The Answer to the Riemann Hypothesis

(The Complex Zeros of the Riemann Zeta Function)

Dr. Tian-Chou Wang

(This work is dedicated to Dr. Wang's wife. Wish her soul rest in peace.

Many thanks for her support)

SECTION ONE

CONTENTS

Foreword by Dr. Yue Huang

I have known Dr. Tian-Chou Wang since I was in primary school. Over the past nearly 40 years, he would often talk to me about the Riemann Hypothesis. Indeed, this was one of my few exposures to mathematics.

One day, Dr. Wang told me that he successfully tested the Riemann Hypothesis, an exciting news from the serious and learned gentleman. It will be delightful to see the successful outcome of what is virtually of his entire life's endeavour. In this series, Dr. Wang will explain his insight into the Riemann hypothesis, and make his conclusion accessible to other mathematicians and the public.

Dr. Wang is a classic and old fashioned academic. All his manuscripts are hand-written, and the papers have turned to yellow due to long-time storage. The work is original and the chapters listed here are in Chinese. However, I believe that a mathematician working on the topic of the Riemann Hypothesis will understand the equations and formulas in the manuscript even if not knowledgeable in Chinese.

I was trained as a neurologist and I am currently working as a medical researcher on neurological disorders. I very much appreciate Dr. Wang's dedication of testing a hypothesis.

Dr. Wang's proof has eleven chapters and eleven appendixes in total. The first section listed here includes seven chapters.

If you are interested, please contact

Dr. Yue Huang

Senior Research Officer, Neuroscience Research Australia

Conjoint Senior Lecturer, The University of New South Wales

Email: y.huang@neura.edu.au; Tel: +61-2-9399-1602

09/09/2012

一个半世纪以来的黎曼猜想

王天舜

（哈尔滨大电机研究所）

据说德国大数学家希尔伯特说过一段很有意思的话，它的大意是："如果我（Hilbert）一百年后还能醒过来的话，我首先关心的既不是世界变成了什么样子，也不是人类的科学已经进展到何种地步；我要问的是：黎曼ζ函数它的零点究竟在什么地方？……"

Hilbert所提及的黎曼ζ函数就是指在数学中赫赫有名的复变量函数 $\zeta(s)$，它的原始定义是

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s=\sigma+it$$

这个式子当且仅当 $\sigma>1$ 时才有意义。为了得到对全体s都成立的函数表达式，B. Riemann建立了如下的分析表达式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_{1}^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\psi(x)dx$$

式中

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$$

接着，Riemann对$\zeta(s)$提出了六个猜想，在这些猜想中除了第五个猜想以外，其余五个猜想都已先后被Hadamard与Von Mangoldt所解决。这第五个猜想就是当今著称的"黎曼假设"。它可以表述为："Riemann ζ函数$\zeta(s)$之的全体复零点都位于直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$之上"。

这个猜想和数论中诸多问题有关。如素数个数函数$\pi(x)$的最佳渐近估计，几何数论中著名的Dirichlet问题，相继两素数的差距问题，极负盛名的Lindelöf猜想。在上世纪下半叶，人们发现除了数学本身以外，在科学以及工程技术上据说至少有一十多个问题同它有关联。

在漫长的岁月中，所有企图去证明Riemann猜想的努力都是白费的，所有的证明都以失败而告终。特别是1982年在意大利米兰召开的国际数论与函数论会议上，与会者从Riemann提出猜想的1859年以后的历史终于发现：在漫长的历史长河中，如此众多的世界级数学大师及顶尖数学家用如此精确多彩的数学工具去攻这一世界难题，但它都是纹丝不动。由此，与会者一致认为Hilbert所给的一百年远远不够，至少还得再加上几百年。可以说是从那次会议以后，世界数学界（特别是西方数学界）一致认为这一世界难题在五百年之内无法解决。

据说在1958年，前苏联数学家独康命捷夫来我国访问，在对中国科学院数学研究所的一次讲演中他曾说："在苏联有数以百计的年青人

原来是可以成为数学家的，但是他们却偏要去证明 Riemann 猜想，结果一事无成白白浪费了时间。我劝中国同行们不要去碰这个猜想。……"

1914 年英国大数学家 Hardy 用艰深数行证明了如下的

Hardy 定理

Riemann ζ 函数 ζ(s) 在直线 $\sigma-\frac{1}{2}=0$ 之上有无穷多个复零点。

由此得知，若欲证明 Riemann 猜想仅须证明下述的关于复零点的猜想

Riemann ζ 函数 ζ(s) 在直线 $\sigma-\frac{1}{2}=0$ 以外没有复零点。

下面，我们给出前人关于复零点的工作：

首先，Riemann 利用 Euler 乘积证明了

Riemann 定理

$\zeta(s)$在半平面$\sigma>1$上无复零点。

其次，Hadamard与de la Vallée Poussin相互独立地证明了

Hadamard-de la Vallée Poussin定理

Riemann ζ函数$\zeta(s)$在直线$\sigma-1=0$上没有复零点。

另一方面，de la Vallée Poussin在改进素数个数函数$\pi(x)$之的渐近表达式其误差项的阶情，时也证明了如下的

de la Vallée Poussin定理

Riemann ζ函数$\zeta(s)$在区域

$$\sigma>1-\frac{a}{\log(t+1)} \qquad (t\geq 1)$$

之中没有复零点。此处a是一个满足条件$0<a<1$的固定常数。

(I)：(一) 研究黎曼猜想的历史教训

长期以来，几乎所有数学家都千篇一律地用复变函数论以及指数和估计的方法去研究黎曼猜想。结果都是徒劳的。值得指出的是也有一些数学家独具慧眼。譬如，早年就读于Götingen后移居美国的Polya在他的颇有名气的"数学与猜想"一书中多次提到Riemann猜想，他已经意识到这一猜想它的实质是超越方程求解问题。此外，英国牛津大学的几何教授Titchmarsh在其专著："The Theory of the Riemann Zeta function"一书末尾部分中指出黎曼猜想在实质上是一个几何问题。

德国专门从事数论研究的Landau在1927年发表一本"数论讲义"的书。在书中他专设一章，名为"黎曼假设下的假设"。他并没有去直接证明

明这些假设中的任何一个，因为这些假设都可以从黎曼假设推出来。不少数学家曾得到过一些与Riemann猜想等价的定理，如果我们能够直接证明这些等价定理中的任何一个定理的话，那么无疑就证明了Riemann猜想。但是，没有人得到过这些等价定理中某一个定理为真的证明。这种现象也发生在比Riemann猜想弱得多的一些猜想上。我们在假定Riemann猜想为真的情形下，可推得一些未经证明的结论。这些结论中的每一个结论都是Riemann猜想为真的必要条件。如果能直接证明其中之一的结论，起码对黎曼猜想来说也是一种支持。遗憾的是无人得到过这些结论中任何一个结论的直接证明。譬如，我们无法证明比黎曼猜想要弱得多的Lindelöf猜想：

Lindelöf 猜想

Riemann ζ函数 ζ(s) 在直线 $\sigma-\frac{1}{2}=0$ 上对任何 $\varepsilon>0$ 均有

$$\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)=O\left(|t|^{\varepsilon}\right)$$

关於某些猜想它的等价"定理"和作为必要条件的"定理"，可看Landau的"数论讲义"和Titchmarsh的书籍。后者已在上一世纪九十年代刊行了第二版。因为本文作者没有看过该书第二版，故而不知与第一版相比是否增加了新的内容。此外，我们从网上可知大约有两千多篇与Riemann猜想和ζ(s)有关的论文。如此大的论文竟直至还是无法使这一猜想得到解决。

(二) 本文作者的工作

本文作者从1973年开始系统研究Riemann猜想，在1996年经长期攻克终於证明了下述的极其困难的定理

〈定理〉

Riemann ζ函数$\zeta(s)$在带状区域

$$G=\{(\sigma,t)\mid 0<\sigma<1,\ \sigma-\tfrac{1}{2}\neq 0,\ t>0\}$$

中没有零点。

将上述定理与Hardy定理相结合，立即可以推出Riemann猜想。

整个证明共须十一篇系列论文，共约三十万字且包含各种数学式子约三千个。文中没有任何推导过程，很多复杂运算均一步写出。因此，对大部分人来说阅读起来可能有一定难度。

经过长期反复揣摩，从2005年开始又写了一

参附录，且又几易其稿。目前写就的附录也为十一篇，其篇幅超过正文。因此，目前的正文加附录约有五十万字且包含各种数学式子约五千个左右。

值得指出的是整个论纲十分复杂及冗长。整个数学的诸多分支都要在论纲中展现。作为数学三大支柱——代数、几何、分析它们所衍生出来的诸多领域和分支都要用到。下面，我们以菜单形式给出用到的具体数学工具：

一、关于分析方面的

1. 数学分析

2. 多元微积分

3. 微积分专论

4. 实变函数论

5. 复变函数论

6. Riemann 曲面论

7. 特殊函数论

8. 超越数论

9. 代数分析

二、关于几何方面的：

1. 解析几何

2. 微分几何

3. 代数几何

4. 代数拓扑

5. 代数流形理论

6. 齐闻维数空间之间几何同形的映射理论

。

三、关于代数方面的：

1. 高等代数

2. 线性代数

3. 矩阵与行列式专论

4. 抽象代数

5. 向量代数

6. 多元高次方程组理论

7. 超定二元、三元二次方程组求解方法

8. 特殊二元高次（三次、四次）方程组求解方法

9. 特殊三元高次（四次、五次、六次、七次）方程组求解方法

(II)：(三) Riemann 猜想证明的核心内容

整个证明基於复零点所满足的超越方程组。在系列论文"Riemann ζ函数的复零点(I)"中我们曾证明了

定理0.2 黎曼假设真实它的充分且必要条件是超越方程组

$$\frac{1}{2} - \frac{1-\sigma}{(\sigma-1)^2+t^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ e^{t\theta}\sin(\sigma\theta - t\log\cos\theta) + e^{-t\theta}\sin(\sigma\theta + t\log\cos\theta)\right\} \frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\, d\theta = 0 \quad \cdots\cdots 3.1$$

$$-\frac{t}{(\sigma-1)^2+t^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ e^{t\theta}\cos(\sigma\theta - t\log\cos\theta) - e^{-t\theta}\cos(\sigma\theta + t\log\cos\theta)\right\} \frac{(\cos\theta)^{\sigma-2}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\, d\theta = 0 \quad \cdots\cdots 3.2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\sigma^2+t^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ e^{t\theta}\sin[(1-\sigma)\theta - t\log\cos\theta] + e^{-t\theta}\sin[(1-\sigma)\theta + t\log\cos\theta]\right\} \frac{(\cos\theta)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\, d\theta = 0 \quad \cdots\cdots 3.3$$

$$-\frac{t}{\sigma^2+t^2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ e^{t\theta}\cos[(1-\sigma)\theta - t\log\cos\theta] - e^{-t\theta}\cos[(1-\sigma)\theta + t\log\cos\theta]\right\} \frac{(\cos\theta)^{-\sigma-1}}{e^{2\pi\tan\theta}-1}\, d\theta = 0 \quad \cdots\cdots 3.4$$

在区域

$S=\{(\sigma,t)\mid \sigma^2+t^2-\sigma>0,\ 0<\sigma<1,\ \sigma-\frac{1}{2}\neq 0,\ t\neq 0\}$ ……3.5

上无实数解。

如果我们利用代数据补足超定二元二次方程组的一般理论，由条列论文"Riemann ζ函数的非零点(II)、(III)、(IV)"不难定理5.2中关于σ, t的超定两元超越方程组变为下列方程组

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}+e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi-(1+2\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}d\theta-P_1=0 \quad \cdots\cdots 3.6$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}-e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{(1-2\bar\beta)(\bar\xi+\bar\eta)\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi-(1+2\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}d\theta-P_2=0 \quad \cdots\cdots 3.7$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\beta)\bar\xi-\beta\bar\eta]}+e^{-\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\sin\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi+(1-4\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\,tg\theta}-1}d\theta-P_3=0 \quad \cdots\cdots 3.8$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{e^{\frac{(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta-(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right.$$

$$\left.-e^{\frac{-(1-\bar\beta)\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}\cos\frac{[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\eta]\theta+(1-\bar\beta)\log\cos\theta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}\right\}$$

$$\frac{(\cos\theta)^{-\frac{3(1-2\bar\beta)\bar\xi+(1-3\bar\beta)\bar\eta}{2[(1-2\bar\beta)\bar\xi-\bar\beta\bar\eta]}}}{e^{2\pi\operatorname{tg}\theta}-1}d\theta-p_4=0 \quad \cdots\cdots 3.9$$

$$(\bar\alpha-\bar\beta)\bar\xi-(\bar\alpha+\bar\beta-2\bar\alpha\bar\beta)\bar\eta=0 \quad \cdots\cdots 3.10$$

$$(1-2\bar\beta)\bar\xi^2-2\bar\beta^2\bar\xi\bar\eta-(1-2\bar\beta+2\bar\beta^2)\bar\eta^2-(1-\bar\beta)^2=0 \quad 3.11$$

$$(3-2p_1)\bar\alpha+2p_1-1=0 \quad \cdots\cdots 3.12$$

$$p_2\bar\xi-p_2\bar\eta-1=0 \quad \cdots\cdots 3.13$$

$$(3-2p_3)\bar\beta+2p_3-1=0 \quad \cdots\cdots 3.14$$

$$p_4\bar\xi+p_4\bar\eta-1=0 \quad \cdots\cdots 3.15$$

这是一组关于$\bar\alpha,\bar\beta,\bar\xi,\bar\eta,p_1,p_2,p_3,p_4$的八元方程。显然，方程组式的代数内涵与分析内涵已经分离了。

以代数拓扑得知，方程组(3.10，3.11，3.12，3.13，3.14，3.15)确定了在八维欧氏空间E^8中的一个二维代数流形。若用Q来记这个二维代数流形，则可

知有

$$Q = Q_0 \bigcup K \qquad \cdots\cdots 3.16$$

此处 Q_0 及 K 分别表示 Q 上的一个一维子流形及二维子流形。根据系列论文"Riemann函数的零点(V)、(VI)、(VII)、(VIII)"四篇论文，Q 上一维子流形 Q_0 有如下参数表达式

$$\bar{\alpha} = \frac{4\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}{(1+\bar{\beta})^2}$$

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}$$

$$\bar{\zeta} = \frac{9\bar{\beta} - 10\bar{\beta} + 5}{4(1-\bar{\beta})^2}$$

$$\bar{\eta} = -\frac{\bar{\beta}^2 + 6\bar{\beta} - 3}{4(1-\bar{\beta})^2}$$

$$p_1 = \frac{12\bar{\beta}^2 - 10\bar{\beta} + 1}{2(8\bar{\beta}^2 - 5\bar{\beta} + 1)}$$

$$p_2 = \frac{3(1-\bar{\beta})^2}{5\bar{\beta}^2 - 2\bar{\beta} + 1}$$

$$p_3 = \frac{1 - 3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}$$

$$p_4 = \frac{1}{2}$$

式中 $\bar{\beta} \in I$，且有

$$I=\left\{\bar{\beta}\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3}\neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3}\neq 0\right\}$$

同时，Q上的一个二维子流形K，它有如下的参数表示式

$$\bar{\alpha}=\frac{1-\bar{\beta}}{1+\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}}$$

$$\bar{\beta}=\bar{\beta}$$

$$\bar{\xi}=\frac{1-2\bar{\beta}+\frac{6\sqrt{2}+t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}^2}{2\bar{\beta}(1-\bar{\beta})\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}$$

$$\bar{\eta}=\frac{1-2\bar{\beta}-\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}\bar{\beta}^2}{2\bar{\beta}(1-\bar{\beta})\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}$$

$$p_1=\frac{(4\sqrt{2}+t)\bar{\beta}-2\sqrt{2}-t}{4\sqrt{2}\,\bar{\beta}}$$

$$p_2=\frac{(1-\bar{\beta})\sqrt{8-t^2}}{4\sqrt{2}\,\bar{\beta}}$$

$$p_3=\frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}$$

$$p_4=\frac{\bar{\beta}\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-t}{2\sqrt{2}+t}}}{1-\bar{\beta}}$$

式中$(\bar{\beta},t)\in\bar{H}$，且有

$$\bar{H}=\left\{(\bar{\beta},t)\,\middle|\,0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ -2\sqrt{2}<t<2\sqrt{2},\ \bar{\beta}t+6\sqrt{2}\bar{\beta}-t-2\sqrt{2}>0\right\}$$

从上面分析得知，如果Riemann猜想为伪则关

於σ, t的超定超越方程组(3.1, 3.2, 3.3, 3.4)在区域S上有实数解，故知此時Riemann ζ函数$\zeta(s)$在直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$之外有非零点$s_0=\sigma_0+it_0$。令设这种非零点的集合为E_0。

由於关於$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\eta}$, p_1, p_2, p_3, p_4的八元方程组(3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15)是由超越方程组(3.1, 3.2, 3.3, 3.4)演化来的，同時它们具有相同的符格$p=-2$。由此得知八元方程组也必定有实数解，而且它们两者解之间可建立起一一对应的关系。为了方便起见，我们在Q的二维子流形K中置

$$k=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}}$$

如此，二维子流形K就能改写成下列形式

$$\bar{\alpha}=\frac{1-\bar{\beta}}{1+k\bar{\beta}}$$

$$\bar{\beta}=\bar{\beta}$$

$$\bar{\xi}=\frac{1-2\bar{\beta}+(k^2-2)\bar{\beta}^2}{2k\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}$$

$$\bar{\eta}=\frac{1-2\bar{\beta}-k^2\bar{\beta}^2}{2k\bar{\beta}(1-\bar{\beta})}$$

$$p_1=\frac{k^2\bar{\beta}+3\bar{\beta}-2}{2\bar{\beta}(1+k^2)}$$

$$p_2=\frac{k(1-\bar{\beta})}{\bar{\beta}(1+k^2)}$$

$$p_3=\frac{1-3\bar{\beta}}{2(1-\bar{\beta})}$$

$$p_4=\frac{k\bar{\beta}}{1-\bar{\beta}}$$

根据假定，八元方程组（3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15）在Riemann猜想不真的假定下必定有解。今设 m_0 是其一实数解，且有

$$m_0=(\bar{\alpha}_0,\bar{\beta}_0,\bar{\xi}_0,\bar{\eta}_0,p_{10},p_{20},p_{30},p_{40})$$

根据解的定義易知定有

$$m_0\in Q$$

故知

$$m_0\in Q_0,\qquad m_0\in K$$

必须至少有一个要成立。但是，根据条例论文

“Riemann ζ 函数的复零点(VIII),(IX),(X),(XI)”四篇论文我们得的证明如下的

<定理V> 八元方程组(3.6,3.7,3.8,3.9,3.10,3.11,3.12,3.13,3.14,3.15)无实数解。

这个定理的证明异常复杂及困难。下面,我们给出它的简要过程。

(III) (四) 定理V证明的简要过程

我们先来证明

〈定理A〉八元方程组（3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15）在 Q 的一维子流形 Q_0 上无实数解。

证 如若不然，今设其有一个实数解

$$m_0=(\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0, \bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, p_{10}, p_{20}, p_{30}, p_{40})$$

由于有

$$m_0 \in Q_0$$

故由 Q_0 之定义得知有

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{4\bar{\beta}_0(1-\bar{\beta}_0)}{(1+\bar{\beta}_0)^2}, \qquad \bar{\beta}_0=\bar{\beta}_0$$

$$\bar{\xi}_0 = \frac{9\bar{\beta}_0^2-10\bar{\beta}_0+5}{4(1-\bar{\beta}_0)^2}, \qquad \bar{\eta}_0 = -\frac{\bar{\beta}_0^2+6\bar{\beta}_0-3}{4(1-\bar{\beta}_0)^2}$$

$$p_{10} = \frac{13\bar{\beta}_0^2-10\bar{\beta}_0+1}{2(5\bar{\beta}_0^2-2\bar{\beta}_0+1)}, \qquad p_{20} = \frac{2(1-\bar{\beta}_0)^2}{5\bar{\beta}_0^2-2\bar{\beta}_0+1} \qquad \text{------3.17}$$

$$p_{30} = \frac{1-3\bar{\beta}_0}{2(1-\bar{\beta}_0)}, \qquad p_{40} = \frac{1}{2}$$

此处 $\bar{\beta}_0 \in I$，且有

$$I=\left\{\bar{\beta} \;\middle|\; 0<\bar{\beta}<\frac{1}{2},\ \bar{\beta}-\frac{1}{3}\neq 0,\ \bar{\beta}+3-2\sqrt{3}\neq 0\right\}$$

现在，方程组(3.1, 3.2, 3.3, 3.4)必定有实数解

$$n_0=(\sigma_0, t_0)$$

式中

$$\sigma_0=\frac{(1-2\bar\beta_0)(\bar\xi_0+\bar\eta_0)}{2[(1-2\bar\beta_0)\bar\xi_0-\bar\beta_0\bar\eta_0]},\quad t_0=\frac{1-\bar\beta_0}{2[(1-2\bar\beta_0)\bar\xi_0-\bar\beta_0\bar\eta_0]} \quad \cdots\cdots 3.18$$

将3.17式中诸关系式代入到3.18式里去，立得

$$\sigma_0=\frac{4(1-\bar\beta_0)(1-2\bar\beta_0)}{17\bar\beta_0^2-18\bar\beta_0+5},\quad t_0=\frac{2(1-\bar\beta_0)^2}{17\bar\beta_0^2-18\bar\beta_0+5} \quad \cdots\cdots 3.19$$

故知实数对(σ_0, t_0)必位于曲线

$$\sigma=\frac{4(1-\bar\beta)(1-2\bar\beta)}{17\bar\beta^2-18\bar\beta+5},\quad t=\frac{2(1-\bar\beta)^2}{17\bar\beta^2-18\bar\beta+5} \quad \cdots\cdots 3.20$$

之上。为了得到曲线的一个隐式，可将3.20中两个式子整理成下列形式

$$(17\sigma-8)\bar\beta^2-6(3\sigma-2)\bar\beta+5\sigma-4=0 \quad \cdots\cdots 3.21$$

$$(17t-2)\bar\beta^2-2(9t-2)\bar\beta+5t-2=0 \quad \cdots\cdots 3.22$$

若将上述两个方程之左端均看成为关于$\bar\beta$的二次多项式，则由多项式理论知两二次方程3.21、3.22有公根其充分且必要条件是它们的结式

$$\begin{vmatrix} 17\sigma-8 & -6(3\sigma-2) & 5\sigma-4 & 0 \\ 0 & 17\sigma-8 & -6(3\sigma-2) & 5\sigma-4 \\ 17t-2 & -2(9t-2) & 5t-2 & 0 \\ 0 & 17t-2 & -2(9t-2) & 5t-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots 3.23$$

由此可得（仅考虑 $t>0$ 部分）

$$\sigma^2+t^2-2t=0 \quad \cdots\cdots 3.24$$

从条刚论文"Riemann ζ函数的复零点(I)"中的引理2得知，若 $s_0=\sigma_0+it_0$ 为 $\zeta(s)$ 的一个复零点，那么实数对 (σ_0,t_0) 必定满足下列超越方程组

$$\int_0^\infty ch(\sigma_0-\tfrac{1}{2})u\cos t_0u\,\phi(u)\,du=\frac{\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2}{4\{[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2]^2+4(\sigma_0-\frac{1}{2})^2t_0^2\}}$$

$$\int_0^\infty sh(\sigma_0-\tfrac{1}{2})u\sin t_0u\,\phi(u)\,du=\frac{2(\sigma_0-\frac{1}{2})t_0}{4\{[\sigma_0(1-\sigma_0)+t_0^2]^2+4(\sigma_0-\frac{1}{2})^2t_0^2\}}$$

利用这组超越方程及数学分析的手段极易证明 $\zeta(s)$ 在图3.24上没有复零点。由此产生矛盾。这就证明了定理A。

其次，我们再来证明下述的

〈定理B〉八元方程组(3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15)在Q的二维子流形K上无实数解。

证　本定理的证明极为困难和复杂，它是系列论文"Riemann ζ函数的非零点(VIII)、(IX)、(X)、(XI)"四篇论文所要证明的结论。下面仅给出证明过程它的主要思路，有关它的详细证明过程可参阅原文。

如若不然，设方程组在二维子流形K上有实数解

$$\pi_0=(\bar\alpha_1,\bar\beta_1,\bar z_1,\bar\eta_1,p_{11},p_{21},p_{31},p_{41})$$

由于有

$$\pi_0\in K$$

故知定有

$$\bar\alpha_1=\frac{1-\bar\beta_1}{1+k_1^2\bar\beta_1},\qquad \bar\beta_1=\bar\beta_1,\qquad \bar z_1=\frac{k_1^2\bar\beta_1^2+2\bar\beta_1^2-2\bar\beta_1+1}{2k_1\bar\beta_1(1-\bar\beta_1)}$$

$$\bar\eta_1=\frac{1-2\bar\beta_1-k_1^2\bar\beta_1^2}{2k_1\bar\beta_1(1-\bar\beta_1)},\qquad p_{11}=\frac{k_1^2\bar\beta_1+3\bar\beta_1-2}{2\bar\beta_1(1+k_1^2)}$$

$B_1 = \frac{k_1(1-\bar\beta_1)}{\bar\beta_1(1+k_1^2)}$, $B_1 = \frac{1-2\bar\beta_1}{2(1-\bar\beta_1)}$, $B_1 = \frac{k_1\bar\beta_1}{1-\bar\beta_1}$

现在，由Riemann猜想不真的假定得知，$\zeta(s)$定有一复零点$s_0=\sigma_0+it_0$，且有

$$\sigma_0 = \frac{(1-2\bar\beta_1)(\bar\beta_1+\bar\gamma_1)}{2[(1-2\bar\beta_1)\bar\beta_1-\bar\beta_1\bar\gamma_1]} \qquad t_0 = \frac{1-\bar\beta_1}{2[(1-2\bar\beta_1)\bar\beta_1-\bar\beta_1\bar\gamma_1]}$$

将述表来式代入后，可得

$$\sigma_0 = \frac{(1-\bar\beta_1)(1-2\bar\beta_1)}{k_1^2\bar\beta_1^2+(1-2\bar\beta_1)^2}, \qquad t_0 = \frac{k_1\bar\beta_1(1-\bar\beta_1)}{k_1^2\bar\beta_1^2+(1-2\bar\beta_1)^2} \quad \cdots\cdots 3.25$$

式中$k_1,\bar\beta_1$是满足条件

$$(k_1,\bar\beta_1)\in M$$

而且

$$M=\{(\bar\beta,k)\mid 0<\bar\beta<\tfrac{1}{2},\ 0<k<1,\ k^2\bar\beta+2\bar\beta-1>0,\ 1-2\bar\beta-k^2\bar\beta^2<0\}$$

的一对实数。

此外，由於复零点关於直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$呈对称分布，故此时必又有一个复零点

$$s_0'=\sigma_0'+it_0'=(1-\sigma_0)+it_0$$

完全与3.25式相类似，我们可有

$$1-\sigma_0=\sigma_0'=\frac{(1-\bar\beta_2)(1-2\bar\beta_2)}{k_2^2\bar\beta_2^2+(1-2\bar\beta_2)^2}$$

$$t_0'=t_0=\frac{k_2\bar\beta_2(1-\bar\beta_2)}{k_2^2\bar\beta_2^2+(1-2\bar\beta_2)^2}$$ ……3.26

但是，我们能够证明：当3.25、3.26两组表示式成立时必有

$$k_1=k_2$$ ……3.27

从而可将3.26中两个式子改写成下列形式：

$$1-\sigma_0=\frac{(1-\bar\beta_2)(1-2\bar\beta_2)}{k_1^2\bar\beta_2^2+(1-2\bar\beta_2)^2},\quad t_0=\frac{k_1\bar\beta_2(1-\bar\beta_2)}{k_1^2\bar\beta_2^2+(1-2\bar\beta_2)^2}$$ ……3.28

现在，问题转化为3.25、3.28中四个表示式能否同时成立的问题？

为了便于研究，可作变元的替换

$x_1=1-2\bar\beta_1$，$x_2=1-2\bar\beta_2$，$x_3=k_1\bar\beta_1$，

$x_4=k_1\bar\beta_2$ ……3.29

如此，3.25、3.28中四个表示式就可改写成下列形式：

$$\sigma_0 = \frac{x_1(x_1+1)}{2(x_1^2+x_3^2)}, \qquad t_0 = \frac{x_3(x_1+1)}{2(x_1^2+x_3^2)} \quad \cdots\cdots 3.30$$

$$1-\sigma_0 = \frac{x_2(x_2+1)}{2(x_2^2+x_4^2)}, \qquad t_0 = \frac{x_4(x_2+1)}{2(x_2^2+x_4^2)}$$

为了得到 x_1, x_2, x_3, x_4 间的内在关系，可先在3.29中消去 $k_1, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$，如此可得

$$\frac{1-x_1}{1-x_2} = \frac{x_3}{x_4} \quad \cdots\cdots 3.31$$

$$\frac{x_1(x_1+1)}{2(x_1^2+x_3^2)} + \frac{x_2(x_2+1)}{2(x_2^2+x_4^2)} = 1 \quad \cdots\cdots 3.32$$

$$\frac{x_3(x_1+1)}{2(x_1^2+x_3^2)} - \frac{x_4(x_2+1)}{2(x_2^2+x_4^2)} = 0 \quad \cdots\cdots 3.33$$

式中 x_1, x_2, x_3, x_4 满足条件 $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$，且有

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \,\middle|\, 0 < x_1 < \frac{1}{3},\ 0 < x_2 < \frac{1}{2},\ 0 < x_3 < \frac{1}{2},\ 0 < x_4 < \frac{1}{2} \right\} \quad \cdots\cdots 3.34$$

今将 3.31, 3.32, 3.33 三个有理方程去分母后，我们可得如下三个方程

$$x_1x_4 - x_2x_3 + x_3 - x_4 = 0 \quad \cdots\cdots 3.35$$

$$x_1^2x_4^2 - x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_4^2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - x_1x_4^2 - x_2x_3^2 = 0 \quad \cdots\cdots 3.36$$

$$x_1^2x_2x_4 - x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_4 - x_1x_3x_4^2 + x_1^2x_4 - x_2^2x_3 + x_3^2x_4 - x_3x_4^2 = 0 \quad 3.37$$

从条列论文"Riemann ζ 函数的非零点(Ⅲ)"中引理11得知，在事实上我们有

<(Ⅲ),引理11> 若将四元方程组(335, 336, 337)它的解看作为一个集合，且用T来记这个集合。则T有如下表示式：

$$x_1 = \frac{x_2^2 + 2x_4^2 - x_2}{2x_4^2 - x_2 + 1}, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \frac{x_4(x_2+1)}{2x_4^2 - x_2 + 1},$$

$$x_4 = x_4 \qquad \cdots\cdots 338$$

而且，若记解 $S=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 则有 $S\in T$，且

$$T = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \;\middle|\; 0<x_1<\frac{1}{3},\ 0<x_2<\frac{1}{3},\ 0<x_3<\frac{1}{2},\ 0<x_4<\frac{1}{2},\ x_1x_4 - x_2x_3 + x_3 - x_4 = 0\ \ 2x_3x_4^2 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3 - x_4 = 0\right\} \qquad \cdots\cdots 339$$

如果我们将336中四个式子写成下列形状

$$(2x_3-1)x_1^2 + 2t_0x_3^2 - x_1 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.40$$

$$2t_0x_1^2 - x_1x_3 + 2t_0x_3^2 - x_3 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.41$$

$$(2x_3-1)x_2^2 + 2(x_3-1)x_4^2 + x_2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.42$$

$$2t_0x_2^2 - x_2x_4 + 2t_0x_4^2 - x_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.43$$

由3.39式我们可得不含 α_3, t_0 的二个式子

$$x_1x_4 - x_2x_3 + x_3 - x_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.44$$

$$2x_3x_4^2 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3 - x_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.45$$

现在，为了便于消元可作有理变换

$$x_1 = \frac{y_1}{y_4}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_3}, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4 \qquad \cdots\cdots 3.46$$

在变换3.46下方程组（3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44, 3.45）就演化成下列形状：

$$y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.47$$

$$2y_3^2y_4^2 + y_3^2 - y_2y_3 - y_2y_4 - y_3y_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.48$$

$$2\alpha_3 y_3^2y_4^2 + (2\alpha_3 - 1)y_1^2 - y_1y_4 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.49$$

$$2t_0 y_3^2y_4^2 - y_1y_3y_4 - y_3y_4^2 + 2t_0 y_1^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.50$$

$$2(\alpha_2 - 1)y_3^2y_4^2 + (2\alpha_2 - 1)y_2^2 + y_2y_3 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.51$$

$$2t_0 y_3^2y_4^2 - y_2y_3y_4 - y_3^2y_4 + 2t_0 y_2^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.52$$

式中

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$$

$U=\{(y_1,y_2,y_3,y_4)\mid 0<y_1<\frac{1}{6},\ 0<y_2<\frac{1}{6},\ 0<y_3<\frac{1}{2},\ 0<y_4<\frac{1}{2},\ 2y_3^2y_4^2+y_1^2-y_1y_4>0,\ 2y_3^2y_4^2+y_2^2-y_2y_3>0,\ -4y_3^2y_4^2+3y_1^2-2y_1y_4-y_4^2<0,\ -4y_3^2y_4^2+3y_2^2-2y_2y_3-y_3^2<0\}$ ……353

今用3.4式来消去348, 349, 350, 351, 352诸式中的所有y_1，如此可得

$$2y_3^2y_4^2+y_3-y_2y_3-y_2y_4-y_3y_4=0 \quad ……354$$

$$2\sigma_0y_3^2y_4^2+(2\sigma_0-1)y_2^2+(2\sigma_0-1)y_3^2+2(\sigma_0-1)y_4^2-2(2\sigma_0-1)y_2y_3+(4\sigma_0-3)y_2y_4-(4\sigma_0-3)y_3y_4=0 \quad ……355$$

$$2t_0y_3^2y_4^2-y_2y_3y_4+y_3^2y_4-2y_3y_4^2+2t_0y_2^2+2t_0y_3^2+2t_0y_4^2-4t_0y_2y_3+4t_0y_2y_4-4t_0y_3y_4=0 \quad ……356$$

$$2(\sigma_0-1)y_3^2y_4^2+(2\sigma_0-1)y_2^2+y_2y_3=0 \quad ……357$$

$$2t_0y_3^2y_4^2-y_2y_3y_4-y_3^2y_4+2t_0y_2^2=0 \quad ……358$$

这是一组关于y_2, y_3, y_4的三元不完全四次方程。从附录A可知当$4\sigma_0-3=0$时方程组退化。今暂设

$$4\sigma_0-3\neq 0 \quad ……359$$

利用同一条列论文中的引理12及引理13，我们可进一步将方程组(3.54, 3.55, 3.56, 3.57, 3.58)消元为下列形状：

$$4t_0 y_3^2 y_4^2 - y_3^2 y_4 - y_3 y_4^2 + t_0 y_3^2 - 2t_0 y_3 y_4 + t_0 y_4^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.60$$

$$(8\sigma_0 t_0^2 + 2\sigma_0 - 1) y_3^2 y_4^2 - 2(2\sigma_0 - 1) t_0 y_3^2 y_4 + 4(\sigma_0 - 1) t_0 y_3 y_4^2 + (2\sigma_0 - 1) t_0^2 y_3^2 - 4(\sigma_0 - 1) t_0^2 y_3 y_4 + (2\sigma_0 - 3) t_0^2 y_4^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.61$$

$$[8(\sigma_0 - 1) t_0^2 + 2\sigma_0 - 1] y_3^2 y_4^2 + 4\sigma_0 t_0 y_3^2 y_4 - 2(2\sigma_0 - 1) t_0 y_3 y_4^2 + (2\sigma_0 + 1) t_0^2 y_3^2 - 4\sigma_0 t_0^2 y_3 y_4 + (2\sigma_0 - 1) t_0^2 y_4^2 = 0 \qquad \cdots\cdots 3.62$$

式中保数σ_0, t_0满足条件

$$(\sigma_0, t_0) \in G$$

且

$$G = \{(\sigma, t) \mid 0 < \sigma < 1,\ \sigma - \tfrac{1}{2} \neq 0,\ t > 0,\ \sigma^2 + t^2 - \sigma - t > 0,\ \sigma^2 + t^2 - 2t \neq 0\} \qquad \cdots\cdots 3.63$$

而变元满足条件$(y_3, y_4) \in F$，且有

$$F = \{(y_3, y_4) \mid 0 < y_3 < \tfrac{1}{2},\ 0 < y_4 < \tfrac{1}{2},\ y_3 - y_4 \neq 0\} \qquad \cdots\cdots 3.64$$

事实上，Riemann猜想究的转机就在于关于

σ_0, t_0的两元不完全四次方程组（3.60, 3.61, 3.62）。它指明了：若$s_0=\sigma_0+it_0$是Riemann ζ函数$\zeta(s)$的一个复零点，那么此时方程组（3.60, 3.61, 3.62）在域F上必须有解。这是$\zeta(s_0)=0$的一个必要条件。

现在问题转化为：当σ_0, t_0间满足何种关系时，方程组在F上有解？在附录B中，我们证明了当$4\sigma_0-1=0$时方程组（3.60, 3.61, 3.62）在F上无解。因此，$\zeta(s)$在直线$4\sigma-1=0$之上无复零点；由于复零点关于直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$呈对称分布，因此$\zeta(s)$在直线$4\sigma-3=0$之上也没有复零点。这就证明了3.59式的假定是成立的。

此外，根据系列论文“Riemann ζ函数的复零点（IX）”及“Riemann ζ函数的复零点（XI）”的内容；我们得知当实数对(σ_0, t_0)位于下列曲线

1° $8\sigma t^2+2\sigma-1=0$ ——3.65

2° $8(\sigma-1)t^2+2\sigma-1=0$ ——3.66

3° $4\sigma t^2-2t^2+\sigma=0$ ——3.67

4° $4t^2-2t^2+\sigma-1=0$ ——3.68

5° $t=\sqrt{\frac{\sigma}{2}}\left[1-\frac{4\sigma(\sigma-1)}{2\sigma-1+\sqrt{-(8\sigma^3-12\sigma^2+4\sigma-1)}}\right]$ ——3.69

其中任意一条曲线上时，方程组（3.60，3.61，3.62）在F上有解。所以，这五条曲线都是"可疑的"。为了证明Riemann ζ函数ζ(s)在这五条曲线上都没有复零点，由于曲线3.65，3.66及曲线3.67，3.68这两对曲线关于直线$\sigma-\frac{1}{2}=0$都是对称的，因此只须考察其中之一即可。

(III) (五) 五条曲线上的无零点

1) 曲线 3.66。

在 de la Vallée Poussin 定理的无零点区域

$$\sigma > 1 - \frac{a}{\log(t+1)} \quad (t \geq 1) \quad \cdots\cdots 3.70$$

中，取 $a = \frac{1}{2}$。故得

$$\sigma > 1 - \frac{1}{2\log(t+1)} \quad (t \geq 1) \quad \cdots\cdots 3.71$$

故知 $\zeta(s)$ 在区域 3.71 上无零点。另一方面，容易证明曲线 3.66 的确位于区域 3.71 之中；由此得知 $\zeta(s)$ 在曲线 3.66 上无零点。进而，$\zeta(s)$ 在曲线 3.65 上也没有零点。

2) 曲线 3.67。

如欲证明 Riemann ζ 函数在曲线 3.67 上无零点，我们必须去研究关于 σ, t 的方程组

$$4\sigma t^2 - 2t^2 + \sigma = 0 \quad \cdots\cdots 3.72$$

$$1 - 4\left[\sigma(1-\sigma) + t^2\right]\int_0^\infty ch(\sigma - \tfrac{1}{2})u \cos tu\, \phi(u)\, du - 8(\sigma - \tfrac{1}{2})t.$$

$$\int_0^\infty sh(\sigma-\tfrac{1}{2})u\sin tu\,\phi(u)\,du=0 \quad \cdots 3.73$$

$$[\sigma(1-\sigma)+t^2]\int_0^\infty sh(\sigma-\tfrac{1}{2})u\sin tu\,\phi(u)\,du-2(\sigma-\tfrac{1}{2})t\int_0^\infty ch(\sigma-\tfrac{1}{2})u\cos tu\,\phi(u)\,du=0 \quad \cdots 3.74$$

式中

$$\phi(u)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi e^{2u}+\frac{u}{2}} \quad \cdots 3.75$$

在实际上，用代数分析方法求解方程组（3.72，3.73，3.74）它的代数内涵与分析内涵分离，最后导出一组三元七次方程组，由于数学证明过程异常困难及复杂，很难在此作一简要叙述。有关它的详细证明过程可参阅：

Riemann ζ函数的非零点（X）

附录G

附录H

附录I

3）无理曲线3.69。

今彼處关於直线 $\sigma-\frac{1}{2}=0$ 与它对称的无理代数曲线

$$t=\sqrt{\frac{1-\sigma}{2}}\left[1+\frac{4\sigma(1-\sigma)}{1-2\sigma+\sqrt{8\sigma^3-12\sigma^2+4\sigma+1}}\right] \qquad \cdots\cdots 3.76$$

在 de la Vallée Poussin 定理的无复零点区域 3.70 中取 $a=\log 2$，故知 Riemann ζ 函数 ζ(s) 在区域

$$\sigma>1-\frac{\log 2}{\log(t+1)} \qquad (t\geqslant 1) \qquad \cdots\cdots 3.77$$

中无复零点。仿前证明无理曲线 3.76 的确位於区域 3.77 之中，故知 ζ(s) 在曲线 3.76 上无复零点。进而，ζ(s) 在无理曲线 3.69 上无复零点。上述证明的详细过程请参阅系列论文"Riemann ζ 函数的复零点(XI)"中引理 26。

如果实数对 (σ_0, t_0) 不位於上述五条曲线中的任何一条曲线上，此时我们又可得到如下三个式子：

$$2(2\sigma_0-1)y_3^2y_4^2+\sigma_0y_3^2-(2\sigma_0-1)y_3y_4+(\sigma_0-1)y_4^2=0 \qquad \cdots\cdots 3.78$$

$$2t_0 y_0 y_4-\sigma_0 y_3+(\sigma_0-1)y_4=0 \quad \text{---}3.79$$

$$(2\sigma_0^2+2t_0^2-\sigma_0)y_3-(2\sigma_0^2+2t_0^2-3\sigma_0+1)y_4=0 \quad \text{---}3.80$$

我们将简证明：此时方程组(3.60，3.61，3.62，3.78，3.79，3.80)在F上无解。因此，当$(\sigma_0,t_0)\in G$时Riemann ζ函数$\zeta(s)$在临界曲线外无复零点。综上所述，$\zeta(s)$在G域上无复零点。但此与Riemann猜想不真相矛盾。这就证明了Riemann Hypothesis。上述证明过程可参阅系列论文“Riemann ζ函数的复零点(XI)”。