Version 1, June 2012, rus

Powers Fields Theory

by Vladimir Godovalov

vgodovalov@yahoo.com

Nature does not create anything extra. Mathematics as a part of Nature obeys the same law. If figurate numbers exist in nature, it means there is reason for their existence. In fact they represent a key to many solutions and serve as a foundation in Powers Fields Theory.

The theory opens a new chapter in mathematics, which studies interaction of monomials n^m in homogenous areas called the powers fields. More precisely, these areas consist of consecutive and interconnected values organized in rows by their common attribute – the exponent m itself. The theory is based on Monomial Decomposition Theorem which firstly leads to structural organization of said areas, secondly, settles the powers field's basic equations and finally allows the areas elements be expressed as figurative and factorial polynomials. Because of that the nature of equation $a^x + b^y = c^z$ becomes a not complicated subject to systematic analysis enabling the theory to reveal in detail its matter.

Technically the analysis falls in two ways. It begins with analysis of the powers field's properties, the first of which actually states the Fermat's conjecture. Being in fact not an independent problem by itself, Fermat's conjecture is a technique applied in studying of the powers fields. Other powers field's property, currently unknown to modern mathematics, is based on the genus-structural properties of figurative polynomials and therefore carries the same name. And finally, performing the most extensive study, the Beal's conjecture ends analysis by searching solutions to the equations as well as determines among them cases with common prime factor.

In addition to studying the powers fields as a main objective, the theory introduces several innovative methods along with new functions and definitions. Also, the paper includes Composite Numbers Theorem, the proven results of which are well known in modern mathematics formulas of factoring sum/difference of n-powers.

The theory not only does discover many links within modern mathematics, it also raises a set of new questions in more specific areas of the theory and one of them for example is Phantom problem. The emergence of Powers Fields Theory not only fills a gap in Number Theory, but also sheds light on many related issues.

Версия 1, в редакции от 04.06.12, rus

ТЕОРИЯ СТЕПЕННЫХ ПОЛЕЙ

Владимир Годовалов
vgodovalov@yahoo.com

Оглавление

Введение

Любая проблема имеет решение, если она не решается - значит недостаточно средств для ее решения или она недостаточно изучена

Математика, как наука о структуре, порядке и взаимодействии реальных объектов имеет в своем составе раздел - высшую алгебру или теорию чисел, который без преувеличения содержит самое большое количество парадоксов противоречий в математике. Так, с одной стороны данный раздел изучает и оперирует целыми числами – легко понятными и доступными реальными объектами, которые казалось бы также легко доступны в изучении. Но с другой стороны, именно он содержит большое количество тайн, исследование которых человечеством приводило лишь к открытию гипотез, в то время как истинная природа этих объектов и их взаимодействия остается неприступной и до сих пор скрытой от нас. К таким проблемам относятся многочисленные гипотезы о простых числах, а также множество проблем относительно природы чисел в степенях, точнее их отношениях в форме уравнений – такие как гипотеза Ферма, Биля, Ферма-Каталана, Эйлера. Об этом и пойдет речь в этой работе.

Данная теория открывает новый раздел в математике, который изучает взаимодействие одночленов вида n^m в однородных областях названных степенными полями – областями последовательных значений n^m, объединенных по общему признаку – показателю степени m. В ее основе лежит теорема о разложении одночлена n^m, следствием которой является структурная организация одночленов в однородные области, вывод основных уравнений степенных полей и выражение элементов поля в фигурных и факториальных полиномах. Теория детально раскрывает природу уравнений $a^x + b^y = c^z$ поскольку это равенство представляется основным уравнением степенного поля и без труда подвергается системному анализу. Порядок их исследования естественным образом сочетается с исторической последовательностью появления гипотез относительно общих свойств этих уравнений, где первое такое свойство обнаруживает гипотеза Ферма, имеющая совершенно определенное прикладное применение в данной теории, с помощью которой проводится анализ равенств $a^x \pm b^x = c^x$. После, на основании структурно-родового анализа осуществляется дополнительное исследование уравнений $a^x - b^x = c^y$, и наконец, самый обширный анализ задает гипотеза Биля, исследование которой проводится для уравнений $a^x + b^y = c^z$. Теория обнаруживает как много связей с современной математикой, так и поднимает ряд новых вопросов, но уже в более узких специфических областях теории. Помимо задачи исследования степенных полей в теории применяется ряд новых методов, вводятся новые функции и определения, а также явно выводится теорема о составных числах, которые хоть и хорошо известны современной математике как формулы сокращенного умножения, но природа их образования и свойств также была неясна.

Таким образом, появление теории степенных полей позволяет заполнить обширный пробел в области теории чисел, а также пролить свет на множество связанных проблем.

РАЗДЕЛ 1

В работе используется много новых понятии и определений, поэтому начнем изучение теории степенных полей с ознакомления основных из них.

Основные термины и понятия

1. Моном Годовалова – это формулы разложения одночлена n^m в фигурный и факториальный полином.

2. Фигурный полином – это многочлен, получаемый в результате разложения одночлена вида n^m, состоящий из суммы m членов для четного показателя степени m и суммы $\frac{m+1}{2}$ членов для нечетного m. Первым членом фигурного полинома, который носит название показательного члена, всегда есть основание n, а все последующие – от младшего до старшего члена состоят из произведения фигурных коэффициентов и фигурных чисел.

3. Факториальный полином – это многочлен, получаемый в результате разложения одночлена вида n^m, состоящий из суммы m членов для четного показателя m и суммы $\frac{m+1}{2}$ членов для нечетного m. Первым членом факториального полинома, который носит название показательного члена, всегда является основание n, а все последующие члены - от младшего до старшего состоят из произведения мономиальных коэффициентов и симметричных факториалов.

4. Фигурные числа – организованные в (m)-фигурные ряды последовательности натуральных чисел, связанные реккурентной зависимостью выражения каждого числа $k_n^{(m)}$ данного (m) ряда через сумму n чисел предыдущего $(m-1)$ ряда: $k_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(m-1)}$. Первым фигурным рядом есть (2) –фигурный ряд, или ряд треугольных чисел, производным рядом для которого есть последовательность натуральных чисел i: $k_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} i$.

5. Фигурные коэффициенты – коэффициенты при фигурных числах в фигурном полиноме, элементы таблицы фигурных коэффициентов.

6. Симметричные факториалы – символьные функции, имеющие сокращенные записи: F_{n-i}^{n+i} для нечетного количества $2i+1$ произведений фракционной выборки элементов натурального ряда $(n-i)\ldots(n+i)$, включая число n, находящееся в середине этой выборки: $F_{n-i}^{n+i} = (n-i)\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(n+i)$,
и F_{n-i+1}^{n+i} для четного количества $2i+2$ произведений фракционной выборки элементов натурального ряда $(n-i+1)\ldots(n+i)$, включая число n, находящееся в середине этой последовательности: $F_{n-i}^{n+i} = (n-i+1)\ldots(n-1)n(n+1)\ldots(n+i)$

7. Мономиальные коэффициенты – коэффициенты при симметричных факториалах в факториальном полиноме, элементы таблицы мономиальных коэффициентов

8. Степенное поле m – бесконечная область взаимосвязанных и организованных в ряды числовых значений, среди которых задающим рядом есть последовательность натуральных чисел или оснований n, а взаимосвязанными рядами - ряд значений An, который состоит из последовательности значений результата возведения основания n в степень m, ряд вычетов Bn – последовательность значений результатов вычета двух соседних элементов ряда An, и ряд фигурных чисел $k_n^{(m)}$.

Моном Годовалова

Моном Годовалова – это формула разложения одночлена вида n^m в:

a) фигурный полином, который для нечетного показателя степени m имеет вид

$$n^m = n + U_1^p k_{n-1}^{(3)} + U_2^p k_{n-2}^{(5)} + U_3^p k_{n-3}^{(7)} + \cdots + U_p^p k_{n-p}^{(m)},$$

где $k_{n-p}^{(m)}$ - фигурное число (m)-фигурного ряда; $U_1^p, U_2^p, U_3^p, \ldots U_p^p$- коэффициенты фигурных чисел – p-ряд таблицы нечетных фигурных коэффициентов;

и для четного показателя степени m:

$$n^m = n + 2k_{n-1}^{(2)} + V_1^p k_{n-1}^{(3)} + V_1'^p k_{n-2}^{(4)} + V_2^p k_{n-2}^{(5)} + V_2'^p k_{n-3}^{(6)} + \cdots + V_p^p k_{n-p}^{(m-1)} + V_p'^p k_{n-p+1}^{(m)},$$

где $k_{n-p}^{(m)}$ - фигурное число (m)-фигурного ряда;$V_1^p, V_1'^p, V_2^p, V_2'^p, \ldots\ V_p^p, V_p'^p$- коэффициенты фигурных чисел - p-ряд таблицы четных фигурных коэффициентов

b) факториальный полином, который для нечетного показателя степени m имеет вид

$$n^m = n + \binom{p}{1} F_{n-1}^{n+1} + \binom{p}{2} F_{n-2}^{n+2} + \cdots + \binom{p}{i} F_{n-p}^{n+p},$$

где $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots \binom{p}{i}$ – мономиальные коэффициенты - элементы p – ряда таблицы нечетных мономиальных коэффициентов, определяемые по формуле: $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p$, где $p = \frac{m-1}{2}$; $F_{n-1}^{n+1}, F_{n-2}^{n+2}, \ldots F_{n-p}^{n+p}$ – симметричные факториалы, символьная функция, формула которой имеет вид: $F_{n-p}^{n+p} = (n-p) \ldots (n-1)n(n+1) \ldots (n+p)$

и для четного показателя степени m:

$$n^m = n + F_{n-1}^{n} + 2\binom{p}{1} F_{n-1}^{n+1} + \binom{p}{1} F_{n-2}^{n+1} + 3\binom{p}{2} F_{n-2}^{n+2} + \binom{p}{2} F_{n-3}^{n+2} + \cdots + (i+1)\binom{p}{i} F_{n-p}^{n+p} + \binom{p}{i} F_{n-p+1}^{n+p}$$

где $2\binom{p}{1}, \binom{p}{1}$, $3\binom{p}{2}$, $\binom{p}{2}, \ldots (i+1)\binom{p}{i}, \binom{p}{i}$ –мономиальные коэффициенты - элементы p –ряда таблицы четных мономиальных коэффициентов, определяемые по формуле: $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p$, где $p = \frac{m-2}{2}$; $F_{n-1}^{n}, F_{n-1}^{n+1}, F_{n-2}^{n+1}, F_{n-2}^{n+2}, F_{n-3}^{n+2}, \ldots F_{n-p}^{n+p}, F_{n-p+1}^{n+p}$ – симметричные факториалы, символьная функция, формула которой имеет вид: $F_{n-p+1}^{n+p} = (n-p+1) \ldots (n-1)n(n+1) \ldots (n+p)$

1.1 Теорема о разложении одночлена n^m

Теорема о разложении одночлена n^m гласит, что любое натуральное число n в степени m может быть разложено в факториальный полином:

a) для нечетного показателя m вида

$$n^m = n + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} F_{n-i}^{n+i}$$

где $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p, p = \frac{m-1}{2}$; $F_{n-i}^{n+i} = (n-i)\dots(n-1)n(n+1)\dots(n+i)$

b) для четного показателя m вида

$$n^m = n + F_{n-1}^{n} + \sum_{i=1}^{p}\left[\binom{p}{i}(i+1)F_{n-i}^{n+i} + \binom{p}{i}F_{n-i+1}^{n+i}\right]$$

где $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p, p = \frac{m-2}{2}$; $F_{n-i}^{n+i} = (n-i)\dots(n-1)n(n+1)\dots(n+i)$

а также число n в степени m может быть разложено в фигурный полином:

c) для нечетного показателя m вида

$$n^m = n + \sum_{i=1}^{p}(2i+1)!\binom{p}{i}k_{n-i}^{(2i+1)}$$

где $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p, p = \frac{m-1}{2}$

d) для четного показателя m вида

$$n^m = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p}\left[(2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i}k_{n-i}^{(2i+1)} + (2i+2)!\binom{p}{i}k_{n-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

где $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p, p = \frac{m-2}{2}$

Доказательство

Доказательство теоремы о разложении n^m в фигурный и факториальный полиномы проводится в трех частях. В первой части, с использованием метода последовательных цикличных вычетов, выводятся формулы фигурных полиномов для частных случаев $n^2 - n^8$. Во второй части осуществляется систематизация и классификация фигурных чисел $k_n^{(m)}$, а также приводятся формулы реккурентной и относительной зависимости фигурных чисел $k_n^{(2)} - k_n^{(8)}$. В третьей, заключительной части, происходит поиск функции, задающей мономиальные коэффициенты факториальных полиномов, и окончательно выводятся формулы общего вида разложения одночлена n^m в фигурный и факториальный полином для всего множества оснований n и показателей m.

Столь обширный индуктивный метод доказательства вызван сложностью определения характера этих полиномов, а также безусловной новизной данного направления в математике.

ЧАСТЬ 1

Метод последовательных цикличных вычетов

Суть метода заключается в последовательном вычете всех соседних элементов $A_{n+1} - A_n$ последовательности $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ некоторого начального ряда An, в результате чего формируется последовательность результатов данных вычетов - элементов $B_1, B_2, B_3 \dots B_n$, образующих ряд вычетов первого цикла Bn, далее уже эти элементы подвергаются последовательному вычету до получения последовательности результатов данных вычетов -

элементов $C_1, C_2, C \dots C_n$, образующих ряд вычетов второго цикла Cn, и так далее. Поскольку результаты вычетов с каждым циклом уменьшаются, то безусловно достигается некоторый конечный результат, который служит характеристикой ряда, а также используется для проведения дальнейшего анализа ряда.

1.1 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 2

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 2 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
P – ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
$k_n^{(2)}$–фигурные числа (2)-го фигурного ряда

$k_n^{(2)}$	n	An	Bn	P
0	0	0	1	2
1	1	1	3	2
3	2	4	5	2
6	3	9	7	2
10	4	16	9	2
15	5	25	11	2
21	6	36	13	2
28	7	49	15	2
36	8	64	17	2
45	9	81	19	2
55	10	100	21	2
…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞

В результате двух циклов вычетов получаем постоянную величину - число 2, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 2: $2! = 2$. Применим алгоритм обратного нахождения значения A_nчерез данную константу, так для любого B_nсправедливо выражение

$$B_n = 2\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

а последовательность ряда A_n подчиняется формуле

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$$

то

$$A_1 = A_0 + B_0$$
$$A_2 = A_1 + B_1 = A_0 + B_0 + B_1 = A_0 + B_0 + 2\left(n_1 + \frac{n_1}{2}\right)$$
$$A_3 = A_2 + B_2 = A_0 + B_0 + 2\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + 2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) = A_0 + B_0 + 2\left(n_1 + n_2 + \frac{n_2}{2}\right)$$
$$A_4 = A_3 + B_3 = A_0 + B_0 + 2\left(n_1 + n_2 + \frac{n_2}{2}\right) + 2\left(n_3 + \frac{1}{2}\right) = A_0 + B_0 + 2\left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{n_3}{2}\right)$$

Проведем анализ полученных равенств для элементов A_2, A_3, A_4.

В указанных формулах последовательно имеем:

- рекуррентный порядок $n_1,\ n_1 + n_2,\ n_1 + n_2 + n_3,$ который соответствует числовой последовательности 1, 3, 6 - фигурным числам (2)-го фигурного ряда -$k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, k_3^{(2)}$;
- множитель $n_1,\ n_2,\ n_3$ дроби $\frac{1}{2}$, значение которого для соответствующего A_n эквивалентно $n-1$.

Учитывая вышесказанное и поскольку $A_0 = 0, B_0 = 1$ запишем формулу для любого A_n или

$$n^2 = 1 + 2\left(k_{n-1}^{(2)} + \frac{n-1}{2}\right)$$

что справедливо равенству

$$n^2 = n + 2k_{n-1}^{(2)} \tag{1.1.1}$$

Проверим полученную формулу, к примеру

$$6^2 = 6 + 2 \cdot 15 = 36$$

или

$$9^2 = 9 + 2 \cdot 36 = 81$$

1.2 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 3

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 3 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn– ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
P– ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
$k_n^{(3)}$–фигурные числа (3)–го фигурного ряда

$k_n^{(3)}$	n	An	Bn	Cn	P
0	0	0	1	0	6
1	1	1	7	6	6
4	2	8	19	12	6
10	3	27	37	18	6
20	4	64		24	

			61		6
35	5	125	91	30	6
56	6	216	127	36	6
84	7	343	169	42	6
120	8	512	217	48	6
165	9	729	271	54	6
220	10	1000	331	60	6
…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате трех циклов вычетов находим постоянную величину - число 6, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 3: $3! = 6$. Применим алгоритм обратного нахождения значения A_n через данную константу,

$$C_n = 6n$$

далее

$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1$,
где$B_1 = B_0 + C_1 = B_0 + 6n_1$,
тогда

$$A_2 = A_0 + B_0 + B_0 + 6n_1 = 2B_0 + 6n_1$$

$A_3 = A_2 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2 = B_0 + 6(n_1 + n_2)$,
тогда

$$A_3 = 2B_0 + 6n_1 + B_0 + 6(n_1 + n_2) = 3B_0 + 6(2n_1 + n_2)$$

$A_4 = A_3 + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3 = B_0 + 6(n_1 + n_2 + n_3)$,
тогда

$$A_4 = 3B_0 + 6(2n_1 + n_2) + B_0 + 6(n_1 + n_2 + n_3) = 4B_0 + 6(3n_1 + 2n_2 + n_3)$$

Проведем анализ полученных равенств для элементов A_2, A_3, A_4.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 2, 3, 4 коэффициента B_0 равные порядковому номеру A_nили самому числу n;
- рекуррентный порядок n_1, $2n_1 + n_2$, $3n_1 + 2n_2 + n_3$, который соответствует числовой последовательности 1, 4, 10 - фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_1^{(3)}, k_2^{(3)}, k_3^{(3)}$.

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1$ запишем формулу для любого A_n или

$$n^3 = n + 6k_{n-1}^{(3)} \qquad (1.1.2)$$

Проверим полученную формулу, так

$$5^3=5+6\cdot20=125$$

$$9^3 = 9 + 6 \cdot 120 = 729$$

$$123^3 = 123 + 6 \cdot 310124 = 1860867$$

1.3 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 4

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 4 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn– ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
Dn – ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
P– ряд последовательных вычетов $D_{n+1} - D_n$,
$k_n^{(4)}$–фигурные числа (4)–го фигурного ряда

$k_n^{(4)}$	n	An	Bn	Cn	Dn	P
0	0	0	1	2	12	24
1	1	1	15	14	36	24
5	2	16	65	50	60	24
15	3	81	175	110	84	24
35	4	256	369	194	108	24
70	5	625	671	302	132	24
126	6	1296	1105	434	156	24
210	7	2401	1695	590	180	24
330	8	4096	2465	770	204	24
495	9	6561	3439	974	228	24
715	10	10000	4641	1202	252	24
…	…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате четырех циклов вычетов получаем постоянную величину - число 24, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 4: $4! = 24$. Применим алгоритм обратного нахождения числа A_n через данную константу,

$$D_n = 24\left(n + \frac{1}{2}\right)$$
$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1 = A_0 + B_0 + B_1$,
где $B_1 = B_0 + C_1$, а$C_1 = C_0 + D_0$,
тогда

$$A_2 = A_0 + 2B_0 + C_0 + D_0 = 2B_0 + C_0 + 24\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$$

$A_3 = A_2 + B_2 = 2B_0 + C_0 + D_0 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2 = B_0 + C_0 + D_0 + C_2$
а $C_2 = C_1 + D_1 = C_0 + D_0 + D_1 = C_0 + 24\left(n_0 + n_1 + 2\frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_3 = 3B_0 + 3C_0 + 24\left(3n_0 + n_1 + 4\frac{1}{2}\right)$$

$A_4 = A_3 + B_3 = 3B_0 + 3C_0 + 24\left(3n_0 + n_1 + 4\frac{1}{2}\right) + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3 = B_0 + 2C_0 + 24\left(2n_0 + n_1 + 3\frac{1}{2}\right) + C_3$,
а$\mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_2 + D_2 = C_0 + 24\left(n_0 + n_1 + n_2 + 3\frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_4 = 4B_0 + 6C_0 + 24\left(6n_0 + 3n_1 + n_2 + 10\frac{1}{2}\right)$$

Проведем анализ полученных равенств для элементов A_2, A_3, A_4.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 2, 3, 4 коэффициента B_0 - равные порядковому номеру A_n или самому числу n;
- множители1, 3, 6 коэффициента C_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (2)-го фигурного ряда - $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ и $k_3^{(2)}$;
- рекуррентный порядок $n_0, 3n_0 + n_1, 6n_0 + 3n_1 + n_2$ который соответствует числовой последовательности 0, 1, 5 - фигурным числам (4)-го фигурного ряда - $k_0^{(4)}, k_1^{(4)}, k_2^{(4)}$;
- множители 1, 4, 10 дроби $\frac{1}{2}$ - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_1^{(4)}, k_2^{(4)}, k_3^{(4)}$.

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1$, $C_0 = 2$, запишем формулу для любого A_n или

$$n^4 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 24\left(k_{n-2}^{(4)} + \frac{1}{2}k_{n-1}^{(3)}\right)$$

что равносильно равенству

$$n^4 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 12k_{n-1}^{(3)} + 24k_{n-2}^{(4)} \tag{1.1.3}$$

Проверим формулу, так

$$6^4 = 6 + 2 \cdot 15 + 12 \cdot 35 + 24 \cdot 35 = 1296$$

$$9^4 = 9 + 2 \cdot 36 + 12 \cdot 120 + 24 \cdot 210 = 6561$$

1.4 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 5

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 5 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn – ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
Dn – ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
En – ряд последовательных вычетов $D_{n+1} - D_n$,
P– ряд последовательных вычетов $E_{n+1} - E_n$,
$k_n^{(5)}$–фигурные числа (5)–го фигурного ряда

$k_n^{(5)}$	n	An	Bn	Cn	Dn	En	P
0	0	0	1	0	30	0	120
1	1	1	31	30	150	120	120
6	2	32	211	180	390	240	120
21	3	243	781	570	750	360	120
56	4	1024	2101	1320	1230	480	120
126	5	3125	4651	2550	1830	600	120
252	6	7776	9031	4380	2550	720	120
462	7	16807	15961	6930	3390	840	120
792	8	32768	26281	10320	4350	960	120
1287	9	59049	40951	14670	5430	1080	120
2002	10	100000	61051	20100	6630	1200	120
…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате пяти циклов вычетов находим постоянную величину - число 120, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени $5: 5! = 120$. Применим алгоритм обратного нахождения числа A_nчерез данную константу,

$$E_n = 120n$$

$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1$,
где $B_1 = B_0 + C_1$,
где $C_1 = C_0 + D_0$,
тогда

$$A_2 = 2B_0 + D_0$$

$A_3 = A_2 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2$,
где $C_2 = C_1 + D_1$,
где $D_1 = D_0 + 120n_1$,
тогда

$$A_3 = 3B_0 + 4D_0 + 120n_1$$

$A_4 = A_3 + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3$,
где $C_3 = C_2 + D_2$,
где $D_2 = D_1 + 120n_2$,
тогда

$$A_4 = 4B_0 + 10D_0 + 120(4n_1 + n_2)$$

$A_5 = A_4 + B_4$,
где $B_4 = B_3 + C_4$,
где $C_4 = C_3 + D_3$,
где $D_3 = D_2 + 120n_3$,

тогда

$$A_5 = 5B_0 + 20D_0 + 120(10n_1 + 4n_2 + n_3)$$

Проведем анализ полученных равенств для A_3, A_4, A_5.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 3, 4, 5 коэффициента B_0 равные порядковому номеру A_n или самому числу n;
- множители 4, 10, 20 коэффициента D_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_2^{(3)}, k_3^{(3)}$ и$k_4^{(3)}$;
- рекуррентный порядок $n_1, 4n_1 + n_2, 10n_1 + 4n_2 + n_3$ который соответствует числовой последовательности 1, 6, 21 - фигурным числам (5)-го фигурного ряда - $k_1^{(5)}, k_2^{(5)}, k_3^{(5)}$.

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1, D_0 = 30$, запишем формулу для любого A_n или

$$n^5 = n + 30k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(5)} \qquad (1.1.4)$$

Проверим полученную формулу, так

$$5^5 = 5 + 30 \cdot 20 + 120 \cdot 21 = 3125$$

$$8^5 = 8 + 30 \cdot 84 + 120 \cdot 252 = 32768$$

1.5 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 6

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 6 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn – ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
Dn – ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
En – ряд последовательных вычетов $D_{n+1} - D_n$,
Fn– ряд последовательных вычетов $E_{n+1} - E_n$,
P– ряд последовательных вычетов $F_{n+1} - F_n$,
$k_n^{(6)}$ –фигурные числа (6)–го фигурного ряда

$k_n^{(6)}$	n	An	Bn	Cn	Dn	En	Fn	P
0	0	0	1	2	60	120	360	720
1	1	1	63	62	540	480	1080	720
7	2	64	665	602	2100	1560	1800	720
28	3	729	3367	2702	5460	3360	2520	720
84	4	4096	11529	8162	11340	5880	3240	720
210	5	15625	31031	19502	20460	9120	3960	720
462	6	46656	70993	39962	33540	13080	4680	720
924	7	117649	144495	73502	51300	17760	5400	720
1716	8	262144	269297	124802	74460	23160	6120	720

3003	9	531441	468559	199262	103740	29280	6840	720
5005	10	1000000	771561	303002	139860	36120	7560	720
…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате шести циклов вычетов находим постоянную величину - число 720, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 6: $6! = 720$. Применим алгоритм обратного нахождения числа A_nчерез данную константу, так

$$F_n = 720\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1$,
где $B_1 = B_0 + C_1$,
где $C_1 = C_0 + D_0$,
тогда

$$A_2 = 2B_0 + C_0 + D_0$$

$A_3 = A_2 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2$,
где $C_2 = C_1 + D_1$,
где $D_1 = D_0 + E_1$,
где $E_1 = E_0 + F_0$,
где $F_0 = 720\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_3 = 3B_0 + 3C_0 + 4D_0 + E_0 + 720\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$$

$A_4 = A_3 + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3$,
где $C_3 = C_2 + D_2$,
где $D_2 = D_1 + E_2$,
где $E_2 = E_1 + F_1$,
где $F_1 = 720\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_4 = 4B_0 + 6C_0 + 10D_0 + 5E_0 + 720\left(5n_0 + n_1 + 6\frac{1}{2}\right)$$

$A_5 = A_4 + B_4$,
где $B_4 = B_3 + C_4$,
где $C_4 = C_3 + D_3$,
где $D_3 = D_2 + E_3$,
где $E_3 = E_2 + F_2$,
где $F_2 = 720\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_5 = 5B_0 + 10C_0 + 20D_0 + 15E_0 + 720\left(15n_0 + 5n_1 + n_2 + 21\frac{1}{2}\right)$$

Проведем анализ полученных равенств для A_3, A_4, A_5.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 3, 4, 5 коэффициента B_0 равные порядковому номеру A_n или самому числу n;
- множители 3, 6, 10 коэффициента C_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (2)-го фигурного ряда - $k_2^{(2)}, k_3^{(2)}$ и $k_4^{(2)}$;

- множители 4, 10, 20 коэффициента D_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_2^{(3)}, k_3^{(3)}$ и $k_4^{(3)}$;
- множители 1, 5, 1 коэффициента E_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (4)-го фигурного ряда - $k_1^{(4)}, k_2^{(4)}$ и $k_3^{(4)}$;
- рекуррентный порядок n_0, $5n_0 + n_1$, $15n_0 + 5n_1 + n_2$ который соответствует числовой последовательности 0, 1, 7 - фигурным числам (6)-го фигурного ряда - $k_0^{(6)}, k_1^{(6)}, k_2^{(6)}$;
- множители 1, 6, 21 дроби $\frac{1}{2}$ - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (5)-го фигурного ряда - $k_1^{(5)}, k_2^{(5)}, k_3^{(5)}$.

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1, C_0 = 2,\ D_0 = 60, E_0 = 120$, запишем формулу для любого A_n или

$$n^6 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 60k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(4)} + 720\left(k_{n-3}^{(6)} + \frac{1}{2}k_{n-2}^{(5)}\right)$$

что равносильно равенству

$$n^6 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 60k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(4)} + 360k_{n-2}^{(5)} + 720k_{n-3}^{(6)} \qquad (1.1.5)$$

Проверим полученную формулу, так

$$8^6 = 8 + 2 \cdot 28 + 60 \cdot 84 + 120 \cdot 126 + 720\left(210 + \frac{1}{2} \cdot 252\right) = 262144$$

$$10^6 = 10 + 2 \cdot 45 + 60 \cdot 165 + 120 \cdot 330 + 720\left(924 + \frac{1}{2} \cdot 792\right) = 1000000$$

1.6 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 7

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 7 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn – ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
Dn – ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
En – ряд последовательных вычетов $D_{n+1} - D_n$,
Fn– ряд последовательных вычетов $E_{n+1} - E_n$,
Gn– ряд последовательных вычетов $F_{n+1} - F_n$,
P– ряд последовательных вычетов $G_{n+1} - G_n$,
$k_n^{(7)}$ –ряд фигурных чисел (7)–го фигурного ряда

$k_n^{(7)}$	n	An	Bn	Cn	Dn	En	Fn	Gn	P
0	0	0	1	0	126	0	1680	0	5040
1	1	1	127	126	1806	1680	6720	5040	5040
8	2	128	2059	1932	10206	8400	16800	10080	5040
36	3	2187	14197	12138	35406	25200	31920	15120	5040
120	4	16384	61741	47544	92526	57120	52080	20160	5040
330	5	78125	201811	140070	201726	109200	77280	25200	5040
792	6	279936	543607	341796	388206	186480	107520	30240	5040

1716	7	823543	1273609	730002	682206	294000	142800	35280	5040
3432	8	2097152	2685817	1412208	1119006	436800	183120	40320	5040
6435	9	4782969	5217031	2531214	1738926	619920	228480	45360	5040
11440	10	10000000	9487171	4270140	2587326	848400	278880	50400	5040
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате семи циклов вычетов получаем постоянную величину - число 5040, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 7: 7!=5040. Применим алгоритм обратного нахождения числа A_nчерез данную константу,

$$G_n = 5040n$$

$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1$,
где $B_1 = B_0 + C_1$,
где $C_1 = C_0 + D_0$,
тогда

$$A_2 = 2B_0 + D_0$$

$A_3 = A_2 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2$,
где $C_2 = C_1 + D_1$,
где $D_1 = D_0 + E_1$,
где $E_1 = E_0 + F_0$,
тогда

$$A_3 = 3B_0 + 4D_0 + F_0$$

$A_4 = A_3 + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3$,
где $C_3 = C_2 + D_2$,
где$D_2 = D_1 + E_2$,
где $E_2 = E_1 + F_1$,
где $F_1 = F_0 + G_1$,
где $G_1 = 5040n_1$,
тогда

$$A_4 = 4B_0 + 10D_0 + 6F_0 + 5040n_1$$

$A_5 = A_4 + B_4$,
где $B_4 = B_3 + C_4$,
где $C_4 = C_3 + D_3$,
где $D_3 = D_2 + E_3$,
где $E_3 = E_2 + F_2$,
где $F_2 = F_1 + G_2$,
где $G_2 = 5040n_2$,
тогда

$$A_5 = 5B_0 + 20D_0 + 21F_0 + 5040(6n_1 + n_2)$$

$A_6 = A_5 + B_5$,
где $B_5 = B_4 + C_5$,
где $C_5 = C_4 + D_4$,
где $D_4 = D_3 + E_4$,
где $E_4 = E_3 + F_3$,
где $F_3 = F_2 + G_3$,
где $G_3 = 5040n_3$,
тогда

$$A_6 = 6B_0 + 35D_0 + 56F_0 + 5040(21n_1 + 6n_2 + n_3)$$

Проведем анализ полученных равенств для A_4, A_5, A_6.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 4, 5, 6 коэффициента B_0 равные порядковому номеру A_n или самому числу n;
- множители 10, 20, 35 коэффициента D_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_3^{(3)}, k_4^{(3)}$ и $k_5^{(3)}$;
- множители 6, 21, 56 коэффициента E_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (5)-го фигурного ряда - $k_2^{(5)}, k_3^{(5)}$ и $k_4^{(5)}$;
- рекуррентный порядок n_1, $6n_1 + n_2$, $21n_1 + 6n_2 + n_3$ который соответствует числовой последовательности 1, 8, 36 - фигурным числам (7)-го фигурного ряда - $k_1^{(7)}, k_2^{(7)}, k_3^{(7)}$;

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1$, $D_0 = 126$, $F_0 = 1680$, запишем формулу для любого A_n или

$$n^7 = n + 126k_{n-1}^{(3)} + 1680k_{n-2}^{(5)} + 5040k_{n-3}^{(7)} \qquad (1.1.6)$$

Проверим полученную формулу, так

$$7^7=7+126\cdot 56+1680\cdot 126+5040\cdot 120=823543$$

$$9^7=9+126\cdot 120+1680\cdot 462+5040\cdot 792=4782969$$

1.7 Метод цикличных вычетов ряда натуральных чисел в степени 8

Составим таблицу как показано ниже, где
n – ряд натуральных чисел,
An– ряд значений - результат возведения в степень 8 каждого числа n,
Bn– ряд последовательных вычетов $A_{n+1} - A_n$,
Cn – ряд последовательных вычетов $B_{n+1} - B_n$,
Dn – ряд последовательных вычетов $C_{n+1} - C_n$,
En – ряд последовательных вычетов $D_{n+1} - D_n$,
Fn– ряд последовательных вычетов $E_{n+1} - E_n$,
Gn– ряд последовательных вычетов $F_{n+1} - F_n$,
Hn– ряд последовательных вычетов $G_{n+1} - G_n$,
P– ряд последовательных вычетов $H_{n+1} - H_n$,
$k_n^{(8)}$ –ряд фигурных чисел (8)–го фигурного ряда

$k_n^{(8)}$	n	An	Bn	Cn	Dn	En	Fn	Gn	Hn	P
0	0	0	1	2	252	504	5040	10080	20160	40320
1	1	1	255	254	5796	5544	35280	30240	60480	40320
9	2	256	6305	6050	46620	40824	126000	90720	100800	40320
45	3	6561	58975	52670	213444	166824	317520	191520	141120	40320
165	4	65536	325089	266114	697788	484344	650160	332640	181440	40320
495	5	390625	1288991	963902	1832292	1134504	1164240	514080	221760	40320
1287	6	1679616	4085185	2796194	4131036	2298744	1386510	222270	262080	40320

3003	7	5764801	11012415	6927230	7816290	3685254	1870860	484350	302400	40320
6435	8	16777216	26269505	15257090	15426684	7610394	2657620	786750	342720	40320
12870	9	43046721	56953279	30683774	26721828	11295144	3787090	1129470	383040	40320
24310	10	100000000	114358881	57405602	33587012	6865184	5299610	1512510	423360	40320
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

В результате восьми циклов вычетов находим постоянную величину - число 40320, на котором операции вычетов прекращаются и которое в действительности равняется факториалу показателя степени 8: $8! = 40320$. Применим алгоритм обратного нахождения числа A_n через данную константу,

$$F_n = 40320\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$A_1 = A_0 + B_0$$

$A_2 = A_1 + B_1$,
где $B_1 = B_0 + C_1$,
где $C_1 = C_0 + D_0$,
тогда

$$A_2 = 2B_0 + C_0 + D_0$$

$A_3 = A_2 + B_2$,
где $B_2 = B_1 + C_2$,
где $C_2 = C_1 + D_1$,
где $D_1 = D_0 + E_1$,
где $E_1 = E_0 + F_0$,
тогда

$$A_3 = 3B_0 + 3C_0 + 4D_0 + E_0 + F_0$$

$A_4 = A_3 + B_3$,
где $B_3 = B_2 + C_3$,
где $C_3 = C_2 + D_2$,
где $D_2 = D_1 + E_2$,
где $E_2 = E_1 + F_1$,
где $F_1 = F_0 + G_1$,
где $G_1 = G_0 + H_0$,
где $H_0 = 40320(n_0 + \frac{1}{2})$,
тогда

$$A_4 = 4B_0 + 6C_0 + 10D_0 + 5E_0 + 6F_0 + G_0 + 40320\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)$$

$A_5 = A_4 + B_4$,
где $B_4 = B_3 + C_4$,
где $C_4 = C_3 + D_3$,
где $D_3 = D_2 + E_3$,
где $E_3 = E_2 + F_2$,
где $F_2 = F_1 + G_2$,
где $G_2 = G_1 + H_1$,
где $H_1 = 40320\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_5 = 5B_0 + 10C_0 + 20D_0 + 15E_0 + 21F_0 + 7G_0 + 40320\left(7n_0 + n_1 + 8\frac{1}{2}\right)$$

$A_6 = A_5 + B_5$,
где $B_5 = B_4 + C_5$,
где $C_5 = C_4 + D_4$,
где $D_4 = D_3 + E_4$,
где $E_4 = E_3 + F_3$,

где $F_3 = F_2 + G_3$,
где $G_3 = G_2 + H_2$,
где $H_2 = 40320\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)$,
тогда

$$A_6 = 6B_0 + 15C_0 + 35D_0 + 35E_0 + 56F_0 + 28G_0 + 40320\left(28n_0 + 7n_1 + n_2 + 36\frac{1}{2}\right)$$

Проведем анализ полученных равенств для A_4, A_5, A_6.

В указанных формулах последовательно имеем:

- множители 4, 5, 6 коэффициента B_0 равные порядковому номеру A_n или самому числу n;
- множители 6, 10, 15 коэффициента C_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (2)-го фигурного ряда - $k_3^{(2)}, k_4^{(2)}$ и $k_5^{(2)}$;
- множители 10, 20, 35 коэффициента D_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (3)-го фигурного ряда - $k_3^{(3)}, k_4^{(3)}$ и $k_5^{(3)}$;
- множители 5, 15, 35 коэффициента E_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (4)-го фигурного ряда - $k_2^{(4)}, k_3^{(4)}$ и $k_4^{(4)}$;
- множители 6, 21, 56 коэффициента F_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (5)-го фигурного ряда - $k_2^{(5)}, k_3^{(5)}$ и $k_4^{(5)}$;
- множители 1, 7, 28 коэффициента G_0 - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (6)-го фигурного ряда - $k_1^{(6)}, k_2^{(6)}$ и $k_3^{(6)}$;
- рекуррентный порядок n_0, $7n_0 + n_1$, $28n_0 + 7n_1 + n_2$ который соответствует числовой последовательности 0, 1, 9 - фигурным числам (8)-го фигурного ряда - $k_0^{(8)}, k_1^{(8)}, k_2^{(8)}$;
- множители 1, 8, 36 дроби $\frac{1}{2}$ - числовую последовательность соответствующую фигурным числам (7)-го фигурного ряда - $k_1^{(7)}, k_2^{(7)}, k_3^{(7)}$.

Учитывая вышесказанное, и поскольку $B_0 = 1$, $C_0 = 2$, $D_0 = 252, E_0 = 504$, $F_0 = 5040, G_0 = 10080$, запишем формулу для любого A_n или

$$n^8 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 252k_{n-1}^{(3)} + 504k_{n-2}^{(4)} + 5040k_{n-2}^{(5)} + 10080k_{n-3}^{(6)} + 40320\left(k_{n-4}^{(8)} + \frac{1}{2}k_{n-3}^{(7)}\right)$$

что равносильно равенству

$$n^8 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 252k_{n-1}^{(3)} + 504k_{n-2}^{(4)} + 5040k_{n-2}^{(5)} + 10080k_{n-3}^{(6)} + 20160k_{n-3}^{(7)} + 40320k_{n-4}^{(8)} \quad (1.1.7)$$

Проверим полученную формулу, так

$$8^8 = 8 + 2\cdot 28 + 252\cdot 84 + 504\cdot 126 + 5040\cdot 252 + 10080\cdot 210 + 20160\cdot 330 + 40320\cdot 165 = 16777216$$

$$10^8 = 10 + 2\cdot 45 + 252\cdot 165 + 504\cdot 330 + 5040\cdot 792 + 10080\cdot 924 + 20160\cdot 1716 + 40320\cdot 1287 = 100000000$$

ЧАСТЬ 2

1.2 Фигурные числа и фигурные ряды

Введение

Фигурные числа в математике в настоящий момент играют незначительную роль. Упоминания о них единственно встречаются в современной литературе в описании забав пифагорейцев, когда они занимались построением фигур с использованием камней и заметили определенные количественные особенности в построение некоторых фигур. А тем временем Пьер Ферма активно использовал их, что подтверждает множество его задач и примеров. И чтобы окончательно подчеркнуть их огромную важность, стоит сказать, что треугольник Паскаля в действительности является также треугольником фигурных чисел, диагонали которого начинаются с последовательности единиц, затем следует последовательность натуральных чисел и далее следуют ряды фигурных чисел. В тоже время горизонтальными рядами здесь являются биномиальные коэффициенты, что подчеркивает важную связь бинома Ньютона с теорией степенных полей, наиболее ярко продемонстрированную в теореме о составных числах.

Обозначение и классификация

В разложении одночлена n^m в фигурные полиномы (1.1.1 - 1.1.7) фигурные $k_n^{(m)}$ числа играют фундаментальную роль. Они носят общее название фигурных чисел, а применительно к их использованию в геометрии обозначаются $P_r(n)$. Поскольку отчетливого прикладного применения этих чисел в математике на данный момент не существует, то наступает необходимость введения четкой их классификации и систематизации для использования в теории степенных полей.

Обозначение фигурных чисел принимаем как символ k, имеющий верхний регистр m, заключенный в круглые скобки (_), который показывает номер фигурного ряда этого числа и нижний регистр n, который отражает порядковый номер этого числа в данном (m) – фигурном ряду. Читается фигурное число, к примеру $k_3^{(8)}$, как фигурное число «ка» три 8-го фигурного ряда.

Для обозначения фигурного ряда условимся использовать фигурные скобки, в которые заключаем номер фигурного ряда, к примеру: (3)-й фигурный ряд.

Формулы фигурных чисел

(2)-ой фигурный ряд

Фигурные числа $k_n^{(2)}$ являются первым фигурным рядом и носят название треугольных чисел, потому что любое данное число больше единицы, представленное соответствующим количеством шаров или окружностей можно уложить в виде равностороннего треугольника.
Каждый член (2)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, называемой реккурентной, каждый n –й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} i$$

где i - последовательность натуральных чисел. Вторая зависимость называется относительной, выражается через порядковый номер данного элемента в ряду и имеет вид

$$k_n^{(2)} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1.2.1)$$

(2)-ой фигурный ряд имеет номер A000217 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(2)}$ элементов (2)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(2)}$	последовательность натуральных чисел										
0	0		0									
1	1		1									
2	3		1	2								
3	6		1	2	3							
4	10		1	2	3	4						
5	15	$\sum \dots$	1	2	3	4	5					
6	21		1	2	3	4	5	6				
7	28		1	2	3	4	5	6	7			
8	36		1	2	3	4	5	6	7	8		
9	45		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	55		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(3)-й фигурный ряд

Числа ряда $k_n^{(3)}$ носят название четырехугольных чисел, потому что любое данное число больше единицы, представленное соответствующим количеством шаров можно уложить в виде тетраэдра.
Каждый член (3)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(2)}$$

где $k_i^{(2)}$ - последовательность элементов (2)-го фигурного ряда. Вторая зависимость называется относительной, выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(3)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (1.2.2)$$

(3)-ий фигурный ряд имеет номер A000292 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(3)}$ элементов (3)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(3)}$	(2)–ой фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	4		1	3								
3	10		1	3	6							
4	20		1	3	6	10						
5	35	$\sum \dots$	1	3	6	10	15					
6	56		1	3	6	10	15	21				
7	84		1	3	6	10	15	21	28			
8	120		1	3	6	10	15	21	28	36		
9	165		1	3	6	10	15	21	28	36	45	
10	220		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(4)-ый фигурный ряд

Числа ряда $k_n^{(4)}$ носят название пятиугольных чисел, однако здесь пространственное представление получаемой фигуры не имеет широко известных подобий, и начиная с этого ряда аналогии фигурных чисел с их геометрическим представлением прекращаются.

Каждый член (4)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(4)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(3)}$$

где $k_i^{(3)}$ - последовательность элементов (3)-го фигурного ряда. Вторая зависимость называется относительной, выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(4)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \tag{1.2.3}$$

(4)-ый фигурный ряд имеет номер A000332 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(4)}$ элементов (4)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(4)}$	(3)–ий фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	5		1	4								
3	15		1	4	10							
4	35		1	4	10	20						
5	70	$\sum \ldots$	1	4	10	20	35					
6	126		1	4	10	20	35	56				
7	210		1	4	10	20	35	56	84			
8	330		1	4	10	20	35	56	84	120		
9	495		1	4	10	20	35	56	84	120	165	
10	715		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
...	...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(5)-ый фигурный ряд

Каждый член (5)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(5)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(4)}$$

где $k_i^{(4)}$ - последовательность элементов (4)-го фигурного ряда. Вторая зависимость выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(5)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} \qquad (1.2.4)$$

(5)-ый фигурный ряд имеет номер A000389 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(5)}$ элементов (5)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(5)}$	(4)–ый фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	6		1	5								
3	21		1	5	15							
4	56		1	5	15	35						
5	126	$\sum \dots$	1	5	15	35	70					
6	252		1	5	15	35	70	126				
7	462		1	5	15	35	70	126	210			
8	792		1	5	15	35	70	126	210	330		
9	1287		1	5	15	35	70	126	210	330	495	
10	2002		1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(6)-ой фигурный ряд

Каждый член (6)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(6)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(5)}$$

где $k_i^{(5)}$ - последовательность элементов (5)-го фигурного ряда. Вторая зависимость выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(6)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{720} \qquad (1.2.5)$$

(6)-ой фигурный ряд имеет номер A000579 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(6)}$ элементов (6)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(6)}$	(5)–го фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	7		1	6								
3	28		1	6	21							
4	84		1	6	21	56						
5	210	$\sum \dots$	1	6	21	56	126					
6	462		1	6	21	56	126	252				
7	924		1	6	21	56	126	252	462			
8	1716		1	6	21	56	126	252	462	792		
9	3003		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	

10	5005		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
...	...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(7)-ой фигурный ряд

Каждый член (7)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(7)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(6)}$$

где $k_i^{(6)}$ - последовательность элементов (6)-го фигурного ряда. Вторая зависимость выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(7)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{5040} \tag{1.2.6}$$

(7)-ой фигурный ряд имеет номер A000580 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(7)}$ элементов (7)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(7)}$	(6)–го фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	8		1	7								
3	36		1	7	28							
4	120		1	7	28	84						
5	330	$\sum\dots$	1	7	28	84	210					
6	792		1	7	28	84	210	462				
7	1716		1	7	28	84	210	462	924			
8	3432		1	7	28	84	210	462	924	1716		
9	6435		1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	
10	11440		1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
...	...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

(8)-ой фигурный ряд

Каждый член (8)-го фигурного ряда подчиняется двум основным зависимостям. В первой, каждый n–й элемент данного ряда равен сумме последовательности первых n членов предыдущего ряда, и выражается формулой

$$k_n^{(8)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(7)}$$

где $k_i^{(7)}$ - последовательность элементов (7)-го фигурного ряда. Вторая зависимость выражается через порядковый номер данного члена в ряду и имеет вид

$$k_n^{(8)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{40320} \quad (1.2.7)$$

(8)-ой фигурный ряд имеет номер A000581 в библиотеке OEIS.

Таблица $k_n^{(8)}$ элементов (8)–го фигурного ряда

n	$k_n^{(8)}$	(7)–ой фигурный ряд										
0	0		0									
1	1		1									
2	9		1	8								
3	45		1	8	36							
4	165		1	8	36	120						
5	495	$\sum \ldots$	1	8	36	120	330					
6	1287		1	8	36	120	330	792				
7	3003		1	8	36	120	330	792	1716			
8	6435		1	8	36	120	330	792	1716	3432		
9	12870		1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	
10	24310		1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
…	…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞		∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

ЧАСТЬ 3

1.3 Вывод формул фигурного и факториального полинома общего вида

Получение формул факториальных полиномов для частных случаев $n^2 - n^8$

Таким образом, в части 1 доказательства были получены фигурные полиномы для частных случаев $n^2 - n^8$:

$n^2 = n + 2k_{n-1}^{(2)}$ (1.1.1)

$n^3 = n + 6k_{n-1}^{(3)}$ (1.1.2)

$n^4 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 12k_{n-1}^{(3)} + 24k_{n-2}^{(4)}$ (1.1.3)

$n^5 = n + 30k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(5)}$ (1.1.4)

$n^6 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 60k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(4)} + 360k_{n-2}^{(5)} + 720k_{n-3}^{(6)}$ (1.1.5)

$n^7 = n + 126k_{n-1}^{(3)} + 1680k_{n-2}^{(5)} + 5040k_{n-3}^{(7)}$ (1.1.6)

$n^8 = n + 2k_{n-1}^{(2)} + 252k_{n-1}^{(3)} + 504k_{n-2}^{(4)} + 5040k_{n-2}^{(5)} + 10080k_{n-3}^{(6)} + 20160k_{n-3}^{(7)} + 40320k_{n-4}^{(8)}$ (1.1.7)

а в части 2 доказательства приведены формулы относительной зависимости фигурных чисел $k_n^{(2)} - k_n^{(8)}$:

$$k_n^{(2)} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1.2.1)$$

$$k_n^{(3)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \quad (1.2.2)$$

$$k_n^{(4)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \quad (1.2.3)$$

$$k_n^{(5)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120} \quad (1.2.4)$$

$$k_n^{(6)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{720} \qquad (1.2.5)$$

$$k_n^{(7)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{5040} \qquad (1.2.6)$$

$$k_n^{(8)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{40320} \qquad (1.2.7)$$

Очевидно, что подставляя формулы фигурных чисел (1.2.1 – 1.2.7) в уравнения фигурных полиномов (1.1.1 - 1.1.7) можно сократить значения коэффициентов фигурных чисел, поделив их на факториалы находящиеся в знаменателях формул фигурных чисел.

Но так как:

a) в результате получится довольно громоздкая запись итоговых формул, которую будет невозможно записать в общем виде,
b) а применяемая в математике функция возрастающего факториала n^k не дает возможности адекватной записи итоговых уравнений, поскольку она неспособна отражать возрастающее смещение фигурного числа $k_n^{(m)}$относительно n, а именно изменение его нижнего регистра,

то наступает необходимость введения новой символьной функции.

Такой функцией является симметричный неполный факториал, который для нечетного количества произведений фракционной выборки элементов натурального ряда имеет обозначение и сокращенную запись вида F_{n-i}^{n+i}, которая в раскрытом виде выглядит как:

$$F_{n-i}^{n+i} = (n-i)\dots(n-1)n(n+1)\dots(n+i)$$

и для четного количества произведений - F_{n-i+1}^{n+i}, где раскрытая запись имеет вид:

$$F_{n-i+1}^{n+i} = (n-i+1)\dots(n-1)n(n+1)\dots(n+i)$$

Данные формулы легко получаются, к примеру, выражая n с учетом смещения через $(n-4)$ в числителе формулы фигурного числа последнего члена равенства (1.2.7), где получаем

$$(n-4)(n-4+1)(n-4+2)(n-4+3)(n-4+4)(n-4+5)(n-4+6)(n-4+7)$$
$$= (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) = F_{n-4}^{n+3}$$

или, к примеру, выражая n с учетом смещения через $(n-3)$ в числителе формулы фигурного числа последнего члена равенства (1.2.7), где получаем

$$(n-3)(n-3+1)(n-3+2)(n-3+3)(n-3+4)(n-3+5)(n-3+6)$$
$$= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) = F_{n-3}^{n+3}$$

Теперь используя симметричный неполный факториал, новую символьную функцию - F_{n-4}^{n+3} и F_{n-3}^{n+3}, запишем уравнения фигурных полиномов (1.1.1 - 1.1.7) с учетом формул (1.2.1 – 1.2.7), где получим запись факториальных полиномов частных случаев $n^2 - n^8$:

$$n^2 = n + F_{n-1}^{n} \qquad (1.3.1)$$
$$n^3 = n + F_{n-1}^{n+1} \qquad (1.3.2)$$
$$n^4 = n + F_{n-1}^{n} + 2F_{n-1}^{n+1} + F_{n-2}^{n+1} \qquad (1.3.3)$$
$$n^5 = n + 5F_{n-1}^{n+1} + 2F_{n-2}^{n+2} \qquad (1.3.4)$$
$$n^6 = n + F_{n-1}^{n} + 10F_{n-1}^{n+1} + 5F_{n-2}^{n+1} + 3F_{n-2}^{n+2} + F_{n-3}^{n+2} \qquad (1.3.5)$$
$$n^7 = n + 21F_{n-1}^{n+1} + 14F_{n-2}^{n+2} + F_{n-3}^{n+3} \qquad (1.3.6)$$
$$n^8 = n + F_{n-1}^{n} + 42F_{n-1}^{n+1} + 21F_{n-2}^{n+1} + 42F_{n-2}^{n+2} + 14F_{n-3}^{n+2} + 4F_{n-3}^{n+3} + F_{n-4}^{n+3} \qquad (1.3.7)$$

Поиск функции задающей коэффициенты факториальных полиномов

Следующим этапом анализа формул (1.3.1 – 1.3.7) является поиск функции, задающей коэффициенты симметричных факториалов. Для этого сгруппируем данные коэффициенты по признаку нечетности и четности показателя степени m, и выпишем их отдельно в таблицу 1, куда внесем коэффициенты нечетных показателей m, и таблицу 2 в которой будут располагаться коэффициенты четных показателей m:

Таблица 1

Коэффициенты симметричных факториалов для нечетных показателей степени m	
факториальный полином	коэффициенты
n^1	1
$n^3 = n + F_{n-1}^{n+1}$	1 1
$n^5 = n + 5F_{n-1}^{n+1} + 2F_{n-2}^{n+2}$	1 5 1
$n^7 = n + 21F_{n-1}^{n+1} + 14F_{n-2}^{n+2} + F_{n-3}^{n+3}$	1 21 14 1

Из таблицы 1 видно, что порядок расположения коэффициентов формирует равносторонний треугольник, где предположительно существует взаимосвязь двух верхних элементов ряда и расположенного под ними нижнего, подобно аналогичной взаимосвязи элементов в треугольнике Паскаля. Действительно, анализируя тройки элементов

$$\binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{2}{2}; \ \binom{2}{1}, \binom{2}{2}, \binom{3}{2} \text{ и } \binom{2}{2}, \binom{2}{3}, \binom{3}{3}$$

такая зависимость была найдена, которая в отличие от упомянутого алгоритма задания элементов в треугольнике Паскаля имеет в своем алгоритме дополнительную квадратичную зависимость от порядкового номера второго верхнего элемента

$$\binom{1}{1} + 2^2 \cdot \binom{1}{2} = \binom{2}{2}; \ \binom{2}{1} + 2^2 \cdot \binom{2}{2} = \binom{3}{2} \text{ и } \binom{2}{2} + 3^2 \cdot \binom{2}{3} = \binom{3}{3}$$

И таким образом функция задающая каждый элемент таблицы 1 принимает вид

$$\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2 \binom{p-1}{i} \quad (1.3.8)$$

где $1 \leq i \leq p$

Теперь рассмотрим таблицу 2:

Таблица 2

Коэффициенты симметричных факториалов для четных показателей степени m	
факториальный полином	коэффициенты
$n^2 = n + F_{n-1}^{n}$	1 1
$n^4 = n + F_{n-1}^{n} + 2F_{n-1}^{n+1} + F_{n-2}^{n+1}$	1 1 2 1
$n^6 = n + F_{n-1}^{n} + 10F_{n-1}^{n+1} + 5F_{n-2}^{n+1} + 3F_{n-2}^{n+2} + F_{n-3}^{n+2}$	1 1 10 5 3 1
$n^8 = n + F_{n-1}^{n} + 42F_{n-1}^{n+1} + 21F_{n-2}^{n+1} + 42F_{n-2}^{n+2} + 14F_{n-3}^{n+2} + 4F_{n-3}^{n+3} + F_{n-4}^{n+3}$	1 1 42 21 42 14 4 1

Из таблицы 2 видно, что данный порядок расположения коэффициентов тоже формирует треугольник, но в отличие от треугольника в таблице 1 он не является равносторонним и к тому же легко заметить, что он имеет четное, удвоенное количество элементов относительно таблицы 1.

Анализ, проведенный в поиске задающей функции, дает следующий результат: поскольку в каждом ряду данной таблицы находится удвоенное количество элементов относительно соответствующего ряда таблицы 1, то предположительно существует взаимосвязь данного треугольника с треугольником в таблице 1. Действительно, таблица 1 является производной для таблицы 2, где соответственно каждый ее ряд производит ряд данной таблицы. Так, каждый элемент $\binom{p}{i}$ ряда p таблицы 1 умноженный последовательно на каждый элемент заданной пары $[i;\ 1]$ производит пару элементов $\left[i\binom{p}{i};\ \binom{p}{i}\right]$ p- ряда таблицы 2:

$$\left[i\binom{p}{i};\binom{p}{i}\right]=\binom{p}{i}\times[i;\ 1] \qquad (1.3.9)$$

где $\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+i^2\binom{p-1}{i},\ p=\frac{m-2}{2}, 1\le i\le p$

Таблицы мономиальных коэффициентов

Теперь имея задающую функцию (1.3.8) продолжим таблицу 1 до n^{15}, которую назовем таблицей мономиальных коэффициентов нечетной степени

Таблица 1

Мономиальные коэффициенты нечетной степени

$\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+i^2\binom{p-1}{i},\ p=\frac{m-1}{2}, 1\le i\le p$									степень m
p \ i	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1								1
1	1	1							3
2	1	5	1						5
3	1	21	14	1					7
4	1	85	147	30	1				9
5	1	341	1408	627	55	1			11
6	1	1365	13013	11440	2002	91	1		13
7	1	5461	118482	196053	61490	5278	140	1	15
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Последовательность мономиальных коэффициентов нечетной степени имеет номер A036969 в библиотеке OEIS.

Далее, аналогично, имея задающую функцию (1.3.9) продолжим таблицу 2 до n^{16}, которую назовем таблицей мономиальных коэффициентов четной степени

Таблица 2

Мономиальные коэффициенты четной степени

$\left[(i+1)\binom{p}{i};\binom{p}{i}\right]$ где $\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+i^2\binom{p-1}{i},\ p=\frac{m-1}{2}, 1\le i\le p$									степень m
i / p	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1;1								2
1	1;1	2;1							4
2	1;1	10;5	3;1						6
3	1;1	42;21	42;14	4;1					8
4	1;1	170;85	441;147	120;30	5;1				10
5	1;1	682;341	4224;1408	2508;627	275;55	6;1			12
6	1;1	2730;1365	39039;13013	45760;11440	10010;2002	546;91	7;1		14
7	1;1	10922;5461	355446;118482	784212;196053	307450;61490	31668;5278	980;140	8;1	16
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Последовательность мономиальных коэффициентов четной степени отсутствует в библиотеке OEIS.

3.4 Вывод формул общего вида

Таким образом, учитывая (1.3.1-1.3.7) и (1.3.8) запишем общую формулу разложения в факториальный полином числа n в нечетной степени m:

$$n^m = n + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} F_{n-i}^{n+i}$$

где $\binom{p}{i}$ – мономиальный коэффициент нечетной степени, вычисляемый по формуле $\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+i^2\binom{p-1}{i},\ 1\le i\le p,\ p=\frac{m-1}{2}$;
F_{n-i}^{n+i} – симметричный факториал - произведение последовательности: $(n-m)\dots(n-1)n(n+$ $1\dots n+m=Fn-in+i$

Теперь, чтобы получить фигурный полином разложения числа n в нечетной степени m введем в цикл оператора сложения соотношение $\frac{(2i+1)!}{(2i+1)!}$, получим

$$n^m = n + \sum_{i=1}^{p} (2i+1)!\binom{p}{i}\frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!}$$

Здесь дробь $\frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!}$ является фигурным числом:

$$k_{n-i}^{(2i+1)} = \frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!}$$

а произведение $(2i+1)!\binom{p}{i}$ - коэффициентом фигурного числа:

$$U_i^p = (2i+1)!\binom{p}{i},$$

Выделим данные коэффициенты в таблицу фигурных коэффициентов нечетной степени

Таблица 3

Фигурные коэффициенты нечетной степени

$U_i^p = (2i+1)!\binom{p}{i},\ p = \frac{m-1}{2}$, где $\binom{p}{i}$ – элементы Таблицы1: $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i},\ p = \frac{m-1}{2}, 1 \le i \le p$									степень m
i / p	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1								1
1	1	6							3
2	1	30	120						5
3	1	126	1680	5040					7
4	1	510	17640	151200	362880				9
5	1	2046	168960	3160080	19958400	39916800			11
6	1	8190	1561560	57657600	726485760	3632428800	6227020800		13
7	1	32766	14217840	988107120	22313491200	210680870400	871782912000	1307674368000	15
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Последовательность фигурных коэффициентов нечетной степени отсутствует в библиотеке OEIS.

И окончательно формула разложения в фигурный полином числа n в нечетной степени m примет вид:

$$n^m = n + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} \tag{1.3.10}$$

И наконец, учитывая (1.3.1 – 1.3.7) и (1.3.9) запишем общую формулу разложения в фигурный полином числа n в четной степени m:

$$n^m = n + F_{n-1}^{n} + \sum_{i=1}^{p}\left[\binom{p}{i}(i+1)F_{n-i}^{n+i} + \binom{p}{i}F_{n-i+1}^{n+i}\right]$$

где $\binom{p}{i}(i+1)$ и $\binom{p}{i}$ – мономиальные коэффициенты четной степени, вычисляемые через формулу для $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i},\ 1 \le i \le p,\ p = \frac{m-2}{2}$;
F_{n-1}^{n} и F_{n-i+1}^{n+i}– симметричные факториалы, произведение последовательности: $(n-1)n = F_{n-1}^{n}$ и $(n-i+1)\dots(n-1)n(n+1)\dots(n+i) = F_{n-i+1}^{n+i}$ соответственно

Теперь, чтобы получить фигурный полином разложения числа n в четной степени m введем в цикл оператора сложения соотношение $\frac{(2i+1)!}{(2i+1)!}$ - для первого слагаемого, $\frac{(2i+2)!}{(2i+2)!}$ – для второго и умножим симметричный факториал F_{n-1}^{n} на $\frac{2!}{2!}$, получим

$$n^m = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p}\left[(2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i}\frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!} + (2i+2)!\binom{p}{i}\frac{F_{n-i+1}^{n+i}}{(2i+2)!}\right]$$

Здесь дроби $\frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!}$ и $\frac{F_{n-i+1}^{n+i}}{(2i+2)!}$ являются фигурными числами:

$$k_{n-i}^{(2i+1)}=\frac{F_{n-i}^{n+i}}{(2i+1)!} \text{ и } k_{n-i+1}^{(2i+2)}=\frac{F_{n-i+1}^{n+i}}{(2i+2)!}$$

а произведения$(2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i}$ и $(2i+2)!\binom{p}{i}$ - коэффициентами фигурных чисел:

$$V_i^p=(2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i} \text{ и } V_i'^p=(2i+2)!\binom{p}{i}$$

Выделим данные коэффициенты в таблицу фигурных коэффициентов четной степени

Таблица 4

Фигурные коэффициенты четной степени

$V_i^p;V_i'^p=\left[(2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i};\ (2i+2)!\binom{p}{i}\right],\ p=\frac{m-2}{2}$ где $\binom{p}{i}$ – элементы Таблицы 1: $\binom{p}{i}=\binom{p-1}{i-1}+i^2\binom{p-1}{i},\ p=\frac{m-1}{2}, 1\le i\le p$									степень m
i / p	0	1	2	3	4	5	6	7	
0	1;2								2
1	1;2	12;24							4
2	1;2	60;120	360;720						6
3	1;2	252;504	5040; 10080	20160;40320					8
4	1;2	1020;2040	52920; 105840	604800; 1209600	1814400; 3628800				10
5	1;2	4092; 8184	506880; 1013760	12640320; 25280640	99792000; 199584000	239500800; 479001600			12
6	1;2	16380; 32760	4684680; 9369360	230630400; 461260800	3632428800; 7264857600	21794572800; 43589145600	43589145600; 87178291200		14
7	1;2	65532; 131064	42653520; 85307040	3952428480; 7904856960	111567456000; 223134912000	1264085222400; 2528170444800	6102480384000; 12204960768000	10461394944000; 20922789888000	16
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Последовательность фигурных коэффициентов нечетной степени отсутствует в библиотеке OEIS.

И теперь окончательно формула разложения в фигурный полином числа n в четной степени m примет вид:

$$n^m=n+2k_{n-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{n-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{n-i+1}^{(2i+2)}\right] \tag{1.3.11}$$

Проверим полученные результаты, так как

$$8^{13}=8+1365F_{8-1}^{8+1}+13013F_{8-2}^{8+2}+11440F_{8-3}^{8+3}+2002F_{8-4}^{8+4}+91F_{8-5}^{8+5}+F_{8-6}^{8+6}$$

то

$8^{13}=8+1365\cdot7\cdot8\cdot9+13013\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10+11440\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11+2002\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12+91\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13+2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14$=549755813888

Или так как

$$9^{12} = 9 + F_{9-1}^{9} + 682F_{9-1}^{9+1} + 341F_{9-2}^{9+1} + 4224F_{9-2}^{9+2} + 1408F_{9-3}^{9+2} + 2508F_{9-3}^{9+3} + 627F_{9-4}^{9+3} + 275F_{9-4}^{9+4} + 55F_{9-5}^{9+4} + 6F_{9-5}^{9+5} + F_{9-6}^{9+5}$$

то

$$9^{12} = 9 + 8 \cdot 9 + 682 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 341 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 4224 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 + 1408 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 + 2508 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 627 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 275 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 55 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 6 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 = 282429536481$$

Теорема доказана

Следствия Теоремы о разложении одночлена n^m

Теорема о разложении одночлена n^m влечет ряд фундаментальных следствий, совокупность которых создает новую область математики - теорию степенных полей.

Первым следствием теоремы есть структурная организация элементов одночлена n^m - его оснований n, значений A_n, а также элементов вычетов B_n в однородные области, объединенные по одному общему признаку – показателю степени m, которые в теореме существуют в виде таблиц 1-8. Очевидно, что таких таблиц или областей может существовать бесконечно много, так же как и значений в каждой из них, что говорит о возможности системного исследования, как любой такой области, так и всех их в совокупности.
Вторым следствием теоремы есть способность выражения каждого элемента данной однородной области через фигурный или факториальный полином, что дает возможность исследовать взаимосвязи между ними, а также провести всесторонний анализ степенных полей благодаря их обширным свойствам и признакам.

Таким образом, если очевидность этого шага является бесспорным, то назовем новый раздел математики теорией степенных полей и приступим к описанию формулировок, определений и зависимостей

Степенное поле m

Как следует из теоремы о разложении одночлена n^m, все таблицы 1-8 имеют один общий признак – показатель степени m, вследствие чего и на основании чего, объединим их по этому признаку. Введем обозначение каждой такой области степенным полем m и выделим основные ряды, общие для любого степенного поля m, которые назовем

Атрибуты степенного поля m

Как видно из теоремы о разложении одночлена n^m число рядов (столбцов) таблиц 1-8 увеличивается с ростом показателя степени m, поэтому возникает необходимость их ограничения, в связи с чем, выделим среди них основные ряды. Итак, каждое степенное поле m состоит из:

1. Задающего ряда n – бесконечной последовательности натуральных чисел n, которые одновременно являются основанием одночлена n^m

2. Ряда значений An – бесконечной последовательности элементов, каждое значение которого есть результат возведения в степень m основания n задающего ряда: $A_n = n^m$

3. Ряда вычетов Bn – бесконечной последовательности элементов, каждое значение которого есть результат разности соседних членов ряда значений An: $B_n = A_{n+1} - A_n$

4. Ряда фигурных чисел $k_n^{(m)}$ – бесконечной последовательности элементов, каждое значение которого выражается реккурентной зависимостью от элементов предыдущего ряда: $k_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{(m-1)}$

Константу P, являющуюся натуральным число и постоянной величиной степенного поля, на которой метод последовательных цикличных вычетов прекращается и величина которой равна $P = m!$, не будем вводить в атрибуты степенного поля, а всего лишь упомянем данный элемент.

Таким образом, определение степенного поля приобретает вид:

> Степенное поле m – бесконечная область взаимосвязанных и организованных в ряды числовых значений, среди которых задающим рядом есть последовательность натуральных чисел или оснований n, а взаимосвязанными рядами - ряд значений An, который состоит из последовательности значений результата возведения основания n в степень m, ряд вычетов Bn – последовательность значений результатов вычета двух соседних элементов ряда An, и ряд фигурных чисел $k_n^{(m)}$.

Теперь, имея определение степенного поля m, сформулируем

Аксиомы степенных полей

Аксиома 1. Любое степенное поле m содержит бесконечную последовательность элементов рядов n, An, Bn и $k_n^{(m)}$, поскольку количество натуральных чисел n бесконечно.

Аксиома 2. Количество степенных полей (m) бесконечно, поскольку для любого m существуют элементы поля A_n, B_n и $k_n^{(m)}$

Далее приведем взаимосвязи элементов степенных полей, среди которых выделим

Основные зависимости элементов степенных полей

К данным зависимостям относятся алгебраические выражения, позволяющие с помощью двух элементов поля найти третий.
Главным таким выражением есть основное уравнение степенного поля m, где взаимосвязь элементов ряда значений An и ряда вычетов Bn и описывается формулой,

для двух последовательных элементов A_n

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}$$

и для двух произвольных элементов A_n

$$A_n = A_{n-j} + \sum_{i=n-j}^{n-1} B_i$$

где $j > 1$. Поскольку в основном уравнении степенного поля участвует два последовательных элемента A_n и A_{n-1} или два произвольных элемента A_n и A_{n-j} ряда значений An и только один элемент B_{n-1} или B_i ряда вычетов Bn то отсюда вытекает два очевидных следующих случая

а) уравнения степенного поля определенного типа, которое имеет вид

$$A_n - A_{n-j} = \sum_{i=n-j}^{n-1} B_i$$

где любые значения B_i при $j = 1$ или $\sum_{i=n-j}^{n-1} B_i$ при $j > 1$ находятся в ряду вычетов Bn.

b) уравнения степенного поля неопределенного типа, которое имеет вид

$$A_n + A_{n-j} = c$$

где значение c не определено в области степенного поля.

И наконец, с учетом вывода формул фигурных и факториальных полиномов согласно теоремы о разложении n^m запишем

Полиномиальное выражение элементов степенных полей

В степенном поле m каждый элемент ряда значений An задается формулой фигурного полинома

для нечетного m

$$A_n = n + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i}^{(2i+1)}$$

и для четного m

$$A_n = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} + V_i'^p k_{n-i+1}^{(2i+2)} \right]$$

Каждый член ряда вычетов B_n задается формулой фигурного полинома

для нечетного m

$$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i}$$

и для четного m

$$B_a = 1 + 2a + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{a-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{a-i}^{(2i+1)} \right]$$

Та как вторым следствием теоремы есть способность выражения каждого элемента A_n и B_n степенного поля m в форме фигурного и факториального полинома, обладающих рядом признаков и свойств, то выделим эти существенные особенности

Признаки и свойства фигурных и факториальных полиномов

Фигурные и факториальные полиномы, являясь формулами выражения каждого элемента ряда значений An и ряда вычетов Bn степенного поля m, обладают рядом признаков и свойств, требующих проведения их идентификации, как в отношении их отличительных характеристик, так и в отношении их совокупных качеств и свойств.

Признаки полиномов

Родовые. Родовой признак фигурных и факториальных полиномов служит относительной характеристикой степенного поля, определяющей принадлежность полинома к тому или иному степенному полю. Он является одной из главных характеристик полиномов, и определяется для полиномов элементов ряда значений An как рода m и рода $m-1$ для полиномов ряда вычетов Bn. Этот признак задается индексом поля (m) самого старшего члена фигурного полинома $k_n^{(m)}$.

Видовые. Эта характеристика обозначает признак происхождения полинома, который подразделяется на два типа - оригинальный или результирующий. Так, оригинальным полиномом есть полином, непосредственно полученный в результате разложения одночлена n^m в фигурный или факториальный полином, а результирующим есть полиномом, полученный вследствие арифметических операций сложения или вычитания двух и более полиномов.

Таким образом, вводя совокупную родовую - видовую характеристику признаков полиномов, следует различать 4 типа:

a) оригинальный рода m – полином непосредственного разложения одночлена n^m - которым есть элемент A_n ряда значений An степенного поля m.
b) оригинальный рода $m-1$ – полином непосредственного выражения элемента B_n ряда вычетов Bn степенного поля m.
c) результирующий рода m - полином являющийся результатом суммы двух однородных полиномов
d) результирующий рода $m-1$ - полином являющийся результатом разности двух однородных полиномов

Очевидно, что тип b) и d) представляет один и тот же полином, но так как, во-первых, любой элемент B_n ряда вычетов Bn есть результат разности двух элементов ряда значений An, хотя вместе с этим, во-вторых, он непосредственно может быть получен из формулы фигурного полинома согласно теоремы о разложении n^m, поэтому, все же будем считать их разными типами.

Структурные. К структурным признакам полиномов относится количественная характеристика членов полинома, которая носит индивидуальный характер и имеет зависимость от показателя m поля, к которому они принадлежат. Так для нечетного m количество членов полинома равно $\frac{m+1}{2}$, а для четного m - количество членов полинома равно m. Первым элементом полинома служит показательный член, которым всегда для оригинальных полиномов есть основание n одночлена n^m.

Свойства полиномов

Характеристические. Фигурные полиномы обладают характеристическими свойствами, причиной чего являются их фигурные коэффициенты (таблицы 3, 4 теоремы о разложении n^m), которые всегда есть четными числами. Обоснование этого свойства, в свою очередь раскрывают множители $(2i+1)!$ и $(2i+2)!$, в которых значения $2i+1$ и $2i+2$ подвергаясь операции факториального перемножения, в произведении ряда натуральных чисел имеют вторым числом 2, которое и делает результат целой операции четным. Поэтому при возникновении определенных условий, а именно равенства показательного члена полинома единице - значениями полинома становятся только нечетные числа.

Альтернативность представления. Это свойство следует из видовых признаков, которое проявляется в том, что элемент B_n разлагается в оригинальный полином – тип b) как упоминалось в родовых признаках полиномов, и в тоже время в результате операции вычитания двух элементов A_n он может быть получен как результирующий полином – тип d), который равен по значению типу b). Среди отличительных черт этих полиномов следует подчеркнуть, что первое, их различия в этом свойстве проявляются только в родовых признаках, в то время как их структурные признаки сохраняются, и второе данное свойство проявляется только в одноименном степенном поле. Таким образом, альтернативность представления позволяет выразить один и тот же элемент B_n двумя различными способами.

Инвариантность. Данное свойство заключается в равенстве значений двух полиномов, отличных по структурным и родовым признакам. Инвариантность всегда проявляется в результате суммы или разности двух элементов ряда значений An степенного поля x, где результатом становится одночлен – результирующий полином, который будет инвариантным по значению оригинальному полиному элемента ряда значений An другого степенного поля.

Подобие. Свойство подобия полиномов заключается в их полном структурном, родовом либо обоюдном соответствии двух полиномов.

РАЗДЕЛ 2
АНАЛИЗ СТЕПЕННЫХ ПОЛЕЙ

В этом разделе проведем анализ степенных полей, а именно с помощью основных уравнений степенных полей, фигурных полиномов, а также на основании их признаков и свойств осуществим исследование уравнений вида $a^x + b^y = c^z$. Порядок анализа сохраним в той последовательности, в которой появлялись гипотезы в отношении данных уравнений, тем более эта последовательность в точности соответствует приоритетному порядку анализа. Таким образом, первой проблемой есть

2.1 Гипотеза Ферма

Гипотеза Ферма – одна из самых первых гипотез относительно свойств уравнений $a^x + b^x = c^x$, которая была сформулирована Пьером Ферма в 1637 году. Четкий и строгий характер формулировки гипотезы не оставляет сомнений в том, что Пьер Ферма был знаком с данным предметом исследований - в частности он знал и изучал степенные поля, а также ему хорошо были известны фигурные числа, которыми он активно оперировал, но в силу некоторых причин не смог предоставить строгое доказательство. Отсутствие решений уравнения $a^x + b^x = c^x$ для $x > 2$ становится очевидным, если внимательно изучить ряды вычетов степенных полей до 8-ой степени. Вероятно, Пьеру Ферма не удалось вывести общих уравнений разложения одночлена в фигурный полином, иначе его доказательство увидело бы свет. В действительности, как он и утверждал, доказательство отсутствия решений уравнения $a^x + b^x = c^x$ не является сложным, потому что здесь прослеживается строгая закономерность свойств в рядах вычетов, которая дает однозначный ответ в невозможности данных уравнений, однако математика требует строгих формул в доказательство этого, что ему сделать не удалось.

Нельзя не упомянуть, что в 1995 году гипотеза Ферма была доказана Эндрю Уайлсом, профессором Принстонского Университета, однако до сих пор это факт неоднозначно воспринимается мировым сообществом. Титанические усилия, использование современного математического аппарата, отсутствие прикладного применения и самое главное - невозможность верификации доказательства, в совокупности с недоступностью его изучения широкому кругу математиков и любителей - все эти факты есть причиной такой реакции человечества.

В действительности, если рассматривать уравнение $a^x + b^x = c^x$ в фокусе анализа одночлена c^x – как результата суммы одночленов левой части уравнения, то не возникает сомнений в том, что данная задача имеет все признаки абсолютной неразрешимости. Это связано с тем, что, одночлены a^x и b^x, имеют одним из условий бесконечность величин a, b, x, а вторым – их сумму, то есть говоря буквальным языком – в этом случае одночлен c^x является суммой двух бесконечностей. Поэтому, применение каких-либо конечных критериев анализа бесконечной величины здесь также абсурдно, как и использование бесконечных критериев, которые уже абсурдны по своему определению.

Выходом из этой ситуации служит теория степенных полей, в которой эта проблема инвертируется с абсолютно неразрешимой в абсолютно разрешимую, посредством анализа не результатов суммы, а результатов вычетов двух одночленов, что дает возможность получать любые конечные значения и исследовать их с помощью заданных критериев анализа. И уже на основании этого анализа, уравнение $a^x - b^x = c^x$ легко может быть конвертируемо в степенном поле в исследуемое уравнение $a^x + b^x = c^x$, где именно эта возможность будет служить единственным критерием решения проблемы.

Итак,

Гипотеза Ферма утверждает, что:

- уравнение $\boldsymbol{a^x} + \boldsymbol{b^x} = \boldsymbol{c^x}$ не имеет решений в натуральных числах при $\boldsymbol{x} > 2$.

Доказательство

Пусть одночлены a^x и c^x уравнения $a^x + b^x = c^x$ есть элементами ряда значений An степенного поля x, а одночлен b^x есть элементом ряда вычетов Bn того же поля. Далее, согласно теореме о разложении n^m значение c^x может быть представлено фигурным полиномом для нечетного показателя степени x вида:

$$c^x = c + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)} \tag{2.1.1}$$

где $U_i^p = (2i+1)!\binom{p}{i}$ – фигурный коэффициент, определяемый через мономиальный коэффициент $\binom{p}{i}$, находимый по формуле: $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p$, где $p = \frac{x-1}{2}$

Примечание: данные условия далее в работе будут опускаться

и для четного показателя степени x вида:

$$c^x = c + 2k_{c-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{c-i}^{(2i+1)} + V_i'^p k_{c-i+1}^{(2i+2)}\right] \tag{2.1.2}$$

где $V_i^p = (2i+1)!\,(i+1)\binom{p}{i}$ и $V_i'^p = (2i+2)!\binom{p}{i}$ – фигурные коэффициенты, определяемые через мономиальный коэффициент $\binom{p}{i}$, находимый по формуле: $\binom{p}{i} = \binom{p-1}{i-1} + i^2\binom{p-1}{i}$, $1 \le i \le p$, где $p = \frac{x-2}{2}$.

Примечание: данные условия далее в работе будут опускаться

И наконец, так как все множество значений c^x находится в ряду значений An степенного поля x, и для любого c^x выполняется основное уравнение степенного поля x, выраженное в одночленах

$$(c-1)^x + B_{c-1} = c^x$$

где B_c – значение вычета, определяемое по формуле для нечетного показателя x

$$B_c = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i+1}^{2i}$$

и для четного x

$$B_c = 1 + 2c + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{c-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{c-i}^{(2i+1)} \right]$$

то достаточным условием доказательства гипотезы будет доказательство отсутствия такого B_{c-1}, которое может принимать значения b^x, поскольку можем представить уравнение $a^x + b^x = c^x$ в виде

$$(c-1)^x + B_{c-1} = c^x$$

Очевидно, что условия $(c-1)$ будет недостаточно, поэтому преобразуем данное уравнение и запишем его в виде

$$(c-j)^x + \sum_{s=c-j}^{c-1} B_s = c^x \tag{2.1.3}$$

где j может принимать значения $1 \le j \le c$.

Таким образом, изменяя j в указанных пределах, появляется возможность исследовать все значения $\sum_{s=c-j}^{c-1} B_s$ и найти условия существования равенства $\sum_{s=c-j}^{c-1} B_s = b^x$. Найдем эти условия

Запишем уравнение степенного поля (2.1.3) в фигурных полиномах для нечетного показателя x

$$(c-j) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{(c-j)-i}^{(2i+1)} + \sum_{s=c-j}^{c-1} \left[1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{s-i+1}^{2i} \right] = c + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}$$

так как значение j задает число циклов оператора $\sum_{s=c-j}^{c-1}$, запишем

$$(c-j) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{(c-j)-i}^{(2i+1)} + j + \sum_{s=c-j}^{c-1} \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{s-i+1}^{2i} = c + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}$$

что равносильно

$$(c-j) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{(c-j)-i}^{(2i+1)} + j + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i} = c + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}$$

Анализ цикла суммирования фигурного числа $\sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i}$ показывает, что только в двух случаях, при $j = c$ и $j = c-1$ данным циклом будет получено фигурное число следующего ряда - $k_{c-i}^{(2i+1)}$ и следовательно получена формула вида (2.1.1). Так, в первом случае, при $j = c$, цикл суммирования примет вид $\sum_{s=0}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i}$, где в частности для показателя степени $x = 3$, получим $\sum_{s=0}^{c-1} k_s^2$, откуда следует, что циклом будет просуммирован ряд фигурных чисел $k_0^2 \dots k_{c-1}^2$, в результате чего, согласно свойств фигурных рядов: $\sum_{i=1}^{n} k_i^{(m-1)} = k_n^{(m)}$, будет получено фигурное число k_{c-1}^3. А во втором случае при $j = c - 1$, цикл суммирования примет вид $\sum_{s=1}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i}$, где также для $x = 3$, получим $\sum_{s=1}^{c-1} k_s^2$, откуда следует, что циклом будет просуммирован ряд фигурных чисел $k_1^2 \dots k_{c-1}^2$, в результате чего также будет получено фигурное число k_{c-1}^3. Очевидно, что два однородных фигурных полинома, имеющие показательными членами разные значения - c и $c - 1$, и одно и тоже фигурное число $k_{c-i}^{(2i+1)}$ в младшем члене не могут одновременно представлять один одночлен. Поэтому найдем какой из них будет им. Так, рассматривая фигурный полином $c + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}$, полученный при $j = c$, и полином $c - 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}$ полученный при $j = c - 1$ приходим к выводу, что только в первом случае, достигается идентичность формуле (2.1.1), а значит, только при $j = c$ будет получен одночлен c^x.

Следует отметить, что если для показателя степени $x = 3$ ряд суммируемых фигурных чисел $k_0^2 \dots k_{c-1}^2$ содержит одно «нулевое» фигурное число - k_0^2, то для показателей $x > 3$ количество «нулевых» фигурных чисел будет увеличиваться, потому что с увеличением показателя степени x происходит как рост количества членов полинома, так и рост отрицательного индекса смещения фигурного числа в них. К примеру, для $x = 5$ старший член полинома будет иметь два «нулевых» фигурных числа - k_{-1}^4 и k_0^4, а при $x = 7$ их будет уже три -k_{-2}^6, k_{-1}^6, k_0^6 и т.д.
Это связано с тем, что если в полиноме разложения одночлена n^m, показатель степени m определяет число членов полинома по формуле $\frac{m-1}{2} + 1$, то возникают случаи, когда основание $n \leq i$, где $i = \frac{m-1}{2}$, и тогда «необходимость» в старших членах полинома отпадает, так как для получения значения одночлена становится достаточно младших членов, но поскольку количество членов полинома не меняется, то тогда просто происходит суммирование нулевых членов. Этот механизм задается смещением нижнего индекса фигурного числа k_{n-i}^m, где k_0^m будет первым «нулевым» фигурным числом, а все последующие фигурные числа с отрицательным индексом будут иметь «нулевое» значение тоже.
В данном анализе проявляются следствия этого свойства, выраженные в суммировании увеличивающегося количества «нулевых» фигурных чисел с отрицательными индексами, что происходит по мере роста показателя степени x.

Учитывая сказанное, заключаем, что для любых показателей степени $x > 3$, определяющим критерием в данном анализе всегда будет являться младший член полинома - $6\sum_{s=c-j}^{c-1} k_s^2$, поскольку он имеет наименьшее количество вариаций удовлетворения условиям, выполнение которых для него, будет означать выполнение условий для всех последующих членов полинома, и соответственно невыполнение этого условия для него – повлечет невозможность получения фигурного числа согласно формуле $\sum_{i=1}^{n} k_i^{(m-1)} = k_n^{(m)}$, и как следствие – несоответствие формуле разложения одночлена в фигурный полином.

Таким образом, отсюда следует вывод, что только при $j = c$ исследуемая формула $j + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i}$ преобразуется в фигурный полином вида (2.1.1) а значит, условия существования $\sum B_s = b^x$ будут найдены. Однако, при этом значение $(c - j)^x$ становится равным 0, а уравнение (2.1.1) сводится к равенству $b^x = c^x$. В противном случае, в уравнении $(c - j)^x + \sum_{s=c-j}^{c-1} B_s = c^x$ число $\sum_{s=c-j}^{c-1} B_s$ никогда не принимает значения одночлена b^x.

Следовательно, уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^x}$ для нечетных показателей $\boldsymbol{x}$ не имеет решений в натуральных числах.

Действительно, изучая любое нечетное степенное поле x, находим, что только сумма последовательности всех членов ряда вычетов $B_0 \dots B_{n-1}$ всегда дает число n^m: $\sum_{j=B_0}^{B_{n-1}} j = n^m$ (таблицы 1-8 теоремы о разложении n^m).

Этот факт и обнаружил Пьер Ферма, на основании которого он выдвинул свое знаменитое утверждение.

Теперь запишем уравнение степенного поля (2.1.3) в фигурных полиномах для четного показателя x, и исследуем его

$$(c-j)+2k_{(c-j)-1}^{(2)}\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{(c-j)-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{(c-j)-i+1}^{(2i+2)}\right]+\sum_{s=c-j}^{c-1}\left[1+2c+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{s-i+1}^{2i}+V_i'^p k_{s-i}^{(2i+1)}\right]\right]=c+2k_{(c-j)-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{c-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

После преобразований получим

$$(c-j)+2k_{(c-j)-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{(c-j)-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{(c-j)-i+1}^{(2i+2)}\right]+j+2\sum_{s=c-j}^{c-1}s+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\sum_{s=c-j}^{c-1}k_{s-i+1}^{2i}+V_i'^p\sum_{s=c-j}^{c-1}k_{s-i}^{(2i+1)}\right]=c+2k_{c-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{c-i+1}^{(2i+2)}\right] \qquad (2.1.4)$$

Аналогично, в соответствии с обозначенными для нечетного показателя x критериями, анализ цикла суммирования фигурных чисел в этом случае также проведем по младшему члену полинома. Поскольку для всего множества x им является фигурное число $\sum_{s=c-j}^{c-1}k_{s-i+1}^{2i}$, то рассмотрим его. Здесь также, только в двух случаях, при $j=c$ и $j=c-1$ данным циклом будет получено фигурное число следующего ряда - $k_{c-i}^{(2i+1)}$ и следовательно получена формула вида (2.1.2). Так, в первом случае цикл суммирования примет вид $\sum_{s=0}^{c-1}k_{s-i+1}^{2i}$, где в частности для показателя степени $x=4$, получим $\sum_{s=0}^{c-1}k_s^2$, откуда следует, что циклом будет просуммирован ряд фигурных чисел $k_0^2 \dots k_{c-1}^2$, в результате чего, согласно свойств фигурных рядов: $\sum_{i=1}^{n}k_i^{(m-1)}=k_n^{(m)}$, будет получено фигурное число k_{c-1}^3. А во втором случае, при $j=c-1$, цикл суммирования примет вид $\sum_{s=1}^{c-1}k_{s-i+1}^{2i}$, где также для $x=4$, получим $\sum_{s=1}^{c-1}k_s^2$, откуда следует, что циклом будет просуммирован ряд фигурных чисел $k_1^2 \dots k_{c-1}^2$, в результате чего также будет получено фигурное число k_{c-1}^3. Очевидно, что два однородных фигурных полинома, имеющие показательными членами разные значения - c и $c-1$, и одно и тоже фигурное число $k_{c-i}^{(2i+1)}$ в младшем члене не могут одновременно представлять один одночлен. Поэтому найдем какой из них будет им. Так, рассматривая фигурный полином $c+2k_{c-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}+\right.$ Vi′pkc−i+12i+2 , полученный при j=c и полином $(c-1)+2k_{c-1}^{(2)}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p k_{c-i}^{(2i+1)}+V_i'^p k_{c-i+1}^{(2i+2)}\right]$, полученный при $j=c-1$ приходим к выводу, что только в первом случае, достигается идентичность формуле (2.1.2), а значит, только при $j=c$ будет получен одночлен c^x.

Необходимо отметить, что так же как и для нечетного показателя x в этом случае будут наблюдаться подобные явления в отношении поведения нулевых фигурных чисел в полиноме и порядка их суммирования, потому что фигурные полиномы четных показателей x содержат в своем составе аутентичный цикл $\sum_{s=c-j}^{c-1}k_{s-i+1}^{2i}$ в младшем члене полинома плюс специфичный $\sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i}^{(2i+1)}$ в последующем. Поэтому здесь также для показателей степени $x > 4$, определяющим критерием всегда будет являться младший член полинома - $6\sum_{s=c-j}^{c-1} k_s^2$, поскольку он имеет наименьшее количество вариаций удовлетворения условиям, выполнение которых для него, будет означать выполнение условий для всех последующих членов полинома, и соответственно невыполнение этого условия для него – повлечет невозможность получения фигурного числа согласно формуле $\sum_{i=1}^{n} k_i^{(m-1)} = k_n^{(m)}$, и как следствие – несоответствие формуле разложения одночлена в фигурный полином.

Таким образом, отсюда следует вывод, что только при $j = c$ исследуемая формула $j + 2\sum_{s=c-j}^{c-1} s + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i+1}^{2i} + V_i'^p \sum_{s=c-j}^{c-1} k_{s-i}^{(2i+1)}\right]$ преобразуется в фигурный полином вида (2.1.2) а значит, условия существования $\sum B_s = b^x$ будут найдены. Однако, при этом значение $(c-j)^x$ становится равным 0, а уравнение (2.1.2) сводится к равенству $b^x = c^x$. В противном случае, в уравнении $(c-j)^x + \sum_{s=c-j}^{c-1} B_s = c^x$ число $\sum_{s=c-j}^{c-1} B_s$ никогда не принимает значения одночлена b^x.

Следовательно, уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^x}$ для четных показателей $\boldsymbol{x}$ не имеет решений в натуральных числах, однако, для показателя $\boldsymbol{x = 2}$ существует исключение.

Так, если рассмотреть случай $x = 2$, то уравнение (2.1.4) сводится к виду

$$(c-j) + 2k_{(c-j)-1}^{(2)} + j + 2\sum_{s=c-j}^{c-1} s = c + 2k_{c-1}^{(2)} \tag{2.1.5}$$

которое является уравнением 2-го степенного поля. Находя решения данного уравнения, обнаруживаем, что при $j = 1$ получаем

$$(c-1) + 2k_{(c-1)-1}^{(2)} + 1 + 2(c-1) = c + 2k_{c-1}^{(2)}$$

Так как здесь элементы $(c-1)$ и c есть два соседних числа в ряду оснований n, а значения полиномов $(c-1) + 2k_{(c-1)-1}^{(2)}$ и $c + 2k_{c-1}^{(2)}$ есть соответственно два соседних элемента A_{n-1} и A_n в ряду значений An степенного поля 2, то выразив данное равенство через эти элементы, получим основное уравнение степенного поля, определенного типа

$$A_n - A_{n-1} = 1 + 2n$$

Из данного уравнения становится очевидным, что исследуемое выражение $1 + 2n$ не является фигурным полиномом, а представляет формулу нечетного ряда всего множества натуральных чисел: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15….∞. Это подтверждает ряд вычетов Bn степенного поля 2. А поскольку все множество нечетных чисел безусловно содержит все количество нечетных значений искомого одночлена b^x, то полученное уравнение в степенном поле 2 можно записать как

$$c^2 - a^2 = b^x$$

Действительно, в степенном поле 2 имеется множество решений данного уравнения:

$$5^2 - 4^2 = 9 \text{ что равносильно } 5^2 - 4^2 = 3^2$$

$$122^2 - 121^2 = 243 \text{ что равносильно } 122^2 - 121^2 = 3^5$$

$$39063^2 - 39062^2 = 78125 \text{ что равносильно } 39063^2 - 39062^2 = 5^7$$

Для поиска оснований одночленов c^2 и a^2 данных уравнений по заданному значению b^x первоначально определяется основание a по формуле

$$a = \frac{b^x - 1}{2}$$

далее к полученному значению a прибавляем 1 и получаем основание c: $c = a + 1$.

Далее, так как уравнение (2.1.5) рассматривалось для $j = 1$, при котором был получен ряд нечетных чисел, теперь найдем решения данного уравнения при $j = 2$ - для четных значений b^x. Также выражая одночлены c^2 и a^2 через элементы ряда значений A_n, получим основное уравнение степенного поля для произвольных значений A_n, которое ввиду произвольности выражаемых величин запишем в виде

$$A_{n+1} - A_{n-1} = \sum_{j=n-1}^{n} (1 + 2j)$$

и теперь, суммируя два соседних значения, которыми есть элементы ряда вычетов B_nи B_{n-1}, получим

$$A_{n+1} - A_{n-1} = \sum_{j=n-1}^{n} (1 + 2j) = B_{n-1} + B_n = 1 + 2(n - 1) + 1 + 2n = 4n$$

Действительно, сумма двух соседних элементов B_{n-1}и B_n формирует последовательность четных значений ряда вычетов Bn степенного поля 2, которая описывается формулой $4n$ и имеет вид: 4, 8, 12, 16, 20, 24,… ∞. Данная последовательность четных чисел также будет содержать все множество четных значений одночлена b^x, где $x > 1$, примерами которых есть уравнения

$$5^2 - 3^2 = 16 \text{ что равносильно } 5^2 - 3^2 = 2^4$$

$$257^2 - 255^2 = 1024 \text{ что равносильно } 257^2 - 255^2 = 2^{10}$$

$$69985^2 - 69983^2 = 279936 \text{ что равносильно } 69985^2 - 69983^2 = 6^7$$

Для поиска одночленов c^2 и a^2 этих уравнений по заданному значению b^x первоначально определяем некоторое основание, скажем d по формуле

$$d = \frac{b^x}{4}$$

далее к полученному значению d прибавляем 1 и получаем основание c: $c = d + 1$, а чтобы получить основание a соответственно вычитаем 1 из d: $a = d - 1$.

Таким образом, получив уравнения вида $c^2 - a^2 = b^x$, назовем эти уравнения оригинальными тройками 2-го степенного поля, в которых в одночлене b^x примем показатель $x > 2$, чтобы отождествить их от Пифагоровых троек.

Теперь подводя итог проведенному анализу, сформулируем следствие 1 теоремы Ферма:

Следствие 1. В любом степенном поле x в ряду вычетов Bn одночлен b^xможет быть единственно получен в результате последовательной суммы b -первых элементов B_n ряда вычетов Bn: $b^x = \sum_{i=0}^{b-1} B_i$, за исключением степенного поля 2, где он также может быть получен в результате разности элементов A_n ряда значений An.

И наконец, поскольку проведенное выше исследование касалось уравнений степенных полей определенного типа, рассмотрим уравнение неопределенного типа, где в равенстве $a^x + b^x = c^x$ оба одночлена a^xи b^x есть элементами ряда значений An. На основании проведенного анализа сформулируем Лемму 1.0 (терема Пифагора теории степенных полей):

Лемма 1.0. Если существует уравнение вида $a^x + b^x = c^x$, в котором одночлены a^xи b^x есть элементами ряда значений An этого поля, то им есть только уравнение $a^2 + b^2 = c^2$.

Доказательство.
Пусть существует уравнение $a^x + b^x = c^x$ в котором одночлены a^x и b^x есть элементами ряда значений An степенного поля x. Поскольку данный ряд содержит все множество значений - результата возведения в степень x каждого натурального числа, следовательно, одночлен c^x также является элементом этого ряда, и тогда уравнение справедливо представить в виде $c^x - a^x = b^x$. Теперь, так как разностью элементов ряда значений An есть элемент B_n или их сумма, которая должна составлять значение b^x и поскольку $a \neq 0$, то согласно следствию 1 единственным степенным полем, в котором выполниться это условие есть степенное поле 2, и тогда этим уравнением будет только $a^2 + b^2 = c^2$.

Следствие 2.
Среди всего множества степенных полей x единственным полем, где все одночлены уравнения $a^x + b^x = c^x$ могут находиться в ряду значений An, есть степенное поле 2.

Гипотеза доказана

2.2 Структурно-родовой анализ степенных полей

Теорема Ферма является первой теоремой в исследовании свойств и отношений в степенных полях m . Она устанавливает с помощью основного уравнения степенных полей и фигурных полиномов главное фундаментальное свойство в рядах вычетов Bn степенных полей m – отсутствие как единичных значений B_n, так и их суммы $\sum_{i=0}^{n-1} B_i$, равных элементам ряда An того же поля, за исключением $m = 2$.

Но так как данный анализ не дает ответа на вопрос, содержат ли ряды вычетов Bn степенных полей m значения B_n, которые могут быть одночленами, но не в степени m поля, в котором они находятся, то возникает необходимость в проведении дополнительного исследования этого вопроса.

Проведем этот анализ на основе структурных и родовых свойств подобия полиномов. Так как любой элемент ряда вычетов Bn степенного поля m может быть получен согласно теоремы о разложении n^m по формуле, для нечетного m

$$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i}$$

и для четного m

$$B_n = 1 + 2n + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{n-i}^{(2i+1)} \right]$$

а элементы ряда значений A_n по формуле, для нечетного m

$$A_n = n + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i}^{(2i+1)}$$

и для четного m

$$A_n = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} + V_i'^p k_{n-i+1}^{(2i+2)} \right]$$

то могут возникать условия, когда элементы B_n ряда вычетов Bn степенного поля m равны элементам A_n ряда значений An других степенных полей.

Суммируя сказанное, будем искать в ряде вычетов Bn степенного поля m полином равный полиному ряда значений An другого поля. В качестве критериев сравнения полиномов примем критерий структурного подобия, который заключается в равенстве количества членов обоих полиномов и критерий родового подобия – равенство верхних индексов или показателя номера фигурного ряда старшего члена полинома. Это будет достаточным условием, так как в противном случае иное допущение будет означать противоречие теореме о разложении n^m.

Итак, определим сначала степенные поля, где полином элемента B_n удовлетворяет критерию структурного подобия полиному элемента A_n другого степенного поля, то есть примем это условие как преимущественное. Так как структура полинома для нечетного показателя m включает $\frac{m+1}{2}$ членов, а четного – m, то наблюдается следующая картина, показанная в таблице

Таблица структурного подобия полиномов элементов $B_n \sim A_n$

Количество членов полинома, общее для обоих элементов B_n и A_n	2	4	6	8	10	12	$2n$
степенное поле, в котором существует указанное подобие для элемента B_n	3	7	11	15	19	23	$2(2n)-1$
степенное поле, в котором существует указанное подобие для элемента A_n	2	4	6	8	10	12	$2n$

где $2n$ – четная последовательность натуральных чисел

Из данной таблицы становится очевидным, что полином элемента A_n каждого четного степенного поля $2n$ подобен по структуре полиному элемента B_n степенного поля $2(2n)-1$.

Теперь, имея пары искомых элементов, удовлетворяющих преимущественному критерию - структурному подобию, найдем среди них пары удовлетворяющих критерию родового подобия. Поскольку за критерий родового подобия принято условие равенства индексов фигурных чисел или номеров фигурного ряда старшего члена полинома элементов B_n и A_n

$$1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i} = B_n \sim A_n = n + 2k_{n-1}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i}^{(2i+1)} + V_i'^p k_{n-i+1}^{(2i+2)} \right]$$

то проведем сравнение фигурного числа k_{n-i+1}^{2i} старшего члена полинома элемента B_n и фигурного числа $k_{n-i+1}^{(2i+2)}$ старшего члена полинома элемента A_n, результаты которого представлены в таблице

Таблица сравнения индексов фигурных чисел
старших членов полиномов элементов B_n и A_n

Степенное поле	3	7	11	15	19	23	$2(2n)-1$
Фигурное число старшего члена полинома B_n	$k_{n-i+1}^{(2)}$	$k_{n-i+1}^{(6)}$	$k_{n-i+1}^{(10)}$	$k_{n-i+1}^{(14)}$	$k_{n-i+1}^{(18)}$	$k_{n-i+1}^{(22)}$	$k_{n-i+1}^{(2(2n)-2)}$
Степенное поле	2	4	6	8	10	12	$2n$
Фигурное число старшего члена полинома A_n	$k_{n-1}^{(2)}$	$k_{n-i+1}^{(4)}$	$k_{n-i+1}^{(6)}$	$k_{n-i+1}^{(8)}$	$k_{n-i+1}^{(10)}$	$k_{n-i+1}^{(12)}$	$k_{n-i+1}^{(2n)}$

Таким образом, проведенное исследование дает возможность сделать заключение: среди множества обнаруженных пар полиномов элементов B_n и A_n, отобранных на условиях достаточной строгости критериев соблюдения следствия 1 теоремы о разложении n^m только одна пара удовлетворяет заданным условиям: полином B_n степенного поля 3 полностью подобен полиному A_n степенного поля 2 по структурным и родовым критериям. Остальные пары полиномов, будучи структурно подобными имеют значительные родовые отличия, разница в индексах фигурных чисел которых равна 2 для второй пары B_n, A_n и прогрессирует для последующих пар полиномов подчиняясь зависимости $2n$.

Таким образом, получив строгое подобие полинома элемента B_n ряда вычетов Bn степенного поля 3 полиному элемента A_n ряда значений An степенного поля 2, приравняем их

$$1+6k_n^{(2)} = n' + 2k_{n'-1}^{(2)}$$

Перейдя в факториальные полиномы, поменяем части равенства местами и запишем следующее уравнение

$$n'^2 = 1 + 3n^2 + 3n$$

Теперь последовательно подставляя в правую часть уравнения числа натурального ряда, найдем целочисленные значения корня правой части выражения. Ими будут значения 13, 181, 2521, 35113 и т. д., иначе говоря, ряд вычетов Bn степенного поля 3 содержит одночлены $13^2, 181^2, 2521^2, 35113^2$ и т.д. Теперь, чтобы получить уравнение степенного поля в одночленах необходимо найти элементы ряда значений An степенного поля 3, разность которых равна указанным значениям

$$A_{n+1} - A_n = B_n$$

где $B_n = 13^2, 181^2, 2521^2, 35113^2$ и т.д. Для этого первоначально запишем равенство для первого значения B_n

$$1+6k_n^{(2)} = 169$$

или

$$1+3n(n+1) = 169$$

что равносильно

$$n(n+1) = \frac{169-1}{3} = 56$$

Теперь, поскольку в левой части равенства имеется произведение двух последовательных чисел, отличающихся друг от друга на 1, извлечем корень из числа 56, и полученное рациональное число 7,4833 укажет на ближайшие два целых числа – 7 и 8, которые и будут основаниями в искомом уравнении

$$8^3 - 7^3 = 13^2$$

Таким же методом находятся основания следующих уравнений

$$105^3 - 104^3 = 181^2$$
$$1456^3 - 1455^3 = 2521^2$$
$$20273^3 - 20272^3 = 35113^2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\infty$$

и так далее. Таким образом, в степенном поле 3 существуют уравнения общего вида $a^3 - b^3 = c^2$, которые назовем тройками 3-го степенного поля.

2.3 Гипотеза Биля

Гипотеза Биля, выдвинутая Эндрю Билем, любителем математики, в 1994 году обнаруживает еще одно свойство в уравнениях $a^x + b^y = c^z$, которым есть обязательное наличие общего делителя оснований в таких уравнениях, а также его простота.

Эндрю Биль первоначально заметил это свойство уравнений, а затем после тщательной его проверки выдвинул гипотезу, впоследствии названную в его честь. Эта проблема, при кажущейся простоте формулировки, на самом деле скрывает огромную широту охвата многочисленных условий существования таких уравнений, включает несколько гипотез, и вдобавок обнаруживает отличительный признак таких уравнений - простоту общего делителя.

Хотелось бы отметить активный интерес господина Биля как в порядке его личного пристрастия к математике, так и особенно в его благородном стремлении самостоятельного стимулирования широкого общественного интереса к проблеме. Финансовое вознаграждение, предложенное им за решение этой проблемы, продолжает замечательную традицию, начатую в свое время Вольфскелем, главной целью которой есть привлечение интереса и внимания человеческого разума всего мира к разгадкам тайн природы чисел.

Итак,

Гипотеза Биля утверждает, что уравнение

$$\boldsymbol{a^x + b^y = c^z}$$

имеет решение в натуральных числах $\boldsymbol{a, b, c, x, y, z}$ в случае $\boldsymbol{x, y, z} > 2$, только если $\boldsymbol{a, b, c}$ имеют общий простой делитель.

Доказательство

В отличие от гипотезы Ферма, где поиск решений уравнения проводится в одноименном степенном поле вследствие равенства показателей $x = y = z$, в уравнении гипотезы Биля $a^x + b^y = c^z$ все показатели степени указывают на принадлежность одночленов к разным степенным полям. Данное обстоятельство на первый взгляд должно существенно усложнить поиск решений данного уравнения. Однако систематизация всех возможных вариантов значений x, y, z приводит к необходимости исследования лишь трех возможных вариантов.

Таким образом, анализ уравнения $a^x + b^y = c^z$, где $a, b, c > 0$, $x, y, z > 1$ сводится к исследованию трех вариантов, где в

a) Варианте 1 принимается равенство всех показателей степени $x = y = z$
b) Варианте 2 рассматривается равенство двух любых показателей степени x, y, z
c) Варианте 3 исследуется случай неравенства всех трех показателей степени: $x \neq y \neq z$.

Итак рассмотрим,

Вариант 1. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^y = c^z}$, где $\boldsymbol{x = y = z}$

В Варианте 1, исследуемое уравнение приобретает вид $a^x + b^x = c^x$. Являясь частным случаем гипотезы Биля, анализ этого уравнения проводится в теореме Ферма. Здесь согласно следствию 2 теоремы Ферма все одночлены a^x, b^x и c^x могут находится в ряду значений An степенного поля 2, где данные одночлены существуют в виде уравнений

$$a^2 + b^2 = c^2$$

которые носят названия пифагоровых троек. В этом случае все одночлены, находясь в ряду значений An степенного поля 2, легко могут перемещаться по этому ряду при умножении их на любой множитель переноса r^2

$$(ra)^2 + (rb)^2 = (rc)^2$$

Таким образом, уравнение вида $a^x + b^x = c^x$ только в случае $x = 2$ имеет множество решений, как с общим делителем r, так и без.

Вывод для Варианта 1: гипотеза Биля подтверждается.

Вариант 2. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где среди показателей степени $\boldsymbol{x, y, z}$ существует равенство двух любых показателей

В данном варианте, когда в уравнении $a^x + b^y = c^z$ среди показателей степени x, y, z существует равенство двух любых показателей, возможны только три условия их равенства: $x = y$; $y = z$ и $z = x$. Следовательно, здесь получается шесть возможных комбинаций: y, y, z; x, z, z; x, y, x; x, x, z; x, y, y; z, y, z. Поскольку показатели x, y, z являются произвольными числами, и в данных комбинациях одноименные показатели могут быть сгруппированы только как сумма или разность, то достаточным условием Варианта 2 будет исследование уравнений суммы и разности двух одинаковых произвольных показателей, которые рассмотрим как их сумму в Варианте 2.1: $a^x + b^x = c^z$, и как их разность в Варианте 2.2: $a^x - b^x = c^z$.

Приступая к рассмотрению уравнения Варианта 2.1, зайдем несколько вперед и отметим, что оно имеет два подварианта – Вариант 2.1.0, где c^z не является составным числом и соответственно Вариант 2.1.1, где c^z является составным числом, поэтому первоначально приступим к анализу Варианта 2.1.0

Вариант 2.1.0. Уравнение $a^x + b^x = c^z$, где c^z не-составное число

Лемма 2.1.0
Если существует уравнение вида $a^x + b^x = c^z$, где c^z не-составное число*, то значит, оно может быть представлено в виде $a^x + b^x = c^{nx+1}$, где $n \geq 1$, и за n шагов деления всех членов уравнения на c^x приведено к оригинальному виду** $a'^x + b'^x = c$.

Комментарии.
Составное число* - леммы 2.1.0 и 2.2.0 справедливы для целых, в смысле единых чисел, составные числа будут рассмотрены ниже. Признаком не-составного числа есть делимость оснований a и b на c.
Оригинальное уравнение** – уравнение вида $a^x \pm b^x = c$, где одночлены a^x и b^x есть элементы ряда значений An степенного поля x, значения которых есть минимальные целые величины в ряду значений An, которые не могут быть уменьшены в результате деления на общий делитель.

Доказательство
Пусть имеется уравнение $a^x + b^x = c^z$, где одночлены a^x и b^x находятся в ряду значений An степенного поля x. Согласно теореме о разложении n^m, одночлен c^z может быть разложен в оригинальный полиномом рода z, и в тоже время он есть результирующим полиномом рода x, что означает инвариантность этих полиномов по значению. Но поскольку c^z явно можно выразить только через одночлены a^x и b^x – как результирующий полином рода x, а привести уравнение к однородным показателям x можно только разложив c^z на произведение одночленов $c^x c^{z-x}$, то запишем полученное двойное равенство с учетом сказанного, для нечетного x

$$a^x + b^x = c^x c^{z-x} = (a+b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного x

$$a^x + b^x = c^x c^{z-x} = (a+b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} + k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)} + k_{a-i+1}^{(2i+2)} + k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

так как все части данных равенств имеют однородные одночлены, разделим все части равенства на c^x и запишем его для нечетного x в виде

$$\frac{a^x + b^x}{c^x} = c^{z-x} = \frac{(a+b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}\right)}{c^x}$$

что равносильно

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x + \left(\frac{b}{c}\right)^x = c^{z-x} = \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{\frac{a}{c}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{c}-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного x

$$\frac{a^x + b^x}{c^x} = c^{z-x} = \frac{(a+b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} + k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)} + k_{a-i+1}^{(2i+2)} + k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right]}{c^x}$$

что равносильно

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x=c^{z-x}=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+2\left(k^{(2)}_{\frac{a}{c}-1}+k^{(2)}_{\frac{b}{c}-1}\right)+\sum_{i=1}^{p}V_i^p\left[k^{(2i+1)}_{\frac{a}{c}-i}+k^{(2i+1)}_{\frac{b}{c}-i}+k^{(2i+2)}_{\frac{a}{c}-i+1}+k^{(2i+2)}_{\frac{b}{c}-i+1}\right]$$

Так как полученный одночлен c^{z-x} будет иметь целое значение, потому что в противном случае нецелые индексы $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ фигурных чисел делают его значение а следовательно и c^z неопределенным (поскольку фигурных чисел с нецелыми индексами не существует), что противоречит условиям леммы, то становится очевидным что одночлен c^x является общим множителем всех частей равенств имеющих меньшие целые значения оснований: $a'=\frac{a}{c}$ и $b'=\frac{b}{c}$, и значит, данные равенства можно записать в этих меньших величинах, для нечетного x

$$a'^x+b'^x=c^{z-x}=(a'+b')+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\left(k^{(2i+1)}_{a'-i}+k^{(2i+1)}_{b'-i}\right) \tag{2.3.1}$$

и для четного x

$$\begin{aligned}a'^x+b'^x=c^{z-x}\\ &=(a'+b')+2\left(k^{(2)}_{a'-1}+k^{(2)}_{b'-1}\right)\\ &+\sum_{i=1}^{p}V_i^p\left[k^{(2i+1)}_{a'-i}+k^{(2i+1)}_{b'-i}+k^{(2i+2)}_{a'-i+1}+k^{(2i+2)}_{b'-i+1}\right]\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Таким образом, если существует возможность далее разложить одночлен c^{z-x} на произведение c^xc^{z-2x} то одночлен c^x будет общим множителем всех частей равенств с еще меньшими основаниями: $a''=\frac{a'}{c}$ и $b''=\frac{b'}{c}$ и так далее, до тех пор пока выделение c^x из указанного одночлена станет невозможным. Следовательно, тогда, скажем для c^{z-x} выполнится условие $c^{z-x}<c^x$ а значит, одночлены a'^x и b'^x будут минимально возможными целыми элементами ряда значений An степенного поля x, сумма которых будет также минимально возможным целым числом. А так как инвариантность полиномов означает равенство их значений, то значит, величина c^{z-x} соответственно будет этим минимально возможным целым числом в последовательности операций выделения c^x из c^z и следовательно будет его основанием c. Теперь так как $c^{z-x}=c^1$, значит $z=x+1$ и окончательно искомое оригинальное уравнение примет вид $a'^x+b'^x=c$, которое при умножении всех частей уравнения n раз на c^x приобретет общий вид $a^x+b^x=c^{nx+1}$.

Лемма доказана.

Комментарий. Наиболее точное определение способа решения этого уравнения, а также подобных уравнений в степенных полях есть метод конечного подъема. Это связано с тем, что значения одночленов a^x и b^x буквально поднимаются вверх по ряду значений An, так как их величины уменьшаются в процессе деления на общий делитель, до тех пор пока они не достигнут некоторых конечных значений, именуемых минимально возможными целыми значениями. И наоборот, умножая эти величины на множитель «переноса» c^x они перемещаются по ряду значений An вниз, а результат их суммы или разности в точке конечного подъема – c перемещается в ряд значений An степенного поля $x+1$ и принимает вид c^{x+1}, затем в ряд значений An степенного поля $2x+1$ и принимает вид c^{2x+1} и так далее.

Следствия Леммы 2.1.0:

1. Общим делителем уравнений $a^x+b^x=c^z$ может быть только одночлен c^x

2. Значение показателя z одночлена c^z в уравнениях $a^x + b^x = c^z$ определяется по формуле $z = nx + 1$, где $n \geq 0$
3. Оригинальное уравнение $a'^x + b'^x = c$ может быть сколь угодно n -раз умножено на множитель c^x

Пример инвариантности оригинального и результирующего полиномов

Приведем пример инвариантности оригинального и результирующего полиномов, где в качестве примера рассмотрим уравнение $2450^3 + 3675^3 = 35^7$.

Здесь одночлен 35^7, согласно теоремы о разложении n^m, может быть представлен в виде оригинального полинома

$$35^7 = 35 + 126 \times 7140 + 1680 \times 435897 + 5040 \times 12620256 = 64339296875$$

а результатом суммы одночленов $2450^3 + 3675^3$ будет результирующий полином

$$2450^3 + 3675^3 = 35^3 \times 35^4 = (2450+3675)+6(2451020425+8272194700)=64339296875$$

Тем самым, свойство инвариантности полиномов отчетливо демонстрируется на этом примере.

Общие случаи решения уравнений Варианта 2.1.0 и анализ характера общего множителя $\boldsymbol{c^x}$

Рассмотрим общие случаи решения уравнений $a^x + b^x = c^z$, где c^z не-составное число, и исследуем характер общего множителя c^x

Случай 1. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a = b = 1}$

Рассмотрим исходное оригинальное уравнение

$$1'^x + 1'^x = 2$$

умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получим

$$2^x + 2^x = 2^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$4^x + 4^x = 2^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^n)^x - (c^n)^x = c^{nx+1}$$

Здесь очевидным общим делителем оснований есть простое число 2, примеры: $2^3 + 2^3 = 2^4$, $4^5 + 4^5 = 2^{11}$

Случай 2. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{b} > 1$

Рассмотрим исходное оригинальное уравнение

$$1'^x + b'^x = c$$

умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получим

$$c^x + (cb')^x = c^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$(c^2)^x + (c^2 b')^x = c^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^n)^x - (c^n b')^x = c^{nx+1}$$

Здесь результирующий полином рода x, обладая характеристическими свойствами, как для нечетного, так и четного показателя x не дает четкого представления о характере множителя c, поскольку показательный член полинома > 1, однако будучи натуральным числом, множитель c может быть сам по себе простым или произведением двух чисел, по крайней мере, одно из которых есть простое число.

Пример 1, случай 2: $1 + 4^4 = 257$ – оригинальное уравнение в степенном поле 4, умножая на множитель $c^4 = 257^4$, получим

$$257^4 + 1028^4 = 257^5$$

умножая еще раз

$$66049^4 + 264196^4 = 257^9$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований является простое число 257.

Случай 3. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a} > 1, \boldsymbol{b} > 1, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$
Рассмотрим исходное оригинальное уравнение

$$a'^x + b'^x = c$$

умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получим

$$(ca')^x + (cb')^x = c^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$(c^2 a')^x + (c^2 b')^x = c^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^n a')^x - (c^n b')^x = c^{nx+1}$$

Здесь результирующий полином рода x, обладая характеристическими свойствами, как для нечетного так и для четного показателя x не дает четкого представления о характере множителя c, поскольку показательный член полинома > 1, однако будучи натуральным числом, множитель c может быть сам по себе простым или произведением двух чисел, по крайней мере, одно из которых есть простое число.

Пример 2, случай 3: $2^5 + 3^5 = 275$ – исходное уравнение в степенном поле 5, умножая на множитель $c^5 = 275^5$, получим

$$550^5 + 825^5 = 275^6$$

умножая еще раз

$$151250^5 + 226875^5 = 275^{11}$$

Здесь общим делителем оснований является натуральное число 275.

Случай 4. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a} > 1, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$,
Рассмотрим исходное оригинальное уравнение

$$a'^x + a'^x = c$$

умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получим

$$(ca')^x + (ca')^x = c^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$(c^2a')^x + (c^2a')^x = c^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^na')^x - (c^na')^x = c^{nx+1}$$

Здесь результирующий полином рода x, обладая характеристическими свойствами, как для нечетного так и для четного показателя x не дает четкого представления о характере множителя c, поскольку показательный член полинома > 1, однако будучи натуральным числом, множитель c может быть сам по себе простым или произведением двух чисел одно из которых, по крайней мере, есть простое число.

Пример 3, случай 4: $6^3 + 6^3 = 432$ – исходное уравнение в степенном поле 3, умножая на множитель $c^3 = 432^3$, получим

$$2592^3 + 2592^3 = 432^4$$

умножая еще раз

$$1119744^3 + 1119744^3 = 432^7$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 432.

Анализ характера общего множителя c^x

Фигурные полиномы, обладая характеристическими свойствами, в уравнениях вида $a^x + b^x = c^z$, где c^z не-составное число, не проявляют явно своих свойств и поэтому здесь отчетливая характеристика общего множителя c^x отсутствует. Однако будучи натуральным числом, основание c может быть само по себе простым или произведением двух чисел, по крайней мере, одно из которых есть простое число.

Вывод для Варианта 2.1.0: гипотеза Биля подтверждается.

В Варианте 2.1.0 было приведено доказательство и рассмотрены решения и характер общего делителя уравнения вида $a^x + b^x = c^z$ для случая, когда одночлен c^z является не-составным числом. В этом случае его значение рассматривалось как целое, в смысле единое число. Однако результирующие полиномы могут формировать составные числа, где, так же как и для целых значений существует множество решений в данной группе. Поэтому дальнейшее исследование включает теорему о составных числах.

2.4 Теорема о составных числах

Так как операция суммы или разности двух одночленов $a^x \pm b^x$ осуществляется в порядке почленного суммирования/вычитания двух однородных полиномов, где в результате получается результирующий полином рода x и $x - 1$ соответственно, который в зависимости от показателя x может иметь как разное количество членов, так и различные комбинации их коэффициентов, фигурных чисел или симметричных факториалов, то всегда неизменным остается только сумма/разность двух первых членов - оснований a и b. На основании этого возникает предположение, что данное общее свойство результирующего полинома может быть причиной другого важного свойства. Действительно, данное предположение оказывается обоснованным и приводит к получению составных чисел.

Составное число – это результат произведения двух целых чисел – головного и основного, получаемых в результате выделения суммы/разности оснований $a \pm b$ из результирующего полинома, при этом головным числом будет сумма/разность оснований $a \pm b$, а основным – соответственно фигурный и факториальный полином, в котором каждый его член поделен на данную сумму/разность оснований.

Теорема о составных числах гласит:

Сумма одночленов $\boldsymbol{a^x + b^x}$ равна произведению двух целых чисел – головного и основного, которая,

для нечетного $\boldsymbol{x}$ имеет выражения в виде

1. произведения двух целых чисел, где головным числом является сумма оснований $a + b$, а основным есть результирующий фигурный полином рода x, в котором каждый его член поделен на данную сумму оснований

$$a^x + b^x = (a + b)\left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a + b}\right)$$

a) произведения двух целых чисел, где головным числом является сумма оснований $a + b$, а основным есть формула циклической зависимости от показателя x сумм и разностей взаимных произведений оснований a и b, всегда находящихся в совокупной степени $x - 1$

$$a^x + b^x = (a + b)\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p\right]$$

Разность двух одночленов $\boldsymbol{a^x - b^x}$ равна произведению двух целых чисел – головного и основного, которая

для нечетного $\boldsymbol{x}$ имеет выражения в виде

a) произведения двух целых чисел, где головным числом является разность оснований $a - b$, а основным есть результирующий фигурный полином рода $x - 1$, в котором каждый его член поделен на данную сумму оснований

$$a^x - b^x = (a - b)\left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a - b}\right)$$

b) произведения двух целых чисел, где головным числом является разность оснований $a - b$, а основным есть формула циклической зависимости от показателя x сумм взаимных произведений оснований a и b, всегда находящихся в совокупной степени $x - 1$

$$a^x - b^x = (a - b)\left[\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p\right]$$

где $p = \frac{x-1}{2}$

для четного $\boldsymbol{x}$ имеет выражения в виде

c) произведения двух целых чисел, где головным числом является разность оснований $a-b$, а основным есть результирующий фигурный полином рода $x-1$, где каждый его член поделен на данную сумму оснований

$$a^x - b^x = (a-b)\left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$$

d) произведения двух целых чисел, где головным числом является разность оснований $a-b$, а основным есть формула циклической зависимости от показателя x сумм взаимных произведений оснований a и b, всегда находящихся в совокупной степени $x-1$

$$a^x - b^x = (a-b)\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$$

где $p = \frac{x}{2}$

Доказательство

Для нахождения условий существования и вывода формул составных чисел первоначально запишем уравнения суммы и разности фигурных полиномов одночленов a^x и b^x в нечетной и четной степени x

a) уравнение суммы одночленов для нечетного показателя степени x

$$a^x + b^x = (a+b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного показателя x

$$a^x + b^x = (a+b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} + k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\left(k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}\right) + V_i'^p\left(k_{a-i+1}^{(2i+2)} + k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right)\right]$$

b) Уравнение разности одночленов для нечетного показателя степени x в выражении разности двух полиномов

$$a^x - b^x = (a-b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}\right)$$

или в выражении суммы элементов вычетов B_n ряда вычетов Bn степенного поля x

$$a^x - b^x = \sum_{j=b}^{a-1}\left[1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{j-i+1}^{2i}\right]$$

для четного показателя степени x

$$a^x - b^x = (a-b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\left(k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}\right) + V_i'^p\left(k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right)\right]$$

или в выражении суммы элементов вычетов B_n ряда вычетов Bn степенного поля x

$$a^x - b^x = \sum_{j=b}^{a-1}\left[1 + 2j + \sum_{i=1}^{p}\left(V_i^p k_{j-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{j-i}^{(2i+1)}\right)\right]$$

Так как в правых частях данных уравнений первым слагаемым всегда есть сумма или разность оснований одночленов, мы можем выделить это число из общего выражения и получить выражение суммы и разности одночленов в виде произведения двух чисел.

Запишем полученные уравнения с учетом преобразований

a) уравнение суммы одночленов для нечетного показателя степени x

$$a^x + b^x = (a+b)\left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$$

и для четного показателя x

$$a^x + b^x = (a+b)\left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} + k_{b-1}^{(2)}}{a+b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} + k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a+b}\right]\right) \quad (2.4.1)$$

b) уравнение разности одночленов для нечетного показателя степени x

$$a^x - b^x = (a-b)\left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$$

для четного показателя степени x

$$a^x - b^x = (a-b)\left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$$

Получив эти выражения, судить, насколько они оправданы для всего множества значений a, b, x и всегда ли будет получено произведение двух целых чисел, не представляется возможным, потому что уравнения имеют выражение в фигурных полиномах, которые не позволяют исследовать взаимоотношения в неизвестных a и b.
Для исследования этих вопросов, первое, решения уравнений будем искать в факториальных полиномах, поскольку они позволяют выразить равенства через неизвестные a и b, и второе, поиск решений проведем до показателя $x = 5$ для нечетной и четной степени, что будет достаточным условием для вывода уравнений общего вида по методу индукции.

Найдем условия существования данных уравнений.

Начнем поиск решений с разности одночленов $a^x - b^x$

a) **Рассмотрим разность $\boldsymbol{a^2 - b^2}$**

Для этого обратимся к свойствам степенного поля 2, где нетрудно заметить, что между рядом натуральных чисел n и рядом вычетов Bn существует зависимость

$$n + (n+1) = B_n$$

и где также существует равенство между рядом значений An и рядом вычетов Bn

$$A_{n+1} - A_n = B_n$$

которое можно представить в общем виде

$$A_{n+l} - A_n = \sum_{i=n}^{n+l-1} B_i$$

или с учетом представленных выше зависимостей, получим

$$A_{n+l} - A_n = \sum_{i=n}^{n+l-1} B_i = \sum_{j=0}^{(n+l)-n-1} [(n+j) + n + j + 1]$$

Поскольку величины $n + l$ и n можно выразить через a и b соответственно, то запишем полученное уравнение в виде

$$a^2 - b^2 = \sum_{i=b}^{a-1} B_i = \sum_{j=0}^{a-b-1} [(b+j) + b + j + 1]$$

Однако, так как в цикле правой части уравнения присутствует только одно неизвестное – b, запишем это уравнение в выражении через неизвестное a

$$a^2 - b^2 = \sum_{i=b}^{a-1} B_i = \sum_{j=0}^{a-b-1} [(a-j) + a - j - 1]$$

Теперь поскольку ряд значений, получаемый $(b + j)$ идентичен ряду $a - j - 1$, а $b + j + 1$ ряду $(a - j)$, запишем комбинированное уравнение с участием обоих неизвестных a и b

$$a^2 - b^2 = \sum_{i=b}^{a-1} B_i = \sum_{j=0}^{a-b-1} [(b+j) + (a-j)]$$

Решение этого уравнения дает следующий результат

$$a^2 - b^2 = (b+a) + (b+a) + (b+a) + \cdots + (b+a) + (b+a) + (b+a)$$

Здесь количество циклов суммирования $(b + a)$ равно значению $a - b$, так как цикл суммирования начинается с 0 и заканчивается $a - b - 1$. И наконец, поскольку количество слагаемых $(b + a)$ всегда равно значению $(a - b)$, то запишем

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Действительно, к примеру

$$6^2 - 2^2 = 5 + 7 + 9 + 11 = 2 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 5 + 3 = (2+6) + (2+6) + (2+6) + (2+6) = (6-2)(6+2)$$

Теперь получим формулу составного числа разности $a^2 - b^2$ через разность факториальных полиномов

$$a^2 - b^2 = a + F_{a-1}^{a} - \left(b + F_{b-1}^{b}\right) = a + a(a-1) - \left(b + b(b-1)\right) = a - b + a(a-1) - b(b-1)$$

Далее вынесем $a-b$ за скобки, получим

$$a^2-b^2=(a-b)\left(1+\frac{F_{a-1}^{a}-F_{b-1}^{b}}{a-b}\right)=(a-b)\left(1+\frac{a(a-1)-b(b-1)}{a-b}\right)$$
$$=(a-b)(1+\frac{a^2-b^2-(a-b)}{a-b})$$

Так как в числителе формулы можно представить разность a^2-b^2 как произведение $(a-b)(a+b)$, то окончательно запишем

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$$

b) Рассмотрим разность $\boldsymbol{a^3-b^3}$

$$a^3-b^3=a+F_{a-1}^{a+1}-\left(b+F_{b-1}^{b+1}\right)=a+a(a^2-1)-\left(b+b(b^2-1)\right)$$
$$=a-b+a(a^2-1)-b(b^2-1)$$

Далее вынесем $a-b$ за скобки, получим

$$a^3-b^3=(a-b)\left(1+\frac{F_{a-1}^{a+1}-F_{b-1}^{b+1}}{a-b}\right)=(a-b)\left(1+\frac{a(a^2-1)-b(b^2-1)}{a-b}\right)$$
$$=(a-b)(1+\frac{a^2-b^2-(a-b)}{a-b})$$

Поскольку каждый член разности $a(a^2-1)-b(b^2-1)$ в числителе дроби представлен только через одно неизвестное, применим метод итерационных преобразований, суть которого заключается в эквивалентном преобразовании каждого члена выражения, не изменяя при этом значения всего выражения. Для этого член $a(a^2-1)$ подвергнем преобразованию, где вместо 1 введем переменную j, тем самым будем изменять его значение при изменении j. В тоже время возникает необходимость эквивалентно изменять значение второго члена $b(b^2-1)$, поэтому в выражении разности двучленов мы вычитаем из него величину изменения $a(j-1)$, а в случае выражения суммы двучленов прибавляем к нему данную величину. Итак, введем итерационную переменную j, которая может принимать значения $1\le j\le a^2$ и запишем

$$a^3-b^3=(a-b)\left(1+\frac{a(a^2-j)-[b(b^2-1)-a(j-1)]}{a-b}\right)$$

рассмотрим случай, когда $j=b^2$, запишем

$$a^3-b^3=(a-b)\left(1+\frac{a(a^2-b^2)-[b(b^2-1)-a(b^2-1)]}{a-b}\right)$$

поскольку $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, запишем

$$a^3-b^3=(a-b)\left(1+\frac{a(a-b)(a+b)+(b^2-1)(a-b)}{a-b}\right)=(a-b)\left(1+a(a+b)+(b^2-1)\right)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

и окончательно получим

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

c) Рассмотрим разность $\boldsymbol{a^4-b^4}$

$$\begin{aligned} a^4-b^4 &= a+F_{a-1}^{a}+2F_{a-1}^{a+1}+F_{a-2}^{a+1}-\left(b+F_{b-1}^{b}+2F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a-1}\right)\\ &= a+a(a-1)+2a(a^2-1)+a(a^2-1)(a-2)\\ &-\left(b+b(b-1)+2b(b^2-1)+b(b^2-1)(b-2)\right)\\ &= a-b+a(a-1)-b(b-1)+2a(a^2-1)-2b(b^2-1)+a(a^2-1)(a-2)\\ &-b(b^2-1)(b-2) \end{aligned}$$

Далее вынесем $a-b$ за скобки, получим

$$a^4-b^4=(a-b)\left(1+\frac{F_{a-1}^{a}-F_{b-1}^{b}+2F_{a-1}^{a+1}-2F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a+1}-F_{a-2}^{a-1}}{a-b}\right)=(a-b)\left(1+\frac{a(a-1)-b(b-1)+2a(a^2-1)-2b(b^2-1)+a(a^2-1)(a-2)-b(b^2-1)(b-2)}{a-b}\right)$$

Так как разности симметричных факториалов $F_{a-1}^{a}-F_{b-1}^{b}$ и $2F_{a-1}^{a+1}-2F_{b-1}^{b+1}$ имеют безусловную делимость на число $a-b$ доказанную выше, приступим к анализу делимости последней разности $F_{a-2}^{a+1}-F_{a-2}^{a-1}$. Здесь также применим метод итерационных преобразованийи найдем решение для $j=b^2$.

$$\begin{aligned} &\frac{a(a^2-j)(a-2)-[b(b^2-1)(b-2)-a(j-1)(a-2)]}{a-b}\\ &=\frac{a(a^2-b^2)(a-2)-[b(b^2-1)(b-2)-a(b^2-1)(a-2)]}{a-b}\\ &=\frac{a(a-b)(a+b)(a-2)-(b^2-1)\left(a(a-2)-b(b-2)\right)}{a-b}\\ &=\frac{a(a-b)(a+b)(a-2)-(b^2-1)\left(a^2-b^2-2(a-b)\right)}{a-b}\\ &=a(a+b)(a-2)-(b^2-1)(a+b-2) \end{aligned}$$

Таким образом, разность симметричных факториалов $F_{a-2}^{a+1}-F_{a-2}^{a-1}$ также имеет абсолютную делимость на число $a-b$. Теперь подставляя полученные результаты, запишем формулу составного числа

$$\boldsymbol{a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}$$

d) Рассмотрим разность $\boldsymbol{a^5-b^5}$

$$\begin{aligned} a^5-b^5 &= a+5F_{a-1}^{a+1}+F_{a-2}^{a+2}-\left(b+5F_{b-1}^{b+1}+F_{b-2}^{b+2}\right)\\ &= a+5a(a^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)-\left(b+5b(b^2-1)+b(b^2-1)(b^2-4)\right)\\ &= a-b+5a(a^2-1)-5b(b^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)-b(b^2-1)(b^2-4) \end{aligned}$$

Далее вынесем $a-b$ за скобки, получим

$$\begin{aligned} a^5-b^5 &= (a-b)\left(1+\frac{5F_{a-1}^{a+1}-5F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a+2}-F_{b-2}^{b+2}}{a-b}\right)\\ &= (a-b)\left(1+\frac{5a(a^2-1)-5b(b^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)-b(b^2-1)(b^2-4)}{a-b}\right) \end{aligned}$$

Так как разность симметричных факториалов $5F_{a-1}^{a+1}-5F_{b-1}^{b+1}$ имеет абсолютную делимость на число $a-b$ доказанную выше, приступим к анализу делимости последней разности $F_{a-2}^{a+2}-$

F_{b-2}^{b+2}. Здесь также применим метод итерационных преобразований и найдем решение для $j = b^2$.

$$\frac{a(a^2-j)(a^2-4)-[b(b^2-1)(b^2-4)-a(j-1)(a^2-4)]}{a-b}$$
$$=\frac{a(a^2-b^2)(a^2-4)-b(b^2-1)(b^2-4)+a(b^2-1)(a^2-4)}{a-b}$$
$$=\frac{a(a-b)(a+b)(a^2-4)-(b^2-1)(a^3-b^3-4(a-b))}{a-b}=$$

Поскольку $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ как было выведено ранее, в итоге получим

$$\frac{a(a-b)(a+b)(a^2-4)-(b^2-1)\big((a-b)(a^2+ab+b^2)-4(a-b)\big)}{a-b}$$
$$=a(a+b)(a^2-4)-(b^2-1)(a^2+ab+b^2-4)$$

Таким образом, разность симметричных факториалов $F_{a-2}^{a+2} - F_{b-2}^{b+2}$ также имеет абсолютную делимость на число $a-b$. Теперь подставляя полученные результаты, запишем формулу составного числа

$$\boldsymbol{a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}$$

Теперь приступим к поиску решений для суммы одночленов $a^x + b^x$

а) Рассмотрим сумму $\boldsymbol{a^2+b^2}$

$$a^2+b^2=a+F_{a-1}^{a}+b+F_{b-1}^{b}=a+a(a-1)+b+b(b-1)=a+b+a(a-1)+b(b-1)$$

Далее вынесем $a+b$ за скобки, получим

$$a^2+b^2=(a+b)\left(1+\frac{a(a-1)+b(b-1)}{a+b}\right)=(a+b)\left(1+\frac{a^2+b^2-(a+b)}{a+b}\right)=a^2+b^2$$

Так как сумма a^2+b^2 не может быть подвергнута итерационному преобразованию, окончательно равенство приобретает вид $a^2+b^2=(a+b)\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$, в котором выражение $\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$ демонстрирует отсутствие безусловной делимости на $a+b$. Среди причин, приводящих к данному результату, первой безусловно есть форма основного уравнения неопределенного типа, каким есть сумма a^2+b^2, в свете теории степенных полей, а второй причиной служит «асимметричность» членов факториальных полиномов вида $F_{a-1}^{a} = a(a-1)$ приводящая к невозможности относительного преобразования суммы членов полинома итерационным методом.

Таким образом, результат решения этого уравнения показывает отсутствие безусловной делимости суммы симметричных факториалов $F_{a-1}^{a} + F_{b-1}^{b}$ на число $a+b$ что приводит к неразложимости суммы a^2+b^2 в формулу составных чисел.

б) Рассмотрим сумму $\boldsymbol{a^3+b^3}$

$$a^3+b^3=a+F_{a-1}^{a+1}+b+F_{b-1}^{b+1}=a+a(a^2-1)+b+b(b^2-1)=a+b+a(a^2-1)+b(b^2-1)$$

Далее вынесем $a+b$ за скобки, получим

$$a^3+b^3=(a+b)\left(1+\frac{F_{a-1}^{a+1}+F_{b-1}^{b+1}}{a+b}\right)=(a+b)\left(1+\frac{a(a^2-1)+b(b^2-1)}{a+b}\right)$$

Применим метод итерационных преобразований, для этого введем итерационную переменную j, которая может принимать значения $1\le j\le a^2$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(1+\frac{a(a^2-j)+b(b^2-1)+a(j-1)}{a+b}\right)$$

Рассмотрим случай, когда $j=b^2$, запишем

$$a^3+b^3=(a+b)\left(1+\frac{a(a^2-b^2)+b(b^2-1)+a(b^2-1)}{a+b}\right)$$

Поскольку $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, запишем

$$a^3+b^3=(a+b)\left(1+\frac{a(a-b)(a+b)+(b^2-1)(a+b)}{a+b}\right)=(a+b)\big(1+a(a-b)+(b^2-1)\big)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

В итоге получим

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Необходимо подчеркнуть, что также имея форму основного уравнения неопределенного типа, каким есть сумма a^3+b^3 в свете теории степенных полей, в этом случае «симметричность» членов факториальных полиномов вида $F_{a-1}^{a+1}=(a-1)a(a+1)$ приводит к возможности относительного преобразования суммы членов полинома итерационным методом, следствием чего есть разложимость указанной суммы одночленов в составное число.

б) Рассмотрим сумму $\boldsymbol{a^4+b^4}$

$$\begin{aligned}a^4+b^4=a+F_{a-1}^{a}+2F_{a-1}^{a+1}+F_{a-2}^{a+1}+b+F_{b-1}^{b}+2F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a-1}\\ =a+a(a-1)+2a(a^2-1)+a(a^2-1)(a-2)+b+b(b-1)+2b(b^2-1)\\ +b(b^2-1)(b-2)\\ =a+b+a(a-1)+b(b-1)+2a(a^2-1)+2b(b^2-1)+a(a^2-1)(a-2)\\ +b(b^2-1)(b-2)\end{aligned}$$

Далее вынесем $a+b$ за скобки, получим

$$a^4+b^4=(a+b)$$
$$\left(1+\frac{F_{a-1}^{a}+F_{b-1}^{b}+2F_{a-1}^{a+1}+2F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a+1}+F_{a-2}^{a-1}}{a+b}\right)=(a+b)$$
$$\left(1+\frac{a(a-1)+b(b-1)+2a(a^2-1)+2b(b^2-1)+a(a^2-1)(a-2)+b(b^2-1)(b-2)}{a+b}\right)$$

Так как сумма симметричных факториалов $F_{a-1}^{a}+F_{b-1}^{b}$ имеет условную делимость, а сумма симметричных факториалов $2F_{a-1}^{a+1}+2F_{b-1}^{b+1}$ имеет безусловную делимость на число $a+b$, то уже можно утверждать об отсутствии безусловного получения составного целого числа для этого случая. Тем не менее, приступим к анализу делимости последней суммы $F_{a-2}^{a+1}+F_{a-2}^{a-1}$, где также применим метод итерационных преобразований и найдем решение для $j=b^2$

$$\frac{a(a^2-j)(a-2)+b(b^2-1)(b-2)+a(j-1)(a-2)}{a+b}$$
$$=\frac{a(a^2-b^2)(a-2)+b(b^2-1)(b-2)+a(b^2-1)(a-2)}{a+b}$$
$$=\frac{a(a-b)(a+b)(a-2)+(b^2-1)\big(b(b-2)+a(a-2)\big)}{a+b}$$
$$=\frac{a(a-b)(a+b)(a-2)-(b^2-1)\big(a^2+b^2-2(a+b)\big)}{a+b}$$

Поскольку сумма a^2+b^2 не имеет абсолютной делимости на число $a+b$, как было доказано выше, в итоге заключаем, что сумма симметричных факториалов $F_{a-2}^{a+1}+F_{a-2}^{a-1}$ также не имеет безусловной делимости на число $a+b$. Таким образом, сумма a^4+b^4 не имеет явной формулы составного числа.

б) Рассмотрим сумму $\boldsymbol{a^5+b^5}$

$$a^5+b^5=a+5F_{a-1}^{a+1}+F_{a-2}^{a+2}+b+5F_{b-1}^{b+1}+F_{b-2}^{b+2}$$
$$=a+5a(a^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)+b+5b(b^2-1)+b(b^2-1)(b^2-4)$$
$$=a+b+5a(a^2-1)+5b(b^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)+b(b^2-1)(b^2-4)$$

Далее вынесем $a+b$за скобки, получим

$$a^5+b^5=(a+b)\left(1+\frac{5F_{a-1}^{a+1}+5F_{b-1}^{b+1}+F_{a-2}^{a+2}+F_{b-2}^{b+2}}{a+b}\right)$$
$$=(a+b)\left(1+\frac{5a(a^2-1)+5b(b^2-1)+a(a^2-1)(a^2-4)+b(b^2-1)(b^2-4)}{a+b}\right)$$

Так как сумма симметричных факториалов $5F_{a-1}^{a+1}+5F_{b-1}^{b+1}$ имеет безусловную делимость на число $a+b$ доказанную выше, приступим к анализу делимости последней суммы $F_{a-2}^{a+2}+F_{b-2}^{b+2}$. Здесь также применим метод итерационных преобразований и найдем решение для $j=b^2$

$$\frac{a(a^2-j)(a^2-4)+b(b^2-1)(b^2-4)+a(j-1)(a^2-4)}{a+b}$$
$$=\frac{a(a^2-b^2)(a^2-4)+b(b^2-1)(b^2-4)+a(b^2-1)(a^2-4)}{a+b}$$
$$=\frac{a(a-b)(a+b)(a^2-4)+(b^2-1)(a^3+b^3-4(a+b))}{a+b}=$$

Поскольку $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, как было выведено ранее, в итоге получим

$$\frac{a(a-b)(a+b)(a^2-4)+(b^2-1)\big((a+b)(a^2-ab+b^2)-4(a+b)\big)}{a+b}$$
$$=a(a-b)(a^2-4)-(b^2-1)(a^2-ab+b^2-4)$$

Таким образом, сумма симметричных факториалов $F_{a-2}^{a+2}+F_{b-2}^{b+2}$ также имеет безусловную делимость на число$a+b$. Теперь подставляя полученные результаты, запишем формулу составного числа

$$\boldsymbol{a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}$$

И окончательно, поиск условий существования заданных уравнений с целью вывода формул составных чисел дал следующие результаты:

а) для разности одночленов a^x-b^x получены формулы составных чисел:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$
$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

b) для суммы одночленов $a^x + b^x$ получены формулы составных чисел:

$a^2 + b^2$ – не имеет явной формулы
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4$ – не имеет явной формулы
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

Теперь, применяя индуктивную логику найдем формулы составных чисел суммы и разности одночленов в общем виде для любого x. Для этого сгруппируем попарно члены уравнений по показателем степени, и применив оператор цикла, получим формулы

a) составного числа разности одночленов $a^x - b^x$ в нечетной степени x

$$a^x - b^x = (a - b)\left[\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p\right]$$

где $p = \frac{x-1}{2}$

a) составного числа разности одночленов $a^x - b^x$ в четной степени x

$$a^x - b^x = (a - b)\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$$

где $p = \frac{x}{2}$

a) составного числа суммы одночленов $a^x + b^x$ в нечетной степени x

$$a^x + b^x = (a + b)\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p\right]$$

где $p = \frac{x-1}{2}$

Теорема доказана.

Следствия Теоремы о составных числах
Теорема о составных числах имеет ряд следствий, которые необходимо выделить:

a) формул составных чисел для (2.4.1) четной степени x суммы одночленов $a^x + b^x$ не существует
b) основное число обладает явными характеристическими свойствами вследствие полученного структурного выражения фигурного полинома, в котором показательный член равен 1.

Поскольку головное и основное число в конечном итоге представляют некоторые целые числовые значения, обозначение этих значений в символьном выражении примем как произведение двух неизвестных следующего вида $d \times e$, с обязательным использованием знака " $\times$ ", означающим запись составного числа из двух неизвестных, где первым числом есть головное, а вторым – основное.

Таким образом, получив формулы составных чисел, их символьную запись, а также зная характеристические свойства основного числа, приступим к рассмотрению уравнений Варианта 2.1.1

Вариант 2.1.1 Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{c^z}$- составное число

Лемма 2.1.1
Если существует уравнение $a^x + b^x = c^z$, где c^z- составное число*, то оно может быть представлено в виде $a^x + b^x = d^z e^{z-x} \times e^x$, где $d^z e^{z-x}$ и e^x – головное и основное число соответственно, и после деления всех членов уравнения на e^x приведено к оригинальному виду $a'^x + b'^x = d^z \times e^{z-x}$

*Комментарий: признаком составного числа c^z есть неделимость его основания c на основания a и b в уравнениях вида $a^x \pm b^x = c^z$

Доказательство
Пусть имеется уравнение $a^x + b^x = c^z$, где одночлены a^x и b^x находятся в ряду значений An степенного поля x и их сумма согласно теореме о составных числах может быть выражена формулой составного числа, которая существует только для нечетных x

$$a^x + b^x = (a+b)\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p\right]$$

и которая есть произведением головного числа - суммы оснований $(a+b)$ и основного числа – циклической формулы $\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p$. Так как в этом случае одночлен c^z можно также выразить произведением двух чисел, то запишем его в виде произведения головного одночлена d^z и основного e^z

$$c^z = (de)^z = d^z e^z$$

и теперь с учетом сказанного запишем двойное равенство

$$a^x + b^x = d^z e^z = (a+b)\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p\right] \qquad (2.4.2)$$

Очевидно что произведение двух одночленов $d^z e^z$ предполагает два способа выделения однородного одночлена -d^x из d^z или e^x из e^z. К тому же произведение $d^z e^z$ средней части уравнения (2.4.2) отражает лишь общее равенство составному числу правой части уравнения, то есть в их равенстве отсутствует определенность в абсолютном соответствии головного одночлена d^z головному числу $(a+b)$ и основного одночлена e^z основному числу $\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + (-1)^p a^p b^p\right]$. Для поиска такого соответствия применим метод приведения равенств в составных числах к релевантному виду – метод, предполагающий последовательность действий над равенством двух составных чисел, направленных на достижение равенства их головных и основных частей. Как было ранее условлено, в составном числе $d^z e^z$, средней части уравнения (2.4.2) будем разделять его головную и основную часть знаком "$\times$", и также применим это правило и к правой части. Таким образом, сначала приведем данное равенство к релевантному виду, а затем выполним поиск общего делителя. Для этого, первоначально выразим произведение $d^z e^z$ в виде $d^z \times e^z$, где выделим d^x из d^z, и перейдя к фигурным полиномам, запишем

$$a^x + b^x = d^x d^{z-x} \times e^z = (a+b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$$

разделим все части равенства на d^x, получим

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x + \left(\frac{b}{d}\right)^x = d^{z-x} \times e^z = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}}\right)$$

Сравнивая основное число $e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$ до преобразования и $e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}}\right)$ после преобразования приходим к выводу о возникшем противоречии, потому что изменение фигурных чисел полинома должно приводить к изменению показателя z одночлена e^z, чего не происходит, следовательно, релевантность данного равенства не выполняется. Тогда сместим одночлен d^{z-x} в область основного числа, получим произведение $d^x \times d^{z-x} e^z$ и запишем равенство

$$a^x + b^x = d^x \times d^{z-x} e^z = (a+b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$$

разделим на d^x, получим

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x + \left(\frac{b}{d}\right)^x = d^{z-x} \times e^z = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}}\right)$$

теперь сравнивая головное число $d^x = (a+b)$ и основное $d^{z-x} e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$ до преобразования и их результат $d^{z-x} = \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)$ и $e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}}\right)$ после преобразования, приходим к выводу, что в этом случае адекватное изменение обоих частей составного числа достигнуто и следовательно равенство приведено к релевантному виду. Однако в этом случае возникает явный признак неразрешимости уравнения в целых числах, поскольку $d^x = (a+b)$, то тогда получаем в левой части уравнения деление оснований на их сумму: $\left(\frac{a}{a+b}\right)^x + \left(\frac{b}{a+b}\right)^x$ и следовательно, d^x не может быть общим делителем.

Теперь рассмотрим в качестве делителя одночлен e^x. Выразим произведение $d^z \times e^z$ в виде $d^z \times e^{z-x} e^x$, запишем

$$a^x + b^x = d^z \times e^{z-x} e^x = (a+b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$$

и разделив все части равенства на e^x, получим

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x+\left(\frac{b}{e}\right)^x=d^z\times e^{z-x}=\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{e}\right)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}+k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}\right)$$

Сравнивая головное число $d^z=(a+b)$ до преобразования и $d^z=\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{e}\right)$ после преобразования, приходим к выводу о возникшем противоречии, потому что изменение в выражении суммы должно приводить к изменению показателя z одночлена d^z, чего не происходит, следовательно, релевантность равенства не выполняется. Поэтому переместим одночлен e^{z-x} в область головного числа, получим произведение $d^ze^{z-x}\times e^x$ и запишем равенство

$$a^x+b^x=d^ze^{z-x}\times e^x=(a+b)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}+k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$$

разделив все части равенства на e^x, получим

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x+\left(\frac{b}{e}\right)^x=d^z\times e^{z-x}=\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{e}\right)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}+k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}\right)$$

теперь сравнивая головное число $d^ze^{z-x}=(a+b)$ и основное $e^x=\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}+k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right)$ до преобразования и их результат $d^z=\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{e}\right)$ и $e^{z-x}=\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}+k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}\right)$ после преобразования, приходим к выводу, что в этом случае адекватное изменение обоих частей составного числа достигнуто и равенство приведено к релевантному виду.

Так как противоречий в этом случае не возникает, то запишем итоговое равенство

$$a^x+b^x=d^ze^{z-x}\times e^x=(a+b)\times\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(a^{x-i}b^{i-1}+a^{i-1}b^{x-i}\right)+(-1)^pa^pb^p\right]$$

Разделим все части равенства на одночлен e^x, получим

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x+\left(\frac{b}{e}\right)^x=d^z\times e^{z-x}$$
$$=\left(\frac{a}{e}+\frac{b}{e}\right)\times\left[\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1}+\left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right)+(-1)^p\left(\frac{a}{e}\right)^p\left(\frac{b}{e}\right)^p\right]$$

поскольку полученное произведение $d^z\times e^{z-x}$ будет иметь целое значение, потому что в противном случае одночлен e^{z-x}

$$e^{z-x}=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1}+\left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right)+(-1)^p\left(\frac{a}{e}\right)^p\left(\frac{b}{e}\right)^p$$
$$=1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}+k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}$$

выраженный через фигурный полином имеющий нецелые индексы $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ фигурных чисел приобретает неопределенное значение (поскольку фигурных чисел с нецелыми индексами не существует) и делает таким же значение e^z

$$e^z = e^{z-x}e^x = e^{z-x}\left(1+\sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} + k_{b-i}^{(2i+1)}}{a+b}\right) = \left(1+\sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}\right)^z$$

что противоречит условию Леммы. Таким образом, преодолев данное внешнее противоречие, заключаем, что одночлен e^x является общим множителем всех частей равенств имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{c}$ и $b' = \frac{b}{c}$, и значит, данное равенство можно записать в этих меньших величинах

$$a'^x + b'^x = d^z \times e^{z-x} = (a'+b') \times \left[\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1}\left(a'^{x-i}b'^{i-1} + a'^{i-1}b'^{x-i}\right) + (-1)^p a'^p b'^p\right]$$

Очевидно, что теперь, имея разные показатели степени, составное число $d^z \times e^{z-x}$ уже не будет являться одночленом, а значит, повторное выделение e^x исключается. Следовательно, будет получено оригинальное уравнение вида $a'^x + b'^x = d^z \times e^{z-x}$, где d^z- головное, а e^{z-x} – основное число.

Лемма доказана

Следствия Леммы 2.1.1

1. Уравнения Варианта 2.1.1 существуют только для нечетных x
2. Данные уравнения имеют только один шаг преобразования – от оригинального вида $a'^x + b'^x = d^z \times e^{z-x}$ к виду $a^x + b^x = c^z$ и наоборот, посредством умножения и деления всего уравнения на одночлен e^x соответственно
3. Общим делителем/множителем уравнений может быть только одночлен e^x, основанием которого служит основное число e.
4. Показатель степени z одночлена c^z задается одночленом e^z, показатель которого в свою очередь определяется как $z = x + 1$. Это заключение следует из равенства

$$e^{z-x} = 1+\sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}$$

и

$$e^z = \left(1+\sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}}\right)^z$$

Так как в последнем равенстве фигурный полином в скобках может быть только основанием одночлена e^z по определению $e^z = (e)^z$, значение которого равно одночлену e^{z-x} верхнего равенства, то очевидно, что $e^{z-x} = e^1$, а значит $z - x = 1$ и тогда $z = x + 1$.

5. В уравнениях Варианта 2.1.1 существует механизм дополнений, суть которого заключается в том, что основное число e

$$e = 1+\sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}+\frac{b}{e}} = d^n \cdot p$$

может состоять из произведения, по крайней мере, одного числа p и одночлена d^n, где $n \geq 1$, который будет дополнять головное число до показателя z по так называемому механизму дополнения: $d^z = d^{z-n} \times d^n$. Тогда оригинальное уравнение принимает вид

$$a'^x + b'^x = d^{z-n} \times d^n \cdot p$$

и следовательно, в этом случае общим множителем/делителем уравнения становится одночлен p^x. Данный механизм не является доминирующим для всего множества x, и его преимущественное проявление наблюдается в уравнениях низших показателей степени, к примеру, этот механизм ярко выражен для степени $x = 3$.

Анализ характера общего множителя e^x

Так как фигурные полиномы обладают характеристическими свойствами, исследование простоты общего множителя оригинальных уравнений Варианта 2.1.1 сводится к структурному анализу основного числа - основания одночлена e^x, так как данное основание e формируется из фигурного полинома, характер которого определяется формулой

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} + k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a' + b'}$$

Эта формула дает четкое представление о порядке формирования числа e, потому что ее выражение за исключением дробной записи суммы фигурных чисел в числителе и суммы оснований в знаменателе, повторяет формулу (1.3.10). Она представляет собой формулу нечетных чисел, так как имеет ряд единственно четных коэффициентов U_i^p (таблица 3, стр.30) при каждом члене полинома, за исключением показательного, что делает его значение четным и естественно приводит к получению такого же четного значения их суммы, а уже к этому итоговому четному результату суммируется показательный член полинома - 1. Исключение составляет лишь случай, когда оба числа a и b четные. Данная формула производит ряд нечетных значений, среди которых имеется множество как самостоятельно простых чисел p

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} + k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a' + b'} = p$$

так и произведение двух и более простых чисел - $p_1 p_n$; $p_1 p_2 .. \times p_n$, а также их комбинации $p_1^m p_2 .. \times p_n$

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} + k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a' + b'} = p_1 p_n = p_1 p_2 .. \times p_n = p_1^m p_2 .. \times p_n$$

Таким образом, утверждение гипотезы Биля относительно простоты общего делителя оснований является обоснованным.

Примеры решения уравнения $a^x + b^x = c^z$, где c^z - составное число

Поиск уравнений вида $a^x + b^x = c^z$, где c^z - составное число, для Варианта 2.1.1 не представляет трудности. В этом случае необходимо действовать в обратном порядке относительно порядка повествования Леммы 2.1.1. Для этого воспользуемся задающим алгоритмом, согласно которому первоначально из ряда оснований n степенного поля x необходимо выбрать два числа a' и b', сумма которых будет равна значению головного числа d^{x+1} – в случае доминирующего механизма или d^x - в случае механизма дополнений. Затем сумму одночленов $a'^x + b'^x$ разложим в составное число, согласно формул теоремы о составных числах и получим оригинальное уравнение вида $a'^x + b'^x = d^z \times e$, где $d^z \times e$ составное число, $z = x + 1$ или $d^x \times e \cdot d$ - для механизма дополнений. Здесь основное число e будет общим множителем e^x, умножая на который все уравнение получим исходное уравнение $a^x + b^x = c^z$, где c^z - составное число.

Пример 1.
Для $x = 3$ формула двойного равенства принимает вид $a'^3 + b'^3 = d^4 \times e = (a' + b') \times (a'^2 - a'b' + b'^2)$, которую для определения характера общего делителя, а также изучения процесса формирования основного числа e запишем в фигурных полиномах

$$a'^3 + b'^3 = d^4 \times e = (a' + b') \times \left(1 + 6\frac{k_{a'-1}^{(3)} + k_{b'-1}^{(3)}}{a' + b'}\right)$$

Найдем сумму двух чисел $a' + b'$, которые с учетом механизма дополнения - $d^3 \times d \cdot e$ позволяют получить значение одночлена d^3. Пусть это будут числа $a' = 20$, $b' = 7$, тогда $d^3 = 27 = 3^3$, и окончательно уравнение двойного равенства примет вид

$$20^3 + 7^3 = 3^3 \times 3 \cdot 103 = (20 + 7) \times \left(1 + 6\frac{1330 + 56}{20 + 7}\right)$$

Поскольку механизм дополнений нарушает релевантность головных и основных частей равенств, и здесь соблюдается лишь общее равенство, то уберем знак " $\times$ " и запишем

$$20^3 + 7^3 = 3^4 \cdot 103 = (20 + 7)(1 + 308)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 103^3, получим

$$2060^3 + 721^3 = 309^4$$

или в формулах двойного равенства

$$2060^3 + 721^3 = 3^3 \cdot 103 \times 103^3 \cdot 3 = (2060 + 721) \times (1 + 3278180)$$

Здесь общим делителем оснований есть простое число 103.

Пример 2.
Теперь найдем сумму двух чисел $a' + b'$, которые в соответствии с основным механизмом - $d^4 \times e$ позволяют получить значение одночлена d^4. Пусть это будут числа $a' = 512$, $b' = 113$, тогда $d^4 = 625 = 5^4$, и окончательно уравнение двойного равенства примет вид

$$512^3 + 113^3 = 5^4 \times 217057 = (512 + 113) \times \left(1 + 6\frac{22369536 + 240464}{512 + 113}\right)$$

$$512^3 + 113^3 = 5^4 \cdot 217057 = (512 + 113)(1 + 217056)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 217057^3, получим

$$111133184^3 + 24527441^3 = 135660625^4$$

Здесь общим делителем оснований есть простое число 217057.

Пример 3.

Для $x = 5$ формула двойного равенства принимает вид $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)$, которую для определения характера общего делителя, а также изучения процесса формирования основного числа e запишем в фигурных полиномах

$$a'^5 + b'^5 = d^6 \times e = (a' + b') \times \left(1 + 30\frac{k_{a-1}^{(3)} + k_{b-1}^{(3)}}{a+b} + 120\frac{k_{a-2}^{(5)} + k_{b-2}^{(5)}}{a+b}\right)$$

Найдем сумму двух чисел $a' + b'$, которые с учетом механизма дополнения - $d^5 \times d \cdot e$ позволяют получить значение одночлена d^6. Пусть это будут числа $a' = 117$, $b' = 126$, тогда $d^5 = 243 = 3^5$, и окончательно уравнение двойного равенства примет вид

$$\begin{aligned} 117^5 + 126^5 &= 3^5 \times 3^7 \cdot 101013 \\ &= (117 + 126) \times \left(1 + 30\frac{266916 + 333375}{117 + 126} + 120\frac{182637273 + 264566400}{117 + 126}\right) \end{aligned}$$

Поскольку механизм дополнений нарушают релевантность головных и основных частей равенств, и здесь соблюдается лишь общее равенство, то уберем знак " $\times$ " и запишем

$$117^5 + 126^5 = 9^6 \cdot 101013 = (117 + 126)(1 + 220915430)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 101013^5, получим

$$11818521^5 + 12727638^5 = 909117^6$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 101013.

Пример 4.
Найдем сумму двух чисел $a' + b'$, которые с учетом механизма дополнения - $d^5 \times d \cdot e$ позволяют получить значение одночлена d^6. Пусть это будут числа $a' = 18$, $b' = 14$, тогда $d^5 = 32 = 2^5$, и окончательно уравнение двойного равенства примет вид

$$18^5 + 14^5 = 2^5 \times 2^4 \cdot 4741 = (18 + 14) \times \left(1 + 30\frac{969 + 455}{18 + 14} + 120\frac{15504 + 4368}{18 + 14}\right)$$

Поскольку механизм дополнений нарушает релевантность головных и основных частей равенств, и здесь соблюдается лишь общее равенство, то уберем знак " $\times$ " и запишем

$$18^5 + 14^5 = 2^6 \cdot 37928 = (18 + 14)(1 + 75855)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 37928^5, получим

$$682704^5 + 530992^5 = 75856^6$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 37928

Вывод для Варианта 2.1.1: гипотеза Биля подтверждается

Вариант 2.2.0. Уравнение $a^x - b^x = c^z$, где c^z не-составное число

Лемма 2.2.0
Если существует уравнение $a^x - b^x = c^z$, где c^z не является составным числом, то значит, оно может быть представлено в общем виде $a^x - b^x = c^{nx+1}$, где $n \geq 1$, и за n шагов деления всех членов уравнения на c^x приведено к оригинальному виду $a'^x - b'^x = c$, за исключением частных случаев в которых:

a) уравнение $a^3 - b^3 = c^z$ может быть выражено в виде $a^3 - b^3 = c^{2+3n}$, где $n \geq 0$, и за n шагов деления всех членов уравнения на c^3 приведено к оригинальному виду $a'^3 - b'^3 = c^2$ - тройкам 3-го степенного поля
b) уравнение $a^2 - b^2 = c^z$ может быть выражено в виде $a^2 - b^2 = c^{m+2n}$, где $n \geq 0$, и за n шагов деления всех членов уравнения на c^2 приведено к оригинальному виду $a'^2 - b'^2 = c^m$, где $m > 2$ - тройкам 2-го степенного поля

Доказательство

Пусть имеется уравнение $a^x - b^x = c^z$, здесь, согласно теореме о разложении n^m, одночлен c^z может быть разложен в оригинальный полиномом рода z, и в тоже время он является результирующим полиномом рода $x-1$, что означает инвариантность этих полиномов по значению. Но поскольку c^z явно можно выразить только через одночлены a^x и $b^x -$ как результирующий полином рода $x-1$, а привести уравнение к однородным показателям x можно только разложив c^z на произведение одночленов $c^x c^{z-x}$, то запишем двойное равенство с учетом сказанного, для нечетного x

$$a^x - b^x = c^x c^{z-x} = (a-b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного x

$$a^x - b^x = c^x c^{z-x} = (a-b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)} + k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

так как левая и средняя части равенства имеют однородные одночлены, то поделим все равенство на c^x и запишем

$$\frac{a^x - b^x}{c^x} = c^{z-x} = \frac{(a-b) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}\right)}{c^x}$$

что равносильно

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x - \left(\frac{b}{c}\right)^x = c^{z-x} = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{\frac{a}{c}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{c}-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного x

$$\frac{a^x - b^x}{c^x} = c^{z-x} = \frac{(a-b) + 2\left(k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)} + k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}\right]}{c^x}$$

что равносильно

$$\left(\frac{a}{c}\right)^x - \left(\frac{b}{c}\right)^x = c^{z-x} = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right) + 2\left(k_{\frac{a}{c}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{c}-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{\frac{a}{c}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{c}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{a}{c}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{c}-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

Так как полученный одночлен c^{z-x} будет иметь целое значение, потому что в противном случае нецелые индексы $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ фигурных чисел делают его значение а следовательно и c^z неопределенным, (поскольку фигурных чисел с нецелыми индексами не существует) что противоречит условиям леммы, то становится очевидным что одночлен c^x является общим множителем всех частей равенств имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{c}$ и $b' = \frac{b}{c}$, и значит, данные равенства можно записать в этих меньших величинах, для нечетного x

$$a'^x - b'^x = c^{z-x} = (a' - b') + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \left(k_{a'-i}^{(2i+1)} - k_{b'-i}^{(2i+1)}\right)$$

и для четного x

$$a'^x - b'^x = c^{z-x} = (a' - b') + 2\left(k_{a'-1}^{(2)} - k_{b'-1}^{(2)}\right) + \sum_{i=1}^{p} V_i^p \left[k_{a'-i}^{(2i+1)} - k_{b'-i}^{(2i+1)} + k_{a'-i+1}^{(2i+2)} - k_{b'-i+1}^{(2i+2)}\right]$$

Таким образом, если существует возможность далее разложить одночлен c^{z-x} на произведение $c^x c^{z-2x}$ то одночлен c^x будет общим множителем всех частей равенств с еще меньшими основаниями: $a'' = \frac{a'}{c}$ и $b'' = \frac{b'}{c}$ и так далее, до тех пор пока выделение c^x из указанного одночлена станет невозможным. Следовательно, тогда, скажем для c^{z-x} выполнится условие $c^{z-x} < c^x$ а значит, одночлены a'^x и b'^x будут минимально возможными целыми элементами ряда значений An степенного поля x, разность которых будет также минимально возможным целым числом. А так как инвариантность полиномов означает равенство их значений, то значит, величина c^{z-x} соответственно будет этим минимально возможным целым числом в последовательности операций выделения c^x из c^z и следовательно будет его основанием c. Теперь так как $c^{z-x} = c^1$, значит $z = x + 1$ и окончательно искомое оригинальное уравнение примет вид $a'^x - b'^x = c$, которое при умножении всех частей уравнения n раз на c^x приобретет общий вид $a^x - b^x = c^{nx+1}$, за исключением частных случаев, в которых

a) оригинальное уравнение троек 3-го степенного поля примет вид $a'^3 - b'^3 = c^2$, которое при умножении всех частей уравнения -раз на c^3 приобретет общий вид $a^3 - b^3 = c^{2+3n}$

b) оригинальное уравнение троек 2-го степенного поля примет вид $a'^2 - b'^2 = c^m$, которое при умножении всех частей уравнения n - раз на c^2 приобретет общий вид $a^2 - b^2 = c^{m+2n}$
Лемма доказана

Следствия Леммы 2.2.0:

1. Общим делителем уравнений общего случая $a^x - b^x = c^z$, а также частных случаев
   a) уравнений троек 3-го степенного поля $a^3 - b^3 = c^z$
   b) уравнений троек 2-го степенного поля $a^2 - b^2 = c^z$
   есть одночлены c^x, c^3, c^2 соответственно
2. Значение показателя z одночлена c^z в уравнениях общего случая $a^x - b^x = c^z$ определяется по формуле $z = nx + 1$, где $n \geq 0$, за исключением частных случаев
   a) уравнений троек 3-го степенного поля $a^3 - b^3 = c^z$, где показатель $z = 2 + 3n$, для $n \geq 0$
   b) уравнений троек 2-го степенного поля $a^2 - b^2 = c^z$, где показатель $z = m + 2n$, для $n \geq 0$
3. Оригинальные уравнения общего случая $a'^x - b'^x = c$, а также оригинальные уравнения троек 3-го степенного поля $a'^3 - b'^3 = c^2$ и уравнения троек 2-го степенного поля $a'^2 - b'^2 = c^m$ могут быть сколь угодно n - раз умножены на множители c^x, c^3 и c^2 для этих случаев соответственно.

Общие и частные случаи решения уравнения Варианта 2.2.0 и анализ характера общего множителя c^x

Рассмотрим общие случаи решения уравнения $a^x - b^x = c^z$, где c^z – не-составное число и исследуем характер общего множителя c^x

Общий случай 1. Уравнение $\boldsymbol{a^x - b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a > 2}$, $\boldsymbol{a - b >}\ 1$
Рассмотрим исходное оригинальное уравнение

$$a'^x - b'^x = c$$

и далее умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получим

$$(ca')^x - (cb')^x = c^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$(c^2a')^x - (c^2b')^x = c^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^na')^x - (c^nb')^x = c^{nx+1}$$

где $n \geq 0$. Здесь фигурный полином рода $x - 1$ как для нечетного, так и четного показателя x не дает четкого представления о характере множителя c, однако будучи натуральным числом, множитель c может быть сам по себе простым или произведением двух чисел, по крайней мере, одно из которых есть простое число.

Пример 1, общий случай 1: $7^3 - 4^3 = 279$ – оригинальное уравнение в степенном поле 3,

умножая на множитель $c^3 = 279^3$, получим

$$1953^3 + 1116^3 = 279^4$$

и далее

$$544887^3 + 311364^3 = 257^7$$

Здесь общим делителем оснований является натуральное число 279.

Общий случай 2. Уравнение $\boldsymbol{a^x - b^x = c^z}$, где $\boldsymbol{a > 2}$, $\boldsymbol{a - b = 1}$
Имеем исходное оригинальное уравнение

$$a'^x - b'^x = c$$

и далее умножая обе части уравнения на множитель c^x первого шага $n = 1$, получаем

$$(ca')^x - (cb')^x = c^{x+1}$$

на множитель c^x второго шага $n = 2$

$$(c^2a')^x - (c^2b')^x = c^{2x+1}$$

или в общем виде

$$(c^na')^x - (c^nb')^x = c^{nx+1}$$

где $n \geq 0$.
Здесь фигурный полином рода $x - 1$ как для нечетного, так и четного показателя x дает четкое представление о характере множителя c^x, потому что фигурные полиномы обладая характеристическими свойствами в этом случае приобретают явную структурную формулу нечетного числа, в силу того что показательный член полинома становится равен единице. В данном случае, вследствие разности двух соседних элементов ряда значений An степенного

поля x, получается элемент ряда вычетов B_n того же поля формула которого, как уже известно, в общем виде для нечетного показателя x имеет вид

$$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i} \tag{2.3.3}$$

Она представляет собой формулу нечетных чисел для любого x, так как каждый член полинома - $U_i^p k_{n-i+1}^{2i}$, за исключением показательного, имеет ряд единственно четных коэффициентов U_i^p (таблица 3, стр.30) при каждом фигурном числе k_{n-i+1}^{2i} что делает значение каждого такого члена четным и естественно приводит к получению такого же четного значения их суммы, а уже к этому итоговому четному результату суммируется показательный член - 1.

В случае для $x = 3$ данная формула принимает вид $c = 1 + 6k_b^{(2)}$, где среди полученного ряда значений c будет множество простых чисел, к примеру: 7, 19, 37, 61, 127, 271, 331, которые можно наблюдать среди 10 первых его значений (см. ряд вычетов Bn степенного поля $3, \text{стр.}\, 8 - 9$). В то время, как все значения c в ряду вычетов есть нечетные числа, то помимо явно простых значений, остальные элементы ряда являются произведением двух и более простых чисел.

Для $x = 5$ формула (2.3.3) принимает вид $c = 1 + 30k_b^{(2)} + 120k_{b-1}^{(4)}$, где среди полученного ряда значений c будет множество простых чисел, к примеру: 31, 211, 4651, 61051, которые можно наблюдать среди 10 первых его значений (см. ряд вычетов Bn степенного поля $5, \text{стр.}\, 11 - 12$). В то время, как все значения c в ряду вычетов есть нечетные числа, то помимо явно простых значений, остальные элементы ряда также являются произведением двух и более простых чисел. К тому же особенностью ряда вычетов степенного поля 5 есть то, что здесь все значения оканчиваются на 1. Это свойство имеет цикл повторения 4, то есть следующий такой ряд будет $x = 9{,}13{,}17$ и т.д.

Для четного показателя x фигурный полином также приобретает явную структурную формулу нечетного числа, которая тоже имеет выражение элемента ряда вычетов B_n и приобретает вид

$$B_n = 1 + 2n + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{n-i}^{(2i+1)} \right] \tag{2.3.4}$$

Она также представляет собой формулу нечетного числа, потому что каждый член полинома, за исключением показательного, имеет единственно четные коэффициенты умножения V_i^p; $V_i'^p$ (таблица 4, стр. 31), которые делают каждый член полинома четным, что естественно приводит к получению такого же четного значения их суммы, и уже к этому итоговому четному результату суммируется показательный член – 1

В случае для $x = 4$ формула (2.3.4) принимает вид $c = 1 + 2b + 12k_b^{(2)} + 24k_{b-1}^{(3)}$. Здесь в отличие от нечетного x уже значительно меньше явно простых значений c (см. ряд вычетов Bn степенного поля $4, \text{стр.}\, 10$). Но также, все значения c есть нечетные числа, которые являются произведением двух и более простых чисел.

В случае для $x = 6$ формула (2.3.4) примет вид $c = 1 + 2b + 60k_b^{(2)} + 120\,k_{b-1}^{(3)} + 360k_{b-1}^{(4)} + 720\,k_{b-2}^{(5)}$. Здесь также в отличие от нечетного x значительно меньше явно простых значений c (см. ряд вычетов Bn степенного поля $6, \text{стр.}\, 13 - 14$). Но также, все значения c есть нечетные числа, которые являются произведением двух и более простых чисел.

Рассмотрим примеры,

Пример 2, общий случай 2: $4^3 - 3^3 = 37$ – оригинальное уравнение в степенном поле 3,

умножая на множитель $c^3 = 37^3$ первого шага $n = 1$, получим

$$148^3 - 111^3 = 37^4$$

на множитель второго шага $n = 2$, получим

$$5476^3 + 4107^3 = 37^7$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований есть простое число 37.

Пример 3, общий случай 2: $2^5 - 1^5 = 31$– оригинальное уравнение в степенном поле 5,

умножая на множитель $c^5 = 31^5$ первого шага $n = 1$, получим

$$62^5 - 31^5 = 31^6$$

умножая еще раз

$$1922^5 - 961^5 = 31^{11}$$

Здесь общим делителем оснований является простое число 31.

Пример 4, общий случай 2: $9^4 - 8^4 = 2465$ – оригинальное уравнение в степенном поле 4,

умножая на множитель $c^4 = 2465^4$ первого шага $n = 1$, получим

$$22185^4 - 19720^4 = 2465^5$$

умножая еще раз

$$54686025^4 - 48609800^4 = 2465^9$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 2465.

Пример 5, общий случай 2: $4^6 - 3^6 = 3367$ – оригинальное уравнение в степенном поле 6,

умножая на множитель $c^6 = 3367^6$ первого шага $n = 1$, получим

$$13468^6 - 10101^6 = 3367^7$$

умножая еще раз

$$45346756^6 - 34010067^6 = 3367^{13}$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 3367.

Таким образом, утверждение гипотезы Биля о простоте общего делителя является обоснованным.

Теперь изучим частные случаи Варианта 2.2.0:

Частный случай а). Уравнение $\boldsymbol{a^3 - b^3 = c^z}$
Рассмотрим уравнения оригинальных троек 3-го степенного поля

$$a^3 - b^3 = c^2$$

Умножая обе части уравнения на множитель c^3 первого шага $n = 1$, получим

$$(ca')^3 - (cb')^3 = c^{2+3}$$

на множитель c^3 второго шага $n = 2$

$$(c^2a')^3 - (c^2b')^3 = c^{5+3}$$

или в общем виде

$$(c^na')^3 - (c^nb')^3 = c^{2+3n}$$

Поскольку данные уравнения находятся в степенном поле 3, и разность оснований $a - b$ =1, то фигурный полином рода $x - 1$, приведенный ниже, дает четкое представление о характере множителя c^3, потому что его значениями являются элементы B_n ряда вычетов Bn степенного поля 3 и определяются формулой

$$c^2 = 1 + 6k_b^{(2)}$$

Ими есть ряд простых оснований: 13, 181, 2521 и т.д., где значения соответствующих одночленов есть числа 169, 32761, 6355441, наблюдаемые в ряду вычетов Bn степенного поля 3.

Рассмотрим примеры:

Пример 6, частный случай а): $8^3 - 7^3 = 13^2$ – уравнение первой оригинальной тройки

3-го степенного поля, умножая на множитель $c^3 = 13^3$, первого шага $n = 1$, получим

$$104^3 - 91^3 = 13^5$$

на множитель второго шага $n = 2$

$$1352^3 - 1183^3 = 13^8$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований есть простое число 13.

Пример 7, частный случай а): $1456^3 - 1455^3 = 2521^2$ – уравнение третьей оригинальной

тройки 3-го степенного поля, умножая на множитель $c^3 = 2521^3$, первого шага $n = 1$, получим

$$3670576^3 - 3668055^3 = 2521^5$$

на множитель второго шага $n = 2$

$$9253522096^3 - 9247166655^3 = 2521^8$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований есть простое число 2521.

Частный случай b). Уравнение $\boldsymbol{a^2 - b^2 = c^z}$

Рассмотрим уравнения оригинальных троек 2-го степенного поля

$$a'^2 - b'^2 = c^m$$

Умножая обе части уравнения на множитель c^m первого шага $n = 1$, получим

$$(ca')^2-(cb')^2=c^{m+2}$$

на множитель c^m второго шага $n=2$

$$(c^2a')^2-(c^2b')^2=c^{m+4}$$

или в общем виде

$$(c^na')^2-(c^nb')^2=c^{m+2n}$$

Как было показано в теореме Ферма, при $a'-b'=1$ все значения одночлена c^m представляют собой последовательный ряд нечетных чисел, и значит основание c в этом случае может быть как простым числом, так и произведением двух чисел, по крайней мере, одно из которых есть простое число. В случае $a'-b'=2$ значения одночлена c^m в свою очередь являются четными числами, и следовательно общим делителем оснований будет простое число 2.

Рассмотрим примеры:

Пример 8, частный случай b): $14^2-13^2=3^3$ – уравнение оригинальной тройки 2-го степенного поля, умножая на множитель $c^2=3^2$, первого шага $n=1$, получим

$$42^2-39^2=3^5$$

на множитель второго шага $n=2$

$$126^2-117^2=3^7$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований есть простое число 3.

Пример 9, частный случай b): $325^2-323^2=6^4$ – уравнение оригинальной тройки 2-го степенного поля, умножая на множитель $c^2=6^2$, первого шага $n=1$, получим

$$1950^2-1938^2=6^6$$

на множитель второго шага $n=2$

$$11700^2-11628^2=6^8$$

и так далее. Здесь общим делителем оснований есть простое число 2.

Вывод для Варианта 2.2.0: гипотеза Биля подтверждается.

Вариант 2.2.1 Уравнение $\boldsymbol{a^x-b^x=c^z}$, где $\boldsymbol{c^z}$- составное число

Лемма 2.2.1

Если существует уравнение $a^x-b^x=c^z$, где c^z-составное число, то оно может быть выражено в общем случае $a^x-b^x=d^ze^{x-z}\times e^x$, где d^ze^{x-z} и e^x – головное и основное число соответственно, и после деления всех членов уравнения на e^x приведено к оригинальному виду $a'^x-b'^x=d^z\times e^{z-x}$, за исключением частных случаев

a) уравнения $a^3-b^3=d^3d^{z-3}\times e^z$, которое после деления всех членов уравнения на d^3 приводится к оригинальному виду $a'^3-b'^3=d^{z-3}\times e^z$
b) уравнения $a^2-b^2=d^2d^{z-2}\times e^z$, которое после деления всех членов уравнения на d^2 приводится к оригинальному виду $a'^2-b'^2=d^{z-2}\times e^3$

c) уравнения $a^x - b^x = dd^{z-1}$, где $x = 2^n$, $n > 1$, которое первоначально преобразуется к виду $a^x - b^x = lm \times l^{z-1}m^{z-1}$, где $d = lm$, и после деления всех членов уравнения на m^x приводится к оригинальному виду $a'^x - b'^x = l \times l^{z-1}m^{z-x}$

Доказательство

Общий случай

Пусть имеется уравнение $a^x - b^x = c^z$, где одночлены a^x и b^x находятся в ряду значений An степенного поля x и их разность согласно теореме о составных числах может быть выражена формулой составного числа, для нечетного x

$$a^x - b^x = (a-b)\left[\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p\right]$$

и для четного x

$$a^x - b^x = (a-b)\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$$

которые являются произведением головного числа - разности оснований $(a-b)$ на основное число – циклическую формулу $\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p$ для нечетного x и $\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$ для четного x. Так как в этом случае одночлен c^z можно также выразить произведением двух чисел, то запишем его в виде произведения головного одночлена d^z и основного e^z

$$c^z = (de)^z = d^z e^z$$

и теперь с учетом сказанного запишем двойное равенство для нечетного x

$$a^x - b^x = d^z e^z = (a-b)\left[\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p\right]$$

и для четного x

$$a^x - b^x = d^z e^z = (a-b)\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$$

Очевидно что произведение двух одночленов $d^z e^z$ предполагает два способа выделения однородного одночлена -d^x из d^z или e^x из e^z. К тому же произведение $d^z e^z$ отражает лишь общее равенство составному числу правых частей уравнения, иначе говоря в их равенстве отсутствует определенность в абсолютном соответствии значений головного одночлена d^z головному числу $(a-b)$ и основного одночлена e^z основным числам $\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right) + a^p b^p$ для нечетного x и $\sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$ для четного x. Поэтому, сначала приведем данное равенство к релевантному виду, а затем выполним поиск общего делителя. Для этого, первоначально запишем произведение $d^z e^z$ в виде выражения составного числа $d^z \times e^z$, затем выделим d^x из d^z, и перейдя к фигурным полиномам, запишем для нечетного x

$$a^x - b^x = d^x d^{z-x} \times e^z = (a-b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$$

и для четного x

$$a^x - b^x = d^x d^{z-x} \times e^z$$
$$= (a-b) \times \left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b} \right]\right)$$

разделим на d^x, получим для нечетного x

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x - \left(\frac{b}{d}\right)^x = d^{z-x} \times e^z = \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}}\right)$$

и для четного x

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x - \left(\frac{b}{d}\right)^x = d^{z-x} \times e^z$$
$$= \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)$$
$$\times \left(1 + 2\frac{k_{\frac{a}{d}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{d}-1}^{(2)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{d}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} \right]\right)$$

Сравнивая основные числа $e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$ для нечетного x и $e^z = \left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b} \right]\right)$ для четного x до преобразования и $e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}}\right)$ и $e^z = \left(1 + 2\frac{k_{\frac{a}{d}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{d}-1}^{(2)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{d}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} \right]\right)$ после преобразования для нечетного и четного x соответственно, приходим к выводу о возникшем противоречии, потому что изменение фигурных чисел полинома должно приводить к изменению показателя z одночлена e^z, чего не происходит, следовательно, релевантность равенств для произведения $d^x d^{z-x} \times e^z$ не выполняется. Тогда сместим одночлен d^{z-x} в область основного числа, получим произведение $d^x \times d^{z-x} e^z$ и запишем равенство для нечетного x

$$a^x - b^x = d^x \times d^{z-x} e^z = (a-b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$$

и для четного x

$$a^x - b^x = d^x \times d^{z-x} e^z$$
$$= (a-b) \times \left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b} \right]\right)$$

разделим на d^x, получим для нечетного x

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x-\left(\frac{b}{d}\right)^x=d^{z-x}\times e^z=\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}\right)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}\right)$$

и для четного x

$$\left(\frac{a}{d}\right)^x-\left(\frac{b}{d}\right)^x=d^{z-x}\times e^z$$
$$=\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}\right)$$
$$\times\left(1+2\frac{k_{\frac{a}{d}-1}^{(2)}-k_{\frac{b}{d}-1}^{(2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+\ V_i'^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i+1}^{(2i+2)}-k_{\frac{b}{d}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}\right]\right)$$

Теперь сравнивая головное число $d^x=(a-b)$ и основное $d^{z-x}e^z=\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}-k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$ для нечетного x и $d^{z-x}e^z=\left(1+2\frac{k_{a-1}^{(2)}-k_{b-1}^{(2)}}{a-b}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}-k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}+\ V_i'^p\frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)}-k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$ для четного x до преобразования и их результат $d^{z-x}=\left(\frac{a}{d}-\frac{b}{d}\right)$ и $e^z=\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}\right)$ для нечетного x и $e^z=\left(1+2\frac{k_{\frac{a}{d}-1}^{(2)}-k_{\frac{b}{d}-1}^{(2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+\ V_i'^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i+1}^{(2i+2)}-k_{\frac{b}{d}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}\right]\right)$ для четного xпосле преобразования, приходим к выводу, что в этом случае адекватное изменение обоих частей составного числа достигнуто, и следовательно произведение $d^x\times d^{z-x}e^z$ приведено к релевантному виду. Так как здесь $d^x=(a-b)$, то тогда получаем в левой части уравнений деление оснований на их разность: $\left(\frac{a}{a-b}\right)^x-\left(\frac{b}{a-b}\right)^x$, а поскольку данная разность может быть меньше оснований a и b, то следовательно, d^x может быть общим делителем уравнений.

Теперь рассмотрим в качестве делителя одночлен e^x. Выразим $d^z\times e^z$ в виде произведения $d^z\times e^{z-x}e^x$, запишем для нечетного x

$$a^x-b^x=d^z\times e^{z-x}e^x=(a-b)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}-k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}\right)$$

и для четного x

$$a^x-b^x=d^z\times e^{z-x}e^x$$
$$=(a-b)\times\left(1+2\frac{k_{a-1}^{(2)}-k_{b-1}^{(2)}}{a-b}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}-k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}+\ V_i'^p\frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)}-k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$$

разделив равенство на e^x, получим для нечетного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x-\left(\frac{b}{e}\right)^x=d^z\times e^{z-x}=\left(\frac{a}{e}-\frac{b}{e}\right)\times\left(1+\sum_{i=1}^{p}U_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}\right)$$

и для четного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x - \left(\frac{b}{e}\right)^x = d^z \times e^{z-x}$$
$$= \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right)$$
$$\times \left(1 + 2\frac{k^{(2)}_{\frac{a}{e}-1} - k^{(2)}_{\frac{b}{e}-1}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + V_i'^p \frac{k^{(2i+2)}_{\frac{a}{e}-i+1} - k^{(2i+2)}_{\frac{b}{e}-i+1}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right]\right)$$

Сравнивая головное число $d^z = (a-b)$ обоих равенств до преобразования и $d^z = \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right)$ после преобразования, приходим к выводу о возникшем противоречии, потому что изменение в выражении разности должно приводить к изменению показателя z одночлена d^z, чего не происходит, следовательно, произведение $d^z \times e^{z-x}e^x$ не является релевантным правым частям равенств. Поэтому, переместим одночлен e^{z-x} в область головного числа, получим произведение $d^z e^{z-x} \times e^x$ и запишем равенство для нечетного x

$$a^x - b^x = d^z e^{z-x} \times e^x = (a-b) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b}\right)$$

и для четного x

$$a^x - b^x = d^z e^{z-x} \times e^x$$
$$= (a-b) \times \left(1 + 2\frac{k^{(2)}_{a-1} - k^{(2)}_{b-1}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b} + V_i'^p \frac{k^{(2i+2)}_{a-i+1} - k^{(2i+2)}_{b-i+1}}{a-b}\right]\right)$$

разделим равенства на e^x, получим для нечетного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x - \left(\frac{b}{e}\right)^x = d^z \times e^{z-x} = \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right)$$

и для четного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x - \left(\frac{b}{e}\right)^x = d^z \times e^{z-x}$$
$$= \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right)$$
$$\times \left(1 + 2\frac{k^{(2)}_{\frac{a}{e}-1} - k^{(2)}_{\frac{b}{e}-1}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + V_i'^p \frac{k^{(2i+2)}_{\frac{a}{e}-i+1} - k^{(2i+2)}_{\frac{b}{e}-i+1}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right]\right)$$

теперь сравнивая головное число $d^z e^{z-x} = (a-b)$ и основное $e^x = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b}\right)$ для нечетного x и $e^x = \left(1 + 2\frac{k^{(2)}_{a-1} - k^{(2)}_{b-1}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b} + V_i'^p \frac{k^{(2i+2)}_{a-i+1} - k^{(2i+2)}_{b-i+1}}{a-b}\right]\right)$ для четного x до преобразования и их результат $d^z = \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right)$ и $e^{z-x} = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right)$ для нечетного x и $e^{z-x} = \left(1 + 2\frac{k^{(2)}_{\frac{a}{e}-1} - k^{(2)}_{\frac{b}{e}-1}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\,\frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}} + V_i'^p\,\frac{k^{(2i+2)}_{\frac{a}{e}-i+1} - k^{(2i+2)}_{\frac{b}{e}-i+1}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}\right]\right)$ для четного x после преобразования, приходим к выводу, что произведение $d^z e^{z-x} \times e^x$ отражает адекватное изменение обоих частей составного числа, в результате чего достигается релевантность равенств.

Далее, вернувшись к записи уравнений в циклических формулах, запишем следующие равенства, поделенные на одночлен e^x, для нечетного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x - \left(\frac{b}{e}\right)^x = d^z \times e^{z-x} = \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right) \times \left[\sum_{i=1}^{p}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1} + \left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right) + \left(\frac{a}{e}\right)^p\left(\frac{b}{e}\right)^p\right]$$

и для четного x

$$\left(\frac{a}{e}\right)^x - \left(\frac{b}{e}\right)^x = d^z \times e^{z-x} = \left(\frac{a}{e} - \frac{b}{e}\right) \times \sum_{i=1}^{p}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1} + \left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right)$$

поскольку полученное произведение $d^z \times e^{z-x}$ будет иметь целое значение, потому что в противном случае одночлен e^{z-x} для нечетного x

$$\begin{aligned} e^{z-x} &= \sum_{i=1}^{p}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1} + \left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p\,\frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}} \end{aligned}$$

и для четного x

$$\begin{aligned} e^{z-x} &= \sum_{i=1}^{p}\left(\left(\frac{a}{e}\right)^{x-i}\left(\frac{b}{e}\right)^{i-1} + \left(\frac{a}{e}\right)^{i-1}\left(\frac{b}{e}\right)^{x-i}\right) + \left(\frac{a}{e}\right)^p\left(\frac{b}{e}\right)^p \\ &= 1 + 2\frac{k^{(2)}_{a-1} - k^{(2)}_{b-1}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\,\frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b} + V_i'^p\,\frac{k^{(2i+2)}_{a-i+1} - k^{(2i+2)}_{b-i+1}}{a-b}\right] \end{aligned}$$

выраженный через фигурный полином имеющий нецелые индексы $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ фигурных чисел приобретает неопределенное значение (поскольку фигурных чисел с нецелыми индексами не существует) и делает таким же значение e^z:

для нечетного x

$$e^z = e^x e^{z-x} = e^x\left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p\,\frac{k^{(2i+1)}_{a-i} - k^{(2i+1)}_{b-i}}{a-b}\right) = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p\,\frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{e}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{e}-i}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}\right)^{\mathrm{z}}$$

и для четного x

$$e^z = e^x e^{z-x} = e^x\left(1+2\frac{k_{a-1}^{(2)}-k_{b-1}^{(2)}}{a-b}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{a-i}^{(2i+1)}-k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b}+V_i'^p\frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)}-k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$$
$$=\left(1+2\frac{k_{\frac{a}{e}-1}^{(2)}-k_{\frac{b}{e}-1}^{(2)}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}+V_i'^p\frac{k_{\frac{a}{e}-i+1}^{(2i+2)}-k_{\frac{b}{e}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{e}-\frac{b}{e}}\right]\right)^z$$

что противоречит условию Леммы. Поэтому становится очевидным, что одночлен e^x является общим множителем всех частей данных равенств имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{e}$ и $b' = \frac{b}{e}$, и значит, данное равенство можно записать в этих меньших величинах,

для нечетного x

$$a'^x - b'^x = d^z \times e^{z-x} = (a'-b') \times \left[\sum_{i=1}^{p}\left(a'^{x-i}b'^{i-1} + a'^{i-1}b'^{x-i}\right) + a'^p b'^p\right]$$

и для четного x

$$a'^x - b'^x = d^z \times e^{z-x} = (a'-b') \times \sum_{i=1}^{p}\left(a'^{x-i}b'^{i-1} + a'^{i-1}b'^{x-i}\right)$$

Очевидно, что теперь, имея разные показатели степени, составное число $d^z \times e^{z-x}$ уже не будет являться одночленом, а значит, повторное выделение e^x исключается. Следовательно, в этом случае будет получено оригинальное уравнение вида $a'^x - b'^x = d^z \times e^{z-x}$.

Частный случай а)

Как было показано выше, исследуемые двойные равенства также могут делиться и на d^x, в этом случае в релевантном выражении составного числа $d^x \times d^{z-x}e^z$, основным числом до преобразования есть произведение $d^{z-x}e^z$, а после деления всего равенства на d^x основное число становится одночленом e^z, что говорит о том, что значение этого полинома для нечетного x

$$e^z = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}$$

и для четного x

$$e^z = 1 + 2\frac{k_{\frac{a}{d}-1}^{(2)}-k_{\frac{b}{d}-1}^{(2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+\sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i}^{(2i+1)}-k_{\frac{b}{d}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}+V_i'^p\frac{k_{\frac{a}{d}-i+1}^{(2i+2)}-k_{\frac{b}{d}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}}\right]$$

должно принимать величину некоторого элемента A_n ряда значений An степенного поля z.

Поскольку приведенные выше выражения не обладают идентичностью записи оригинальным полиномам рода z, то возникает необходимость поиска, как условий существования таких равенств искомому элементу A_n, так и данного степенного поля z в котором может находиться это значение e^z.

В силу того, что приведенные выше формулы получены вследствие разности полиномов, и их результатом является результирующий полином рода x, имеющий в числителях членов полинома разность фигурных чисел, то проведение структурно-родового анализа в этом случае не представляется возможным. Поэтому, используя свойство альтернативности представления полиномов, воспользуемся возможностью получить эти же полиномы непосредственно через элементы ряда вычетов Bn в виде полинома рода $x-1$, что позволит провести указанный анализ и осуществить поставленную задачу.

Таким образом, пусть значения a'^x и b'^x находятся в ряду значений An степенного поля x и для них справедливо основное уравнение степенного поля x

$$a'^x - b'^x = \sum_{j=b'}^{a'-1} B_j$$

где B_j – значения ряда вычетов, формулы которых запишем сначала для разности двух соседних элементов $A_{n+1} - A_n$, которые для нечетного x имеют вид

$$B_n = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p k_{n-i+1}^{2i}$$

и для четного x

$$B_n = 1 + 2n + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p k_{n-i+1}^{2i} + V_i'^p k_{n-i}^{(2i+1)} \right]$$

Затем, в соответствии с приведенным уравнением степенного поля и формул элементов B_n найдем формулы составных чисел для произвольных a' и b'. Так для нечетного x получим

$$a'^x - b'^x = a' - b' + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} k_{j-i+1}^{2i}$$

и для четного x

$$a'^x - b'^x = a' - b' + 2\sum_{j=b'}^{a'-1} j + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} k_{j-i+1}^{2i} + V_i'^p \sum_{j=b'}^{a'-1} k_{j-i}^{(2i+1)} \right]$$

теперь вынесем разность $a' - b'$ за скобки и далее получим для нечетного x

$$a'^x - b'^x = (a' - b') \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i+1}^{2i}}{a' - b'} \right)$$

и для четного x

$$a'^x - b'^x = (a' - b') \left(1 + 2\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{j}{a' - b'} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i+1}^{2i}}{a' - b'} + V_i'^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i}^{(2i+1)}}{a' - b'} \right] \right)$$

И наконец, выразив одночлен e^z для нечетного x как

$$e^z = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i+1}^{2i}}{a'-b'}$$

и для четного x

$$e^z = 1 + 2\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{j}{a'-b'} + \sum_{i=1}^{p} \left[V_i^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i+1}^{2i}}{a'-b'} + V_i'^p \sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_{j-i}^{(2i+1)}}{a'-b'} \right]$$

получим искомые альтернативные выражения, и далее обратимся к разделу анализа «Структурно-родовой анализ степенных полей», потому что полученные равенства обладают структурным и родовым подобием уравнениям, анализ которых проводился в рамках задачи: поиск подобия полиномов ряда вычетов Bn полиномам элементов ряда значений An в различных степенных полях и нахождение равенства значений среди них. Согласно следствию данного раздела единственной парой полиномов, где соблюдается структурное и родовое подобие есть пара

$$\left[n + 2k_{n-1}^{(2)}\right] \sim \left[1 + 6k_{n'}^{(2)}\right]$$

Аналогично, принимая во внимание такое же структурное и родовое подобие полиномов $\left[1 + 6k_{n'}^{(2)}\right] \sim \left[1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right]$ заключаем, что только полином основного числа e^z составного числа $d^{z-3} \times e^z$ разности элементов a'^3 и b'^3 подобен оригинальному полиному некоторого элемента A_n ряда значений An степенного поля 2:

$$\left[n + 2k_{n-1}^{(2)}\right] \sim \left[1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right]$$

Таким образом, единственным условием существования уравнений $a^x - b^x = d^x \times d^{z-x} e^z$, где после деления на общий делитель d^x основным числом становится одночлен e^z, есть частный случай, когда $x = 3$, и тогда двойное равенство можно записать

$$a^3 - b^3 = d^3 \times d^{z-3} e^z = (a-b) \times (a^2 + ab + b^2)$$

Так как здесь общим делителем есть одночлен d^3, а по условию $d^3 \times d^{z-3} e^z = d^z e^z$, следовательно, показатель z основного числа e^z может быть только $z = 4$, в то время как $e^z = \left[1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right] \sim \left[n + 2k_{n-1}^{(2)}\right]$, то есть род полинома равен 2, и следовательно значение показателя z также должно равняться 2, что создает противоречие. Значит, в этом случае основное число $e^z = (e^2)^2$, и тогда $z = 4$. Теперь разделим все части равенства на d^3, получим

$$\left(\frac{a}{d}\right)^3 - \left(\frac{b}{d}\right)^3 = d^{z-3} \times e^z = \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right) \times \left(\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{ab}{d^2} + \left(\frac{b}{d}\right)^2\right)$$

Поскольку полученное произведение $d^{z-3} \times e^z$будет иметь целое значение, потому что в противном случае полином одночлена

$$e^z = 1 + 6\frac{k^{(3)}_{\frac{a}{d}-1} - k^{(3)}_{\frac{b}{d}-1}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} = 1 + 6\sum_{j=\frac{b}{d}}^{\frac{a}{d}-1} \frac{k_j^{(2)}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}}$$

имея фигурные числа с нецелыми индексами $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$, делает соответственно неопределенными его значение, что противоречит условию Леммы. Поэтому становится очевидным, что d^3 является общим множителем всех частей равенства имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{d}$ и $b' = \frac{b}{d}$, и значит, данное равенство можно записать в этих меньших величинах

$$a'^3 - b'^3 = d^{z-3} \times e^z = (a' - b') \times (a'^2 + a'b' + b'^2)$$

Очевидно, что в этом случае составное число $d^{z-3} \times e^z$ уже не будет являться одночленом, следовательно, повторное выделение одноименного одночлена становится невозможным, и таким образом будет получено оригинальное уравнение $a'^3 - b'^3 = d^{z-3} \times e^z$.

Частный случай b)

Другим таким уравнением $a^x - b^x = d^x \times d^{z-x} e^z$, где общий делитель может быть одночленом d^x, есть частный случай, когда $x = 2$, потому что в данном случае основным числом e^z служит сумма оснований $(a + b)$ в разложении разности двух одночленов в степени 2:

$$a^2 - b^2 = d^2 \times d^{z-2} e^z = (a - b) \times (a + b)$$

которое легко может быть получено суммированием оснований $e^z = a + b$. Таким образом, запишем равенство

$$a^2 - b^2 = d^2 \times d^{z-2} e^z = (a - b) \times (a + b)$$

далее разделим все части равенства на d^2, получим

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \left(\frac{b}{d}\right)^2 = d^{z-2} \times e^z = \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right) \times \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)$$

поскольку полученное произведение $d^{z-2} \times e^z$ будет иметь целое значение, потому что в противном случае полином одночлена

$$e^z = 1 + 2\frac{k^{(2)}_{\frac{a}{d}-1} - k^{(2)}_{\frac{b}{d}-1}}{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}} = 1 + 2\sum_{j=\frac{b}{d}}^{\frac{a}{d}-1} j$$

имея в правой части равенства фигурные числа с нецелыми индексами $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ делает соответственно неопределенными значения e^z, что противоречит условию Леммы. Поэтому становится очевидным, что одночлен d^2 является общим множителем всех частей данных равенств имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{d}$ и $b' = \frac{b}{d}$, и значит, данное равенство можно записать в этих меньших величинах

$$a'^2 - b'^2 = d^{z-2} \times e^z = (a' - b') \times (a' + b')$$

Очевидно, что в этом случае составное число $d^{z-2} \times e^z$ уже не будет являться одночленом, следовательно, повторное выделение одноименного одночлена становится невозможным, и таким образом будет получено оригинальное уравнение $a'^2 - b'^2 = d^{z-2} \times e^3$.

Частный случай c)

И наконец, уравнением $a^x - b^x = d \times d^{z-1}$, где общим делителем может быть одночлен m^x, входящий в состав основного числа d^{z-1} и имеющий зависимость $d = lm$, есть частный случай, когда составное число принимает первоначальный релевантный вид $d \times d^{z-1}$, в котором основное число равно головному, но находится в степени $z-1$. В этом случае можно записать равенство $d \times d^{z-1} = (a-b)^z = (a-b) \times (a-b)^{z-1}$, которому будет удовлетворять только разность одночленов вида $a^{2^n} - b^{2^n}$, где $2^n = x$, поскольку тогда эта разность приобретает вид $a^2 - b^2, a^4 - b^4, a^8 - b^8, a^{16} - b^{16}, a^{32} - b^{32}$, или в разложенном виде

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$
$a^8 - b^8 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
$a^{16} - b^{16} = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$
$a^{32} - b^{32} = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$

и так далее, которая может быть представлена формулой общего вида

$$a^{2^n} - b^{2^n} = (a-b)\prod_{i=0}^{n-1}\left(a^{2^i} + b^{2^i}\right)$$

где первым членом всегда есть разность оснований одночленов $(a-b)$. Поэтому справедливо будет записать многоступенчатое равенство

$$a^{2^n} - b^{2^n} = (a-b)\prod_{i=0}^{n-1}\left(a^{2^i} + b^{2^i}\right) = d \times d^{z-1} = (a-b) \times (a-b)^{z-1} =$$
$$= (a-b) \times \sum_{i=1}^{p}\left(a^{x-i}b^{i-1} + a^{i-1}b^{x-i}\right)$$

Далее рассматривая уже двойное равенство

$$a^x - b^x = d \times d^{z-1} = (a-b) \times (a-b)^{z-1}$$

где $x = 2^n$, убеждаемся, что d^x здесь не может служить общим делителем, потому что по определению $d \times d^{z-1} = (a-b) \times (a-b)^{z-1}$, а значит $d = (a-b)$, и тогда в случае деления на d^x, получим равенство

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{2^n} - \left(\frac{b}{d}\right)^{2^n} = d \times d^{z-1-x} = \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right) \times \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)^{z-1}$$

в котором рассматривая правое выражение получим

$$\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)^{z-1} = \left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right)^{z} = \left(\frac{a-b}{d}\right)^{z} = \left(\frac{a-b}{a-b}\right)^{z} = 1$$

что приводит к возникновению противоречия. Следовательно, головное число d в этом случае не может быть делителем и значит, оно состоит из произведения двух целых чисел $d = lm$, и тогда, учитывая, что составное число $d \times d^{z-1}$ имеет релевантный вид, в подстановке $lm \times (lm)^{z-1} = d \times d^{z-1}$ тоже будет соблюдаться релевантное соответствие правой части равенства. Теперь, принимая во внимание, то что $x = 2^n$, где $n > 1$, то есть x всегда имеет четные значения, выразим формулу основного числа в фигурных полиномах для четного x

$$a^x - b^x = lm \times l^{z-1}m^{z-1} = (a-b) \times \left(1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]\right)$$

Далее, поскольку l и m есть произвольные целые числа, и так как однородный одночлен можно выделить лишь из основного числа - произведения $l^{z-1}m^{z-1}$, то пусть им будет m^x, разделив на который все равенство получим

$$\left(\frac{a}{m}\right)^x - \left(\frac{b}{m}\right)^x = lm \times l^{z-1}m^{z-x-1} = \left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right) \times \left(1 + 2\frac{k_{\frac{a}{m}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{m}-1}^{(2)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{m}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{m}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{m}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{m}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}}\right]\right)$$

Очевидно, что преобразование должно приводить к адекватному изменению головного числа - произведению lm, так как изменилось выражение головного числа правой части с разности $(a-b)$ на $\left(\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\right)$. Следовательно, число m переходит в область основного числа и окончательно составное число средней части равенства приобретает релевантный вид $l \times l^{z-1}m^{z-x}$.

Поскольку полученное произведение $l \times l^{z-1}m^{z-x}$ будет иметь целое значение, потому что в противном случае фигурный полином основного числа

$$l^{z-1}m^{z-x} = 1 + 2\frac{k_{\frac{a}{m}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{m}-1}^{(2)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{m}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{m}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{m}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{m}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}}\right]$$

имея фигурные числа с нецелыми индексами $\frac{a}{m}$ и $\frac{b}{m}$, делает соответственно неопределенными его значение, что противоречит условию Леммы. Поэтому становится очевидным, что m^x является общим множителем всех частей равенства имеющих меньшие целые значения оснований: $a' = \frac{a}{m}$ и $b' = \frac{b}{m}$, и значит, данное равенство можно записать в этих меньших величинах

$$a'^x - b'^x = l \times l^{z-1}m^{z-x} = (a'-b') \times \left(1 + 2\frac{k_{a'-1}^{(2)} - k_{b'-1}^{(2)}}{a'-b'} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} - k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a'-b'} + V_i'^p \frac{k_{a'-i+1}^{(2i+2)} - k_{b'-i+1}^{(2i+2)}}{a'-b'}\right]\right)$$

Очевидно, что в этом случае составное число $l \times l^{z-1}m^{z-x}$ уже не будет являться одночленом, следовательно, повторное выделение однородного одночлена становится невозможным, и таким образом будет получено оригинальное уравнение $a'^{2^n} - b'^{2^n} = l \times l^{z-1}m^{z-x}$.

Лемма доказана

Следствия Леммы 2.2.1

1. Уравнения Варианта 2.2.1 существуют для нечетных и четных показателей x
4. Данные уравнения только за один шаг преобразования - деления на общий делитель приводятся к оригинальному виду общего случая $a'^x - b'^x = d^z \times e^{z-x}$, а также к частным случаям
   a) $a'^3 - b'^3 = d^{z-3} \times e^z$
   b) $a'^2 - b'^2 = d^{z-2} \times e^z$
   c) $a'^x - b'^x = l \times l^{z-1} m^{z-x}$, где $x = 2^n, n > 1$

5. Общим делителем уравнений общего случая $a^x - b^x = d^z e^{z-x} \times e^x$ есть одночлен e^x, который находится в основной части составного числа, за исключением частных случаев, где в уравнении
   a) $a^3 - b^3 = d^3 \times d^{z-3} e^z$ одночлен d^3 расположен в головной части составного числа
   b) $a^2 - b^2 = d^2 \times d^{z-2} e^z$ одночлен d^2 расположен в головной части составного числа
   c) $a^x - b^x = lm \times l^{z-1} m^{z-1}$ одночлен m^x расположен в основной части составного числа

6. Величина показателя z в уравнениях общих случаев $a^x - b^x = d^z e^{z-x} \times e^x$ определяется из равенства $z = x + 1$, которое в свою очередь следует из доказательства Леммы, где полученные значения фигурных полиномов в скобках, для нечетного x

$$e^z = \left(1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right)^z$$

и для четного x

$$e^z = \left(1 + 2\frac{k_{\frac{a}{e}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{e}-1}^{(2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{e}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right]\right)^z$$

могут быть только основаниями одночленов e^z по определению $e^z = (e)^z$, и которые равны одночлену e^{z-x} для нечетного x

$$e^{z-x} = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}$$

и для четного x

$$e^{z-x} = 1 + 2\frac{k_{\frac{a}{e}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{e}-1}^{(2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{e}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right]$$

из чего следует, что $e^{z-x} = e^1$, а значит $z - x = 1$ и тогда $z = x + 1$.

Также, величина показателя z определяется для частных случаев:
a) в уравнении вида $a^3 - b^3 = d^3 \times d^{z-3} e^z$ вследствие подобия $e^z = \left[1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1} \frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right] \sim \left[n + 2k_{n-1}^{(2)}\right]$ как было показано выше, показатель $z = 4$, который следует из равенства $e^z = (e^2)^2$*
e) в уравнении вида $a^2 - b^2 = d^2 \times d^{z-2} e^z$ как $z = x + 1$

f) в уравнении вида $a^x - b^x = lm \times l^{z-1}m^{z-1}$ как для общего случая $z = x + 1$, вследствие того что общим делителем здесь есть одночлен m^x основного числа $l^{z-1}m^{z-1}$

7. В уравнениях Варианта 2.1.1 общего случая существует механизм дополнений, суть которого заключается в том, что основное число e для нечетного x

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} + k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} + \frac{b}{e}} = d^n \cdot p$$

и для четного x

$$e = 1 + 2\frac{k_{\frac{a}{e}-1}^{(2)} - k_{\frac{b}{e}-1}^{(2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i}^{(2i+1)} - k_{\frac{b}{e}-i}^{(2i+1)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}} + V_i'^p \frac{k_{\frac{a}{e}-i+1}^{(2i+2)} - k_{\frac{b}{e}-i+1}^{(2i+2)}}{\frac{a}{e} - \frac{b}{e}}\right] = d^n \cdot p$$

может состоять из произведения, по крайней мере, одного числа p и одночлена d^n, где $n \geq 1$, который будет дополнять головное число до показателя z по так называемому механизму дополнения: $d^z = d^{z-n} \times d^n$. Тогда оригинальное уравнение принимает вид

$$a'^x - b'^x = d^{z-n} \times d^n \cdot p$$

и следовательно, в этом случае общим множителем/делителем уравнения становится одночлен p^x. Данный механизм не является доминирующим для всего множества x, и его преимущественное проявление наблюдается в уравнениях низших показателей степени, к примеру, этот механизм ярко выражен для степени $x = 3, 4$

***Примечание.** Однако обнаружено, что показатель степени z может принимать значение $z = 5$, а также вероятно и другие значения, потому что это обстоятельство на данный момент является открытой проблемой, которая называется «Проблема фантома». Это связано с тем, что в случае $z = 4$ основным числом есть одночлен $e^4 = 7^4 = 2401$, который служит телом фантома, а вот во всех остальных случаях он входит в состав основного числа и проявляется в многочисленных случаях в виде $e^4 \cdot p$, где p – натуральное число которым есть простое число или произведение простых чисел, чем и вызывает свое название. Проблема фантома формулируется так:
a) содержит ли частный случай c) фантомы других видов
b) какую зависимость имеет фантом в основном числе

Анализ характера общего множителя уравнений Варианта 2.2.1

Общий случай

Так как фигурные полиномы обладают характеристическими свойствами, исследование простоты общего множителя оригинальных уравнений Варианта 2.2.1 общего случая сводится к структурному анализу основного числа - основания одночлена e^x, так как данное основание e формируется из фигурного полинома, характер которого определяется формулой для нечетного x

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} - k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a' - b'}$$

и для четного x

$$e = 1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right]$$

Эти формулы дают четкое представление о порядке формирования числа e, потому что их запись, за исключением дробных выражений членов полинома имеющих разность фигурных чисел в числителях и разность оснований в знаменателях, повторяют формулы (1.3.10) и (1.3.11). Они представляют собой формулы нечетных чисел, потому что каждый их член, за исключением показательного, имеет единственно четные коэффициенты умножения U_i^p для нечетного x (таблица 3 стр. 30), и коэффициенты V_i^p; $V_i'^p$ для четного x (таблица 4, стр. 31), которые делают в свою очередь каждый данный член полинома четным, что естественно приводит к получению такого же четного значения их суммы, и уже к этому итоговому четному результату суммируется показательный член - 1. Исключение составляет лишь случай, когда оба основания a и b четные. Поскольку любое нечетное число может быть как единственно простым числом, так и произведением двух и более простых чисел, то данные формулы производят ряд значений, среди которых имеется множество как самостоятельно простых чисел p

$$e = 1 + \sum_{i=1}^{p} U_i^p \frac{k_{a'-i}^{(2i+1)} + k_{b'-i}^{(2i+1)}}{a' + b'} = p$$

для нечетного x, и для четного x

$$e = 1 + 2\frac{k_{a-1}^{(2)} - k_{b-1}^{(2)}}{a-b} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k_{a-i}^{(2i+1)} - k_{b-i}^{(2i+1)}}{a-b} + V_i'^p \frac{k_{a-i+1}^{(2i+2)} - k_{b-i+1}^{(2i+2)}}{a-b}\right] = p$$

так и произведения двух и более простых чисел - $p_1 p_2$, $p_1 p_2 .. \times p_n$, а также их комбинации $p_1^m p_2 .. \times p_n$

Таким образом, утверждение гипотезы Биля относительно простоты делителей является обоснованным.

Частные случаи a) и b)

В частных случаях a) и b), где общими множителями оригинальных уравнений есть головные числа d^3 и d^2 составных чисел $d^3 \times d^{z-3} e^z$ и $d^2 \times d^{z-2} e^z$ соответственно, исследовать порядок формирования оснований d и их характер невозможно, потому что в этих случаях они просто задаются разностью оснований $a - b$.

Частный случай c)

Определение характера общего множителя частного случая c) необходимо начать с рассмотрения оригинального уравнения двойного равенства, которое имеет вид

$$a'^x - b'^x = l \times l^{z-1} m^{z-x} = (a' - b') \times \prod_{i=0}^{n-1}\left(a'^{2^i} + b'^{2^i}\right)$$

где $x = 2^n, n > 1$. Как было показано, общим множителем для этого случая есть одночлен m^x, характер основания которого раскрывает полином четной степени, описанный выше в разделе «общий случай». Однако, в силу специфики этого случая, а именно формы записи релевантного вида составного числа $l \times l^{z-1} m^{z-x}$ данный случай стоит рассмотреть подробнее.

Так как данный случай представляет разность одночленов вида $a'^x - b'^x$, где $x = 2^n, n > 1$, то здесь существует возможность выделить разность квадратных одночленов $a'^2 - b'^2$ и подвергнуть уже это полученное равенство системному анализу в степенном поле 2. Итак, приступим к выделению разности квадратных одночленов. Для этого изменим условия цикла умножения и получим искомую разность квадратов

$$a'^x - b'^x = (a^{2\prime} - b^{2\prime}) \times \prod_{i=1}^{n-1}\left(a'^{2^i} + b'^{2^i}\right)$$

Очевидно, что преобразование правой части равенства приведет к эквивалентному изменению составного числа $l \times l^{z-1}m^{z-x}$ средней части двойного равенства, и так как, во-первых, в этом случае подвергнуться разложению может только одночлен l^{z-1} основной части составного числа, поскольку число m^{z-x} уже не является одночленом, а во-вторых, в отсутствии строгих критериев данного преобразования введем некоторый показатель $p+1$, и запишем

$$a'^x - b'^x = l^{p+1} \times l^{z-(p+1)}m^{z-x} = (a'^2 - b'^2) \times \prod_{i=1}^{n-1}\left(a'^{2^i} + b'^{2^i}\right)$$

Так как теперь равенство приведено к релевантному виду, справедливым будет выделить разность квадратных одночленов

$$a'^2 - b'^2 = l^{p+1}$$

Из этого равенства становится ясным, что одночлен l^{p+1} есть результат суммы элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2.

$$a'^2 - b'^2 = \sum_{j=b'}^{a'-1} B_j = l^{p+1}$$

Найдем, какие при этом числовые значения может принимать основание l, где в качестве первого критерия примем выполнение равенства

$$a'^2 - b'^2 = l \times l^p = (a' - b') \times (a' + b')$$

то есть соблюдение условий $l = (a' - b')$ и $l^p = (a' + b')$, а вторым критерием будет удовлетворение взаимной простоты или минимальности значений a' и b', поскольку ими являются минимально возможные значения в ряду оснований n степенного поля 2. Следует обратить внимание, что показатель степени здесь ограничен условием $p \geq 2$, так как невозможно получить одно и тоже число одновременно в результате разности и суммы оснований $a' \pm b'$:

$$a'^2 - b'^2 \neq l \times l \neq (a' - b') \times (a' + b')$$

Таким образом, $p \geq 1$, и пусть $l = 1$, тогда получим $l = a' - b'$, и в этом случае становится очевидным, что разность оснований $a' - b'$не может равняться 1, потому что иначе данное равенство перестает быть равенством в составных числах и сводятся к Лемме 2.2.0, и значит, основания a' и b' должны отличаться друг от друга больше чем на единицу.

Пусть $l = 2$, в этом случае ряд получаем ряд значений $l^p = 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots.$ и так далее. Имея в качестве первого условия удовлетворение критерию 1, основания a' и b' в этом случае могут быть подобраны только единственным образом: $a' = \frac{2^p}{2} + 1$ и $b' = \frac{2^p}{2} - 1$. Подставляя найденные значения в уравнение, получим

$$a'^2 - b'^2 = \left(\frac{2^p+2}{2} - \frac{2^p-2}{2}\right) \times \left(\frac{2^p+2}{2} + \frac{2^p-2}{2}\right) =$$

$$([2^{p-1}+1] - [2^{p-1}-1]) \times ([2^{p-1}+1] + [2^{p-1}-1])$$

Анализ полученных значений $[2^{p-1}+1]$ и $[2^{p-1}-1]$ показывает, что это есть два последовательных нечетных числа, которые по определению не могут иметь общего делителя, а значит, не могут быть уменьшены, следовательно, они являются наименьшими целыми значениями в ряду значений степенного поля 2. Таким образом, $l = a' - b' = 2$ удовлетворяет также и второму критерию, что подтверждает решение данного уравнения, где в итоге получим

$$a'^2 - b'^2 = ([2^{p-1}+1] - [2^{p-1}-1]) \times ([2^{p-1}+1] + [2^{p-1}-1]) = 2 \times 2^p$$

Пусть $l = 3$, в этом случае получаем ряд значений $l^p = 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, \ldots..$ и так далее. Имея в качестве первого условия удовлетворение критерию 1, основания a' и b' в этом случае могут быть подобраны только единственным образом: $a' = \frac{3^p}{2} + \frac{3}{2}$ и $b' = \frac{3^p}{2} - \frac{3}{2}$. Подставляя найденные значения в уравнение, получим

$$a'^2 - b'^2 = \left(\frac{3^p+3}{2} - \frac{3^p-3}{2}\right) \times \left(\frac{3^p+3}{2} + \frac{3^p-3}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2}(3^{p-1}+1) - \frac{3}{2}(3^{p-1}-1)\right) \times \left(\frac{3}{2}(3^{p-1}+1) + \frac{3}{2}(3^{p-1}-1)\right)$$

Анализ полученных значений $\frac{3}{2}(3^{p-1}+1)$ и $\frac{3}{2}(3^{p-1}-1)$ показывает, что это есть два числа, каждое из которых имеет общий множитель 3, и следовательно может быть поделено на число 3, а значит, основания a' и b' примут меньшие значения в ряду оснований степенного поля 2, и в итоге получим

$$a''^2 - b''^2 = \left(\frac{3^{p-1}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3^{p-1}}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{3^{p-1}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3^{p-1}}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$a''^2 - b''^2 = 1 \times 3^{p-1}$$

Таким образом, $l = a' - b' = 3$ не удовлетворяет второму критерию, и помимо этого, имея разность оснований $a''^2 - b''^2 = 1$, уравнение сведется к Лемме 2.2.0

Пусть $l = 4$, в этом случае получаем ряд значений $l^p = 64, 256, 1024, 4096, 16384, 65536, \ldots..$ и так далее. Имея в качестве первого условия удовлетворение критерию 1, основания a' и b' в этом случае могут быть подобраны только единственным образом: $a' = \frac{4^p}{2} + 2$ и $b' = \frac{4^p}{2} - 2$. Подставляя найденные значения в уравнение, получим

$$a'^2 - b'^2 = \left(\frac{4^p+4}{2} - \frac{4^p-4}{2}\right) \times \left(\frac{4^p+4}{2} + \frac{4^p-4}{2}\right) =$$

$$\left(2(4^{p-1}+1) - 2(4^{p-1}-1)\right) \times \left(2(4^{p-1}+1) + 2(4^{p-1}-1)\right)$$

Анализ полученных значений $2(4^{p-1}+1)$ и $2(4^{p-1}-1)$ показывает, что это есть два числа, каждое из которых имеет общий множитель 2, и следовательно может делиться на число 2, а значит, основания a' и b' могут принять меньшие значения в ряду оснований степенного поля 2.

Таким образом, $l = a' - b' = 4$ не удовлетворяет второму критерию, и следовательно, также исключается из рассмотрения.

Следуя индуктивной логике, для всех последующих значений, которое может принимать l, уравнение разности одночленов $a'^2 - b'^2$ можно представить в общем виде

$$a'^2 - b'^2 = \left(\frac{l^p + l}{2} - \frac{l^p - l}{2}\right) \times \left(\frac{l^p + l}{2} + \frac{l^p - l}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{l}{2}(l^{p-1} + 1) - \frac{l}{2}(l^{p-1} - 1)\right) \times \left(\frac{l}{2}(l^{p-1} + 1) + \frac{l}{2}(l^{p-1} - 1)\right)$$

где каждое из полученных значений $\frac{l}{2}(l^{p-1} + 1)$ и $\frac{l}{2}(l^{p-1} - 1)$ будет делиться на число l, а значит, основания a' и b' могут принимать меньшие значения в ряду оснований степенного поля 2. Таким образом, все случаи, когда $l = a' - b' > 2$ не удовлетворяет второму критерию, и следовательно также не удовлетворяют заданным условиям.

Таким образом, учитывая вышеописанный анализ, приходим к следствию:

- в уравнениях Варианта 2.2.1 частного случая с) основания a' и b' есть два нечетных числа, отличающихся друг от друга разностью оснований $a' - b' = 2$

И окончательно, возвращаясь к вопросу характера общего множителя уравнения частного случая с), рассмотрим формулу полинома основного числа $l^{z-1}m^{z-x}$

$$l^{z-1}m^{z-x} = 1 + 2\frac{k^{(2)}_{\frac{a}{m}-1} - k^{(2)}_{\frac{b}{m}-1}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + \sum_{i=1}^{p}\left[V_i^p \frac{k^{(2i+1)}_{\frac{a}{m}-i} - k^{(2i+1)}_{\frac{b}{m}-i}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}} + V_i'^p \frac{k^{(2i+2)}_{\frac{a}{m}-i+1} - k^{(2i+2)}_{\frac{b}{m}-i+1}}{\frac{a}{m} - \frac{b}{m}}\right]$$

Здесь в отличие от описанного выше механизма дополнений, число $l^{z-1}m^{z-x}$ уже является избыточным, то есть оно является четным вследствие того что в его составе одночлен m^{z-x} умножен $z - 1$-раз на число 2, поскольку как было показано $l = 2$. Поэтому в формуле данного представления основного числа общим делителем оснований в уравнении будет нечетное число m, а в случае избытка числа 2 в основном числе хотя бы в n -раз – общим делителем оснований будет четное число.

Примеры решения уравнения $a^x - b^x = c^z$, где c^z - составное число

Общий случай

Поиск уравнений вида $a^x - b^x = c^z$, где c^z - составное число, для общего случая Варианта 2.2.1 не представляет трудности. В этом случае необходимо действовать в обратном порядке относительно порядка повествования Леммы 2.2.1. Для этого воспользуемся задающим алгоритмом, согласно которому первоначально из ряда оснований n степенного поля x необходимо выбрать два числа a' и b', разность которых будет равна значению головного числа d^{x+1} – в случае основного механизма или d^x - в случае механизма дополнений. Затем разность одночленов с этими основаниями $a'^x - b'^x$ разложим в составное число, согласно теоремы о составных числах, и получим оригинальное уравнение вида $a'^x - b'^x = d^z \times e$, где $d^z \times e$ составное число, $z = x + 1$ или $d^x \times e \cdot d$ - для механизма дополнений. Здесь основное число e будет служить общим множителем e^x, умножая на который все уравнение получим искомое уравнение $a^x - b^x = c^z$, где c^z - составное число.

Пример 1. Общий случай

Для $x = 2$ формула двойного равенства принимает вид $a'^2 - b'^2 = d^3 \times e = (a' - b') \times (a' + b')$. Найдем разность двух чисел $a' - b'$, которые с учетом механизма дополнения - $d^3 \times e = d^2 \times e \cdot d$, позволят получить значение одночлена d^2. Пусть это будут числа $a' = 19, b' = 15$, а $d^2 = 4 = 2^2$, тогда

$$19^2 - 15^2 = 2^2 \times 34 = (19 - 15) \times (19 + 15)$$
$$19^2 - 15^2 = 2^3 \times 17$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 17^2, получим

$$323^2 - 255^2 = 34^3$$

или в формулах двойного равенства

$$323^2 - 255^2 = 2^2 \cdot 17 \times 17^2 \cdot 2 = (323 - 255) \times (323 + 255)$$

Общим делителем оснований здесь есть простое число 17.

Пример 2. Общий случай
Для $x = 3$ формула двойного равенства принимает вид $a'^3 - b'^3 = d^4 \times e = (a' - b') \times (a'^2 + a'b' + b'^2)$, которую для определения характера общего делителя, а также изучения процесса формирования основного числа e запишем в фигурных полиномах

$$a'^3 - b'^3 = d^4 \times e = (a' - b') \times \left(1 + 6\frac{k_{a'-1}^{(3)} - k_{b'-1}^{(3)}}{a' - b'}\right)$$

Найдем разность двух чисел $a' - b'$, которые с учетом механизма дополнения -$d^4 \times e = d^3 \times ed$ позволят получить значение одночлена d^3. Пусть это будут числа $a' = 52, b' = 25$, а $d^3 = 27 = 3^3$, тогда

$$52^3 - 25^3 = 3^3 \times 4629 = (52 - 15) \times \left(1 + 6\frac{23426 - 2600}{52 - 25}\right)$$

$$52^3 - 25^3 = 3^4 \times 1543 = (52 - 15)(1 + 4628)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 1543^3, получим

$$80236^3 - 38575^3 = 4629^4$$

или в формулах двойного равенства

$$80236^3 - 38575^3 = 3^3 \cdot 1543 \times 1543^3 \cdot 3 = (80236 - 38575) \times (1 + 11020950020)$$

Здесь общим делителем оснований есть простое число 1543.

Пример 3. Общий случай
Так как механизм дополнения позволяет получать более компактные уравнения, рассмотрим доминирующий механизм, при котором разность двух оснований $a' - b'$ задает значение одночлена d^4. Пусть это будут числа $a' = 851, b' = 226$, а $d^4 = 625 = 5^4$, тогда

$$851^3 - 226^3 = 5^4 \times 967603 = (851 - 226) \times \left(1 + 6\frac{102715700 - 1923825}{851 - 226}\right)$$

$$851^3 - 226^3 = 5^4 \times 967603 = (851 - 226)(1 + 967602)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 967603^3, получим

$$823430153^3 - 218678278^3 = 4838015^4$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 967603.

Как было показано выше, данный фигурный полином основного числа e обладает подобием фигурному полиному ряда значений An степенного поля 2: $\left[1+6\sum_{j=b'}^{a'-1}\frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right]\sim\left[n+2k_{n-1}^{(2)}\right]$, благодаря чему это свойство вносит ряд особенностей в уравнения определенного типа в составных числах степенного поля 3. В силу того, что данный полином обладает более существенными отличиями в сравнении с полиномом $1+6k_n^{(2)}$, то такие же существенные отличия, проявляются и в его свойствах. Речь в частности идет о «проблеме фантома», как уже упоминалось выше, и в данном примере можно его наблюдать. На данный момент обнаружена лишь общая его закономерность, которая в этом примере отчетливо проявляется. Итак, в уравнении

$$851^3-226^3=5^4\times 967603=(851-226)(1+967602)$$

основное число e=967603 с учетом упомянутых свойств может быть выражено как e=$(49)^2\cdot 403$, где явно прослеживается «тело фантома» - $(49)^2$. С учетом этого уравнение примет вид

$$851^3-226^3=5^4\times 7^4\cdot 403=(851-226)(1+967602)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 403^3, получим

$$342953^3-91078^3=14105^4$$

Здесь общим делителем оснований есть натуральное число 403.

Таким образом, имея одно исходное оригинальное уравнение можно получить два различных уравнения Варианта 2.2.1

Пример 4. Общий случай

Для $x=4$ формула двойного равенства принимает вид $a'^4-b'^4=d^5\times e=(a'-b')(a'^3+a'^2b'+a'b'^2+b'^3)$, в которой для определения характера общего делителя выразим основное число в фигурных полиномах

$$a'^4-b'^4=d^5\times e=(a'-b')\times\left(1+2\frac{k_{a'-1}^{(2)}-k_{b'-1}^{(2)}}{a'-b'}+12\frac{k_{a'-1}^{(3)}-k_{b'-1}^{(3)}}{a'-b'}+24\frac{k_{a'-2}^{(4)}-k_{b'-2}^{(4)}}{a'-b'}\right)$$

Найдем разность двух оснований $a'-b'$, которая с учетом механизма дополнения - $d^5\times e=d^4\times ed$ позволяет получить значение одночлена d^4. Пусть это будут числа $a'=120, b'=39$, а $d^4=81=3^4$, тогда

$$\begin{aligned}120^4-39^4&=3^4\times 2531439\\&=(120-39)\times\left(1+2\frac{7140-741}{120-39}+12\frac{287980-9880}{120-39}+24\frac{8495410-91390}{120-39}\right)\end{aligned}$$

$$120^4-39^4=3^4\times 3\cdot 843813=(120-39)(1+158+41200+2490080)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 843813^4, получим

$$101257560^4-32908707^4=2531439^5$$

Общим делителем оснований здесь есть натуральное число 843813.

Пример 5. Общий случай

Для $x=5$ формула двойного равенства принимает вид $a'^5-b'^5=d^6\times e=(a'-b')(a'^4+a'^3b'+a'^2b'^2+a'b'^3+b'^4)$, в которой для определения характера общего делителя выразим основное число в фигурных полиномах

$$a'^5 - b'^5 = d^6 \times e = (a' - b') \times \left(1 + 30\frac{k^{(3)}_{a'-1} - k^{(3)}_{b'-1}}{a' - b'} + 120\frac{k^{(5)}_{a'-2} - k^{(5)}_{b'-2}}{a' - b'}\right)$$

Найдем разность двух оснований $a' - b'$, которая будет составлять значение одночлена d^6. Пусть это будут числа $a' = 93, b' = 29$, а $d^6 = 64 = 2^6$, тогда

$$93^5 - 29^5 = 2^6 \times 2531439 = (93 - 29) \times \left(1 + 30\frac{134044 - 4060}{93 - 29} + 120\frac{57940519 - 169911}{93 - 29}\right)$$

$$93^5 - 29^5 = 2^6 \times 108380821 = (93 - 29) \times (1 + 60930 + 108319890)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 108380821^5, получим

$$10079416353^5 - 3143043809^5 = 216761642^6$$

Общим делителем оснований здесь есть натуральное число 108380821.

Примеры решения уравнения $a^x - b^x = c^z$, где c^z - составное число, для частных случаев

Поиск уравнений вида $a^x - b^x = c^z$, где c^z - составное число, для частных случаев a), b), c) Варианта 2.2.1 представляет бóльшую сложность, нежели чем для общих случаев. Причиной этому в частности для случая a) есть обозначенная проблема фантома, в которой существует пока не изученный механизм формирования одночленов в основной части составного числа - $d \times e^z$, описываемого формулой $e^z = 1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1}\frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}$.

Для случая b) сложностей в поиске уравнений Варианта 2.2.1 не возникает, так как в двойном равенстве $a'^2 - b'^2 = d \times e^3 = (a' - b') \times (a' + b')$ значение одночлена основного числа e^3 может быть легко задано обычной суммой оснований - $a' + b'$.

Для случая c) поиск решений уравнений показан непосредственно в примерах ниже.

Пример 6 . Частный случай a)

Формула двойного равенства для этого случая принимает вид $a'^3 - b'^3 = d \times (e^2)^2 = (a' - b') \times \left(1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1}\frac{k_j^{(2)}}{a'-b'}\right)$. Так как полином основного числа $(e^2)^2$ обладает структурным и родовым подобием полиному $n + 2k^{(2)}_{n-1}$, то найдем его значение, для чего сначала приравняем полиномы

$$n + 2k^{(2)}_{n-1} = 1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1}\frac{k_j^{(2)}}{a' - b'}$$

затем, раскрыв полином $n + 2k^{(2)}_{n-1}$ получим

$$n + 2k^{(2)}_{n-1} = n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

теперь запишем

$$(e^2)^2 = n^2 = 1 + 6\sum_{j=b'}^{a'-1}\frac{k_j^{(2)}}{a' - b'}$$

Проведя поиск оснований a'и b', находим два значения $a' = 39$ и $b' = 16$, при которых получим

$$(e^2)^2 = n^2 = 1 + 6\sum_{j=16}^{39-1}\frac{k_j^{(2)}}{39-16} = 1 + 6\frac{9200}{23} = 2401$$

что равносильно

$$7^2 = n = 49$$

Таким образом двойное равенство примет вид

$$39^3 - 16^3 = 23 \times (7^2)^2 = (39 - 16) \times (1 + 2400)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 23^3, получим

$$897^3 - 368^3 = 161^4$$

или в формулах двойного равенства

$$897^3 - 368^3 = 23^2 \times 23^2 \cdot 49^2 = (897 - 368) \times (1 + 1270128)$$

Здесь общим делителем оснований есть простое число 23.

Данный пример есть пока что единственным примером проблемы фантома, в котором основным числом служит само тело фантома - 49^2, во всех остальных случаях оно входит в состав основного числа в виде произведения с другими числами.

Пример 7. Частный случай a)
Как уже упоминалось, показатель степени z для уравнений степенного поля 3 может принимать значение $z = 5$. Данный пример есть один из известных случаев проявления проблемы фантома, когда тело фантома входит в состав основного числа в виде произведения с другими числами.

Так, основаниями в этом примере есть числа $a' = 87, b' = 62$, и тогда получаем

$$87^3 - 62^3 = 25 \times 16807 = (87 - 62) \times \left(1 + 6\frac{109736 - 39711}{87 - 62}\right)$$

$$87^3 - 62^3 = 5^2 \times 7^5 = (87 - 62)(1 + 16806)$$

Как видно, основное число 16807 состоит из произведения тела фантома 49^2 и числа 7: $7 \cdot 49^2 = 16807$. Теперь умножая уравнение на общий множитель 7^3, получим

$$609^3 - 434^3 = 35^5$$

или в формулах двойного равенства

$$609^3 - 434^3 = 5^2 \cdot 7 \times 7^4 \cdot 5^3 = (609 - 434) \times (1 + 300124)$$

Общим делителем здесь есть простое число 5, а показатель z данного уравнения принимает значение 5.

Пример 8. Частный случай b)
Формула двойного равенства для этого случая принимает вид $a'^2 - b'^2 = d \times e^3 = (a' - b') \times (a' + b')$. Найдем сумму $a' + b'$, составляющую значение одночлена e^3.

Пусть это будут числа $a' = 20, b' = 7$, тогда $e^3 = 27 = 3^3$, и двойное равенство примет вид

$$20^2 - 7^2 = 13 \times 3^3 = (20 - 7) \times (20 + 7)$$

теперь умножая уравнение на общий множитель 13^2, получим

$$260^2 - 91^2 = 39^3$$

Общим делителем здесь есть простое число 13.

Пример 9. Частный случай c)
Формула двойного равенства для этого случая принимает вид

$$a'^x - b'^x = l \times l^{z-1} m^{z-x} = (a' - b') \times \prod_{i=0}^{n-1} \left(a'^{2^i} + b'^{2^i}\right)$$

Поскольку в анализе характера общего множителя уравнений Варианта 2.2.1 для частного случая с) было показано, что приведенное к релевантному виду двойное равенство разности квадратов $a'^2 - b'^2$ должно иметь вид $a'^x - b'^x = l \times l^p = (a' - b') \times (a' + b')$, следовательно, в поиске оснований a' и b' задающим критерием есть сумма данных оснований - $(a' + b')$, позволяющая получить одночлен l^p.

Пусть это будут числа $a' = 5,\ b' = 3$, и тогда разность их квадратов равна

$$5^2 - 3^2 = 2 \times 2^3 = (5 - 3) \times (5 + 3)$$

и теперь переходя к искомому равенству

$$5^4 - 3^4 = 2 \times 272 = (5 - 3) \times (5 + 3)(5^2 + 3^2)$$

где получим

$$5^4 - 3^4 = 2 \times 2^4 \cdot 17$$

и окончательно умножая уравнение на общий множитель 17^4, получим

$$85^4 - 51^4 = 34^5$$

Общим делителем оснований здесь есть простое число 17.

Пример 9. Частный случай c)
Формула двойного равенства для этого случая принимает вид

$$a'^x - b'^x = l \times l^{z-1} m^{z-x} = (a' - b') \times \prod_{i=0}^{n-1} \left(a'^{2^i} + b'^{2^i}\right)$$

Здесь также приведенное к релевантному виду двойное равенство разности квадратов $a'^2 - b'^2$ должно иметь вид $a'^x - b'^x = l \times l^p = (a' - b') \times (a' + b')$, следовательно, в поиске оснований a' и b' задающим критерием есть сумма данных оснований, позволяющая получить одночлен l^p. Пусть это будут числа $a' = 65, b' = 63$, и тогда разность их квадратов равна

$$65^2 - 63^2 = 2 \times 2^7 = (65 - 63) \times (65 + 63)$$

и теперь переходя к искомому равенству

$$65^8 - 63^8 = 2 \times 35244516311552 = (65 - 63) \times (65 + 63)(65^2 + 63^2)(65^4 + 63^4)$$

$$65^8 - 63^8 = 2 \times 128 \cdot 8194 \cdot 33603586$$

где получим

$$65^8 - 63^8 = 2 \times 2^8 \cdot 137673891842$$

и окончательно умножая уравнение на общий множитель 137673891842^8, получим

$$8948802969730^8 - 8673455186046^8 = 275347783684^9$$

Общим делителем оснований здесь есть натуральное число 137673891842.

Вариант 3. Уравнение $\boldsymbol{a^x + b^y = c^z}$, где $\boldsymbol{x \neq y \neq z}$

Лемма 3.1
Если имеется уравнение $a^x + b^y = c^z$, где a, b, c –взаимно-простые числа, то значит оно

a) является уравнением 3-го степенного поля: $a^3 + b^2 = \left(c^{\frac{z}{3}}\right)^3$

b) является уравнением 2-го степенного поля: $\left(a^{\frac{z}{2}}\right)^2 + b^y = c^2$ и $a^2 + b^y = \left(c^{\frac{z}{2}}\right)^2$

c) является уравнением 2-го степенного поля вида $a^x \pm b^y = c^2$, которое существует в форме неосновного уравнения степенного поля 2, то есть в этом уравнении оба одночлена a^x и b^y есть результат суммы элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2, где по крайней мере один из них не является результатом последовательной суммы этих элементов.

Доказательство
Так как уравнение $a^x + b^y = c^z$ может быть представлено в виде основного уравнения степенного поля, в котором одночлен c^z может быть получен как элемент ряда значений A_{n+j} степенного поля z

$$A_{n+j} = A_n + \sum_{j=n}^{n+j-1} B_j$$

где $A_n = a^x$ а $\sum_{j=n}^{n+j-1} B_j = b^y$, то первое, приведя это уравнение к основному уравнению степенного поля определенного типа

$$A_{n+j} - A_n = \sum_{j=n}^{n+j-1} B_j$$

убеждаемся, что в ряду значений An не может находиться два разнородных одночлена, и следовательно в этом случае, поскольку x и z произвольные величины, получим либо $a^x = \left(a^{\frac{x}{z}}\right)^z$, либо $c^z = \left(c^{\frac{z}{x}}\right)^x$. Второе, так как значение одночлена $b^y = \sum_{j=n}^{n+j-1} B_j$, и учитывая то что значения A_{n+j}и A_n есть взаимно-простые величины, то

a) согласно структурно-родовому анализу, единственным степенным полем, где в ряду вычетов Bn находятся элементы $B_n = b^2$, есть степенное поле 3, в котором для взаимно-простых значений A_{n+1} и A_n выполняется равенство

$$A_{n+1} - A_n = B_n = b^y$$

и следовательно таким уравнением будет

$$a^3 + b^2 = \left(c^{\frac{z}{3}}\right)^3$$

b) согласно теореме Ферма, единственным степенным полем, где в ряду вычетов Bn находятся элементы $B_n = b^y$ и $b^y = \sum_{j=n}^{n+j-1} B_j$, в котором для взаимно-простых значений A_{n+1} и A_n, в случае $(n+1) - n = 1$, выполняется равенство для нечетных оснований b

$$A_{n+1} - A_n = B_n = b^y$$

а также для взаимно-простых A_{n+2} и A_n, в случае $(n+2) - n = 2$, выполняется равенство для четных оснований b

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{j=n}^{n+1} B_j = b^y$$

и следовательно такими уравнениями будут соответственно

$$\left(a^{\frac{z}{2}}\right)^2 + b^y = c^2$$

и

$$\left(a^{\frac{z}{2}}\right)^2 + b^y = c^2 \text{ и } a^2 + b^y = \left(c^{\frac{z}{2}}\right)^2$$

c) далее, согласно теоремы о разложении n^m, единственным степенным полем, в котором элементы B_n ряда вычетов Bn не являются фигурными полиномами есть степенное поле 2. Действительно, они выражаются формулой $B_n = 1 + 2n$, где n – ряд натуральных чисел, и имеют родовую характеристику 1: $n^1 = n$. Вследствие этого свойства, как самостоятельные элементы B_n так и их последовательные суммы $\sum_{i=0}^{n-1} B_i$ могут составлять значения разнородных одночленов, как показано в теореме Ферма. Поэтому единственным степенным полем, в котором возможно существование неосновных уравнений степенного поля есть поле 2, в котором данные уравнения формально могут быть представлены в виде суммы

$$c^2 = \sum_{j=0}^{n-1}(1+2j) + \sum_{j=n}^{c-1}(1+2j)$$

и в виде разности

$$c^2 = \sum_{j=0}^{n}(1+2j) - \sum_{j=c}^{n}(1+2j)$$

где $\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$, $\sum_{j=n+1}^{c-1}(1+2j)$, $\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$ и $\sum_{j=c}^{n}(1+2j)$ - циклы суммирования элементов B_n, выраженных в виде $1 + 2j$, но где фактически, по крайней мере, один из циклов не будет являться последовательной суммой элементов B_n:

a) неосновное уравнение степенного поля 2, суммы

$$c^2 = \sum_{j=n_1}^{n_2-1}(1+2j) + \left[\sum_{j=n_2}^{c-1}(1+2j) + \sum_{j=0}^{n_1-1}(1+2j)\right]$$

где $a^x = \sum_{j=n_1}^{n_2-1}(1+2j)$, $b^y = \left[\sum_{j=n_2}^{c-1}(1+2j) + \sum_{j=0}^{n_1-1}(1+2j)\right]$, а $0 \dots n_1 \dots n_2 \dots c$ - элементы ряда оснований n степенного поля 2, в котором цикл получения одночлена b^y не является последовательной суммой элементов B_n

b) неосновное уравнение степенного поля 2, разности

$$c^2 = \sum_{j=n_1}^{n_3-1}(1+2j) - \left[\sum_{j=c}^{n_3-1}(1+2j) - \sum_{j=0}^{n_1-1}(1+2j)\right]$$

где $a^x = \sum_{j=n_1}^{n_3-1}(1+2j)$, $b^y = \left[\sum_{j=c}^{n_3-1}(1+2j) - \sum_{j=0}^{n_1-1}(1+2j)\right]$, а $0 \dots n_1 \dots c \dots n_3$ - элементы ряда оснований n степенного поля 2, в котором цикл получения одночлена b^y не является последовательной суммой элементов B_n

Обоснование существования формальных равенств подчиняется следствию 1 теоремы Ферма, где сказано, что любой элемент A_n ряда значений An может быть получен как результат суммы последовательности элементов B_n ряда вычетов Bn: $A_n = \sum_{i=0}^{n-1} B_i$. И разбивка этой последовательности элементов на сумму двух последовательностей $\sum_{j=0}^{n} B_j$ и $\sum_{j=n+1}^{c-1} B_j$ формально не нарушает этого правила, однако и не дает возможности каждой из этих сумм быть элементом a^x и b^y поскольку первая сумма опять таки согласно следствию 1 теоремы Ферма будет составлять квадратный одночлен. Поэтому, формально не нарушая этого условия, разбивка и последующая группировка сумм и разностей элементов приводит к фактическому удовлетворению условий существований таких уравнений, где как видно, по крайней мере один из них не будет являться результатом последовательной суммы этих элементов.
Лемма доказана

Примечание. Частный случай с) леммы 3.1 представляет Проблему 2 данной теории, поскольку будучи комбинационными уравнениями - то есть такими равенствами, в которых в отсутствии системного подхода и строгой теории, всегда могут иметь место комбинации, приводящие к существованию таких решений, данные уравнения требуют глубокого всестороннего анализа ввиду как самостоятельного интереса для теории, так и существенного влияния на связанные проблемы.

Примеры решения уравнения $a^x + b^y = c^z$, где a, b, c – взаимно-простые числа

Случай а)
Уравнением случая а), вида $a^x + b^y = c^z$ есть уравнение степенного поля 3:

$$13^2 + 7^3 = 2^9$$

которое согласно основному уравнению степенного поля $A_{n+1} - A_n = B_n$ принимает вид

$$8^3 - 7^3 = 13^2$$

Случай b)
Уравнением случая b), вида $a^x + b^y = c^z$ есть уравнения степенного поля 2:

$$1^2 + 2^3 = 3^2, \qquad 2^5 + 7^2 = 3^4 \text{ и } 3^5 + 11^4 = 122^2$$

которые согласно основному уравнению степенного поля $A_{n+1}-A_n = B_n$, для $(n+1) - n = 1$, принимает вид

$$122^2 - 121^2 = 3^5$$

и для $(n+2) - n = 2$, согласно основному уравнению степенного поля $A_{n+2}-A_n = b^y$ принимает вид

$$3^2 - 1^2 = 2^3 \text{ и } 9^2 - 7^2 = 2^5$$

Случай c)
Уравнениями случая c) есть уравнения неосновного вида степенного поля 2

$$71^2 = 2^7 + 17^3$$
$$1549034^2 = 15613^3 - 33^8$$
$$2213459^2 = 65^7 - 1414^3$$
$$15312283^2 = 113^7 - 9262^3$$
$$21063928^2 = 17^7 + 76271^3$$
$$30042907^2 = 48^8 + 96222^3$$

Пример 1. Случай c)
Рассмотрим уравнение $71^2 = 2^7 + 17^3$. Согласно формуле уравнения степенного поля неосновного типа, одночлен 71^2 может быть получен как

$$c^2 = \sum_{j=0}^{n-1}(1+2j) + \sum_{j=n}^{c-1}(1+2j)$$

Здесь, формально, цикл $\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$ должен формировать одночлен 2^7, а цикл $\sum_{j=n+1}^{c-1}(1+2j)$ - соответственно одночлен 17^3. Однако одночлен 2^7может быть получен в случае взаимно-простых элементов A_n и A_{n+j} только при условии оснований $(n+2) - n = 2$, а в данном случае если ограничить цикл с учетом приведенных условий - $\sum_{j=0}^{1}(1+2j)$, то определенно одночлен 2^7 получен не будет. Следовательно, элементы A_n и A_{n+j} не являются взаимно-простыми величинами, и имеют общий множитель, который смещает цикл суммирования $\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$ в ряду вычетов Bn, действительно

$$\sum_{j=0}^{4-1}(1+2j) + \sum_{j=4}^{12-1}(1+2j) + \sum_{j=12}^{71-1}(1+2j) = 71^2$$

и теперь проведя группировку слагаемых равенства, получим фактическое равенство

$$\sum_{j=4}^{12-1}(1+2j) + \left[\sum_{j=12}^{71-1}(1+2j) + \sum_{j=0}^{4-1}(1+2j)\right] = 71^2$$

или

$$2^7 + 17^3 = 71^2$$

Здесь цикл $\sum_{j=4}^{11}(1+2j)=2^7$, а цикл $\left[\sum_{j=12}^{70}(1+2j)+\sum_{j=0}^{3}(1+2j)\right]=17^3$. Таким образом, здесь соблюдаются формальные условия равенства, результатом которых есть одночлен 71^2, и фактические, где вследствие группировки слагаемых достигается получение суммы двух одночленов - 2^7+17^3 в которой цикл $71^2=\left[\sum_{j=12}^{70}(1+2j)+\sum_{j=0}^{3}(1+2j)\right]$ не есть последовательной суммой элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2.

Пример 2. Случай с)

Рассмотрим уравнение $2213459^2=65^7-1414^3$. Согласно формуле уравнения степенного поля неосновного вида типа 2, разности, одночлен 2213459^2 может быть получен как

$$c^2=\sum_{j=0}^{n}(1+2j)-\sum_{j=c}^{n}(1+2j)$$

Здесь, формально, цикл $\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$ должен формировать одночлен 65^7, а цикл $\sum_{j=c}^{n}(1+2j)$ - соответственно одночлен 1414^3. Однако, согласно теореме Ферма $A_{n+1}=\sum_{j=0}^{n}(1+2j)$, и значит, данным циклом будет получен одночлен $(n+1)^2$ вместо 65^7, что создает противоречие, поэтому найдем фактические условия, когда становится возможным выполнение этого равенства. Первоначально найдем, какая последовательная сумма $\sum_{j=n_1}^{n_2}(1+2j)$ может задать значение одночлена 65^7, которым есть число 4902227890625. Таких вариантов для нечетного основания одночлена существует три. Но сначала запишем основное уравнение степенного поля 2 в расширенном формате, которое назовем универсальной формулой 2-го степенного поля, включающей все свойства и связывающей все элементы данного поля

$$A_{n+j}-A_n=(n+j)^2-n^2=\big((n+j)-n\big)\big((n+j)+n\big)=\sum_{j=n}^{n+j-1}B_j$$

где A_{n+j} и A_n - элементы ряда значений An, $(n+j)$ и n - элементы ряда оснований n, B_j - элементы ряда вычетов Bn.

Далее, первый пример продемонстрирован в теореме Ферма и он есть способом получения любого нечетного числа согласно основного уравнения степенного поля для двух соседних элементов A_n: $A_{n+1}-A_n=2n+1$, а поскольку заданное число 4902227890625 есть элементом B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2, то легко найдем n_1 и n_2 в формуле $\sum_{j=n_1}^{n_2}(1+2j)$, которая учитывая что $(n+1)-n=1$, будет иметь один цикл суммирования и примет вид $\sum_{j=n_1}^{n_1}(1+2j)$ Так, $A_{n+1}-A_n=B_n=2n+1$, откуда $2n+1$ =4902227890625 и окончательно $n=\frac{4902227890625-1}{2}$=2451113945312, то следовательно искомый цикл будет иметь вид $\sum_{j=2451113945312}^{2451113945312}(1+2j)$, а разность квадратов оснований $(n+1)^2$ и n^2 примет вид $2451113945313^2-2451113945312^2=65^7$

Второй вариант продемонстрирован в анализе характера общего множителя Варианта 2.2.1 частный случай с), согласно которому действуя в обратном порядке, сначала с учетом универсальной формулы получим число 65: $(n+j)^2-n^2=(33-32)(33+32)=65$, и далее, умножая обе части уравнения 3 раза на 65^2 получим разность квадратов оснований $9062625^2-8788000^2=65^7$ и окончательно искомый цикл будет: $\sum_{j=8788000}^{9062625-1}(1+2j)$.

И наконец, третий вариант, доступный для нечетных чисел, состоит в разложении искомого числа в составное в котором головное число будет отличным от единицы - так, с учетом универсальной формулы и согласно заданного критерия, число 65 можно получить как $(n+j)^2-n^2=(9-4)(9+4)=65$, и далее, умножая правую и левую части уравнения 3 раза на 65^2 получим разность квадратов оснований $2471625^2-1098500^2=65^7$ и окончательно искомый цикл будет: $\sum_{j=1098500}^{2471625-1}(1+2j)$.

Таким образом, рассматривая все три варианта, находим единственный удовлетворяющий равенству

$$c^2 = \sum_{j=1098500}^{2471625-1}(1+2j) - \left[\sum_{j=2213459}^{2471625-1}(1+2j) - \sum_{j=0}^{1098500-1}(1+2j)\right]$$

или

$$2213459^2 = 65^7 - 1414^3$$

Здесь $65^7 = \sum_{j=1098500}^{2471625-1}(1+2j)$, а $1414^3 = \left[\sum_{j=2213459}^{2471625-1}(1+2j) - \sum_{j=0}^{1098500-1}(1+2j)\right]$. Таким образом, здесь соблюдаются формальные условия равенства, результатом которых есть одночлен 2213459^2, и фактические, где вследствие группировки слагаемых достигается получение разности двух одночленов - $65^7 - 1414^3$, в которой $1414^3 = \left[\sum_{j=2213459}^{2471625-1}(1+2j) - \sum_{j=0}^{1098500-1}(1+2j)\right]$ не есть последовательной суммой элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2.

Вывод для Варианта 3.0: гипотеза Биля подтверждается

Общее заключение: гипотеза Биля подтверждается.

Гипотеза Эйлера

Гипотеза Эйлера, утверждает, что для любого числа $n > 2$ никакую степень натурального числа нельзя представить в виде суммы $(n-1)$ n-ых степеней других натуральных чисел, то есть, уравнения

$$a^3 + b^3 = c^3$$
$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$
$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 = e^5$$
$$\dots\dots$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_n^k = a_n^n$$

не имеют решения в натуральных числах.

Изучая данную гипотезу приходим к выводу, что она не может быть рассмотрена в рамках теории степенных полей, поскольку уравнение с количеством слагаемых более двух уже не будет являться уравнением степенного поля, и следовательно, эта теория не применима к таким уравнениям. Единственным исключением является $n = 3$. Таким образом, можно заключить, что интуитивное предположение Эйлера о выполнении указанных условий не находит теоретической поддержки и остается лишь его интуитивным предположением, в отсутствии сколько-нибудь весомого обоснования. Анализ данных уравнений показывает отсутствие системного подхода, означая невозможность их дальнейшего исследования, до тех пор, пока не будет найдено обратное. Природа чисел чрезвычайно многообразна, и если какой-либо области недостает строгой теории, то это означает лишь невозможность системного исследования, в то время как совсем не значит, что не будут выполняться исследуемые явления. Это подтверждают современные программные средства, с помощью которых такие уравнения были найдены, одно из которых есть

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$$

Однако, в отсутствии теоретической основы для этих уравнений все же остается возможность провести анализ данных равенств с помощью фигурных полиномов.

Так разлагая каждый одночлен в фигурный полином, согласно теоремы о разложении n^m для $m = 5$, формула которого имеет вид

$$n^5 = n + 30k_{n-1}^{(3)} + 120k_{n-2}^{(5)}$$

получим ряд фигурных полиномов

$27^5 = 27 + 30 \cdot 3276 + 120 \cdot 118755$
$84^5 = 84 + 30 \cdot 98770 + 120 \cdot 34826302$
$110^5 = 110 + 30 \cdot 221815 + 120 \cdot 134153712$
$133^5 = 133 + 30 \cdot 392084 + 120 \cdot 346700277$
$144^5 = 144 + 30 \cdot 497640 + 120 \cdot 515853624$

Теперь, выполнив их сложение, получим

$$\begin{aligned}(27 + 84 + 110 + 133) + 30 \cdot (3276 + 98770 + 221815 + 392084) + 120 \\ \cdot (118755 + 34826302 + 134153712 + 346700277) \\ = 144 + 30 \cdot 497640 + 120 \cdot 515853624\end{aligned}$$

где в итоге в левой части равенства будет получен результирующий полином рода 5, а в правой части оригинальный рода 5

$$354 + 30 \cdot 715945 + 120 \cdot 515799046 = 144 + 30 \cdot 497640 + 120 \cdot 515853624$$

$$61917364224 = 61917364224$$

И наконец, проводя анализ правой и левой частей верхнего равенства, находим, что в отличие от уравнения суммы двух одночленов $a^x + b^x = c^x$, в котором существует возможность представить одночлен b^x в виде суммы элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля x, и найти ответ почему невозможно и возможно данное равенство, то в сумме трех одночленов $a^x + b^x + c^x = d^x$, и более, это становится неосуществимым. В этом случае возможно только тривиальное почленное суммирование заданного количества однородных оригинальных полиномов, где вступает в действие компенсационный механизм, в котором равенство двух частей уравнения достигается максимальным приближением численного значения старшего члена результирующего полинома левой части к старшему члену оригинального полинома правой части, а недостаток или избыток в их значениях компенсируется младшими членами полинома. Действительно, в исследуемом примере, значением старшего члена результирующего полинома левой части равенства есть число 515799046, а значением старшего члена полинома правой части есть число 515853624, разность между ними составляет величину 6549360, то есть здесь присутствует недостаток в этом значении со стороны результирующего полинома. Следовательно, два младших члена результирующего полинома левой части компенсируют этот недостаток избытком значений своих младших членов относительно аналогичных правой части. Действительно, разность указанных величин составляет 210+6549150=6549360. Таким образом, равенство двух частей уравнения достигается, и следовательно, его решение тоже.

Вышеописанный анализ приводит к ряду выводов:

a) условия существования решений данных уравнений существенно отличаются от уравнений, изучаемых теорией степенных полей
b) данные уравнения являются комбинационными уравнениями, то есть такими равенствами, в которых в отсутствии системного подхода и строгой теории, всегда могут иметь место комбинации, приводящие к существованию таких решений

c) следуя логическому предположению, основанному на проведенном анализе, можно заключить, что с увеличением количества слагаемых левой части уравнения для любого произвольного показателя степени x число решений такого уравнения будет увеличиваться по причине увеличения числа членов в операции почленного суммировании полинома, что естественно приведет к увеличению количеств возможных комбинаций, и следовательно будет получено большее число решений, удовлетворяющих условию равенства.

Вывод: гипотеза Эйлера не подтверждается

РАЗДЕЛ 3

Заключение

Подводя итог данной работе, кратко сформулируем основные полученные результаты исследования.

Первое, теория степенных полей представляет собой структуру и средство детального анализа уравнений $a^x \pm b^y = c^z$, в основе которой лежит теорема о разложении n^m. Проведенное в этой работе исследование носит базовый характер, направленный на изучение свойств, основных зависимостей и взаимодействия одночленов в форме уравнений степенных полей, в то время как все возможности теории в исследовании этой области, а также множества связанных проблем пока еще досконально не изучены.

Второе, выделим используемые в теории средств анализа, области исследований, а также подчеркнем применяемые в работе методы и свойства, итак

1) **Теорема Ферма.** Здесь предметом анализа являются уравнения $a^x + b^x = c^x$, а исследуемой областью есть ряды вычетов Bn степенных полей x, изучаемые на предмет удовлетворения условию $b^x = B_n$ – как для единичных элементов B_n, так и их суммы $b^x = \sum_{j=i}^{n-1} B_j$ В качестве средства анализа используется основное уравнение степенного поля, которое в выражении исследуемого уравнения $a^x + b^x = c^x$ записывается в виде $A_n = A_i + \sum_{j=i}^{n-1} B_j$, где $c^x = A_n$, $a^x = A_i$ и $b^x = \sum_{j=i}^{n-1} B_j$, и где с помощью изменения параметра i в пределах $0 \le i \le n-1$, проводится искомый анализ. Обязательным условием решения этой задачи есть выражение указанных элементов степенных полей в виде фигурных полиномов, согласно теоремы о разложении n^m, без которых ввиду их многочисленных свойств проведение анализа становится невозможным. Результатом исследования есть следствие 1 теоремы Ферма согласно которому только при $i = 0$ достигается существование заданного условия $b^x = \sum_{j=0}^{n-1} B_j$, которое и является ключевым свойством в следствии 2, окончательно доказывающим отсутствие решений уравнения $a^x + b^x = c^x$ при $x > 2$.

2) **Структурно-родовой анализ.** Здесь предметом анализа являются уравнения $a^x - b^x = c^z$, а исследуемой областью есть ряды вычетов Bn степенных полей x, изучаемые на предмет удовлетворения условию $B_n = c^z$. Причиной к проведению данного анализа послужило свойство подобия полиномов, натолкнувшее на предположение о возможном равенстве элементов $A_n = B_n$ разнородных степенных полей. В результате было найдено полное структурное и родовое подобие фигурных полиномов элементов B_n, ряда вычетов Bn степенного поля 3 – элементам A_n ряда значений An степенного поля 2, вследствие чего были обнаружены оригинальные тройки 3-го степенного поля: $a^3 - b^3 = c^2$.

3) **Гипотеза Биля.** Эта гипотеза не занимается исследованием степенных полей, а проводит анализ условий существования уравнений $a^x + b^y = c^z$ в них, а также определяет характер общего делителя. Для этого первоначально в соответствии со свойствами степенных полей уравнение $a^x + b^x = c^x$ разбивается на ряд вариантов

включающих все возможные комбинации показателей x, y, z, и далее уже эти варианты рассматриваются на предмет условий существования решений в полученных уравнениях. В гипотезе формулируется 5 лемм, где в частности, в леммах 2.1.0 и 2.2.0 используется свойство инвариантности полиномов, в леммах 2.1.1 и 2.2.1 применяется метод приведения двойных равенств к релевантному виду, и в лемме 3.1 в доказательстве используется метод формально-фактических критериев, основанный на следствии 1 теоремы Ферма. Параллельно в гипотезе доказывается теорема о составных числах, в которой выводятся формулы составных чисел - хорошо известных современной математике формул сокращенного умножения. И окончательно в гипотезе приводится причина простоты общих делителей и показываются равенства, в которых это свойство проявляется.

4) **Гипотеза Эйлера.** В этой гипотезе демонстрируется отличие уравнений степенных полей, которые имеют два слагаемых от уравнений с числом слагаемых больше двух. Вследствие данного различия эти уравнения становятся несистемными и их исследование в рамках теории степенных полей исключается. Однако с помощью фигурных полиномов показывается компенсационный механизм, который приводит к получению их решений.

И наконец, **третье**, поскольку главным предметом анализа в теории степенных полей есть уравнения вида $a^x + b^y = c^z$, в которых теория обнаруживает и доказывает следующие свойства, обозначим их

1. Виды уравнений

1.1 Все решения уравнений $a^x + b^y = c^z$ находятся в одноименном степенном поле, вследствие чего любое из них приводится к общему виду $a^x \pm b^x = c^z$, за исключением уравнения $c^2 = a^x \pm b^y$

1.2 Уравнения общего вида $a^x \pm b^x = c^z$ носят название основных уравнений степенных полей, потому что оба одночлена a^x и b^x находятся в ряду значений An степенного поля x.

1.3 Уравнения вида $c^2 = a^x \pm b^y$, носят название неосновных уравнений степенных полей, поскольку каждый из одночленов a^x и b^x есть результат суммы последовательности элементов B_n ряда вычетов Bn степенного поля 2, где по крайней мере один из них не является данной последовательной суммой.

1.4 Основные уравнения степенных полей подразделяются на:
   a) уравнения определенного типа, которыми есть равенства вида $a^x - b^x = c^z$, потому что в этом случае все значения c^z строго определены в ряду вычетов Bn степенного поля x
   b) уравнения неопределенного типа, которыми есть равенства вида $a^x + b^x = c^z$, потому что в этом случае значения c^z не определены в области степенного поля x

1.5 Уравнения общего вида $a^x \pm b^x = c^z$, в отсутствии общего множителя приобретают вид $a'^x \pm b'^x = c$ и носят название оригинальных, потому что в этом случае одночленами a'^x и b'^x есть минимально возможные целые элементы ряда значений An степенного поля x

1.6 Уравнения общего вида $a^x \pm b^x = c^z$ могут не иметь общего множителя, и тогда их основания a, b, c есть взаимно-простые числа, а сами уравнения носят название оригинальных троек, которых существует 3 вида:
   a) $a^2 + b^2 = c^2$ – Пифагоровы тройки, уравнения неопределенного типа, 2-го степенного поля, где разность оснований $c - b \geq 1$
   b) $a^3 - b^3 = c^2$ - тройки 3-го степенного поля, уравнения определенного типа, где разность оснований $a - b = 1$

c) $a^2 - b^2 = c^z$ - тройки 2-го степенного поля, уравнения определенного типа, где $z > 2$, а разность оснований $a - b \leq 2$

1.7 Уравнения вида $c^2 = a^x \pm b^y$ не имеют и не могут иметь общего множителя, поскольку все одночлены имеют разные показатели. Данные уравнения носят название оригинальных троек 2-го степенного поля, и являются неосновными уравнениями степенных полей.

2. Общий делитель

2.1 Все уравнения общего вида $a^x \pm b^x = c^z$, не являющиеся оригинальными тройками, имеют общий делитель.

2.2 В уравнениях общего вида $a^x \pm b^x = c^z$ одночленом c^z может быть

a) не-составное число, основание c которого служит делителем одновременно оснований a и b, а одночлен c^x есть делителем всего уравнения

b) составное число, основание c которого не является делителем оснований a и b, а ими есть головное число d или основное e, из произведения которых состоит одночлен $c^z = d^z e^z$

2.3 В уравнениях неопределенного типа $a^x + b^x = c^z$, где одночлен c^z – составное число, общим делителем может быть только основное число e^x

2.4 Уравнения неопределенного типа $a^x + b^x = c^z$, где одночлен c^z - составное число, существуют только для нечетных показателей x

2.5 В уравнениях определенного типа $a^x - b^x = c^z$, где одночлен c^z – составное число, общим делителем может быть

a) основное число e^x для уравнений общих случаев $a^x - b^x = c^z$

b) головное число d^x для уравнений частных случаев $a^3 - b^3 = c^z$ и $a^2 - b^2 = c^z$

c) основное число m^x для уравнений частного случая $a^x - b^x = c^z$, где $x = 2^n$, $n > 1$, $c^z = d \times d^{z-1}, d = l \cdot m, l = 2$

2.6 В уравнениях неопределенного типа $a^x + b^x = c^z$, где c^z – не-составное число, показатель степени z определяется по формуле $z = nx + 1$, где n - число шагов умножения множителем c^x оригинального уравнения $a'^x + b'^x = c$

2.7 В уравнениях определенного типа $a^x - b^x = c^z$, где c^z – не-составное число, показатель степени z определяется для общих случаев по формуле $z = nx + 1$, где n - число шагов умножения множителем c^x оригинального уравнения $a'^x + b'^x = c$, за исключением

a) уравнений частного случая $a^3 - b^3 = c^z$ для которого $z = 2 + 3n$, где n - число шагов умножения множителем c^3 оригинального уравнения $a'^3 - b'^3 = c^2$

b) уравнений частного случая $a^2 - b^2 = c^m$ для которого $z = m + 2n$, где n - число шагов умножения множителем c^2 оригинального уравнения $a'^2 - b'^2 = c^m$

2.8 В уравнениях определенного типа $a^x - b^x = c^z$, где c^z – составное число, показатель степени z определяется для всех общих случаев и ряда частных по формуле $z = x + 1$, за исключением

a) уравнения частного случая $a^3 - b^3 = c^z$ для которого $z = 5$ по причине «проблемы фантома»

3. Характер общего делителя

3.1 Вследствие характеристических свойств фигурных полиномов общий делитель уравнений $a^x + b^y = c^z$ имеет явную простоту в равенствах

a) определенного типа $a^x - b^x = c^z$, где c^z – не-составное число, для случаев оснований $a - b = 1$
b) неопределенного типа $a^x + b^x = c^z$, где c^z – составное число, во всех случаях
c) определенного типа $a^x - b^x = c^z$, где c^z – составное число, во всех случаях, где делителем выступает одночлен d^x основной части составного числа, или одночлен m^x для показателя $x = 2^n$

Используемые источники информации

1. http://en.wikipedia.org/wiki/
2. http://bealconjectureproof.com/
3. http://oeis.org/