Дополнение к статье «Теория степенных полей», http://vixra.org/abs/1206.0025

Суть теоремы Ферма

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.

Мартин Гарднер

Доказательство гипотезы Ферма, основанное на свойстве рекуррентной зависимости фигурных чисел, данное в [3], как любая новая область знаний обладает некоторой неясностью и неубедительностью, поэтому возникает необходимость более глубокого изучения этой проблемы. По этой причине преамбулой этого раздела есть знаменитое высказывание Мартина Гарднера в отношении исключительной ценности треугольника Паскаля для математики, действительно играющего ключевую роль в разгадке тайны теоремы Ферма. Именно треугольник Паскаля поможет окончательно внести ясность и поставить точку в этом вопросе.

Итак, начнем данный раздел с ряда аргументов:

- **первое**, теорема Ферма не является самостоятельной задачей, ради которой в теории ищутся средства для ее доказательства, а напротив, ее форма и метод продиктованы обоюдно свойствами степенных полей и следствиями теоремы о разложении n^m - в результате чего она воплощается в данный метод анализа и становится одним из прикладных инструментов теории;

- **второе**, теорию степенных полей справедливо будет назвать алгеброй фигурных чисел, потому что в полиномах разложения одночленов используются исключительно дискретные элементы – фигурные числа. Как известно гипотеза Ферма до сих пор остается неприступной в смысле понимания ее сути, и разгадкой здесь как раз есть фигурные числа в полиномах разложения, имеющие прямую и тесную связь с «наиболее изящной схемой во всей математике», позволяя тем самым осознать и решить эту проблему. Покажем эту взаимосвязь, отобразив 9-ти рядный фрагмент треугольника Паскаля

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 35 21 7 1
8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1

и приведя формулы фигурных полиномов $n^2 - n^5$

$$n^2 = n + 2k_{n-1}^{(2)}$$

$$n^3 = n + 6k_{n-1}^{(3)}$$

$$n^4 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 12k_{n-1}^{(3)} + 24k_{n-2}^{(4)}$$

$$n^5 = n + 30k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(5)}$$

где обнаружим, что они легко выражаются через элементы треугольника Паскаля

$$n^2 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}$$

$$n^3 = \binom{n}{1} + 6\binom{n+1}{3}$$

$$n^4 = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 12\binom{n+1}{3} + 24\binom{n+1}{4}$$

$$n^5 = \binom{n}{1} + 30\binom{n+1}{3} + 120\binom{n+2}{5}$$

Далее, приведя формулы элементов вычетов B_n для

степенного поля 2: $B_n = 1 + 2n$

степенного поля 3: $B_n = 1 + 6k_n^{(2)}$

степенного поля 4: $B_n = 1 + 2n + 12k_n^{(2)} + 24k_{n-1}^{(3)}$

степенного поля 5: $B_n = 1 + 30k_n^{(2)} + 120k_{n-1}^{(4)}$,

также найдем, что каждый элемент вычета выражается через элементы треугольника Паскаля, где соответственно получаем для

степенного поля 2: $B_n = 1 + 2\binom{n}{1}$

степенного поля 3: $B_n = 1 + 6\binom{n+1}{2}$

степенного поля 4: $B_n = 1 + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n+1}{2} + 24\binom{n+1}{3}$

степенного поля 5: $B_n = 1 + 30\binom{n+1}{2} + 120\binom{n+2}{4}$

учитывая это приходим к выводу, что те или иные доказательства в теории степенных полей могут непосредственно быть получены с использованием свойств треугольника Паскаля;

- и наконец **третье**, приведенные выше аргументы все же имеют нулевую ценность в поддержку рекуррентного доказательства [3], поэтому усилим данное доказательство более подробным и глубоким анализом, позволяющим увидеть и понять причины исследуемой проблемы. Для этого, поскольку теорема Ферма доказывает отсутствие в одноименном поле равенства значений элементов ряда вычетов Bn элементам ряда значений An - как единичных, так и их последовательных сумм, за исключением степенного поля 2, зададимся целью доказать и показать почему данное условие невыполнимо для степенных полей $x > 2$. Доказательство построим на принципе аксиоматических и логических заключений, вытекающих из свойств степенных полей, фигурных полиномов и треугольника Паскаля.

Итак,

Утверждение 1:

Пусть в степенном поле x, существует уравнение в элементах поля $A_{n+1} - A_n = B_n$, где по условленному допущению элемент $B_n = b^x$ и тогда произвольное уравнение в одночленах примет вид $c^x - a^x = b^x$. Так как в этом случае все три одночлена a^x, b^x и c^x есть элементами ряда значений An данного поля тогда также выполнится равенство $c^x - b^x = a^x$, то есть здесь одночленом a^x будет сумма элементов ряда вычетов: $a^x = \sum_{i=b}^{c-1} B_i$. Далее, умножая одночлены a^x, b^xи c^x на множитель переноса r^x получим бóльшие одночлены в ряду значений An: a'^x, b'^xи c'^x, где также вычитая из c'^x поочередно a'^x и b'^x получим последовательные суммы элементов $\sum_{i=a'}^{c'-1} B_i$ и $\sum_{i=b'}^{c'-1} B_i$ равные этим одночленам, и так далее.

На основании этого следует вывод, что если в каком-либо степенном поле x имеется хотя бы один элемент ряда вычетов Bn равный элементу ряда значений An, то в данном поле возникает сразу множество решений уравнения $a^x + b^x = c^x$. И наоборот, отсутствие хотя бы одного такого значения делает равенство уравнения $a^x + b^x = c^x$ невыполнимым в данном степенном поле для любых целых a, b, c.

Таким образом, аргументация утверждения 1 сводит задачу к поиску в степенном поле x по крайней мере одного элемента ряда вычетов Bn равного элементу ряда значений An.

Для решения этой проблемы приравняем формулу элемента ряда значений An элементу ряда вычетов Bn, в результате чего получим преобразованную формулу фигурного полинома элемента B'_n, которая для нечетного x примет вид

$$B'_n = n + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} \tag{2.1.6}$$

и для четного x

$$B'_n = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} + V_i'^p k_{n-i+1}^{(2i+2)} \right] \tag{2.1.7}$$

Отметим, что в этом случае наблюдается структурное подобие истинным формулам элемента B_n которая имеет вид для нечетного x

$$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i} \tag{2.1.8}$$

и для четного x

$$B_n = 1 + 2n + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{n-i}^{(2i+1)} \right] \tag{2.1.9}$$

что говорит о том, что в формулах (2.1.6-2.1.7) выполняется структурное соответствие, заключенное в равенстве количества членов и их коэффициентов, а нарушается главным образом родовое соответствие, проявляющееся в смещении индекса (номера) ряда фигурных чисел на единицу вперед. Учитывая эти обстоятельства, проведем последующее итерационное преобразование, которое позволит получить предельное подобие преобразованных формул (2.1.6-2.1.7) истинным формулам (2.1.8-2.1.9). Для этого вычтем из показательного элемента полинома преобразованных формул значение $n-1$, пропорциональные части которого, в результате деления его на количество членов полинома, затем прибавим к каждому данному члену,

где для нечетного x получим

$$B_n' = n - (n-1) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{n-i}^{(2i+1)} + \frac{n-1}{pU_i^p} \right)$$

что равносильно

$$B_n' = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{n-i}^{(2i+1)} + \frac{n-1}{pU_i^p} \right) \tag{2.1.10}$$

и для четного x

$$B_n' = n - (n-1) + 2\left(k_{n-1}^{(2)} + \frac{n-1}{2(2p+1)} \right) + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \left(k_{n-i}^{(2i+1)} + \frac{n-1}{(2p+1)V_i^p} \right) + V_i'^p \left(k_{n-i+1}^{(2i+2)} + \frac{n-1}{(2p+1)V_i'^p} \right) \right]$$

что равносильно

$$B_n' = 1 + 2\left(k_{n-1}^{(2)} + \frac{n-1}{2(2p+1)} \right) + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \left(k_{n-i}^{(2i+1)} + \frac{n-1}{(2p+1)V_i^p} \right) + V_i'^p \left(k_{n-i+1}^{(2i+2)} + \frac{n-1}{(2p+1)V_i'^p} \right) \right] \tag{2.1.11}$$

Таким образом получив предельно подобные формулы (2.1.10-2.1.11) приходим к

Утверждению 2, которое гласит, что

если:

- преобразованные формулы элементов вычетов (2.1.10-2.1.11) производят последовательность элементов ряда значений An степенного поля x,

и

- истинные формулы элементов вычетов (2.1.8-2.1.9) производят последовательность элементов ряда вычетов Bn степенного поля x,

то вследствие их предельного структурного подобия, только в случае формирования в выражении $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{pU_i^p}\right)$ фигурного числа k_{n-i+1}^{2i} для нечетного показателя x и формирования в выражениях $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2(2p+1)}\right)$, $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i^p}\right)$ и $\left(k_{n-i+1}^{(2i+2)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i'^p}\right)$ соответственно натурального числа n и фигурных чисел k_{n-i+1}^{2i} и $k_{n-i}^{(2i+1)}$ для четного показателя x,

будет получено равенство элемента ряда вычетов Bn элементу ряда значений An.

Таким образом, аргументация утверждения 2 сводит задачу к анализу возможности формирования в выражениях $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{pU_i^p}\right)$, $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2(2p+1)}\right)$, $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i^p}\right)$ и $\left(k_{n-i+1}^{(2i+2)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i'^p}\right)$ указанных фигурных чисел.

Приступим к данному анализу

Рассмотрим показатель степени $x=2$, тогда преобразованная формула (2.1.11) приобретает вид

$$B_n'=1+2\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2}\right) \tag{2.1.12}$$

сравнивая ее с истиной формулой элементов ряда вычетов степенного поля 2

$$B_n=1+2n \tag{2.1.13}$$

находим, что достаточным условием получения натурального числа n в формуле (2.1.13) будет применение нечетного значения n в выражении $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2}\right)$ формулы (2.1.12) Действительно, применяя нечетный ряд n: 3, 5, 7, 9, 11,….. получаем

$$B_4'=1+2\left(k_{3-1}^{(2)}+\frac{3-1}{2}\right)=1+2(3+1)=9$$

$$B_{12}'=1+2\left(k_{5-1}^{(2)}+\frac{5-1}{2}\right)=1+2(10+2)=25$$

$$B_{24}'=1+2\left(k_{7-1}^{(2)}+\frac{7-1}{2}\right)=1+2(21+3)=49$$

$$B_{40}'=1+2\left(k_{9-1}^{(2)}+\frac{9-1}{2}\right)=1+2(36+4)=81$$

$$B_{60}'=1+2\left(k_{11-1}^{(2)}+\frac{11-1}{2}\right)=1+2(55+5)=121$$

и так далее. Очевидно, что подобный вычислительный способ исследования всех полиномов переводит данный анализ в разряд невыполнимых задач. Поэтому обратимся к многочисленным свойствам треугольника Паскаля, среди которых выделим необходимое и достаточное свойство для решения поставленной задачи.

Для этого первоначально введем понятие ассоциированных функций, которыми будем называть пару функций связанных с определенной диагональю треугольника Паскаля.

Первой такой функцией будет анализируемая функция, которой является каждое исследуемое выражение из ряда $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{pU_i^p}\right)$, $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2(2p+1)}\right)$, $\left(k_{n-i}^{(2i+1)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i^p}\right)$ и $\left(k_{n-i+1}^{(2i+2)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_i'^p}\right)$, поскольку все они связаны с определенными диагоналями треугольника и каждое из них исследуется на предмет получения фигурного числа, за исключением $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2(2p+1)}\right)$ в случае показателя $x=2$, где ищется возможность получения натурального числа. Далее, в процессе анализа этих выражений находим, что все они представляют собой сумму двух слагаемых, объединенных общим признаком – неизвестным n. Рассматривая их как функции одной переменной, в качестве искомого критерия анализа и необходимого свойства выделим и введем показатель отношения слагаемых этих функций, который назовем заданным и обозначим его символом R'. Получение данного показателя осуществляется путем деления большего слагаемого функции на меньшее.

Второй такой функцией будет образцовая функция, которой есть производящая формула треугольника Паскаля $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, поскольку она также связана с каждой диагональю треугольника. Но в отличие от первой функции, ее значениями есть последовательные ряды фигурных чисел и ряд натуральных чисел для второй диагонали треугольника. Она также представляет собой сумму двух слагаемых и тоже есть функция от одного аргумента, поэтому здесь также выведем для каждой исследуемой диагонали аналогичный показатель отношения слагаемых, который назовем образцовым и обозначим символом R.

Таким образом, применение ассоциированных функций, одна из которых производит искомый ряд значений, а вторая исследуется на предмет получения этих значений, в комбинации с введенным критерием анализа - показателем отношения слагаемых R позволит как найти эти значения для анализируемой функции, так и доказать их отсутствие для всего множества аргументов n.

Следует отметить, что в исследовании ассоциированных функций неизвестное n не рассматривается как взаимный обоюдный аргумент, напротив, в этом случае легко определяется неравенство их значений, поэтому поиск их равенства в анализе исключительно проводится для различных аргументов n и n' этих функций. В тоже время критерий равенства показателей отношения слагаемых R ассоциированных функций определяется только для обоюдного аргумента n.

Теперь, возвращаясь к исследуемому случаю $x=2$, напомним, что предметом анализа является определение возможности формирования натурального числа n в выражении $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2}\right)$. Здесь применительно ко второй диагонали треугольника - натуральному ряду чисел, одной из ассоциированных функций будет производящая формула треугольника Паскаля вида $\binom{n+1}{1}=1+n$, откуда найдем образцовый показатель отношения слагаемых для этой диагонали, который обозначим символом RN, где N - номер диагонали, откуда окончательно получим $R2=\frac{n}{1}=n$. Далее, в отношении анализируемого выражения $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2}\right)$ найдем заданный показатель отношения слагаемых, который обозначим $R'2$, для чего в функции $\left(k_{n-1}^{(2)}+\frac{n-1}{2}\right)$ раскроем фигурное число, получив выражение $\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n-1}{2}\right)$ откуда окончательно найдем $R'2=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n-1}{2}}=n$. Таким образом, сравнение образцового и заданного показателей обнаруживает их равенство $R2=R'2$ откуда следует, что в анализируемой функции слагаемые имеют такую же сочетательную зависимость, что и в образцовой функции. Это говорит о том, что в результате взаимообратного изменения слагаемых может быть получено сочетание слагаемых образцовой функции, и значит достигнуто равенство значений ассоциированных функций. Но более подробно этот механизм будет рассмотрен ниже, а тем временем, поскольку вычислительным способом равенство функций найдено, определим для каких индексов (показателей) n в формуле $B'_n=1+2\left(k^{(2)}_{n-1}+\frac{n-1}{2}\right)$ сумма слагаемых $\left(k^{(2)}_{n-1}+\frac{n-1}{2}\right)$ приводит к получению натурального числа. Как было показано выше, в приведенном выражении могут участвовать только нечетные числа, действительно, раскрыв фигурное число и вынеся общий множитель убеждаемся в этом - $\frac{n-1}{2}(1+n)$. Далее, поскольку в множителе $\frac{n-1}{2}$ значениями n могут быть только элементы нечетного ряда чисел 3, 5, 7, 9, 11, 13… и так далее, тогда подставляя эти элементы в формулу $\frac{n-1}{2}(1+n)$ получим соответствующую последовательность произведений $\frac{3-1}{2}(1+3)=1\cdot 4$, $\frac{5-1}{2}(1+5)=2\cdot 6$, $\frac{7-1}{2}(1+7)=3\cdot 8$, $\frac{9-1}{2}(1+9)=4\cdot 10$ и так далее, откуда несложно выводится общая формула, задающая данную последовательность $n(2n+2)=2n(n+1)$, которая существует по номером A046092 в библиотеке OEIS [1]. И наконец, если искомые индексы обозначить n' и поскольку $B_n=1+2n$ тогда $B_{n'}=1+2n'$, где $n'=2n(n+1)$ и n - ряд натуральных чисел.

Таким образом, поскольку натуральное число n формируется в выражении $\left(k^{(2)}_{n-1}+\frac{n-1}{2}\right)$ окончательно приходим к

заключению для показателя степени $x=2$: в степенном поле 2 в ряду вычетов Bn имеется множество элементов, равных элементам ряда значений An, определяемых по общей формуле $B_{n'}=1+2n'$, где $n'=2n(n+1)$ и n - ряд натуральных чисел. Следовательно, на основании утверждения 1 равенство уравнения $a^2+b^2=c^2$ выполняется и имеет множество решений.

Теперь рассмотрим показатель степени $x=3$, для которого преобразованная формула (2.1.10) примет вид

$$B'_n=1+6\left(k^{(3)}_{n-1}+\frac{n-1}{6}\right)$$

сравнивая ее с истиной формулой элементов ряда вычетов степенного поля 3

$$B_n=1+6k^{(2)}_n$$

определяем задачу в проведении анализа возможности формирования фигурного числа $k^{(2)}_n$ в выражении $\left(k^{(3)}_{n-1}+\frac{n-1}{6}\right)$. Поскольку фигурные числа $k^{(2)}_n$ представлены третьей диагональю треугольника, найдем образцовый показатель отношения слагаемых - $R3$ для этой диагонали. Для этого запишем задающую формулу треугольника Паскаля применительно к этой диагонали $\binom{n+1}{2}=n+\frac{n(n-1)}{2}$ откуда показатель $R3=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}$. Далее найдем заданный показатель $R'3$ для анализируемого выражения $\left(k^{(3)}_{n-1}+\frac{n-1}{6}\right)$, где раскроем фигурное число, и получив запись $\left(\frac{n(n-1)(n+1)}{6}+\frac{n-1}{6}\right)$ найдем данный показатель отношения $R'3=\frac{\frac{n(n-1)(n+1)}{6}}{\frac{n-1}{6}}=n(n+1)$. Таким образом, здесь получаем неравенство двух показателей $R3\neq R^{'}3$, откуда следует, что сочетательная зависимость слагаемых величин в анализируемом выражении $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{6}\right)$ не соответствует сочетательной зависимости для слагаемых образцовой функции $n+\frac{n(n-1)}{2}$, откуда в свою очередь следует невозможность формирования в нем фигурного числа $k_n^{(2)}$.

Чтобы разобраться в заявленном утверждении, сначала необходимо подробнее ознакомиться с понятиями сочетательная зависимость и взаимообратное изменение слагаемых, где начнем с последнего. Так, к примеру, рассматривая обе суммы 2+8 и 3+7, не возникает сомнений, что результат обеих равен 10. Здесь, в этом примере достаточным условием получения заданного результата будет взаимообратное изменение каждого слагаемого на некоторую целую величину j, скажем, к примеру $(3+1)+(7-1)=10$, где $j=1$ или $(3-2)+(7+2)=10$, где $j=2$. Этот пример демонстрирует два факта – первый - взаимообратное изменение слагаемых не нарушает результата функции и может иметь прикладное применение в анализе, и второй - приведенные примеры не имеют строгой сочетательной зависимости слагаемых, и здесь тривиальное взаимообратное изменения слагаемых может применяться без всяких оговорок.

Чего не происходит в анализируемом случае, потому что значения слагаемых в функции $\left(\frac{n-1}{6}+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\right)$ зависят от аргумента n, в результате чего между ними возникает сочетательная зависимость, какую несложно найти, выделив общий множитель $\frac{n-1}{6}\big(1+n(n+1)\big)$, где в результате обнаруживается линейно-пропорциональная зависимость изменения слагаемых, в которой второе слагаемое всегда оказывается больше первого в $n(n+1)$ раз.

Таким образом, учитывая сказанное, заключаем: первое, в процессе поиска равенства значений ассоциированных функций, к анализируемой функции всегда может быть применено взаимообратное изменение слагаемых. Второе, запустив этот механизм, и скажем, достигнув равенства значений между первыми слагаемыми образцовой и анализируемой функциями, обнаруживается, что в порядке достижения общего равенства функций в качестве обязательного условия также требуется соблюдение равенства вторых слагаемых ассоциированных функций. Отсюда следует, что сочетательная зависимость слагаемых анализируемой функции для данного аргумента n должна соответствовать образцовой, а так как эта зависимость в анализируемой функции соблюдается для всего множества аргументов, тогда только равенство показателей отношения ассоциированных функций будет единственным критерием достижения равенства их значений.

Закрепим полученный результат с помощью леммы:

Лемма 1.1

Равенство значений ассоциированных функций $n+\frac{n(n-1)}{2}$ и $\left(\frac{n'-1}{6}+\frac{n'(n'-1)(n'+1)}{6}\right)$ для любых целых аргументов n и n' не выполняется в случае отсутствия равенства показателей отношения $R3\neq R'3$ этих функций для обоюдного аргумента n.

Доказательство

Пусть для некоторого целого n' значение функции $\left(\frac{n'-1}{6}+\frac{n'(n'-1)(n'+1)}{6}\right)$ равно значению функции $n+\frac{n(n-1)}{2}$ для другого целого n, где $n>n'$, тогда в этом случае используя взаимообратное изменение каждого слагаемого на некоторую целую величину j, функция $\left(\frac{n'-1}{6}+j+\frac{n'(n'-1)(n'+1)}{6}-j\right)$ в конечном итоге станет функцией $n+\frac{n(n-1)}{2}$. Очевидно, что показатель отношения здесь будет $R3=\frac{n+\frac{n(n-1)}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}$, и поскольку значения этих функций равны, следовательно, для этого n таким же будет показатель и для $\left(\frac{n'-1}{6}+\frac{n'(n'-1)(n'+1)}{6}\right)$, где $n'=n$. Однако, известно, что для всего множества n показатель отношения для этой функции $R'3=n(n+1)$, откуда следует, что натуральный ряд чисел не содержит такого целого n для которого будет существовать одновременно две различных величины отношения слагаемых для одной и той же функции. Отсюда окончательно следует несуществование такого n', а также то, что в обратном случае такое равенство будет достигнуто.

Лемма доказана

Таким образом, поскольку фигурное число $k_n^{(2)}$ в выражении $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{6}\right)$ не может быть получено, приходим к

заключению для показателя степени $x=3$: в степенном поле 3 в ряду вычетов Bn отсутствуют элементы равные элементам ряда значений An, следовательно, в соответствии с утверждением 1 равенство уравнения $a^3+b^3=c^3$ не выполняется для любых целых a,b,c.

И наконец, рассматривая показатель степени $x>3$, отметим, что в этом случае в каждом полиноме для нечетного показателя x вторым членом всегда есть $U_1^p\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ а для четного x третьим членом всегда есть $V_1^p\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$. Это обстоятельство говорит о возможности исследования только лишь этих функций для всего множества показателей $x>3$. Действительно, согласно утверждения 2, в каждом анализируемом выражении каждого члена преобразованного полинома (2.1.10-2.1.11) должно формироваться соответствующее фигурное число, в противном случае невозможность получения фигурного числа $k_n^{(2)}$ по крайней мере, в выражениях $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ и $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ уже приведет к невыполнению этого условия и следовательно к отсутствию равенства элемента ряда вычетов Bn элементу ряда значений An. Поэтому примем это условие достаточным и проведем исследование выражений $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ и $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ для всех показателей степени $x>3$.

Как было получено ранее, образцовый показатель отношения слагаемых для третьей диагонали треугольника Паскаля равен $R3=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n}=\frac{n-1}{2}$. Касательно анализируемых выражений, заданный показатель, для нечетного $x>3$ равен

$$R'3=\frac{k_{n-1}^{(3)}}{\frac{n-1}{pU_1^p}}=\frac{\frac{n(n-1)(n+1)}{6}}{\frac{n-1}{pU_1^p}}=\frac{pU_1^p}{6}n(n+1)$$

и для четного $x > 3$ равен

$$R'3 = \frac{k_{n-1}^{(3)}}{\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}} = \frac{\frac{n(n-1)(n+1)}{6}}{\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}} = \frac{(2p+1)V_1^p}{6} n(n+1)$$

Для исследования коэффициентов $\frac{pU_1^p}{6}$ и $\frac{(2p+1)V_1^p}{6}$ раскроем в них фигурные коэффициенты U_1^p и V_1^p, которые соответственно равны $U_1^p = (2 \cdot 1 + 1)! \binom{p}{1} = 6\binom{p}{1}$ и $V_1^p = (2 \cdot 1 + 2)! \binom{p}{1} = 24\binom{p}{1}$, где $\binom{p}{1}$ – элементы второй диагонали таблицы нечетных мономиальных коэффициентов [2], и далее подставляя полученные результаты, получим для нечетного x

$$6\binom{p}{1}\frac{p}{6} = p\binom{p}{1}$$

откуда учитывая, что $p = \frac{x-1}{2}$ найдем последовательность значений коэффициента $\frac{pU_1^p}{6}$ для нечетного ряда показателя $x = 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots$ и так далее, соответственно $\frac{pU_1^p}{6} = 1, 10, 63, 340, 1705, 8190 \ldots$ и так далее.

И для четного x

$$24\binom{p}{1}\frac{(2p+1)}{6} = 4(2p+1)\binom{p}{1}$$

откуда учитывая, что $p = \frac{x-2}{2}$ получим последовательность значений коэффициента $\frac{(2p+1)V_1^p}{6}$ для четного ряда показателей $x = 4, 6, 8, 10, 12, 14 \ldots$ и так далее, соответственно $\frac{(2p+1)V_1^p}{6} = 12, 100, 588, 3060, 15004, 70980 \ldots$ и так далее.

Теперь с учетом полученных результатов запишем заданный показатель отношения слагаемых для вех нечетных $x > 3$

$$R'3 = p\binom{p}{1} n(n+1)$$

где $p = \frac{x-1}{2}$, а $\binom{p}{1}$ – элементы второй диагонали таблицы нечетных мономиальных коэффициентов [2].

и для всех четных $x > 3$

$$R'3 = 4(2p+1)\binom{p}{1} n(n+1)$$

где $p = \frac{x-2}{2}$, а $\binom{p}{1}$ – элементы второй диагонали таблицы нечетных мономиальных коэффициентов [2].

Единственной целью исследования коэффициентов $p\binom{p}{1}$ и $4(2p+1)\binom{p}{1}$ было изучение характера этих последовательностей, в то время, как очевидно, что они никак не влияют на достижение равенства значений между ассоциированными функциями - образцовой $n + \frac{n(n-1)}{2}$ и анализируемыми функциями - $\left(k_{n-1}^{(3)} + \frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ для нечетного показателя x и

$\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ для четного показателя x, поскольку если даже рассмотреть общий предельный случай, в котором принять $R'3=\frac{M}{6}\cdot n(n+1)$, где M – ряд целых чисел кратных 6, включающий все полученные коэффициенты, то даже тогда равенства показателей $R3\neq R'3$ получено не будет. Следовательно, согласно леммы 1.1, равенство значений ассоциированных функций $n+\frac{n(n-1)}{2}$ и $\left(\frac{n'-1}{M}+\frac{n'(n'-1)(n'+1)}{6}\right)$ для общего предельного случая ряда чисел M и любых целых аргументов n и n' также не выполниться.

Таким образом, поскольку фигурное число $k_n^{(2)}$ в выражении $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ для нечетного x и в выражении $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ для четного x получено не может быть, приходим к

заключению для показателей степени $x>3$: во всех степенных полях следующим за третьим в ряду вычетов Bn отсутствуют элементы равные элементам ряда значений An, следовательно, в соответствии с утверждением 1 равенство уравнения $a^x+b^x=c^x$ не выполняется для любых целых a,b,c.

Однако здесь все же может существовать мнение о том, что невозможность формирования фигурного числа $k_n^{(2)}$ в выражениях $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ и $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ не является достаточным условием доказательства отсутствия решений уравнения $a^x+b^x=c^x$ для всего множества показателей степеней $x>3$.

В действительности же, это условие служит первым необходимым критерием получения каждого полинома элемента вычета степенного поля $x>3$, потому что, в противном случае, если на мгновение допустить равенство элемента ряда вычетов Bn элементу ряда значений An в условиях единственно невыполнения указанного критерия, то уже в следующее мгновение исчезнет части математики – бинома Ньютона, числа Фибоначчи, и все что связано с треугольником Паскаля, как и исчезнет сам треугольник.

Это произойдет потому что, как показано на странице 2, каждый полином элемента ряда вычета Bn степенного поля x выражается через соответствующее сочетание элементов треугольника Паскаля, и так как в предполагаемом случае в функциях $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{pU_1^p}\right)$ и $\left(k_{n-1}^{(3)}+\frac{n-1}{(2p+1)V_1^p}\right)$ не формируется фигурное число $k_n^{(2)}$ для всего множества аргументов n, тогда в последовательности элементов третьей диагонали треугольника Паскаля фактически появится некорректный элемент, откуда вследствие взаимосвязи всех элементов треугольника друг с другом из-за этого элемента будут изменены значения всех последующих элементов треугольника, и как результат произойдет описанный выше сценарий.

Но к счастью этого не происходит и никогда не произойдет, потому что получение элемента ряда значений An в ряду вычетов Bn степенного поля x единственно подчиняется образцовой функции, или производящей формуле треугольника Паскаля $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, которая на частном примере обратной задачи – выражения элемента ряда значений An степенного поля 3 через элемент ряда вычетов Bn того же поля, показывает, что в формуле

$$A_n=n+6k_{n-1}^{(3)}$$

чтобы в правой части получить элемент ряда вычетов Bn необходимо преобразовать фигурное число четвертой диагонали $k_{n-1}^{(3)}$ в фигурное число третьей диагонали - $k_n^{(2)}$, поскольку в искомой формуле применяются фигурные числа предыдущего ряда. Преобразование производится в соответствии с задающей формулой треугольника Паскаля $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2}$ для четвертой диагонали, где получим

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{3} = \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} &= \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{3} \\ &= \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{2} + \binom{n-4}{3} \\ &= \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{2} + \cdots + \binom{2}{2} = \sum_{i=2}^{n-2} \binom{i}{2}\end{aligned}$$

или в непосредственном выражении фигурных чисел, имеем

$$\begin{aligned}k_{n-1}^{(3)} = k_{n-2}^{(3)} + k_{n-1}^{(2)} = k_{n-3}^{(3)} + k_{n-2}^{(2)} + k_{n-1}^{(2)} &= k_{n-4}^{(3)} + k_{n-3}^{(2)} + k_{n-2}^{(2)} + k_{n-1}^{(2)} \\ &= 0 + 1 + \cdots + k_{n-4}^{(2)} + k_{n-3}^{(2)} + k_{n-2}^{(2)} + k_{n-1}^{(2)} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i^{(2)}\end{aligned}$$

Теперь внесем полученный результат в исходную формулу

$$A_n = n + 6 \sum_{i=0}^{n-1} k_i^{(2)}$$

И так как число циклов суммирования фигурного числа $k_i^{(2)}$ равно числу n, то окончательно запишем

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 + 6k_i^{(2)}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$$

Поскольку в постановке аналогичной задачи для всех последующих показателей степени $x > 3$ подобному преобразованию будет подвергаться каждый член полинома, то получаем интерпретацию рекуррентного доказательства [3], откуда окончательно убеждаемся в ее справедливости, а также следствии 1 теоремы Ферма.

P.S. Безусловно Пьер Ферма владел данными знаниями, но в тоже время у него не было исчерпывающего математического аппарата для вывода доказательства, поэтому с одной стороны эти знания, обладая достаточной информативностью, позволили ему с легкостью выдвинуть свое знаменитое утверждение, а с другой стороны отсутствие описательной части доказательства превратило его гипотезу в тайну на многие столетия.

Ссылки

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org/A046092

[2] Владимир Годовалов, Теория степенных полей, страница 28, Таблица 1, http://vixra.org/abs/1206.0025

[3] Владимир Годовалов, Теория степенных полей, Гипотеза Ферма, страница 36-43, http://vixra.org/abs/1206.0025