ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ СИЛЫ ЛОРЕНЦА ИЗ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Д.т.н., проф. В.Эткин

Показано, что выражение магнитной составляющей силы Лоренца непосредственно следует из уравнений Максвелла, если последние выведены из первичных принципов и содержат полные производные по времени от электрических и магнитных полей

CONCLUSION OF THE LORENTZ FORCE EXPRESSION FROM MAXWELL EQUATIONS

Prof. V.A. Etkin

It is shown, that expression of Lorentz magnetic force follows directly from Maxwell equations, if the last are deduced from primary principles and contain full derivatives on time from electric and magnetic fields

Введение. До настоящего времени в классической электродинамике существуют два слабо связанных друг с другом раздела. С одной стороны, существует формула Лоренца, определяющая силовое взаимодействие электродинамических систем. С другой стороны, имеются уравнения Максвелла, из которых следуют волновые уравнения для электромагнитных полей. В результате столь странного «размежевания» двух направлений одной и той же области знаний до настоящего времени вся классическая электродинамика находится в состоянии, когда для объяснения электродинамических явлений приходится применять принципиально различные подходы. Наглядным примером такой «двойственности» является известное исключение из «правила потока», сформулированного Фарадеем (1831). Согласно этому правилу, ЭДС $\mathcal{E}$ в контуре с током равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока $\Phi_м$, пронизывающего контур:

$$\mathcal{E} = - d\Phi_м/dt \,, \tag{1}$$

В этой формулировке неразличимы две возможности: движется контур или меняется поле. Для анализа этих случаев в электродинамике приходится пользоваться двумя совершенно разными законами: магнитной составляющей силы Лоренца $e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ в случае движущегося контура или законом $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -(\partial\mathbf{B}/\partial t)$ в случае меняющегося поля. Как отмечает Р. Фейнман, «мы не знаем ни одного другого такого примера, когда бы простой и точный закон требовал для своего настоящего понимания анализа в терминах *двух разных явлений*» [1].

Задачей настоящей статьи является устранение этой двойственности и получение выражения силы Лоренца непосредственно уравнений Максвелла без предъявления к нему требований инвариантности и использования каких-либо соображений теории относительности.

1. Коррекция уравнений Максвелла. Как известно, уравнения Максвелла до сих пор считаются не выводимыми из каких-либо первичных принципов электродинамики и представляются как законченное математическое выражение опытов Фарадея. При этом считается, что выражение силы Лоренца следует из них лишь при применении преобразований Лоренца.

Иной взгляд открывается, когда уравнения Максвелла все же удается вывести, например, из энергодинамики, представляющей собой обобщение термодинамики на нетепловые процессы и нетепловые формы энергии [2]. Исходя из закона сохранения энергии для систем, в которых совершается работа поляризации $đW_{ev} = \mathbf{E}d\mathbf{D}$ и намагничивания $đW_{мv} = \mathbf{H}d\mathbf{B}$, она не только позволяет вывести уравнения Максвелла, но и показать неполноту их существующей формулировки, обусловленную подменой полной производной по времени t от напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей их частной производной. Чтобы показать это, приведем краткий энергодинамический вывод этих уравнений [3].

Рассмотрим достаточно общий случай неподвижной системы, находящейся во внешнем электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях и обладающей в соответствии с эти электрической и магнитной степенью свободы. Энергия E_v единицы объема такой системы является, естественно, функцией векторов электрической $\mathbf{D}$ и магнитной $\mathbf{B}$ индукции, которые в свою очередь зависят от напряженности этих полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В соответствии с этим в обобщенном уравнении 1-го и 2-го начал классической термодинамики сложных систем появляются дополнительные члены, соответствующие процессам поляризации и намагничивания [4]:

$$dE_v = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}\ . \tag{2}$$

Предположим, что в такой системе осуществляются процессы взаимного превращения энергии электрического и магнитного поля, мощность которых равна:

$$N_e = \mathbf{E}\cdot d\mathbf{D}/dt;\ \ N_м = \mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}/dt. \tag{3}$$

Если при этом энергия системы из одной упорядоченной формы (электрической) целиком переходит в другую ее упорядоченную форму (магнитную), как это и предполагал Максвелл, и отсутствуют потери, приводящие к возрастанию энтропии, имеет место очевидный баланс мощностей $N_e = -\ N_м$. Это непосредственно приводит к соотношению вида:

$$\mathbf{E}\cdot(d\mathbf{D}/dt) = -\ \mathbf{H}\cdot(d\mathbf{B}/dt). \tag{4}$$

Этим простым соотношениям можно придать вид, предложенный Максвеллом и затем «усовершенствованный» Герцем и Хэвисайдом. Для конкретности рассмотрим систему, состоящую из замкнутого электрического контура произвольной длины ℓ_e и переменного (в общем случае) сечения f_e, который охватывает замкнутый же магнитопровод длиной ℓ_m и переменным по длине сечением f_m . Учитывая непостоянство f_e и f_m, в (3) следует перейти к интегральной форме:

$$N_e = \int \mathbf{E}\cdot(d\mathbf{D}/dt)dV_е;\ \ N_м = \int \mathbf{H}\cdot(d\mathbf{B}/dt)dV_м\ , \tag{5}$$

где $dV_е$, $dV_м$ – элементы объема диэлектрика и магнетика. Эти элементы можно представить в виде произведения $dV_e = d\boldsymbol{\ell}_е\cdot d\mathbf{f}_е$ и $dV_м = d\boldsymbol{\ell}_м\cdot d\mathbf{f}_м$, где $d\boldsymbol{\ell}_е$, $d\boldsymbol{\ell}_м$ и $d\mathbf{f}_е$, $d\mathbf{f}_м$ – ортогональные векторные элементы соответственно длины и сечения электрического контура и диэлектрика. Вынося за знак интеграла некоторую усредненную по системе величину напряженности электрического и магнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и учитывая, что в теории электромагнетизма производные по времени от векторов электрической и магнитной индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ определяют так называемые потоки смещения $\mathbf{j}_e^c = \partial\mathbf{D}/\partial t$ и $\mathbf{j}_м^c = \partial\mathbf{B}/\partial t$ [5], находим, что интегралы $\int\mathbf{j}_e^c\ dV$ и $\int\mathbf{j}_м^c\ dV$ определяют полные потоки электрического и магнитного смещения $\mathbf{J}_e^c$ и $\mathbf{J}_м^c$ в указанной системе. С позиций электродинамики эти потоки представляются как производные по времени от параметров состояния $\Phi_е = \int \boldsymbol{D}\cdot d\mathbf{f}_e$ и $\Phi_м = \int \boldsymbol{B}\cdot d\mathbf{f}_м$ и традиционно представляются числом силовых линий электрического и магнитного поля, пронизывающих поверхность f_e и $f_м$ [5].

Учитывая произвольность направления векторов $\mathbf{J}_e^c$ и $\mathbf{J}_м^c$, величины N_e и $N_м$ удобно представить в виде произведения скалярных потоков электрического и магнитного смещения (потоков сцепления) $J_е^с = \int(d\mathbf{D}/dt)d\mathbf{f}_е$, $J_м^с = \int(d\mathbf{B}/dt)d\mathbf{f}_м$ и сопряженных с ними термодинамических сил, каковые в данном случае имеют смысл электродвижущей силы $X_е = \int \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}_е$ и её аналога – магнитодвижущей силы $X_м = \int \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell}_м$ [5] , т.е. $N_e = J_е^с X_е$; $N_м = J_м^с X_м$. При этом

$$X_e = -\int(d\mathbf{B}/dt)d\mathbf{f}_м\,, \tag{6}$$

$$X_м = \int(d\mathbf{D}/dt)d\mathbf{f}_е\,, \tag{7}$$

Первое из этих соотношений представляет собой закон Фарадея (1). Перейдем теперь на основании теоремы Стокса в выражениях силы $X_е = \int \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}_е$ от криволинейного интеграла по замкнутому электрическому контуру длиной $\ell_е$ к интегралу $\int \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}_м$ по сечению магнитопровода $f_м$. Подобным же образом перейдем в выражении силы $X_м = \int \mathbf{H}\cdot d\boldsymbol{\ell}_м$ от криволинейного интеграла по замкнутому магнитному контуру длиной $\ell_м$ к интегралу $\int \mathrm{rot}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{f}_е$ по поверхности $f_е$, натянутой на электрический контур. Тогда вместо (6) и (7) можем написать:

$$\int \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{f}_м = -\int(d\mathbf{B}/dt)d\mathbf{f}_м\,. \tag{8}$$

$$\int \mathrm{rot}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{f}_е = \int(d\mathbf{D}/dt)d\mathbf{f}_е\,; \tag{9}$$

или в дифференциальной форме [6][1)]

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\,d\mathbf{B}/dt, \tag{10}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = d\mathbf{D}/dt\,. \tag{11}$$

Эти уравнения отличаются от современной записи уравнений Максвелла тем, что в них фигурируют полные производные по времени от векторов электрической и магнитной индукции[2)]. Последнее не удивительно, поскольку в исходные уравнения термодинамики (2) также входят полные дифференциалы векторов поляризации и намагничивания.

2. Вывод выражения силы Лоренца. Замена в уравнении Максвелла (10) частной производной от магнитного поля ($\partial\mathbf{B}/\partial t$) на полную $d\mathbf{B}/dt$ достаточно для вывода из него выражения магнитной составляющей силы Лоренца. В таком случае, используя определение векторного потенциала $\mathbf{A}_е = \mathrm{rot}\mathbf{B}$, по правилам векторного анализа имеем:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = [\mathbf{v}_е,\mathrm{rot}\mathbf{B}] - \partial\mathbf{B}/\partial t = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}_е\times\mathbf{B}] - \mathrm{rot}\,(\partial\mathbf{A}_е/\partial t), \tag{12}$$

или

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}_е\times\mathbf{B}] - (\partial\mathbf{A}_е/\partial t). \tag{13}$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения характеризует дополнительную вихревую составляющую напряженности электрического поля $\mathbf{E} = [\mathbf{v}_е\times\mathbf{B}]$, обусловленную

---

1) Другая пара уравнений Максвелла остается при этом неизменной.

2) Характерно, что сам Максвелл использовал именно полные производные по времени [6].

действием «сторонних» (индуцированных) сил. Эти силы в отличие от кулоновской силы $\mathbf{E_к} = -\nabla\varphi$ действуют на заряд e, движущийся со скоростью $\mathbf{v}_e$. Другая составляющая вихревого электрического поля $(\partial\mathbf{A}_e/\partial t)$, не имеющая специального названия, учитывает стороннюю силу, вызывающую ускорение заряда e. В этом легко убедиться, воспользовавшись выражением векторного потенциала $\mathbf{A}_e = (\mathbf{v}_e/c^2)\varphi$, где φ – потенциал электрического поля (Фейнман, 1964). Поскольку частная производная $(\partial\mathbf{A}_e/\partial t)$ находится в условиях его постоянства, $(\partial\mathbf{A}_e/\partial t) = (\partial\mathbf{v}_e/\partial t)\varphi/c^2$, т.е. обусловлена ускорением электронов. Отсутствие в выражении (13) кулоновской силы обусловлено самой постановкой задачи, в которой рассматривался лишь процесс преобразования «сторонней» (магнитной) энергии в электрическую. В частности, для замкнутого контура, находящегося в магнитном поле, Дж. Максвелл записал ЭДС в виде:

$$\mathcal{E} = \int(-\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}_e/\partial t + \mathbf{v}\times\mathbf{B})d\boldsymbol{\ell}_e\,. \tag{14}$$

Тем самым он включает в число составляющих ЭДС еще и градиент потенциала, хотя последний в отличие от «сторонних» имеет чисто электрическую природу и при интегрировании по замкнутому контуру исчезает [6]. Это обстоятельство свидетельствует о явном несовершенстве принятой в электродинамике классификации сил. Оно проявляется и в том, что силу $-\partial\mathbf{A}_e/\partial t$ относят обычно к напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, хотя, как показано выше, она также имеет некулоновскую природу и, следовательно, должна быть отнесена к «сторонним» силам. Этим и объясняется, видимо, то обстоятельство, что эта сила не имеет специфического названия, а её смысл обычно никак не интерпретируется.

Непоследовательность существующей электродинамики проявляется и в обычном утверждении о том, что магнитная составляющая силы Лоренца не может совершать никакой работы, поскольку она всегда действует по нормали к траектории движения электрона[1)]. Между тем этот вывод справедлив лишь для элемента тока, а не к замкнутому контуру в целом, для которого записаны уравнения Максвелла. Как следует из приведенного выше вывода этих уравнений, они отражают закон сохранения энергии при преобразовании энергии магнитного поля в электрическое. Применительно к контуру с постоянным током единственным видом совершаемой при этом полезной работы является вращение рамки в магнитном поле. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить член $\mathbf{H}\cdot d\mathbf{B}$ в законе сохранения энергии (2) более адекватным существу дела произведением крутящего (ориентационного) момента $\mathbf{M}_e$, создаваемого магнитным полем, на элементарный угол поворота $d\boldsymbol{\varphi}_e$ рамки с током, как это сделано в основном тождестве энергодинамики [2]. Тогда станет очевидным, что именно магнитная составляющая силы Лоренца является единственной причиной изменения направления вектора скорости $\mathbf{v}$ элемента тока $\mathbf{I}_e\cdot d\boldsymbol{\ell}$, которая приводит к её вращению, т.е. той самой «сторонней» силой, которая совершает работу в преобразователях энергии стационарного магнитного поля. Поэтому с позиций энергодинамики было бы уместнее говорить не о силе, а о моменте сил Лоренца, который и совершает работу.

Таким образом, полная сила $\mathbf{F}_e$, действующая на заряд e, имеет вид:

$$\mathbf{F}_e = -\,e\{\nabla\varphi - [\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + (\partial\mathbf{A}_e/\partial t)\}, \tag{15}$$

т.е. включает так называемую «магнитную составляющую» силы Лоренца $\mathbf{F}_л = e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$, что и требовалось доказать.

Выражение (15) обнаруживает возможность дальнейшего обобщения закона Ома, который с учетом некулоновских сил принимает вид:

$$\mathbf{j}_e = -\,\sigma_e\{\nabla\varphi - [\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + (\partial\mathbf{A}_e/\partial t)\}\,, \tag{16}$$

---

1) Последнее означает, что эта сила не является электродвижущей, хотя и отнесена к «сторонним» силам.

где σ_e – коэффициент электропроводности. В данном случае все слагаемые ЭДС получены без использования соображений СТО.

Это выражение считается в настоящее время наиболее общим. Между тем в соответствии с ТНП и энергодинамикой на ЭДС несомненно влияют и другие физические, физико-химические, термодинамические и другие процессы. Как показано в [2], в системах с неоднородным полем температур закон Ома следует дополнить «термоэлектрической силой» $\mathbf{X}_{ет}$, выражающейся через градиент температуры. В еще более общем случае электрохимических систем движение заряженных частиц вызывается также электрохимическими силами $\mathbf{X}_{ek}$, определяемыми через градиенты концентрации *k*-х компонентов системы. Дополнительные эффекты возникают и при рассмотрении сред, в которых имеются градиенты или перепады давлений, например, в растворах электролитов. В таком случае в уравнении (16) появляется еще одна составляющая ЭДС. Такое представление ЭДС позволит получить целый ряд так называемых эффектов наложения, выражающих взаимосвязь электрических явлений с неэлектрическими.

В свою очередь, выражение (15) объясняет, почему ЭДС возникает там, где «поток» $\partial\mathbf{B}/\partial t$ не меняется, и не возникает там, где этот поток изменяется. Благодаря этому исключается отмеченная им необходимость использования различных законов силы для случая движущегося контура и меняющегося поля. С этих позиций становится понятным возникновение магнитного поля при движении поляризованного диэлектрика (эффекты Роуланда – Эйхенвальда и Рентгена - Эйхенвальда), а также поляризация диэлектрической пластины при ее движении в магнитном поле (эффект Вильсона – Барнета) [2]. Более того, обнаруживается возможность доказательства существования продольных электромагнитных волн (ПЭМВ), обладающих высокой проникающей способностью через толщу воды, горных пород, металл и железобетон [7]. По–видимому, именно этот вид продольной волны возникает в устройстве Авраменко, обусловливая возможность передачи энергии по однопроводной линии [8].

Не менее важно, что благодаря предпринятому уточнению уравнений Максвелла классическая электродинамика приобретает вид стройной единой науки.

Литература

1. *Фейнман Р. , Лейтон Р., Сэндс М.*. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1976. Т. 6, с.54.

2. *Эткин В.* Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии).- СПб.- Наука, 2008.-409 с.

3. *Эткин В.* О неполноте уравнений Максвелла. http://zhurnal.lib.ru/editors/e/etkin_w_a/ 27.09.2009.

4. *Сычев В.В.* Сложные термодинамические системы. – М.: Энергоатомиздат, 1986.- 207 с.

5. *Поливанов К.М.* Электродинамика движущихся тел. – М.: Энергоатомиздат, 1982.-192 с.

6. *Максвелл Дж. К.* Трактат по электричеству и магнетизму. – М.: Наука, 1989, Т.2, п. 598.

7. *Абдулкеримов С.А. ,Ермолаев Ю.М., Родионов Б.Н.* Продольные электромагнитные волны. Теория, эксперименты и перспективы применения. –М., 2003.

8. *Стребков Д.С., Авраменко С.В., Некрасов А.И., Рощин О.А.* О возможности однопроводной передачи энергии. // Техника в сельском хозяйстве. – 2004. – №4. – С. 35...36.