 (3.1~3.8) 的一个解。今设该解满足方程组 (3.1~3.8)，消去 $k_{10}, k_{20}, k_{30}, k_{40}$ 后立刻可以推得方程组 (1.1~1.4) 有解 $y_0=(\sigma_0, t_0)$，且此里有 $\sigma_0=\bar{\sigma}_0$, $t_0=\bar{t}_0$。反之，若方程组 (1.1~1.4) 有一解 $y_0=(\sigma_0, t_0)$，那末相应地方程组 (3.1~3.8) 也有一解 $x_0=(\bar{\sigma}_0, \bar{t}_0, k_{10}, k_{20}, k_{30}, k_{40})$，且有

$$\bar{\sigma}_0=\sigma_0, \quad \bar{t}_0=t_0, \quad k_{10}=\frac{(\sigma_0-1)^2+t_0^2}{1-\sigma_0}, \quad k_{20}=\frac{(\sigma_0-1)^2+t_0^2}{t_0},$$

$$k_{30}=\frac{\sigma_0^2+t_0^2}{\sigma_0}, \quad k_{40}=\frac{\sigma_0^2+t_0^2}{t_0}$$

这就证明了本引理。

现在转而来研究方程组 (3.1~3.8)，易知其解 $x=(\bar{\sigma}, \bar{t}, k_1, k_2, k_3, k_4)$ 的集合即是前面找到的 M_0。由引理 7 知，集合 E_0 与集合 M_0 中的元素是一

一对应的，所以 M_0 与 E_0 等势。由于集合 M_0 是二维流形 M_1 的一个真子集，它也应具有 M_1 之特征。将 M_1 的参数表达式（即推论 1 中取 $\mathrm{sgn}\, t=1$）代入到方程组（3.1~3.8）中后，立刻就有

$$\frac{1}{2}-\frac{\mu(1+\lambda)}{1+\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\sin\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\right.$$
$$\left.\sin\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\lambda+2}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\lambda\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 3.9$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cos\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\right.$$
$$\left.\cos\left[\frac{\lambda\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{\lambda+2}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\lambda\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 3.10$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\lambda\mu(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\sin\left[\frac{\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]+e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\right.$$
$$\left.\sin\left[\frac{\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\lambda\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 3.11$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}{1+\lambda^2\mu}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cos\left[\frac{\theta}{1+\lambda}-\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]-e^{-\frac{\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}}\cdot\right.$$
$$\left.\cos\left[\frac{\theta}{1+\lambda}+\frac{\log\cos\theta}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right]\right\}\cdot\frac{(\cos\theta)^{-\frac{2\lambda+1}{\lambda+1}}}{e^{2\pi\lambda\theta}-1}\,d\theta=0 \quad \cdots\cdots 3.12$$

极易验证方程组（1.1~1.4）与超定方程组（3.9~3.12）是等价的，它们之间有关系

$$\sigma=\frac{\lambda}{1+\lambda}, \qquad t=\frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)} \quad \cdots\cdots 3.13$$

其逆关系是

$$\lambda=\frac{\sigma}{1-\sigma}, \qquad \sqrt{\mu}=\frac{1-\sigma}{t} \quad \cdots\cdots 3.14$$

现在来看我们引进的参数 λ 与 μ 的几何意义。由图 1，設 P 为 D 域中的任意一点。过 P 作平行於 σ 轴及垂直於 σ 轴的平行线与垂线，依次交 t 轴於 A，交直线 σ=1 於 B，交 σ 轴於 Q。由 3.14 式的第一式知

$$\lambda = \frac{PA}{PB} \qquad \cdots\cdots 3.15$$

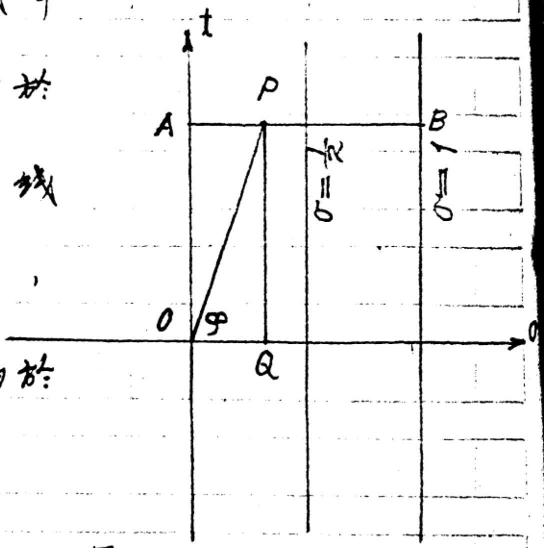

图 1　λ 与 μ 之几何意义说明

由 3.14 的第二式有

$$\sqrt{\mu} = \frac{1-\sigma}{t} = \frac{\sigma}{\lambda t} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\lambda} \qquad \cdots\cdots 3.16$$

这就是 λ 与 μ 的几何意义。

若記 $P=(\sigma, t)$，则 P 点也可記作

$$P = \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\lambda)}\right)$$

故而 λ 与 μ 也唯一地確定了 P 点在开域 D 中的位置。所以我们称 λ 与 μ 为广义坐标。

四 结 語

本文的主要目的是将超定超越方程组(1.1~1.4)进行变换。经过冗长的研究，我们将它变为一组以 λ 与 μ 为变数的超定超越方程组，而 λ 与 μ 恰为尼末域内的点的广義坐标。现在我们再在 E^9 空间中取一 λ-μ 实平面，且记为 E_2^2。并将3.13式与3.14式看作空间 E_1^2 与空间 E_2^2 中点之间的变换关系。易知这种变换是连续的、一一对应的，而且逆变换存在且连续。因此，我们有

引理8　若开域 R 的定義同第三节，且定義映射 g：

$$\lambda=\frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad \mu=\left(\frac{1-\sigma}{t}\right)^2 \quad \cdots\cdots g$$

并记 R 域中的点在 g 作用下在 E_2^2 中所生成的像的集合为 G，则 g 是一个拓扑映射，且 $R\cong G$。

証　因 λ 与 μ 都是 σ 与 t 的二元连续实函数，且对 R 域中任意点都有意義。所以在 g 作用下，$R\rightarrow G$ 是连续的、一一的满映射。此外，

由3.13式可知 g 的逆 g^{-1} 存在且連續、單值。所以在 g^{-1} 作用下，$G \to R$ 是連續的、一一的滿映射。故由拓扑學中关於拓扑映射的定義可知，g 是拓扑映射，且 $G \cong R$。引理証完。

现在我们可記 $G=g(R)$ 及 $R=g^{-1}(G)$。下面来研究 G 域的具体状况。將3.13式代入到 R 域的定義式中，立刻得到

$$G=\{(\lambda,\mu)\mid \lambda>0,\ \lambda\neq 1,\ \mu>0,\ \lambda\mu-1\neq 0,\ \lambda^2\mu-\lambda\mu+2\neq 0,\ \lambda\mu-\mu-2\neq 0\}$$

在第三节中我们得到了新的以 λ 及 μ 为变数的超定超越方程组(3.9~3.12)，而且它与超定超越方程组(1.1~1.4)是等价的。这里等价的意思是指：它们的解之间可以建立一个一一对应关係，因此显然有如下性质

1° 两方程组同時有解或同時无解。

2° 两方程组其相应的解的集合等势，当是有限集時它们的解数相同。

现記超定超越方程組(3.9~3.12)在开域 G 上的实数解 $Z=(\lambda,\mu)$ 的全体为集合 N_0，則由上易知 $N_0=g(E_0)$。由於 E_0 是非空集合，因而 N_0 也是一个非空集合。所以我们有下述的

定理 4.1　若 Riemann 猜测不真，那末超定超越方程組(3.9~3.12)在开域 G 上有实数解，集合 N_0 非空。

証　此极易推得。

参考文献

[1] Constance Reid，袁向东、李文林譯，希尔伯
上海科學技術出版社，1983.

[2] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann Zeta function, Clarendon Press, Oxford, 1951.

[3] 江泽涵，拓扑學引論，上海科學技術出版
1982.

[4] 王天筹，黎曼泉他函数的非零点(I)，哈尔
电工學院學报，第1期，，1986.