The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

Chapter 1

第9卷 第1期 哈尔滨电工学院学报 Vol.9. №1
1986年 3月 HIET Journal Mar. 1986

Riemann ζ-函数的复零点(Ⅰ)

王天筹

（哈尔滨大电机研究所）

摘 要

本文是一组论文的第一篇。它简单回顾了这方面的主要工作，并指出了黎曼假设与一些著名的数论问题的联系。本文给出了$\zeta(s)$的复零点所必须满足的两组超越方程式。此外，还证明了函数$\zeta(s)$在诸圆：$\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$、$\left|s-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$、$\left|s-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$上无复零点。更进一步，又证明了$\zeta(s)$在闭域$\overline{D}=\left\{(\sigma,t)\,\middle|\,\sigma^2+t^2-\sigma\leqslant 0\right\}$上无复零点。最后给出了与Riemann猜测等价的两个定理。并且指出，若Riemann假设真实，则收敛无穷级数$\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2}$之和值可以求得；此处$\rho$经过$\zeta(s)$的全体复零点。

一、引 言

1859年，B.Riemann[1] 引进著名的复变量函数$\zeta(s)$，它的原始定义是

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s=\sigma+it,$$

这个式子仅当$\sigma>1$时才有意义。为了得到对全体s均成立的解析式，Riemann[2] 建立了表达式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)\mathrm{d}x \qquad (1.1)$$

此处

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$$

接着，黎曼提出了关于$\zeta(s)$的六个猜想[1]，除了第五个猜想外这些猜想都已先后

本文于1985年10月5日收到。

被 Hadamard 与 Von Mangoldt[1] 所解决。这第五个猜想就是极为著名的“黎曼假设”，它可表述为：黎曼采他函数的全体复零点均位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上。

这个假设与许多著名的数论问题有联系。如素数个数函数$\pi(x)$的最佳渐近估计[1]，几何数论中的 Dirichlet 问题[2]，相继两素数的差距问题[1]，Lindelof 猜测[2]，甚至与著名的 Гольдбах 猜想有联系[1]。

长期以来，人们在不断地改进$\zeta(s)$的无复零点区域的边界；但是这种方法似乎不能彻底地解决黎曼猜测问题。从本文开始，将用与以前完全不同的方法去攻这个问题。下面给出前人的主要工作。

定理1.1 (B.Riemann)[1]

函数$\zeta(s)$在半平面$\sigma>1$上无复零点。

定理1.2 (Hadamard and de la Vallée Poussin)[2]

函数$\zeta(s)$在直线$\sigma=1$上无复零点。

二、超越方程组

现在我们来寻求$\zeta(s)$的复零点所满足的两组超越方程。首先有

定理2.1 若$s=\sigma+it$，那末s是$\zeta(s)$的复零点的充分而必要条件是实数对(σ,t)满足下列超越方程组

$$1-4\left[\sigma(1-\sigma)+t^2\right]\int_0^{\infty}\operatorname{ch}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\cos tu\phi(u)\mathrm{d}u-$$

$$-8\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)t\int_0^{\infty}\operatorname{sh}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\sin tu\phi(u)\mathrm{d}u=0 \tag{2.1}$$

$$\left[\sigma(1-\sigma)+t^2\right]\int_0^{\infty}\operatorname{sh}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\sin tu\phi(u)\mathrm{d}u-$$

$$-2\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)t\int_0^{\infty}\operatorname{ch}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\cos tu\phi(u)\mathrm{d}u=0 \tag{2.2}$$

式中

$$\phi(u)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi e^{2u}+\frac{u}{2}}$$

证 由(1.1)式知

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[1+s(s-1)\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)\mathrm{d}x\right]$$

今记

$$\eta(s)=\int_1^\infty\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)\mathrm{d}x,$$

事实上 $\eta(s)$ 可写为更简洁的形式。为此令 $x=e^{2u}$
立得

$$\eta(s)=4\int_0^\infty \mathrm{ch}\left(s-\frac{1}{2}\right)u\phi(u)\mathrm{d}u,$$

这里

$$\phi(u)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi}e^{2u}+\frac{u}{2}$$

由假设知 s 是一个复零点，故有

$$1+s(s-1)\eta(s)=0 \tag{2.3}$$

注意到

$$\int_0^\infty \mathrm{ch}\left(s-\frac{1}{2}\right)u\phi(u)\mathrm{d}u=\int_0^\infty \mathrm{ch}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\cos tu\phi(u)\mathrm{d}u+$$
$$+i\int_0^\infty \mathrm{sh}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\sin tu\phi(u)\mathrm{d}u \tag{2.4}$$

将(2.3)式展为实部与虚部的形式，并命实部与虚部同时为零即得所需。证毕。

由定理 2.1 报易推得下述的

推论 2.1　$\zeta(s)$的复零点关于直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 及 σ 轴呈对称分布。

证　今设 $s=\sigma+it$ 为 $\zeta(s)$ 的任一复零点，由定理 2.1 知，实数对(σ、t)必须满足超越方程组 (2.1) 式及 (2.2)式。现将 t 换为 $-t$，则($\sigma,-t$) 仍能满足该方程组；将 σ 换为 $1-\sigma$，则($1-\sigma,t$) 也能满足原式。故得所需推论。

下面给出了另一组超定超越方程组，有

定理 2.2　如果 $s=\sigma+it$，那末 s 是函数 $\zeta(s)$的复零点的充分而必要条件是实数对(σ,t) 满足下列的超定超越方程组

$$\frac{1}{2}-\frac{1-\sigma}{(\sigma-1)^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\sin(\sigma\theta-t\log\cos\theta)+e^{-t\theta}\sin(\sigma\theta+\right.$$
$$\left.+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta=0 \tag{2.5}$$

$$-\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\cos(\sigma\theta-t\log\cos\theta)-e^{-t\theta}\cos(\sigma\theta+\right.$$
$$\left.+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta=0 \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{\sigma^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\sin\Big[(1-\sigma)\theta-t\log\cos\theta\Big]+e^{-t\theta}\sin\Big[(1-\sigma)\theta\right.$$
$$\left.+t\log\cos\theta\Big]\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta=0 \tag{2.7}$$

$$-\frac{t}{\sigma^2+t^2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\cos\left[(1-\sigma)\theta-t\log\cos\theta\right]-e^{-t\theta}\cos\left[(1-\sigma)\theta\right.\right.$$

$$\left.\left.+t\log\cos\theta\right]\right\}\frac{(\cos)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta=0 \tag{2.8}$$

证. 由文献[3]知

$$\zeta(s,a)=\frac{a^{1-s}}{2}+\frac{a^{-s}}{s-1}+2\int_0^{\infty}\frac{(a^2+y^2)^{-\frac{s}{2}}\sin s\theta}{e^{2\pi y}-1}\mathrm{d}y \tag{2.9}$$

式中

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)$$

这个公式一般称为Hermite公式。它的原始定义是

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}\quad s=\sigma+it,\ \sigma>1,\ 0<a\leqslant 1$$

$\zeta(s,a)$ 一般称为广义黎曼采他函数。所以Hermite公式无非也是一种解析开拓。现在，在(2.9)式中取$a=1$，可得

$$\zeta(s,1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}+H(s), \tag{2.10}$$

此处Hermite积分

$$H(s)=2\int_0^{\infty}\frac{(1+y^2)^{-\frac{s}{2}}\sin s\theta}{e^{2\pi y}-1}\mathrm{d}y, \tag{2.11}$$

而$\theta=\mathrm{tg}^{-1}y$。若作积分变量代换 $y=\mathrm{tg}\theta$，则有

$$H(s)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\theta)^{s-2}\sin s\theta}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta \tag{2.12}$$

由假定 s 是$\zeta(s)$的任一个复零点，故由零点之定义知此时必有$\zeta(s)=\zeta(s,1)=0$

故得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{s-1}+H(s)=0 \tag{2.13}$$

注意到

$$H(s)=H_1(\sigma,t)+iH_2(\sigma,t) \tag{2.14}$$

式中 $$Hi(\sigma,t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\sin(\sigma\theta-t\log\cos\theta)+e^{-t}\sin(\sigma\theta+\right.$$

$$\left.+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{-2}}{e^{2\pi\mathrm{tg}\theta}-1}\mathrm{d}\theta$$

$$H_2(\sigma,t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{t\theta}\cos(\sigma\theta-t\log\cos\theta)-e^{-t\theta}\cos(\sigma\theta+t\log\cos\theta)\right\}\frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\operatorname{tg}\theta}-1}d\theta$$

利用(2.14)式将(2.13)式展为实部与虚部的形式并令实部与虚部同时为零，即得(2.5)式与 (2.6)式。又由推论 2.1 得知，若已知$s=\sigma+it$ 为$\zeta(s)$ 的一个复零点，那末 $1-\sigma+it$ 也是一个复零点。将(2.5)式与(2.6)式中的σ换为$1-\sigma$即得(2.7)式与(2.8)式。至此定理证毕。

三、在三个圆上

在这一节将证明如下的定理：

定理 3.1　黎曼采他函数$\zeta(s)$在诸圆：$\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$、$\left|s-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$、$\left|s-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$上无复零点。

在证明本定理之前，先证明如下的：

引理 1　若记，$I(\sigma,t)=\int_0^\infty \operatorname{ch}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\cos tu\phi(u)du$,则在带状区域$0\leqslant\sigma\leqslant1$中有估计

$$I(\sigma,t)<\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^\pi}{e^\pi-1}\tag{3.1}$$

证：由于

$$I(\sigma,t)\leqslant\left|I(\sigma,t)\right|\leqslant\int_0^\infty\left|\operatorname{ch}\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u\cos tu\phi(u)\right|du=$$

$$=\int_0^\infty\operatorname{ch}\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|\left|u\right|\left|\cos tu\right|\phi(u)du<\int_0^\infty\operatorname{ch}\left|\sigma-\frac{1}{2}\right|u\phi(u)du$$

$$\leqslant\int_0^\infty\operatorname{ch}\frac{u}{2}\phi(u)du$$

今记

$$J=\int_0^\infty\operatorname{ch}\frac{u}{2}\phi(u)du$$

注意到

$$e^{-n^2\pi e^{2u}}<e^{-n\pi e^{2u}}\quad(n\geqslant2)$$

故得

$$J=\int_0^\infty\operatorname{ch}\frac{u}{2}e^{\frac{u}{2}}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi e^{2u}}\right)du<\int_0^\infty e^{\frac{u}{2}}\operatorname{ch}\frac{u}{2}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n\pi e^{2u}}\right)du=\int_0^\infty\frac{e^u+1}{2}\cdot\frac{e^{-\pi e^{2u}}}{1-e^{-\pi e^{2u}}}du$$

又因$\dfrac{e^u+1}{2}\leqslant e^{2u}$　$(u\geqslant 0)$ 故有

$$J<\int_0^\infty \frac{e^{2u}}{e^{\pi e^{2u}}-1}\,du \tag{3.2}$$

在(3.2)式右端积分中令 $x=e^{2u}$，则定积分变为 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}$。最后的积分极易算得如下

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}=\frac{1}{2\pi}\int_\pi \frac{dy}{e^y-1}=\frac{1}{2\pi}\int_\pi^\infty \frac{de^y}{e^y(e^y-1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{e^\pi}^\infty \frac{dv}{v(v-1)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\log\frac{v-1}{v}\Big|_{e^\pi}^\infty=\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^\pi}{e^\pi-1}$$

故得

$$I(\sigma,t)\leqslant J<\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}=\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^\pi}{e^\pi-1}$$

引理证毕。

引理2　若 $s_0=\sigma_0+it_0$ 是 $\zeta(s)$ 的一个复零点，则恒有

$$\int_0^\infty \mathrm{ch}\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)u\cos t_0u\phi(u)\,du=\frac{\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2}{4\left\{[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2]^2+4\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^2t_0^2\right\}} \tag{3.3}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{sh}\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)u\sin t_0u\phi(u)\,du=\frac{2\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)t_0}{4\left\{[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2]^2+4\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)^2t_0^2\right\}} \tag{3.4}$$

证：　由定理2.1知此时恒有

$$\left[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2\right]p+2\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)t_0q=\frac{1}{4} \tag{3.5}$$

$$\left[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2\right]q-2\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)t_0p=0 \tag{3.6}$$

式中

$$p=\int_0^\infty \mathrm{ch}\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)u\cos t_0u\phi(u)du$$

$$q=\int_0^\infty \mathrm{sh}\left(\sigma_0-\frac{1}{2}\right)u\sin t_0u\phi(u)du$$

将式(3.5)与式(3.6)两式看作关于 p、q 之线性方程组，解之即得(3.3)式与(3.4)式。引理证毕。

现在来证明定理3.1。取二元实函数

$$F(\sigma,t)=\frac{\sigma(1-\sigma)+t^2}{4(\sigma^2+t^2)\left[(1-\sigma)^2+t^2\right]} \tag{3.7}$$

并取两集合

$$E_1=\left\{(\sigma,t)\middle|\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2+t^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad t\neq 0\right\}$$

$$E_2=\left\{(\sigma,t)\middle|\left(\sigma-\frac{1}{4}\right)^2+t^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2,\quad t\neq 0\right\}$$

则易得结论

$$F(\sigma,t)=\frac{1}{2}\text{，当}\quad(\sigma,t)\in E_1\text{时；}$$

$$F(\sigma,t)>\frac{3}{4}\text{，当}\quad(\sigma,t)\in E_2\text{时，}$$

这是因为

1° 当$(\sigma,t)\in E_1$时，有$\sigma^2+t^2-\sigma=0$。故而有

$$F(\sigma,t)=\frac{1}{4}\frac{\sigma(1-\sigma)+t^2}{\sigma(1-\sigma)}=\frac{1}{2}\text{。}$$

2° 当$(\sigma,t)\in E_2$时，有$\sigma^2+t^2-\frac{\sigma}{2}=0$。故而有

$$F(\sigma,t)=\frac{1}{4}\frac{\sigma(1-\sigma)+t^2}{\frac{\sigma}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sigma\right)}=\frac{1}{4}\frac{\frac{\sigma}{2}(3-4\sigma)}{\frac{\sigma}{4}(2-3\sigma)}=\frac{3-4\sigma}{2(2-3\sigma)}$$

由于$\frac{3-4\sigma}{2-3\sigma}>\frac{3}{2}$，故得$F(\sigma,t)>\frac{3}{4}$。这就证明了上述结论。

现用反证法证明定理3.1。今设定理3.1不真，假定在圆$\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$上有复零点。现用$s_0$表示这样的复零点，且$s_0=\sigma_0+it_0$。由引理2知此时（3.3）式必须成立。注意到恒等式

$$\left[\sigma(1-\sigma)+t^2\right]^2+4\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)^2t^2=(\sigma^2+t^2)\left[(1-\sigma)^2+t^2\right]$$

在我们的记号下此时恒有

$$I(\sigma_0,t_0)=F(\sigma_0,t_0) \tag{3.8}$$

由引理1及1°立得不等式

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^\pi}{e^\pi-1}>\frac{1}{2}$$

这等价于

$$\frac{e^\pi(e^\pi-2)}{e^\pi-1}<0$$

但这是不可能的，由此引出矛盾。因此$\zeta(s)$在圆$\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$上不可能有复零点。完全类似地若假定$\zeta(s)$在圆$\left|s-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$上有复零点的话，可引出

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}>\frac{3}{4}$$

这同样是不可能的。所以$\zeta(s)$在$\left|s-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$上没有复零点。再由推论2.1及以上结果得知$\zeta(s)$在$\left|s-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$上无复零点。至此定理3.1证完。

事实上还可有如下的

定理3.2　若记开域$D=\left\{(\sigma,t)\ \middle|\ \sigma^2+t^2-\sigma<0\right\}$，且记其边界$\sigma^2+t^2-\sigma=0$为$\Gamma$。那末在闭域$\overline{D}$上无$\zeta(s)$的复零点。

证：由定理3.1已经知道$\zeta(s)$在Γ上无复零点，现仅需证明$\zeta(s)$在开域D上无复零点即可。为此，先证下述的

引理3　若$(\sigma,t)\in D$，则常有$F(\sigma,t)>\frac{1}{4}$。

证　易知此时$F(\sigma,t)$在D上是一个正值的二元实函数。由开域D之定义，可知

$$(1-\sigma)^2+t^2<1-\sigma<1$$

及

$$\frac{\sigma(1-\sigma)+t^2}{\sigma^2+t^2}\geqslant 1\qquad 若\ 0<\sigma\leqslant\frac{1}{2}$$

故得$F(\sigma,t)>\frac{1}{4}\left(0<\sigma\leqslant\frac{1}{2}\right)$。再利用$F(\sigma,t)=F(1-\sigma,t)$即得$F(\sigma,t)>\frac{1}{4}$，引理证完。

现在来证明本定理。今假定定理3.2不真，设在D上有复零点$s_0=\sigma_0+it_0$。则由引理1、引理2、引理3可推得不等式

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{e^{\pi}}{e^{\pi}-1}>\frac{1}{4}$$

此等价于$\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}$，但这是不可能的，由此引出矛盾。这就证明了本定理。

四、复零点构成的级数

Riemann曾猜测[1]由全体复零点所构成的无穷级数$\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$为发散，而$\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$

为收敛，此处 ρ 经过 $\zeta(s)$ 的所有复零点。尽管这个猜测早已证明[1][4]，但无人给出过收敛无穷级数 $\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$ 之值。在这一节将证明如下的

定理 4·1　若黎曼猜测真实，那么恒有

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}=2+\gamma-\log 4\pi \tag{4.1}$$

此处 γ 为著名的 Euler 常数。

为证明本定理，我们先证明

引理 4　若 ρ 为 $\zeta(s)$ 的复零点，则恒有

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho(\rho-1)}=2b_0 \tag{4.2}$$

这里 ρ 经过 $\zeta(s)$ 的全体复零点，且有 $b_0=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2-1-\frac{\gamma}{2}$。

证　由文献〔2〕知

$$\xi(s)=\frac{1}{2}e^{b_0 s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}} \tag{4.3}$$

式中

$$b_0=\frac{1}{2}\log\pi+\log 2-1-\frac{\gamma}{2}$$

现在我们在（4.3）式两边取对 s 的对数微商，这样即得

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=b_0-\sum_{\rho}\frac{s}{\rho(\rho-s)} \tag{4.4}$$

在（4.4）式中分别取 $s=0$ 及 $s=1$，即得

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho(\rho-1)}=b_0-\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \tag{4.5}$$

$$\frac{\xi'(0)}{\xi(0)}=b_0 \tag{4.6}$$

由文献〔2〕知

$$\xi(s)=\xi(1-s)$$

两边对 s 取对数微商得

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}=-\frac{\xi'(1-s)}{\xi(1-s)} \tag{4.7}$$

在（4.7）式中取 $s=1$，得

$$\frac{\xi'(1)}{\xi(1)}=-\frac{\xi'(0)}{\xi(0)} \tag{4.8}$$

由（4.5）式、（4.6）式、（4.8）式得

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho(\rho-1)}=2b_0$$

这里 ρ 经过 $\xi(s)$ 的全体复零点。引理证完。

今设 Riemann 假设真实，即 $\zeta(s)$ 的全体复零点其实部均等于 $\frac{1}{2}$。故知其任一复零点此时均可写作 $\frac{1}{2}+i\beta$。易知此时恒有

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho(\rho-1)}=-\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2} \tag{4.9}$$

由（4.9）式及引理 4 立刻得到（4.1）式。定理**4.1**证完。

我们还可有如下的

推论4.1 若记 $J=\int_0^\infty \mathrm{ch}\frac{u}{2}\phi(u)\mathrm{d}u$，则恒有

$$J=\frac{2+\gamma-\log 4\pi}{8}$$

证 由文献〔2〕知

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{4.10}$$

由(4.10)式及(1.1)式得

$$\xi(s)=\frac{1}{2}\left[1+4s(s-1)\int_0^\infty \mathrm{ch}(s-\frac{1}{2})u\phi(u)\mathrm{d}u\right] \tag{4.11}$$

在（4.11）式两边取对 s 的微商后再取 $s=0$，可得

$$\int_0^\infty \mathrm{ch}\frac{u}{2}\phi(u)\mathrm{d}u=-\frac{\xi'(0)}{2} \tag{4.12}$$

由（4.12）式及（4.6）式得

$$J=-\frac{\xi(0)}{2}b_0=-\frac{b_0}{4}=\frac{2+\gamma-\log 4\pi}{8}$$

推论证完。

由此可得 $I(\sigma,t)<\frac{2+\gamma-\log 4\pi}{8}$，这个估计比引理 1 的估计要好。

五、结 语

在这一节将给出几个与黎曼猜测等价的定理。我们先给出

定理5.1 黎曼猜测真实的充分和必要条件是

$$\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}=2+\gamma-\log 4\pi \tag{5.1}$$

这里 ρ 经过 $\sigma=\frac{1}{2}$ 线上的全体复零点。

证　必要性已由定理 4.1 证明，今证其充分性。现用反证法来证明，假设此时 Riemann 猜测不真。即在区域 $0<\sigma<1$ 的 $\sigma=\frac{1}{2}$ 直线外还有复零点。现在将全体复零点分作两大类：将直线 $\sigma=\frac{1}{2}$ 上的全体复零点称为第一类，并用 E 来表示这个复零点集合；用 E_0 来表示不在线上的第二类复零点集合。由引理 4 得知，没有任何假定我们恒有

$$\sum_{\rho}\frac{1}{\rho(1-\rho)}=-2b_0$$

此处 ρ 经过 $\zeta(s)$ 的全体复零点。由于

$$\sum_{\rho\in E\cup E_0}\frac{1}{\rho(1-\rho)}=\sum_{\rho\in E}\frac{1}{\rho(1-\rho)}+\sum_{\rho\in E_0}\frac{1}{\rho(1-\rho)}$$

注意到

$$\sum_{\rho\in E}\frac{1}{\rho(1-\rho)}=\sum_{\mathrm{Re}\rho=\frac{1}{2}}\frac{1}{|\rho|^2}=-2b_0=2+\gamma-\log 4\pi$$

得

$$\sum_{\rho\in E_0}\frac{1}{\rho(1-\rho)}=0 \tag{5.2}$$

由推论2.1我们可将（5.2）式化为

$$4\sum_{\rho\in E'}\frac{\alpha(1-\alpha)+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)[(1-\alpha)^2+\beta^2]}=0$$

这里 E' 表示复零点 $\rho=\alpha+i\beta$ 满足条件 $\frac{1}{2}<\alpha<1$，$\beta>0$ 的集合。故得

$$\sum_{E'}\frac{\alpha(1-\alpha)+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)[(1-\alpha)^2+\beta^2]}=0 \tag{5.3}$$

由假设知集合 E_0 是一个非空集合，因此集合 E' 也是非空的。而且（5.3）式左端级数的通项是恒正的。由级数理论知，通项恒正的级数其和恒不能等于零，故引出矛盾。因此 E_0 只能是空集，由此推得黎曼假设真实。这就证明了充分性。定理证完。

Hardy[2] 在1914年证明了 $\zeta(s)$ 在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 线上有无穷多个零点。另外，罗塞、舍恩费尔德、约克三人在黎曼假设的研究中[5] 用计算机验证了 $\zeta(s)$ 的前三百万个复零点的确位于 $\sigma=\frac{1}{2}$ 线上。在此顺便指出，定理 5.1 是本质的。因为它隐含与联系了 Riemann 原先的第一、第三、第四、第五个猜测。当然，要直接去证明（5.1）式是困难的，所以不能希图通过它去证明黎曼假设。但我们却有

定理 5.2　　黎曼假设真实的充分而必要条件是超定超越方程组（2.5～2.8）在区

$$S=\left\{(\sigma,t)\ \middle|\ \sigma^2+t^2-\sigma>0,\ 0<\sigma<1,\ \sigma\neq\frac{1}{2},\ t\neq 0\right\}$$

域上无实数解。

证 此极易由定理 2.2 推得。

参 考 文 献

〔1〕华罗庚：《指数和的估计及其在数论中的应用》，科学出版社，1963,42～50页，73页。

〔2〕Titchmarsh E.C: *The theory of the Riemann Zeta function*, Dlarendon Press, Oxford, 1951, pp.16～22, pp.30～38, pp.214～276。

〔3〕王竹溪，郭敦仁：《特殊函数概论》，科学出版社，1979,135页。

〔4〕A.A.Карацуба，潘承彪、张南岳译：《解析数论基础》，科学出版社，1984，30页。

〔5〕Steen, L.A 马继芳译：《今日数学》，上海科学技术出版社，1982,52页。

The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function

Wang Tianchou

(Harbin Research Institute of Large-scale Electrical Machinery)

Abstract

This is the first one of a series of papers. It reviews briefly the main works about the problem of complex zeros of the Riemann zeta function and points out that the Riemann Hypothesis is related with many famous problems in the theory of numbers. This paper proposes two groups of the transcendental equations each of which has to be satisfied by every complex zero of the $\zeta(s)$.

Therewithal, it is proved that the function $\zeta(s)$ has no complex zero on those circles: $\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$, $\left|s-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$ and $\left|s-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{4}$. Further more, it is also proved that the functiom $\zeta(s)$ has no complex zero in the closed set $\overline{D}=\left\{(\sigma,t)\,\middle|\,\sigma^2+t^2-\sigma\leqslant 0\right\}$. Finally, two theorems are given out each of whicn is equivalent to the Riemann Hypothesis. At the same time, it is pointed out that the sum of the convergent infinite series $\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$, here ρ runs through the all complex zeros of the function $\zeta(s)$, can be found if the Riemann Hypothesis is true.