

## **1 RESUMO/ABSTRACT**

Esta coleção de notas está relacionada a uma análise através do artigo viXra:1112.0066. Versão em Língua Portuguesa.

This note collection is related to an analysis throughout the paper viXra:1112.0066. Portuguese version.

Copyright © Armando V.D.B. Assis



## 2 CONCEITOS

### 2.1 A Equação de Navier-Stokes

(LANDAU; LIFSHITZ, 1959), (LADYZHENSKAYA, ), (A., 1993), (V.I., 1998)  
 Aplicando o princípio fundamental da dinâmica newtoniana a um elemento<sup>1</sup>  
 $\delta V$  arbitrário de um fluido *continuum* de matéria que flui numa região de um  
 referencial inercial, sendo  $\vec{r}$  o vetor posição do centro de massa do elemento  
 de fluido,  $\rho$  o campo escalar de densidade no fluido,  $\vec{v}$  a velocidade do centro  
 de massa do elemento de fluido considerado,  $\vec{f}$  a aceleração de campo externo  
 (por exemplo, da gravidade),  $\partial(\delta V)$  a superfície do elemento considerado,  
 $p$  o campo de pressão,  $\hat{n}$  a normal exterior a um elemento infinitesimal de  
 superfície  $dS$  da superfície  $\partial(\delta V)$  de área  $S$  englobando  $\delta V$ ,  $\Gamma$  o tensor de  
 efeitos de viscosidade (ficando tácito o caráter viscoso), temos<sup>2</sup>

$$\int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} dV = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} p(\vec{r}, t) (-\hat{n}) dS + \oint_{\partial(\delta V)} \Gamma \cdot \hat{n} dS. \quad (2.1)$$

Seja  $\vec{k} = \oint_{\partial(\delta V)} p \hat{n} dS$ , donde:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} \cdot \vec{k} &= \oint_{\partial(\delta V)} (p \vec{\lambda}) \cdot \hat{n} dS, \quad \forall \vec{\lambda} \text{ cte}, \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{k} &= \int_{\delta V} \vec{\nabla} \cdot (p \vec{\lambda}) dV = \int_{\delta V} \vec{\lambda} \cdot (\vec{\nabla} p) dV = \vec{\lambda} \cdot \int_{\delta V} (\vec{\nabla} p) dV, \\ \vec{k} &= \int_{\delta V} (\vec{\nabla} p) dV, \end{aligned}$$

que substituído em (2.1), e com a aplicação do Teorema de Gauss também à

<sup>1</sup>Elemento de fluido ainda não necessariamente infinitesimal.

<sup>2</sup>A rigor,  $\int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} dV = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} \mathbf{T} \cdot \hat{n} dS$ , onde  $\mathbf{T}$  é um tensor a ser determinado. Na hipótese de isotropia, temos  $\mathbf{T}_{xx} = \mathbf{T}_{yy} = \mathbf{T}_{zz} = -p \therefore \mathbf{T}_{ij} = -p \delta_{ij} + \Gamma_{ij}$ . Assim,  $\int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} dV = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} (-p \mathbf{1} + \Gamma) \cdot \hat{n} dS$ , onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade. Representando a matriz identidade pela díada  $\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$  e utilizando-se da álgebra tensorial que define o produto diádico  $\mathbf{AB}$  de dois vetores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  atuando sobre um terceiro vetor  $\mathbf{C}$  de um espaço vetorial como sendo  $(\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ , temos  $\int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{v} dV = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} (-p(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}) + \Gamma) \cdot \hat{n} dS = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} (-p(\hat{x}(\hat{x} \cdot \hat{n}) + \hat{y}(\hat{y} \cdot \hat{n}) + \hat{z}(\hat{z} \cdot \hat{n})) + \Gamma \cdot \hat{n}) dS = \int_{\delta V} \rho(\vec{r}, t) \vec{f} dV + \oint_{\partial(\delta V)} p(-\hat{n}) dS + \oint_{\partial(\delta V)} \Gamma \cdot \hat{n} dS$ , que é a equação (2.1).

integral de  $\Gamma$ , fornece:

$$\int_{\delta V} \rho \dot{\vec{v}} dV = \int_{\delta V} \rho \vec{f} dV - \int_{\delta V} (\vec{\nabla} p) dV + \int_{\delta V} (\vec{\nabla} \cdot \Gamma) dV \therefore$$

$$\int_{\delta V} \left[ \rho(\vec{r}, t) \dot{\vec{v}} - \rho(\vec{r}, t) \vec{f} + \vec{\nabla} p(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} \cdot \Gamma \right] dV = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Como  $\delta V$  é arbitrário, façamos que seja infinitesimalmente arbitrário de modo a conter exatamente um elemento infinitesimal qualquer de fluido, donde  $\dot{\vec{v}}$  torna-se a aceleração do próprio elemento infinitesimal<sup>3</sup> e donde:

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{f} + \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \Gamma = \vec{0}, \quad (2.3)$$

sendo  $\vec{v}$  a velocidade de um ponto arbitrário do fluido.

Analisemos o tensor de tensões mais geral que fornece a força por unidade de área de um elemento de fluido infinitesimal, tensor<sup>4</sup>  $\mathbf{T}_{ij} = -p\delta_{ij} + \Gamma_{ij}$ , quanto à simetria. Os efeitos viscosos estarão relacionados a  $\Gamma$ , pois os efeitos do tensor  $-p\mathbf{1}$  não são tangenciais, mas normais. Modelando os efeitos viscosos como sendo de primeira ordem, temos que a diáda  $(\nabla \vec{v})_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$  conterá todas as variações de primeira ordem<sup>5</sup>. Assim, os efeitos viscosos serão impostos como oriundos de  $\nabla \vec{v}$ . Investiguemos, primeiramente, a parte anti-simétrica de  $\nabla \vec{v}$ . Um tensor anti-simétrico tem três e somente três componentes independentes, assim como um vetor, de modo que se pode obter tal tensor anti-simétrico de um vetor através de alguma relação conveniente entre eles. Designemos por  $\vec{\omega}$  tal vetor e imponhamos a relação  $(\nabla \vec{v})_a \cdot \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u}$ , onde  $(\nabla \vec{v})_a$  é a parte anti-simétrica de  $\nabla \vec{v}$  e  $\vec{u}$  um vetor arbitrário. Obtemos  $\vec{\omega} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) / 2$ . Em particular, para dois pontos do fluido com vetor posição relativa  $\delta \vec{r}$ , temos  $(\nabla \vec{v})_a \cdot \delta \vec{r} = \vec{\omega} \times \delta \vec{r}$ , donde vemos que o tensor  $(\nabla \vec{v})_a$  seleciona as partes das diferenças de veloci-

<sup>3</sup>Obviamente a passagem da equação (2.2) à (2.3) é legítima mesmo que  $\delta V$  não seja infinitesimal, porém isso não é interessante, pois ainda teríamos um sistema de partículas e  $\dot{\vec{v}}$  não seria a aceleração de  $\delta V$ , i.e., ainda seria a de seu centro de massa.

<sup>4</sup>Vide nota de rodapé 2.

<sup>5</sup>Lembremos que os efeitos viscosos são modelados como sendo oriundos de movimentos relativos entre lâminas de fluido. Assim, em primeira ordem, o tensor de viscosidade é modelado como dependente da taxa de variação da velocidade ao passarmos de uma lâmina de fluido à outra, donde a diáda  $(\nabla \vec{v})_{ij}$  conterá todas as variações possíveis. Num fluido em repouso os efeitos tangenciais de movimento relativo entre lâminas elementares de fluido cessam, donde persistem somente efeitos normais, fato este que nos inclinou a desprezar  $-p\delta_{ij}$  do tensor de viscosidade.

dade entre os dois pontos de posição relativa  $\delta\vec{r}$  referidos que correspondem a uma rotação rígida em torno do ponto que foi tomado como origem do vetor  $\delta\vec{r}$  com velocidade angular  $\vec{\omega} = (\vec{\nabla} \times \vec{v})/2$ . Assim, a parte anti-simétrica da díada  $\nabla\vec{v}$  sempre será diferente de zero quando houver rotação em um fluido, sendo, portanto, um efeito de viscosidade sempre presente caso se considere a parte anti-simétrica da díada. Porém, num caso de rotação pura de um fluido, não pode haver efeito viscoso, dada a inexistência de movimento tangencial relativo entre camadas de fluido adjacentes. Conclui-se que se deve desprezar a parte anti-simétrica da díada  $\nabla\vec{v}$ , restando a parte simétrica. Como os efeitos normais dados por  $-p\mathbf{1}$  também tem tensor simétrico, o tensor  $\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \Gamma$  deve ser simétrico. Como o traço de um tensor é um invariante por transformações de coordenadas<sup>6</sup>, podemos decompor a parte simétrica da díada  $\nabla\vec{v}$ , numa soma de um tensor simétrico de traço nulo  $(\nabla\vec{v})_{IS}$  com um tensor  $(\nabla\vec{v})_c$  a ser determinado<sup>7</sup>. Notemos que se subtrairmos  $(1/3)Tr(\nabla\vec{v})_s = (1/3)\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  de cada componente da diagonal de  $(\nabla\vec{v})_s$ , o que equivale a subtrair o tensor  $(\nabla\vec{v})_c = (1/3)Tr(\nabla\vec{v})_s\mathbf{1} = (1/3)\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\mathbf{1}$ , temos que o tensor resultante  $(\nabla\vec{v})_{IS}$  será de traço nulo. Assim, temos a decomposição  $(\nabla\vec{v})_{IS} = (\nabla\vec{v})_s - (1/3)\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\mathbf{1}$ . Fisicamente, notamos que essa é a decomposição mais geral<sup>8</sup> da parte simétrica de  $\nabla\vec{v}$ , pois, sendo essa parte simétrica a responsável pelos efeitos viscosos totais, como vimos anteriormente, e notando que o efeito viscoso de  $(\nabla\vec{v})_c = (1/3)\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\mathbf{1}$  é claramente divergente, temos que, se subtraído de  $(\nabla\vec{v})_s$ , fornecerá o efeito exclusivamente cisalhante tangencial dado por  $(\nabla\vec{v})_{IS}$ . Note-se que tal efeito viscoso divergente dado por  $(\nabla\vec{v})_c$  somente aparece em fluidos compressíveis, i.e., quando  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq 0$ . Dado o exposto, temos que  $\Gamma$  deve ser escrito como a combinação dos efeitos viscosos de compressibilidade e de cisalhamento, i.e.:

<sup>6</sup>O traço de um tensor tridimensional  $\mathbf{T}$  é dado por  $Tr(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^3 T_{ii}$ . Assim, sejam  $a_{ij}$  as componentes do tensor de transformação de um sistema de coordenadas tridimensional para outro. Assim,  $Tr(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j,l=1}^3 a_{ji}a_{il}T'_{jl} = \sum_{j,l=1}^3 [\sum_{i=1}^3 a_{ji}a_{il}] T'_{jl} = \sum_{j,l=1}^3 T'_{jl}\delta_{jl} = \sum_{j=1}^3 T'_{jj}$ .

<sup>7</sup>Essa idéia está sendo posta após considerações físicas. Para uma dedução detalhada, vide <http://vixra.org/pdf/1112.0069v3.pdf>.

<sup>8</sup>Imaginemos a deformação de uma massa fluida densa e viscosa por nossas mãos. Tal deformação dar-se-á, ou não, quando aplicarmos forças normais e/ou tangenciais à massa fluida. A massa fluida pode expandir-se, caso de compressibilidade, donde deve aparecer termo no tensor mais geral de viscosidade que dependa do divergente do campo de velocidades, termo esse associado exclusivamente a efeitos de compressibilidade. Assim, os termos restantes que não se associam ao divergente do campo estariam exclusivamente relacionados a efeitos de cisalhamento puro sem compressão.

$$\Gamma = \alpha (\nabla \vec{v})_{ts} + \beta (\nabla \vec{v})_c = \alpha \left[ (\nabla \vec{v})_s - \frac{1}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \mathbf{1} \right] + \zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \mathbf{1}, \quad (2.4)$$

onde  $\alpha$  e  $\zeta = \beta/3$  são coeficientes a determinar. Apliquemos a equação (2.4) ao caso particular de um escoamento planar de um fluido incompressível, com campo de velocidades das camadas planares paralelo ao eixo  $x$  e camadas planares de fluido com normal  $\hat{y}$ . Somente a componente  $x$  de  $\vec{v}$  não será nula.  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , por incompressibilidade. Vê-se facilmente que as únicas componentes de  $\Gamma$  que não se anulam são  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (1/2) \alpha \partial v_x / \partial y$ . Então, a força cisalhante  $d\vec{F}$  atuante num elemento infinitesimal de área  $d\vec{S} = dS \hat{y}$  é dada por:

$$d\vec{F} = \Gamma \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \hat{x}. \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é exatamente a lei de Newton da viscosidade que define a viscosidade dinâmica  $\eta$ , quando tomamos<sup>9</sup>  $\alpha = 2\eta$  em (2.5). Escrevendo a expressão para a parte simétrica de um tensor em (2.4), i.e.,  $(\nabla \vec{v})_s = (1/2) (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t)$ , e  $\alpha = 2\eta$  em (2.4), temos:

$$\Gamma = \eta \left[ \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^t - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \mathbf{1} \right] + \zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \mathbf{1}. \quad (2.6)$$

Assim, em termos de componentes, temos que o tensor de viscosidade mais geral  $\Gamma$ , dado pela equação (2.6), que fornece a força viscosa por unidade de

---

<sup>9</sup>Não seria o sinal negativo necessário pois a força cisalhante se opõe ao gradiente de velocidade? Primeiramente devemos definir se queremos medir a força externamente a  $dS$ , i.e., a força que a camada de fluido externa adjacente exerce no elemento de área  $\hat{y}dS$ , lembrando que  $\hat{y}$  é normal exterior, ou se queremos medir a força internamente a  $dS$ , também dita através de  $dS$ , a força que a camada de fluido interna adjacente exerce no elemento de área  $\hat{y}dS$ . No primeiro caso, a constante deve ter sinal positivo, pois basta lembrarmos que para o caso de um fluido viscoso newtoniano entre duas placas paralelas em que a placa superior é puxada para direita ( $\hat{x}$ ) com velocidade constante e em que um agente externo exerce uma força  $d\vec{F}$  para a direita, a superfície  $\hat{y}dS$  em contato com a placa superior recebe uma ação desta placa exatamente igual a  $d\vec{F}$ , sendo esta a força que se considera na definição de fluido viscoso newtoniano  $d\vec{F} = \eta \partial v_x / \partial y dS \hat{x}$ , i.e., a força que um agente externo exerce será tão mais intensa quanto maior o gradiente de velocidade, donde é clara a necessidade do sinal positivo. Num volume encerrado por uma superfície, medimos a força que os elementos de fluido externos ao volume exercem na superfície englobando o volume, situação análoga ao caso do primeiro caso. No segundo caso, obviamente a força exercida será a reação  $-d\vec{F}$ , contrapondo-se viscosamente ao movimento da placa. Deixando claro que estaremos calculando efeito externo sobre superfícies de normal exterior, entende-se por que adotaremos o sinal positivo na lei de viscosidade de Newton.

área que os elementos externos a um volume de fluido exercem na superfície que engloba este volume, é dado por:

$$\Gamma_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda}, \quad (2.7)$$

onde  $\eta$  e  $\zeta$  são coeficientes independentes da velocidade. Num caso mais geral, poderíamos supor  $\eta$  e  $\zeta$  tensoriais, mas estamos supondo isotropia.

Reescrevendo a equação (2.3) em termos de componentes, temos:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}}{\partial x_k} &= \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &- \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right] = 0 \Rightarrow \\ \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) \right] &- \underbrace{\delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \zeta \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right)}_{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right)} = \\ \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os coeficientes de viscosidade  $\eta$  e  $\zeta$  são, em geral, funções da pressão e da temperatura. Supondo que sejam constantes, reescrevemos (2.8):

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \\ + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) - \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) &= 0 \end{aligned}$$

sendo, pois, que podemos reescrever, dados os índices mudos:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) - \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) &= 0 \cdot \cdot \\ \rho \dot{v}_i - \rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} - \left( \frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \right) &= 0, \end{aligned}$$

que posto sob a forma vetorial fornece:

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{f} + \vec{\nabla} p - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} - \left( \frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{0}. \quad (2.9)$$

Supondo o fluido incompressível, temos  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ , donde obtemos a forma da equação de Navier-Stokes que utilizaremos aqui, estando implícitas as hipóteses sobre o fluido que anteriormente impusemos: isotropia, decorrendo a constância da viscosidade, e incompressibilidade. Portanto:

$$\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{f} + \vec{\nabla} p - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{0}. \quad (2.10)$$

## 2.2 O Referencial da Esfera em Queda

Ao obtermos a equação (2.10), foi suposto o escoamento do fluido em referencial inercial.

Suponhamos, agora, o espaço tridimensional totalmente preenchido com um fluido *definido pelas grandezas anteriormente mencionadas na equação (2.10)*. Em tal espaço há um campo de aceleração  $\vec{g}$  constante em cada ponto e que independe da presença do fluido, i.e., se retirarmos o fluido de uma certa porção do espaço, verificaremos que um corpo ideal puntiforme abandonado em tal porção do espaço estará cinematicamente acelerado de  $\vec{g}$ . Definamos, então, a vertical ascendente pelo versor  $\hat{e}_z = -\vec{g}/|\vec{g}|$ . Tomemos uma origem na reta suporte de  $\hat{e}_z$  e definamos um plano  $xy$  ortogonal a  $\hat{e}_z$ , o qual denominaremos chão, e que passe pela origem. Seja, agora, uma esfera de massa  $m$ , raio  $R$  e densidade  $\rho'$ , com centro  $O'$  a uma distância vertical  $h$  do chão e em repouso em relação ao chão. Pode haver, então, um vínculo que segura a esfera para que não "caia" em direção ao chão, suposto vínculo que supostamente não perturba em nada a condição de total repouso dos elementos do fluido circundante, sendo o suposto vínculo independente do fluido e de  $\vec{g}$ , podendo, ainda, ser nulo o suposto vínculo. Retira-se o vínculo. Nesse instante, se não houvesse o campo  $\vec{g}$  e o fluido, a esfera permaneceria em repouso em relação ao chão no sistema  $xyz$ , sendo, então, que, como análise análoga com condição inicial da esfera executando movimento retilíneo uniforme, em vez de repouso, no referencial do chão, permite concluir que na ausência do vínculo, do fluido e do campo  $\vec{g}$ , a esfera permaneceria executando movimento retilíneo uniforme, é inercial



esse sistema na ausência de  $\vec{g}$ , do fluido e do vínculo, reiteramos<sup>10</sup>.

A dinâmica de queda da esfera pode, então, ser resolvida se soubermos a força devida ao fluido na esfera, dado que a outra força é devida ao campo  $\vec{g}$  que conhecemos e, obviamente, no escopo clássico, à massa  $m$  da esfera.

Para determinarmos a força devida ao fluido, temos de resolver a equação (2.10) para o caso do escoamento de um fluido numa região onde vale o princípio da inércia, com campo externo  $\vec{f}$ , sendo, pois, que devem ser dadas as condições de contorno na superfície da esfera. São exatamente as condições de contorno na superfície da esfera que caracterizarão o movimento da mesma no fluido.

Se  $h(t)$  for a cota (altura)  $z$  do centro da esfera, em não havendo rotação da esfera, o movimento da esfera será vertical descendente sendo que, como todos os pontos do fluido na superfície da esfera ficam aderidos a ela pela condição de *não-eskorregamento* nos escoamentos viscosos, todos os pontos do fluido na superfície da esfera terão a velocidade  $\vec{v}(\partial \text{ esfera}) = \dot{h}(t)\hat{e}_z$ . No infinito, os elementos do fluido estarão supostamente não-perturbados, onde o nosso problema, no referencial  $xyz$  é o de resolver:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{g} + \vec{\nabla} p - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0; \\ \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v}(\partial \text{ esfera}) = \dot{h}(t)\hat{e}_z \text{ (n\~{a}o-eskorregamento)}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Infelizmente, o referencial  $xyz$  não tem a conveniência do referencial atado à esfera, dado que neste podemos utilizar as coordenadas polares planas com centro no centro da esfera, dada a simetria axial  $z$  que nos permite tratar o problema no plano, i.e., ainda que possamos tratar o problema no plano no

---

<sup>10</sup>Tal explanação que aqui se faz pode parecer desnecessária. Porém, o que se quer enfatizar é que a equação de Navier-Stokes deve ser tomada num referencial inercial, sendo o campo gravitacional tratado como campo externo ao fluido e atuante numa região onde vale o princípio da inércia na ausência do fluido e do campo. A suposta existência de um vínculo, ventilada algumas linhas acima, serve tão somente para enfatizar que o referencial tomado como inercial certamente o será na presença do fluido e do campo  $\vec{g}$  se tal vínculo for nulo em toda parte, o que será verdade no caso da ausência do campo  $\vec{g}$  e do fluido, dado que o caso em que  $\vec{g}$  e os efeitos aceleradores do fluido se cancelam em toda parte necessita do campo e do fluido para se definir o referencial como inercial, caso de situação particular, o que obviamente é incompatível a uma generalização em se adotar sempre um referencial inercial para a aplicação da equação de Navier-Stokes. Assim, o referencial adotado para a aplicação da equação de (2.10) é aquele livre de campos efetivos e do fluido, caso contrário, incorporam-se, como veremos em seguida, todos os campos existentes na ausência de fluido ao campo  $\vec{f}$  na equação (2.10).

referencial  $xyz$ , é conveniente tratá-lo em coordenadas polares planas com centro no centro da esfera, pelo que se vislumbra ser necessário à posterior integração na superfície esférica para a determinação da força de arrasto<sup>11</sup> viscoso. Porém, no referencial atado à esfera, teremos força de inércia, pois o mesmo estará acelerado em relação ao referencial inercial do chão. Na esteira do que foi explanado na nota de rodapé 10, poderíamos cogitar a impossibilidade de se tratar a aceleração de referencial não-inercial que aparece no referencial atado à esfera como equivalente a um campo gravitacional, digamos  $\vec{g}_0$ , a ser incorporado à  $\vec{f}$  na equação (2.10), dado que tal efeito inexistente na ausência de fluido, pois o referencial atado à esfera estaria em queda livre (portanto, com  $\vec{g}_0 = \vec{0}$ ), sendo, assim, que  $\vec{g}_0$  não seria independente do fluido. Um observador em tal referencial teria de localizar uma região sem fluido (o interior da esfera) e medir o campo gravitacional local  $\vec{g}_0$  com uma balança. Concluiria que em região de seu referencial onde há ausência de fluido existe um campo  $\vec{g}_0$  que, se inexistente, traria o seu referencial ao *status* de inercial. A questão a ser respondida é se tal campo é realmente fictício de referencial não-inercial, caso em que não poderia ser oriundo de efeitos locais de vizinhança, ou seja, associado a corpos nas vizinhanças, situação em que tal campo seria independente do fluido, ou se tal campo é realmente dependente do fluido, caso em que não poderia ser tratado como campo eminentemente externo. Claramente, o referencial atado à esfera estará acelerado em relação ao referencial do chão, este inercial, sendo, portanto, aquele, não-inercial. Se imaginarmos uma miríade de réguas ideais rígidas todas conectando os pontos do espaço em repouso no referencial em queda, inclusive para os pontos externos ao interior da esfera onde se fez o laboratório de observações, portanto adentrando o fluido, teremos que todos eles cairão exatamente da mesma maneira em relação ao chão, i.e., com a mesma aceleração, donde o efeito não-inercial de se estar acelerado em relação ao referencial inercial do solo será o mesmo em todos esses pontos. Assim, tal efeito é um efeito de contorno e independe da presença local do fluido, donde, na equação infinitesimal (2.10), tal campo deve ser realmente tratado como independente de presença local do fluido. Conforme veremos em seguida, essa interpretação é realmente correta. Do ponto de vista do fluido, o efeito de se ter uma condição de contorno é externa ao fluido, i.e., a fronteira da esfera é imposta externamente ao fluido, sendo decorrente de tal fronteira a força de arrasto sobre a esfera, do que decorre a aceleração do referencial em queda em relação ao referencial inercial do chão, do que decorre o efeito global de todos os pon-

---

<sup>11</sup>O que denominamos força de arrasto também contém a força de empuxo hidrostático, como demonstraremos mais adiante. Porém, isso não nos causará nenhuma dificuldade.

tos da miríade de réguas caírem da mesma forma em relação ao chão, donde, finalmente, o efeito inercial decorre de condição externa imposta à presença global do fluido, devendo, portanto, ser descrito por  $\vec{f}$  (efeito externo ao fluido) na equação (2.10) no referencial da esfera em queda. Assim, parece, heurísticamente, que para escrever a equação de Navier-Stokes no referencial da esfera em queda devemos determinar o campo equivalente à aceleração de referencial não-inercial e colocá-lo na equação (2.10) no lugar de  $\vec{f}$ , como fizemos com  $\vec{g}$  no referencial  $xyz$ . Mostremos que, tanto heurística quanto rigorosamente, essa é a interpretação que deve ser dada à aceleração de referencial não-inercial que aparece no referencial da esfera em queda e, também, que tal aceleração é externa às presenças locais de fluido no referencial não-inercial atado à esfera.

Para determinarmos o campo de inércia, façamos um experimento imaginário e comprovemos posteriormente a veracidade do resultado obtido. Tal experimento segue das idéias heurísticas explanadas anteriormente. Uma nota para o termo *campo de inércia* que, mesmo que possa ser abusivo quanto ao jargão, será utilizado deliberadamente como sinônimo de aceleração que aparece no referencial em queda como consequência de estar acelerado em relação a um referencial inercial, i.e., em relação ao chão.

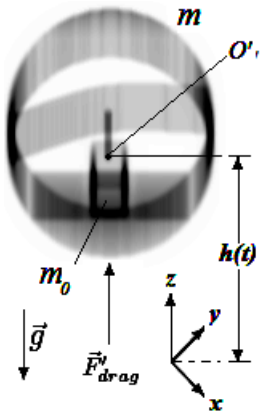


Figura 1: Esfera em queda

Na figura ao lado, a esfera de massa  $m$  tem uma balança de massa desprezível em seu interior que mede a força normal que o "chão" da esfera faz na massa de prova  $m_0$ . Isolando o sistema composto pelas massas  $m + m_0$ , temos:

$$(m + m_0) \ddot{h}(t) \hat{e}_z = \vec{F}'_{\text{drag}} + (m + m_0) \vec{g} .:$$

$$\ddot{h}(t) \hat{e}_z = \frac{\vec{F}'_{\text{drag}}}{(m + m_0)} + \vec{g}. \quad (2.12)$$

Já, isolando a massa de prova  $m_0$ , temos:

$$m_0 \ddot{h}(t) \hat{e}_z = \vec{N} + m_0 \vec{g} \Rightarrow \ddot{h}(t) \hat{e}_z = \frac{\vec{N}}{m_0} + \vec{g}, \quad (2.13)$$

onde  $\vec{N}$  é a reação normal, com vetor  $\hat{e}_z$ , cujo módulo é medido pela balança.

De (2.12) e (2.13), temos:

$$\frac{\vec{F}'_{\text{drag}}}{(m+m_0)} + \vec{g} = \frac{\vec{N}}{m_0} + \vec{g} \Rightarrow \frac{\vec{N}}{m_0} = \frac{\vec{F}'_{\text{drag}}}{(m+m_0)} = \frac{\vec{F}_{\text{drag}} + \delta\vec{F}_{\text{drag}}(m_0)}{(m+m_0)},$$

donde o campo gravitacional no interior da esfera,  $\vec{g}_0$ , é definido e dado por:

$$\vec{g}_0 = \lim_{m_0 \rightarrow 0} -\frac{\vec{N}}{m_0} = \lim_{m_0 \rightarrow 0} -\frac{\vec{F}_{\text{drag}} + \delta\vec{F}_{\text{drag}}(m_0)}{(m+m_0)} = -\frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m}, \quad (2.14)$$

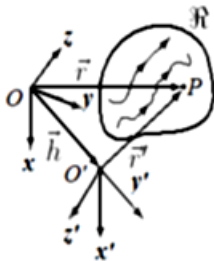
onde  $\vec{F}_{\text{drag}}$  é a força de arrasto viscoso original, sem a massa de prova, e  $\delta\vec{F}_{\text{drag}}(m_0)$  é o incremento à força de arrasto original - por termos considerado a presença interna da massa de prova  $m_0$ .

Substituindo o campo externo dado por (2.14) na equação (2.10) para  $\vec{f}$ , temos a equação de Navier-Stokes no referencial atado à esfera:

$$\rho' \dot{\vec{v}}' - \rho' \vec{g}_0 + \vec{\nabla}' p' - \eta' \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' = \rho' \dot{\vec{v}}' + \rho' \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} + \vec{\nabla}' p' - \eta' \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' = \vec{0}, \quad (2.15)$$

onde as linhas denotam as medidas feitas no referencial atado à esfera.

Para demonstrar que a heurística que levou à equação (2.15) está realmente correta, tomemos os referenciais  $S$  (inercial) e  $S'$  (não-inercial), conforme esquematizado abaixo e o escoamento do fluido numa região  $\mathfrak{R}$ , sendo  $P$  a localização de um ponto do fluido:



Temos que:

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{r}' \therefore \begin{cases} \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{h}} + \dot{\vec{r}}', \\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{h}} + \ddot{\vec{r}}'. \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\vec{\nabla} = \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum_{j,k} \hat{e}_j \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_k}. \quad (2.17)$$

Figura 2: Escoamento do fluido numa região  $\mathfrak{R}$ .

De (2.16), temos que:

$$x'_j = x_j - h_j,$$

$$\therefore \vec{\nabla} = \sum_{j,k} \hat{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k - h_k) \frac{\partial}{\partial x'_k}. \quad (2.18)$$

No nosso caso<sup>12</sup>, temos, para o sistema atado à esfera, digamos  $S' \equiv x'y'z'$ , com origem no centro da esfera, que:  $h_j = h_j(t)$  e  $\hat{e}_j // \hat{e}'_j$ , sendo então, por (2.18), que:

$$\vec{\nabla} = \sum_{j,k} \hat{e}'_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k - h_k(t)) \frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum_{j,k} \hat{e}'_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum_{j,k} \hat{e}'_j \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum_j \hat{e}'_j \frac{\partial}{\partial x'_j} \therefore$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}'. \quad (2.19)$$

No sistema  $S = xyz$ , a equação (2.10), é dada por:

$$\rho \ddot{\vec{v}} - \rho \vec{g} + \vec{\nabla} p - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{0},$$

que, pelas equações (2.16) e (2.19), é reescrita:

$$\rho \left( \ddot{\vec{h}} + \ddot{\vec{v}}' \right) - \rho \vec{g} + \vec{\nabla}' p - \eta \vec{\nabla}'^2 \left( \dot{\vec{h}} + \dot{\vec{v}}' \right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \left( \ddot{\vec{h}} + \ddot{\vec{v}}' \right) - \rho \vec{g} + \vec{\nabla}' p - \eta \vec{\nabla}'^2 \left( \dot{\vec{h}}(t) + \dot{\vec{v}}' \right) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho \ddot{\vec{h}} + \rho \ddot{\vec{v}}' - \rho \vec{g} + \vec{\nabla}' p - \eta \vec{\nabla}'^2 \dot{\vec{v}}' = \vec{0}. \quad (2.20)$$

Sendo  $\rho$ ,  $p$  e  $\eta$  escalares, são invariantes por transformações de coordenadas<sup>13</sup>, temos:

<sup>12</sup>Os pontos representam diferenciações ordinárias em relação ao tempo do ponto de vista do referencial inercial do chão ( $S$ ). Porém, como os versores dos dois sistemas de coordenadas de nosso problema, os sistemas atado ao chão ( $S$ ) e atado à esfera ( $S'$ ), mantêm-se paralelos, temos que não haverá variação destes versores, donde as diferenciações terão o mesmo significado físico nos dois sistemas, quando aplicadas à mesma grandezal vetorial que utilize esses versores como base num dos sistemas. Por exemplo,  $(d/dt)_S \vec{r}' = (d/dt)_S (x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y + z'\hat{e}'_z) = x'\dot{\hat{e}}'_x + y'\dot{\hat{e}}'_y + z'\dot{\hat{e}}'_z + x'\dot{\hat{e}}'_x + y'\dot{\hat{e}}'_y + z'\dot{\hat{e}}'_z = x'\dot{\hat{e}}'_x + y'\dot{\hat{e}}'_y + z'\dot{\hat{e}}'_z = (d/dt)_{S'} \vec{r}'$ .

<sup>13</sup>Lembremos que a hipótese de isotropia nos permite que escrevamos  $\eta_{ij} = \eta \delta_{ij}$ ,  $\rho_{ij} = \rho \delta_{ij}$ ,  $p_{ij} = -p \delta_{ij}$ . Tais tensores são invariantes por transformação de coordenadas. De fato,  $p'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} p_{kl} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} (-p) \delta_{kl} = -p \sum_l a_{il} a_{jl} = -p \delta_{ij} = -p' \delta_{ij}$ , donde  $p = p'$ . O mesmo raciocínio se aplica a  $\rho$  e a  $\eta$ .

$$\Rightarrow \rho' \ddot{\vec{h}} + \rho' \dot{\vec{v}}' - \rho' \vec{g} + \vec{\nabla}' p' - \eta' \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' = \vec{0}. \quad (2.21)$$

A segunda lei de Newton aplicada à esfera de massa  $m$  fornece, no referencial  $S \equiv xyz$ :

$$(2.21') : \left\{ m \ddot{\vec{h}} = \vec{F}_{\text{drag}} + m \vec{g} \Rightarrow \ddot{\vec{h}} = \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} + \vec{g}, \right.$$

que, substituído em (2.20), fornece:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} + \rho' \vec{g} + \rho' \dot{\vec{v}}' - \rho' \vec{g} + \vec{\nabla}' p' - \eta' \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' &= \vec{0} \quad . . \\ \rho' \dot{\vec{v}}' + \rho' \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} + \vec{\nabla}' p' - \eta' \vec{\nabla}'^2 \vec{v}' &= \vec{0}, \end{aligned}$$

que é exatamente a equação (2.15) obtida heurísticamente.

Ficando tácito então que passamos para o referencial da esfera, onde, abandonando as linhas na equação (2.15) e tendo em vista as condições de contorno  $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{v}' = -\dot{h}(t) \hat{e}'_z$  e  $\vec{v}'(\partial \text{esfera}) = \vec{0}$ , temos o problema matemático:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{\vec{v}} + \rho \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} + \vec{\nabla} p - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{0}; \\ \lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{v} = -\dot{h}(t) \hat{e}_z, \quad \vec{v}(\partial \text{esfera}) = \vec{0} \text{ (não-eskorregamento)}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

### 2.3 Análise, Heurística e Dificuldades na Solução da Equação de Navier-Stokes

Nesta seção, exploraremos física e matematicamente a solução da equação (2.22) para o cálculo da força de arrasto que o fluido faz na esfera. Encontraremos sérios problemas, já de pronto, relacionados à não-linearidade da equação de Navier-Stokes. Investigaremos sob quais condições podemos tratar a equação (2.22) como linear. Dentro das condições de validade do

princípio de superposição, i.e., na validade de linearidade de (2.22), proporemos solução que superponha modos de Fourier em representação integral de maneira a descrever o movimento real da esfera em queda como superposição de oscilações da mesma dentro do fluido. Determina-se, também para esta seção, a expressão geral para o cálculo da força de arrasto, utilizando-se volume de controle indeformável, dado que utilizaremos a expressão geral no caso particular de linearidade aqui nesta seção tratado e, também, na aplicação principal que faremos quando da análise posterior sobre crise do arrasto (objeto principal deste trabalho). Veremos que as condições de validade da linearidade de (2.22) nos levarão à necessidade de baixos números de Reynolds, grandeza a ser definida. Porém, a expressão obtida para a força de arrasto ainda será mais geral que a de Stokes, pois não imporemos regime estacionário. Enfim, a investigação que aqui faremos é tão somente para que ganhemos alguma heurística sobre a dinâmica que surge, e suas implicações, da equação (2.22), no nosso problema de queda da esfera, ainda que as informações oriundas estejam vinculadas à validade de linearidade.

Suponhamos que estejamos num caso geral de regime transitório em que o campo de velocidades dependerá também do tempo enquanto não atingido o estacionário, sendo que este estacionário pode ser atingido de forma arbitrária quanto ao tempo, i.e., rápida ou lentamente. Nesse regime transitório, denotaremos o campo de velocidades na equação (2.22) por<sup>14</sup>  $U(\vec{r}, t)$ , onde  $\vec{r}$  é o vetor posição de um ponto do fluido no referencial da esfera em queda. Colocaremos também um índice 0 nas demais grandezas que devem ser diferentemente notadas neste caso particular, conforme facilmente se depreende abaixo. Temos que:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{U}}(\vec{r}, t) &= \frac{d}{dt} \vec{U}(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{U}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}(\vec{r}, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\vec{U}}(\vec{r}, t) &= \left( \sum_j \dot{x}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}(\vec{r}, t) \quad \therefore \\ \dot{\vec{U}}(\vec{r}, t) &= \left[ \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{U}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}(\vec{r}, t),\end{aligned}$$

---

<sup>14</sup>Tal diferença de notação pois tal campo deverá depois se amoldar às condições que determinaremos para que (2.22) seja tratada como linear, i.e., queremos evidenciar o caráter particular que nesta seção daremos.

donde reescrevemos na equação (2.22):

$$\rho \left[ \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{U}(\vec{r}, t) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}(\vec{r}, t) + \frac{\rho}{m} \vec{F}_{\text{drag}}^0 + \vec{\nabla} p_0 - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{0}. \quad (2.23)$$

Como a força de arrasto  $\vec{F}_{\text{drag}}^0$  no regime transitório, assim como em todo o regime, estará direcionada ao longo de  $\hat{e}_z$ , com sentido ascendente, podemos considerá-la como  $\vec{F}_{\text{drag}}^0 = F_{\text{drag}}^0 \hat{e}_z$  em (2.23). Então, o rotacional da força de arrasto no regime transitório é:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{drag}}^0 = (\hat{e}_x \nabla_x + \hat{e}_y \nabla_y + \hat{e}_z \nabla_z) \times (F_{\text{drag}}^0 \hat{e}_z) \quad \therefore$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{\text{drag}}^0 = (\hat{e}_x \times \hat{e}_z) \nabla_x F_{\text{drag}}^0 + (\hat{e}_y \times \hat{e}_z) \nabla_y F_{\text{drag}}^0 + (\hat{e}_z \times \hat{e}_z) \nabla_z F_{\text{drag}}^0,$$

que é claramente nulo, dado que se  $F_{\text{drag}}^0$  depender da posição, assim o fará somente em relação à cota  $z$  (lembramos que, por hipótese, a esfera deslocar-se-á segundo a vertical).

Então, tomando o rotacional em ambos os lados de (2.23), e lembrando que um campo gradiente é irrotacional, temos:

$$\rho \vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right] + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] - \eta \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] = \vec{0},$$

ou:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] - \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] = \vec{0}. \quad (2.24)$$

Seja o número de Reynolds  $Re = 2RU(\vec{r}, t)\rho/\eta$  no regime transitório, onde  $2R$  é o diâmetro da esfera. Tomando as dimensões típicas, temos que o termo  $\vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right]$  terá módulo da ordem de  $U^2/(2R)^2$ .

Já o termo  $(\eta/\rho)\vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right]$ , terá módulo da ordem de  $\eta U / \left[ \rho (2R)^3 \right]$ , donde:



$$\frac{\left| (\eta/\rho) \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] \right|}{\left| \vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right] \right|} \cong \frac{\eta U / \rho (2R)^3}{U^2 / (2R)^2} = \frac{\eta}{2R\rho U} = \frac{1}{Re}. \quad (2.25)$$

Então, vemos que para pequenos valores do número de Reynolds ( $Re \ll 1$ ), podemos desprezar o primeiro termo de (2.24), frente ao terceiro, e reescrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] - \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{U}(\vec{r}, t) \right] = \vec{0}, \quad (2.26)$$

o que será claramente válido num regime transitório com baixo número de Reynolds.

Será somente esse o caso? Poderemos desprezar o termo não-linear,  $\vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right]$ , somente se o regime transitório estiver na condição  $Re \ll 1$ ? Investiguemos mais o assunto. Para tal, suponhamos verdadeira a equação (2.26):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{U} \right) = \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left( \vec{\nabla} \times \vec{U} \right). \quad (2.27)$$

A equação (2.27) é a conhecida equação da condução do calor para  $\vec{\nabla} \times \vec{U}$ . Tomando soluções de (2.27) na forma  $\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{s}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , com  $\vec{s}_0 = c\vec{t}e$ , e substituindo em (2.27), temos:

$$-i\omega \vec{s}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = -\frac{\eta}{\rho} k^2 \vec{s}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \therefore$$

$$k^2 = \frac{i\rho\omega}{\eta} \Rightarrow k = \sqrt{i} \left( \frac{\rho\omega}{\eta} \right)^{1/2}. \quad (2.28)$$

Para calcularmos as raízes de  $i$ , i.e.,  $\sqrt{i}$ , façamos  $\sqrt{i} = \alpha + i\beta$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então, temos:

$$i = (\alpha + i\beta)^2 = \alpha^2 + 2i\alpha\beta - \beta^2 \quad \therefore$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0; \\ 2\alpha\beta = 1. \end{cases}$$

Dado isso, temos:

$$\alpha^2 - \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^4 - 1}{4\alpha^2} = 0 \therefore$$

$$4\alpha^4 = 1 \Rightarrow \alpha^4 = 1/4 \Rightarrow \alpha^2 = \pm 1/2.$$

Como  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\alpha^2 = 1/2 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{2}/2 \therefore$$

$$\beta = \frac{1}{2\alpha} = \pm \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore$$

$$\sqrt{i} \in \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

e a equação (2.28) torna-se:

$$k = \left(\frac{\rho\omega}{\eta}\right)^{1/2} \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)\right) = \pm (1+i) \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

Seja  $\hat{\lambda}$  o versor de onda da solução proposta para  $\vec{\nabla} \times \vec{U}$  na equação (2.27), lembrando que estamos determinando as condições para a validade da retirada do primeiro termo não-linear da equação (2.24) para o regime transitório. Assim, dado o exposto, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{s}_0 e^{i(\pm(\rho\omega/2\eta)^{1/2}(1+i)\hat{\lambda}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{s}_0 e^{\pm i(\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r} \mp (\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r} - i\omega t} \therefore$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{s}_0 e^{\mp(\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r}} e^{\pm i(\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r} \mp (\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r} - i\omega t}. \quad (2.30)$$

Notemos que:

$$\left| \vec{\nabla} \times \vec{U} \right| = s_0 e^{\mp(\rho\omega/2\eta)^{1/2}\hat{\lambda}\cdot\vec{r}}, \quad (2.31)$$

donde vemos que devemos tomar o sinal negativo, dado que teríamos um

rotacional de módulo infinito no infinito.

A análise qualitativa que se torna importante aqui é a de que a vorticidade,  $\vec{\nabla} \times \vec{U}$ , decai em regimes em que a equação (2.27) é válida, ou seja, quando desprezamos o termo não-linear na equação (2.24). A princípio, isso pode ocorrer independentemente do número de Reynolds, desde que (2.27) seja válida. Continuemos a análise.

Sabemos que a distância  $\delta$  na qual a amplitude de uma onda cai de um fator  $e$  é chamada de profundidade de penetração da onda. Então, de (2.31), temos:

$$\delta (\rho \omega / 2\eta)^{1/2} = 1 \Rightarrow \delta = \left( \frac{2\eta}{\rho \omega} \right)^{1/2}. \quad (2.32)$$

Então, do exposto, vemos que podemos fazer uma análise qualitativa referente à equação (2.27) sobre a vorticidade, donde concluímos haver um decrescimento exponencial da vorticidade quando penetramos para o interior do fluido, reiterando, mais uma vez, que ainda estamos supondo condições sob as quais é válida a equação (2.27).

Notando que a solução proposta para o rotacional na equação (2.27) é oscilatória de frequência  $\omega$ , o mesmo sucederá com a velocidade  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  dos elementos de fluido. Em outras palavras, podemos conjecturar que o movimento do fluido causado por oscilações da esfera imersa é rotacional numa certa camada em torno da esfera, tornando-se irrotacional para distâncias mais afastadas, i.e., potencial. A profundidade de penetração do fluxo rotacional seria, então, da ordem de  $\approx (\eta/\rho\omega)^{1/2}$ , conforme a equação (2.32), sob a hipótese de validade de (2.27).

Temos, então, dois casos-limite importantes a considerar:  $\delta \gg 2R$ ,  $\delta \ll 2R$ . Então:

$$\delta \gg 2R \stackrel{(2.32)}{\Rightarrow} \frac{2\eta}{\rho\omega} \gg 4R^2 \Rightarrow (2R)^2 \omega \ll \frac{2\eta}{\rho} \Rightarrow \frac{2R\omega}{2} \ll \frac{\eta}{(2R)\rho} = \frac{U}{Re} \therefore$$

$$Re \ll \frac{U}{\omega R} \quad (2.33)$$

Seja  $l$  a amplitude de oscilação típica dos elementos do fluido. Então,  $U \approx \omega l$ , que, substituído em (2.33), fornece:

$$Re \ll \frac{\omega l}{\omega R} = \frac{l}{R}. \quad (2.34)$$

**3.1.a)** Então, é lícito supor (2.27) válida para baixos número de Reynolds

quando  $\delta \gg 2R$ , se as amplitudes de oscilação características no fluido forem menores ou da mesma ordem de grandeza que a dimensão característica da esfera.

Agora:

$$\delta \approx 2R \stackrel{(2.32)}{\Rightarrow} \frac{2\eta}{\rho\omega} \approx 4R^2 \Rightarrow (2R)^2 \omega \approx \frac{2\eta}{\rho} \Rightarrow \frac{2R\omega}{2} \approx \frac{\eta}{(2R)\rho} = \frac{U}{Re} \therefore$$

$$Re \approx \frac{U}{\omega R} \quad (2.35)$$

Novamente, seja  $l$  a amplitude de oscilação típica dos elementos do fluido, donde  $U \approx \omega l$ , que, substituído em (2.35), fornece:

$$Re \approx \frac{\omega l}{\omega R} = \frac{l}{R}. \quad (2.36)$$

**3.1.b)** Então, é lícito supor (2.27) válida para baixos número de Reynolds quando  $\delta \approx 2R$ , se as amplitudes de oscilação características no fluido forem bem menores que a dimensão característica da esfera.

Inferimos das conclusões 3.1.a e 3.1.b que, para uma mesma esfera de raio  $R$ , para  $l \ll R$  a partir da situação  $\delta \gg R$ , a equação (2.27) continuará válida (sendo, portanto, desprezíveis os efeitos não-lineares) para escoamentos em que, à medida que as regiões rotacionais do fluido vão se confinando a partes mais próximas da esfera, de  $\delta \gg 2R$  para  $\delta \approx 2R$ , não aumentem as amplitudes de oscilação durante esse confinamento. Isso significa que, em escoamentos em que as amplitudes de oscilação diminuam, deverá haver um amortecimento suficiente para cessar os efeitos não-lineares. Recordando que o número de Reynolds  $Re = 2RU(\vec{r}, t)\rho/\eta$  é inversamente proporcional à viscosidade, e que esta seria a responsável pelos efeitos viscosos de amortecimento, donde, ainda que a viscosidade  $\eta$  fosse constante, seu efeito seria dissipativo no número de Reynolds  $Re = 2RU(\vec{r}, t)\rho/\eta$ , e dado que a dissipação de energia cinética dos elementos de fluido traduz-se numa diminuição do campo de velocidades  $U(\vec{r}, t)$ , o efeito da viscosidade não deveria ser o de diminuir o número de Reynolds? A resposta seria positiva se colocássemos a esfera no fluido com alguma velocidade inicial e deixássemos a mesma somente sob ação do fluido. Mas, neste caso, as regiões rotacionais afastar-se-iam da superfície da esfera e não o contrário. Assim, deve agir um agente externo ao fluido, como o campo gravitacional, por exemplo, que realize trabalho nos elementos de fluido de modo a incrementar a energia cinética

desses elementos, situação esta em que aumentaria o número de Reynolds e, assim, aparecendo o efeito de confinar a rotacionalidade do fluido às regiões próximas à superfície da esfera. Agora, notemos que o operador  $\vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}$  representa a derivada direcional na direção da velocidade. Suponhamos o caso em que  $\delta \ll 2R$ .

Próximo à superfície da esfera, a velocidade do fluido será predominantemente tangencial. Na direção tangencial, a velocidade variará *apreciavelmente* em distâncias que forem da ordem das dimensões típicas da esfera, i.e.,  $2R$ . Então:

$$\left| \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right| \approx \frac{U^2}{2R} \approx \frac{(\omega l)^2}{2R}, \quad (2.37)$$

onde  $l$  é a amplitude de oscilação típica dos elementos do fluido nas proximidades da esfera no caso  $\delta \ll 2R$ . A derivada  $\partial \vec{U}(\vec{r}, t) / \partial t$ , neste caso, será tal que:

$$\left| \partial \vec{U}(\vec{r}, t) / \partial t \right| \approx U \omega \approx l \omega^2. \quad (2.38)$$

De (2.37) e (2.38), temos que:

$$\frac{\left| \left( \vec{U}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{U}(\vec{r}, t) \right|}{\left| \partial \vec{U}(\vec{r}, t) / \partial t \right|} \approx \frac{\omega^2 l^2}{2R} \times \frac{1}{l \omega^2} \approx \frac{l}{R}. \quad (2.39)$$

Vemos, então, de (2.39), que, se a amplitude de oscilação dos elementos do fluido nas proximidades da esfera for tal que  $l \ll R$ , poderemos desprezar o primeiro termo da equação (2.24), frente ao segundo, o que será equivalente a dizer que (2.27) continua válida. Notemos que num escoamento em que  $l \ll R$ , caso em que (2.27) é válida para  $\delta \gg 2R$  e para  $\delta \approx 2R$ , devido a 3.1.a e 3.1.b, (2.27) continuará válida para  $\delta \ll 2R$ , i.e., nos escoamentos com  $l \ll R$  o confinamento das regiões rotacionais do fluido à superfície da esfera poderão ser suficientemente descritos pela equação (2.27). Assim, na hipótese de escoamentos em que  $l \ll R$ , portanto satisfatória a descrição, o estudo, da propagação do rotacional de tais escoamentos pela equação (2.27), temos que, no regime em que  $\delta \ll 2R$ :

$$\delta \ll 2R \stackrel{(2.32)}{\Rightarrow} \frac{2\eta}{\rho \omega} \ll 4R^2 \Rightarrow (2R)^2 \omega \gg \frac{2\eta}{\rho} \Rightarrow \frac{2R\omega}{2} \gg \frac{\eta}{2R\rho} = \frac{U}{Re} \therefore$$

$$Re \gg \frac{U}{\omega R} \approx \frac{\omega l}{\omega R} = \frac{l}{R}. \quad (2.40)$$

Comparando (2.34), (2.36) e (2.40), vemos que o confinamento das regiões rotacionais em direção às proximidades da superfície da esfera, para escoamentos em que se mantém a relação  $l \ll R$ , portanto descritos por (2.27), é acompanhado de um aumento do número de Reynolds. Inferimos em tais escoamentos que os efeitos rotacionais serão importantes tão mais proximamente à superfície da esfera quanto maior o número de Reynolds. Tal região próxima da esfera onde os efeitos rotacionais são importantes é o que denominaremos, mais adiante, camada limite.

Assim, supor-se-á válida a equação (2.27) para o regime transitório, pois faremos a hipótese válida para esta seção de que  $l \ll R$ . Na dedução da equação (2.40) há duas hipóteses cruciais, a de que os efeitos rotacionais estão confinados às vizinhanças da esfera e a de que sempre se verificará  $l \ll R$ . A conclusão, exatamente (2.40), é a de que não há limite superior *ad hoc* para o número de Reynolds sob tais hipóteses. Assim, pode ser possível, ou seja, não é impossível dentro das hipóteses aqui supostas, a equação (2.27) continuar localmente válida nas regiões do fluido em que a relação  $l \ll R$  se verifique. Fora da região rotacional de um fluido, i.e., fora da profundidade de penetração, fora da camada limite, o escoamento vai-se tornando eminentemente irrotacional. Ora, a tensão de cisalhamento tangencial é a que mede a taxa de deformação de um elemento infinitesimal de fluido de modo a não alterar seu volume, i.e., sem os efeitos viscosos de compressibilidade. Assim, um cubo elementar de fluido transformar-se-ia não mais num prisma reto, sob ação pura do cisalhamento tangencial, mas num prisma com arestas inclinadas, deformadas, portanto rotacional. Assim, se houver cisalhamento tangencial, haverá rotacional. A recíproca não é verdadeira, pois, numa rotação pura, há rotacional, mas não cisalhamento. Obviamente, em regiões onde não há rotacional, não há deformação, logo, não há cisalhamento. Do exposto, concluímos que fora da profundidade de penetração, fora da camada limite, fora da região de confinamento progressivo da vorticidade, teremos escoamento irrotacional e de cisalhamento nulo. A equação que descreve o escoamento de fluidos sem viscosidade é a equação de Euler que pode ser obtida de (2.3) tomando-se  $\vec{\nabla} \cdot \Gamma = 0$ . Obviamente isso será possível se  $\Gamma = 0$ . Assim, num escoamento incompressível, caso em que  $\Gamma$ , o tensor de efeitos viscosos de cisalhamento tangencial e de compressibilidade, será o próprio tensor de cisalhamento tangencial, a região externa à camada limite, por ser eminen-

temente irrotacional, será bem descrita pela equação de Euler com campo de velocidades potencial, i.e., na região fora da camada limite ter-se-á um escoamento de fluido bem ideal. Lembremos que esse comportamento não contraria o fato de termos viscosidade constante, i.e., o fato de que o fluido ainda seja viscoso mesmo sob tais condições, pois o que faz com que um fluido se comporte idealmente não é a viscosidade mas sim o tensor de efeitos viscosos, e este pode ser nulo mesmo na presença de viscosidade. Desses fatos surge a possibilidade de, para altos números de Reynolds em um caso geral, resolvermos o escoamento do fluido na região externa à camada limite como potencial descrita pela equação de Euler. Aqui, nesta seção, para ganharmos mais heurística sobre o comportamento da equação de Navier-Stokes para o nosso caso concreto a ser definido mais adiante, principalmente no que concerne ao cálculo da força de arrasto, suporemos, ainda, que  $l \ll R$ . Dado o exposto, a mesma análise que alicerça a suposição de validade de (2.27) alicerça o reescrever de (2.23) para o regime transitório:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}(\vec{r}, t) + \frac{\rho}{m} \vec{F}_{\text{drag}}^0 + \vec{\nabla} p_0 - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{0}. \quad (2.41)$$

A velocidade de queda da esfera é uma função desconhecida do tempo, durante o regime transitório, dada por, conforme notação utilizada em (2.22):  $\dot{h}^0(t)$ . Representemos  $\dot{h}^0(t)$  como uma integral de Fourier:

$$\dot{h}^0(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \dot{h}_\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{h}^0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (2.42)$$

Sendo a equação (2.41) linear<sup>15</sup>, a força de arrasto no regime transitório,  $\vec{F}_{\text{drag}}^0$ , será dada pela soma integral das forças de arrasto para as velocidades com-

<sup>15</sup>Para efeitos de aplicação do princípio da superposição, poder-se-ia afirmar que a equação (2.41) não seria linear homogênea a rigor, pois o termo de fonte não-homogêneo  $\rho \vec{F}_{\text{drag}}^0/m$  não permitiria a obtenção das soluções para os campos de velocidade e de pressão simplesmente pela soma de soluções independentes de (2.41), argumentando-se que a superposição deveria ser feita sobre as soluções da linear homogênea correspondente e esta soma somada a uma solução particular, em (2.41). Tal objeção realmente seria verdadeira se  $\rho \vec{F}_{\text{drag}}^0/m$  fosse considerado um termo prescrito de modo que as somas de soluções para os campos  $p_0$ , por exemplo  $p_0^\alpha + p_0^\beta$ , e  $\vec{U}(\vec{r}, t)$ , por exemplo  $\vec{U}(\vec{r}, t)^\alpha + \vec{U}(\vec{r}, t)^\beta$  devessem, quando substituídas em (2.41), satisfazer a mesma. Porém, se não o considerarmos prescrito, i.e., de modo que o mesmo seja também campo-solução da equação (2.41), a soma dos campos  $p_0^\alpha + p_0^\beta$ ,  $\vec{U}(\vec{r}, t)^\alpha + \vec{U}(\vec{r}, t)^\beta$  e  $\rho \vec{F}_{\text{drag}}^{0,\alpha}/m + \rho \vec{F}_{\text{drag}}^{0,\beta}/m$  satisfariam a equação (2.41). Sob tal enfoque, teríamos realmente a equação (2.41) como linear homogênea, pois a operação  $[\rho/m + \vec{\nabla} + (\rho \partial/\partial t - \eta \vec{\nabla}^2)][\vec{F}_{\text{drag}}^0; p_0; \vec{U}(\vec{r}, t)] = (\rho/m) \vec{F}_{\text{drag}}^0 +$

ponentes de Fourier  $\hat{h}_\omega \exp(-i\omega t)$ . Determinemos, então, primeiramente, a força se arrasto sobre uma esfera que executa oscilações unidirecionais, sem rotação, num fluido. A condição de contorno, no referencial da esfera, na superfície da esfera, impõe que:

$$\vec{U}^\omega(\vec{r}, t) \Big|_{\text{desfera}} = \vec{0}.$$

Já a condição de contorno no infinito, no referencial da esfera, impõe:

$$\vec{U}^w(\vec{r}, t) \Big|_\infty = -\hat{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z,$$

---

$\vec{\nabla} p_0 + (\rho \partial / \partial t - \eta \vec{\nabla}^2) \vec{U}(\vec{r}, t)$  é realmente linear. Imaginemos que a esfera de nosso problema esteja oscilando dentro do fluido com frequência  $\omega$ . Em tal situação, teríamos a 3-upla  $[\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}; p_0^\omega; \vec{U}(\vec{r}, t)^\omega]$ . Tal situação seria caracterizada por uma condição de contorno no infinito, no referencial da esfera, em que os elementos de fluido no infinito estariam executando oscilação harmônica de frequência  $\omega$ . Para outra frequência, em particular num movimento de mesma amplitude  $l$ , onde  $U \approx \omega l$ , a condição de contorno é outra, o que causaria uma mudança no campo de referencial não-inercial  $\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}$ , pois o arrasto puro será outro (o empuxo hidrostático não varia). Assim, para cada  $\omega$ , teremos uma 3-upla  $[\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}; p_0^\omega; \vec{U}(\vec{r}, t)^\omega]$  solução de (2.41) para o mesmo tipo (porém não fixo) de condição de contorno. Notemos que agora um campo prescrito fixo, como o gravitacional no referencial do chão em nosso problema, pode ser considerado, pois se consideraria simplesmente  $\rho \vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} / m = -\rho \delta(\omega) \vec{g} \forall \omega$ . Esta discussão serve para fundamentar o princípio da superposição em modos de Fourier que fazemos nesta seção. Vamos fixar um modo através da representação integral em modos de Fourier da condição de contorno no infinito em todas as frequências de oscilação possíveis para os elementos de fluido no infinito no referencial da esfera. Então, as frequências de oscilação características serão as da representação integral de Fourier do campo de velocidades dos elementos de fluido no infinito. Do ponto de vista do referencial da esfera é o fluido quem oscila sendo a fonte de oscilação do fluido elástico as oscilações no infinito de frequência  $\omega$ . Assim, para um modo de frequência  $\omega$  das oscilações dos elementos de fluido no infinito no referencial da esfera, ao resolvermos a equação (2.41) para esta frequência, teremos, para os campos encontrados, que  $\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) + (\rho/m) \vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} + \vec{\nabla} p_0^\omega - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{0}$ . Integrando para todas as frequências, temos  $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) + (\rho/m) \vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} + \vec{\nabla} p_0^\omega - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t)] d\omega = \vec{0} \Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial t} ((2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) d\omega) + \vec{\nabla} ((2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho/m) \phi_{\text{drag}}^0 d\omega) + \vec{\nabla} ((2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} p_0^\omega d\omega) - \eta \vec{\nabla}^2 ((2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) d\omega) = \vec{0}$ . Assim, como vemos, a superposição de modos obtidos de (2.41) satisfazendo suas respectivas condições de contorno oscilatórias de mesma natureza (porém não fixas) no infinito satisfará a equação (2.41). Vemos que as integrais na equação anterior são representações integrais de soluções de (2.41). Serão então essas integrais as representações dos campos que satisfazem (2.41) e a condição de contorno original no infinito? A resposta será positiva se tais representações integrais satisfizerem a condição de contorno original no infinito. Ao superpormos os modos estaremos representando a condição de contorno original, pois estaremos também superpondo as condições de contorno modais. Assim, obtemos que as soluções modais de (2.41) fornecerão os coeficientes da representação integral de Fourier dos campos-solução do problema original.



onde os índices  $\omega$  indicam que estamos trabalhando com o caso restrito, reiteramos, das componentes de Fourier, por enquanto. Façamos:

$$\vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) - \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z,$$

então, as condições de contorno para  $\vec{U}_\omega(\vec{r}, t)$  são:

$$(2.42') : \begin{cases} \vec{U}_\omega(\vec{r}, t)|_{\partial sphere} = \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z; \\ \vec{U}_\omega(\vec{r}, t)|_\infty = \vec{0}. \end{cases}$$

Da condição de incompressibilidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = 0$ , temos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) - \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = 0,$$

onde o campo de velocidades auxiliar  $\vec{U}_\omega(\vec{r}, t)$ , auxiliar para que tenhamos, de acordo com (2.42'), campo nulo no infinito, será necessariamente o rotacional de um campo vetorial, digamos  $\vec{\theta}_\omega$ , donde:

$$\vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{\theta}_\omega. \quad (2.43)$$

Esperamos que o problema tenha simetria axial  $z$ , donde poderemos tratá-lo em qualquer plano polar (plano paralelo ao eixo  $z$  e passando pela origem, sendo esta origem, como já o explicitamos anteriormente, o centro da esfera em queda). Tomaremos<sup>16</sup>, então,  $\vec{\theta}_\omega$ , em (2.43), ortogonal ao plano polar considerado, e na forma:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_\omega &= \left( \vec{\nabla} \psi \right) \times \left( \vec{a} e^{-i\omega t} \right); \\ \vec{\nabla} \psi &= \vec{\nabla} \psi(r, \theta), \end{aligned} \quad (2.44)$$

$\vec{a} \in$  plano polar, com  $\vec{a} \perp \vec{e}$ . Com essa escolha, ou seja, com  $\vec{\nabla} \psi(r, \theta)$ , o que será plausível pela simetria axial, e com  $\vec{a}$  constante,  $\vec{a}$  deverá estar em todos os planos polares que formos considerar para resolver o problema, dado que não há preferência de plano polar, por simetria, o que somente será possível se  $\vec{a}$  estiver sobre o eixo  $z$ . Portanto,  $\vec{a}$  é um vetor  $z$ -axial auxiliar constante. Então, das equações (2.43) e (2.44), temos:

---

<sup>16</sup>Essa será a nossa escolha. Como veremos, satisfará o problema matemático.

$$\vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{\nabla} \psi \times (\vec{a} e^{-i\omega t}) \right) \right] = e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right]; \quad (2.45)$$

$$\psi = \psi(r, \theta), \quad \vec{a} = a \hat{e}_z.$$

Temos, então, de (2.45):

$$\vec{\nabla} \times \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \left\{ e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \times \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \right\} = e^{-i\omega t} \left( \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \right) \left( \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right). \quad (2.46)$$

Mas:

$$\left( \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \right) = \left( \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \vec{\nabla}^2 \right), \quad (2.47)$$

$$(2.46) \wedge (2.47)$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) &= e^{-i\omega t} \left( \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \vec{\nabla}^2 \right) \left( \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right) \\ &= \left\{ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right) \right] - \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \right\} e^{-i\omega t} \therefore \\ \vec{\nabla} \times \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) &= -e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right], \end{aligned} \quad (2.48)$$

pois o divergente do rotacional é nulo. Substituindo o resultado de (2.48) na equação (2.27), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \right\} &= \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left\{ -e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow -i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] &= e^{-i\omega t} \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^4 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^4 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] + i\omega \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] &= \vec{0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^4 \left[ \left( \vec{\nabla} \psi \right) \times \vec{a} \right] + i\omega \vec{\nabla}^2 \left[ \left( \vec{\nabla} \psi \right) \times \vec{a} \right] &= \vec{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{\rho} \left[ \vec{\nabla}^4 (\vec{\nabla} \psi) \right] \times \vec{a} + i\omega \left[ \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \psi) \right] \times \vec{a} = \vec{0} \cdot \cdot$$

$$\left\{ \frac{\eta}{\rho} \left[ \vec{\nabla}^4 (\vec{\nabla} \psi) \right] + i\omega \left[ \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \psi) \right] \right\} \times \vec{a} = \vec{0}. \quad (2.49)$$

Tentaremos o campo gradiente na forma  $\vec{\nabla} \psi = \tilde{\psi}(r)\hat{e}_r$ , ou seja, tentaremos um campo radial. Se conseguirmos satisfazer as condições de contorno, não haverá problema algum com a nossa escolha. Parece claro da escolha, que o primeiro fator do lado esquerdo da igualdade em (2.49), o que perfaz o produto vetorial com  $\vec{a}$ , somente será colinear  $\vec{a}$  se o mesmo for nulo. De fato:

$$\vec{\nabla} \psi = \tilde{\psi}(r)\hat{e}_r \Rightarrow \psi = \psi(r) \quad (2.49) \quad \cdot \cdot$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\eta}{\rho} \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^4 \psi) \right] + i\omega \left[ \vec{\nabla} (\vec{\nabla}^2 \psi) \right] \right\} \times \vec{a} &= \left\{ \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla} j(r) + i\omega \vec{\nabla} \tilde{l}(r) \right\} \times \vec{a} = \\ &= \left\{ \left[ \frac{\eta}{\rho} \tilde{p}(r) + i\omega q(r) \right] \hat{e}_r \right\} \times \vec{a}, \end{aligned}$$

demonstrando a colinearidade somente no caso de nulidade, dado que  $\vec{a} = a\hat{e}_z \Rightarrow \hat{e}_r \times \vec{a} \neq \vec{0}$ , com  $\tilde{p}(r)$ ,  $q(r)$ ,  $j(r)$  e  $\tilde{l}(r)$  funções da variável  $r$ . Então, temos necessariamente que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left[ \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^4 \psi + i\omega \vec{\nabla}^2 \psi \right] &= \vec{0} \cdot \cdot \\ \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^4 \psi + i\omega \vec{\nabla}^2 \psi &= \lambda, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde  $\lambda$  é uma constante complexa. Colocando (2.50) na forma:

$$\frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla}^2 \psi) + i\omega \vec{\nabla}^2 \psi = \lambda,$$

notamos que a mesma admite uma solução particular constante, i.e.,

$$\frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 (\varepsilon) + i\omega \varepsilon = \lambda \Rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{i\omega} = -\frac{i\lambda}{\omega}, \quad (2.51)$$

com  $\varepsilon$ , conforme mencionado, constante. Necessitamos, então, resolver somente a equação homogênea:

$$\frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left( \vec{\nabla}^2 \psi \right) + i\omega \vec{\nabla}^2 \psi = 0, \quad (2.52)$$

que é semelhante à equação que nos leva, por exemplo, no contexto da Física Nuclear, ao potencial de Yukawa. Equações homogêneas desse tipo têm base de soluções na forma  $\{e^{\mu r}/r\}$ . Então, substituindo em (2.52):

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \left( \frac{e^{\mu r}}{r} \right) + i\omega \frac{e^{\mu r}}{r} = 0 &\Rightarrow \frac{\eta}{\rho} r^{-2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{e^{\mu r}}{r} \right) + i\omega \frac{e^{\mu r}}{r} = 0 \Rightarrow \dots \\ &\Rightarrow \left( \frac{\eta}{\rho} \mu^2 + i\omega \right) \frac{e^{\mu r}}{r} = 0. \end{aligned}$$

$$\mu^2 = -\frac{i\rho\omega}{\eta} \Rightarrow \mu = \sqrt{-i} \left( \frac{\rho\omega}{\eta} \right)^{1/2}. \quad (2.53)$$

Para determinarmos as raízes de  $-i$ , façamos  $\sqrt{-i} = \sqrt{-1}\sqrt{i} = i\sqrt{i}$ . Como já determinamos as raízes de  $i$  anteriormente, na marcha que levou a (2.29), temos:

$$\sqrt{-i} \in \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i; \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right\},$$

de modo que determinamos (2.53):

$$\mu = \pm (1-i) \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}. \quad (2.54)$$

Temos, então, a nossa base  $\mathbb{B}$  de soluções da equação homogênea (2.52), i.e.:

$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{1}{r} e^{(1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}}; \frac{1}{r} e^{-(1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2}} \right\}. \quad (2.55)$$

Adotaremos somente o sinal negativo, ou seja, tomaremos uma das constantes, na combinação linear dos elementos da base  $\mathbb{B}$ , como sendo nula,

para que não haja divergência no infinito, pois:

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} (1/r) \exp(\rho\omega/2\eta)^{1/2} r = \infty,$$

Então, somando com a solução particular, temos:

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \frac{A}{r} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{i\lambda}{\omega}, A \in \mathbb{C} \therefore \quad (2.56)$$

$$r^{-2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) = \frac{A}{r} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{i\lambda}{\omega} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow r \frac{d}{dr} \left( \frac{d\psi}{dr} \right) = -2 \left( \frac{d\psi}{dr} \right) + A e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{i\lambda r}{\omega} \therefore$$

$$r d \left( \frac{d\psi}{dr} \right) + \left[ 2 \left( \frac{d\psi}{dr} \right) - A e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r}{\omega} \right] dr = 0. \quad (2.57)$$

Procuremos um fator de integração para (2.57),  $F(r, d\psi/dr)$ . Multiplicando ambos os lados de (62) por  $F(r, d\psi/dr)$ , temos:

$$rF(r, d\psi/dr) d \left( \frac{d\psi}{dr} \right) + \left[ 2 \left( \frac{d\psi}{dr} \right) - A e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r}{\omega} \right] \times \\ \times F(r, d\psi/dr) dr = 0. \quad (2.58)$$

Impondo:

$$\frac{\partial}{\partial r} (rF(r, d\psi/dr)) = \\ = \frac{\partial}{\partial (d\psi/dr)} \left\{ \left[ 2 \frac{d\psi}{dr} - A e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r}{\omega} \right] F(r, d\psi/dr) \right\},$$

temos:

$$r \frac{\partial F}{\partial r} + F = \left[ 2 \frac{d\psi}{dr} - A e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r}{\omega} \right] \frac{\partial F}{\partial (d\psi/dr)} + 2F.$$

Impondo  $F = F(r)$ , temos  $r \frac{dF}{dr} + F = 2F \Rightarrow F = r \frac{dF}{dr} \Rightarrow F = r$  é um fator de integração. Então, (2.58) torna-se:

$$\begin{aligned}
r^2 d(d\psi/dr) + r \left[ 2(d\psi/dr) - Ae^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + i\lambda r/\omega \right] dr = 0 = \\
(2.59) \\
= M(r, d\psi/dr) d(d\psi/dr) + N(r, d\psi/dr) dr = dC,
\end{aligned}$$

sendo  $C$  uma constante complexa, pois agora  $\partial M/\partial r = \partial N/\partial (d\psi/dr)$ , i.e., temos um diferencial total da constante  $C$ . Então:

$$r^2 = \frac{\partial C}{\partial (d\psi/dr)} \Rightarrow C = \overbrace{r^2 \frac{d\psi}{dr}}^{(59')} + g(r),$$

onde  $g(r)$  é uma função exclusiva de  $r$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} + g(r) \right) = N = \\
r \left[ 2 \frac{d\psi}{dr} - Ae^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r}{\omega} \right] &\Rightarrow \dots \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{dg}{dr}(r) &= -A r e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{i\lambda r^2}{\omega} \therefore \\
g(r) &= \frac{i\lambda}{\omega} \int r^2 dr - A \int r e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} dr \Rightarrow \dots \Rightarrow \\
\Rightarrow g(r) &= \frac{i\lambda r^3}{3\omega} + \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \stackrel{(59')}{\Rightarrow} \\
C &= r^2 \frac{d\psi}{dr} + g(r) = r^2 \frac{d\psi}{dr} + \frac{i\lambda r^3}{3\omega} + \\
&+ \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \therefore r^2 \frac{d\psi}{dr} = \\
&= \left\{ C - \frac{i\lambda r^3}{3\omega} - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\}, \\
&\hspace{15em} (2.60)
\end{aligned}$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária complexa. Como no cálculo do campo de velocidades  $\vec{U}_\omega(\vec{r}, t)$ , do início do regime transitório, precisaremos, somente, de  $\vec{\nabla}\psi$ , vide as equações (2.43) e (2.44), não é necessário que integremos (2.60). Porém, é necessário que (2.60) convirja no infinito, pois lá precisaremos aplicar condição de contorno, o que somente será possível se  $\lambda = 0$ . Então, (2.60) torna-se:

$$\frac{d\psi}{dr} = r^{-2} \left\{ C - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\}, \quad (2.61)$$

com  $C$  e  $A$ , reiteramos, constantes arbitrárias complexas.

Podemos, então, por (2.61), calcular  $\vec{\nabla}\psi$ :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\psi &= \hat{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} = \hat{e} \frac{d\psi}{dr} = \\ &= \hat{e}_r r^{-2} \left\{ C - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Então, de (2.44):

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_\omega &= (\vec{\nabla}\psi) \times (\vec{a}e^{-i\omega t}) = (\vec{\nabla}\psi) \times (a\hat{e}_z e^{-i\omega t}) \stackrel{(2.62)}{\Rightarrow} \\ &= a^{-1} r^{-2} \vec{\theta}_\omega e^{i\omega t} = \\ &= \left\{ C - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} (\hat{e}_r \times \hat{e}_z), \\ \vec{\theta}_\omega &= -ar^{-2} \sin\theta \left\{ C - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} e^{-i\omega t} \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.63)$$

pois  $\hat{e}_r \times \hat{e}_z = -\sin\theta \hat{e}_\phi$ . Substituindo (2.63) em (2.43), temos:

$$\vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{\theta}_\omega = -ae^{-i\omega t} \left[ \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{e}_\phi}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\sin\theta}{r^2} \left\{ C - \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2} \left[ 1 + (1-i)r \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \right] e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} \hat{e}_\phi \right\}.$$

Utilizando as relações triviais entre os versores das coordenadas esféricas e os das coordenadas cartesianas, após algum rearranjo algébrico, encontramos:

$$\vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = a \sin\theta e^{-i\omega t} \hat{e}_\theta \left\{ \frac{A}{r} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{C}{r^3} + \right. \\ \left. \frac{2\eta A}{\rho\omega(1-i)^2 r^3} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{A}{(1-i)r^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} + \\ -a \cos\theta e^{-i\omega t} \hat{e}_r \left\{ \frac{2C}{r^3} - \frac{4\eta A}{\rho\omega(1-i)^2 r^3} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \right. \\ \left. - \frac{2A}{(1-i)r^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\}. \quad (2.64)$$

Tomando a primeira condição de contorno em (2.42'), temos:

$$\vec{U}_\omega(R, \theta, t) = \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z = \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} (\cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta),$$

onde  $R$  é o raio da esfera. Convém notar que a segunda condição de contorno em (42'),  $\vec{U}_\omega(r, \theta, t)_{r \rightarrow \infty} = \vec{0}$ , é satisfeita por (2.64) como consequência da nossa escolha ( $\lambda = 0$ ) em (2.56).

Então, aplicando a primeira condição de contorno em (2.64), temos:

$$\frac{aA}{R} e^{-(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{aC}{R^3} + \frac{2\eta aA}{\rho\omega(1-i)^2 R^3} e^{-(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \\ \frac{aA}{(1-i)R^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{-(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} = -\dot{h}_\omega; \quad (2.65) \\ - \frac{2aC}{R^3} + \frac{4\eta aA}{\rho\omega(1-i)^2 R^3} e^{-(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} +$$



$$+ \frac{2aA}{(1-i)R^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{-(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} = \dot{h}_\omega. \quad (2.66)$$

Multiplicando (2.65) por  $-2$  e somando a (2.66), obtemos  $A$ :

$$A = -\frac{3\dot{h}_\omega R}{2a} e^{(1-i)R(\rho\omega/2\eta)^{1/2}}. \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) em (2.66), calculamos  $C$ :

$$C = -\frac{\dot{h}_\omega R^3}{2a} \left[ 1 + \frac{6\eta}{\rho\omega(1-i)^2 R^2} + \frac{3}{(1-i)R} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \right]. \quad (2.68)$$

Substituindo (2.67) e (2.68) em (2.64), e depois em  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) - \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z$ , expressão definida anteriormente (vide a expressão que antecede (2.42')), obtemos o campo  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)$ :

$$\begin{aligned} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = & a \sin\theta e^{-i\omega t} \hat{e}_\theta \left\{ -\frac{3\dot{h}_\omega R}{2ar} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \right. \\ & + \frac{\dot{h}_\omega R^3}{2ar^3} \left[ 1 + \frac{6\eta}{\rho\omega(1-i)^2 R^2} + \frac{3}{(1-i)R} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \right] + \\ & - \frac{3\eta\dot{h}_\omega R}{a\rho\omega(1-i)^2 r^3} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \\ & \left. - \frac{3\dot{h}_\omega R}{2a(1-i)r^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} + \\ & - a \cos\theta e^{-i\omega t} \hat{e}_r \left\{ -\frac{\dot{h}_\omega R^3}{ar^3} \left[ 1 + \frac{6\eta}{\rho\omega(1-i)^2 R^2} + \frac{3}{(1-i)R} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \right] + \right. \\ & + \frac{6\eta\dot{h}_\omega R}{a\rho\omega(1-i)^2 r^3} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \\ & \left. + \frac{3\dot{h}_\omega R}{a(1-i)r^2} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} + \end{aligned}$$

$$-\dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z; \quad \hat{e}_z = \cos\theta \hat{e}_r - \sin\theta \hat{e}_\theta. \quad (2.69)$$

A equação (2.69) fornece, então, o campo de velocidades para o fluido, para a esfera oscilante, de frequência  $\omega$ , com oscilação unidirecional ao longo de do eixo  $Oz$ , sendo o campo de velocidades observado no referencial atado à esfera, ratificando, satisfazendo as condições de contorno em (2.22) para as componentes de Fourier de  $\dot{h}^0(t)$ , e satisfazendo a equação linear (2.41) para  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)$ , conforme requerido. Resolvemos, então, uma parte importante do problema, que é a determinação do campo de velocidades do fluido no referencial atado à esfera,  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)$ , o que nos permitirá calcular  $\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}$ , i.e., a força de arrasto que deverá ser integrada em  $\omega$ , pelo princípio da superposição, dada a linearidade de (2.43).

Na marcha que levou da equação (2.23) à equação (2.24), vimos que  $\vec{F}_{\text{drag}}^0$  é irrotacional. Obviamente, pelos mesmos motivos,  $\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}$  também será irrotacional. Então, escrevemos (2.41) para  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)$ :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) + \frac{\rho}{m} \vec{\nabla} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} + \vec{\nabla} p_0^\omega - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{0}, \quad (2.70)$$

onde escrevemos  $\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}$  como um campo gradiente pelo motivo acima exposto, sendo  $p_0^\omega$  o campo escalar de pressão devido ao campo componente de Fourier  $\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)$ . Reescrevemos, então, a equação (2.70):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left( \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} \frac{\rho}{m} \right) + \vec{\nabla} p_0^\omega &= \vec{\nabla} \left( \frac{\rho}{m} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} + p_0^\omega \right) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) \therefore \\ \vec{\nabla} \left( \frac{\varphi_{\text{drag}}^{0\omega}}{m} + \frac{p_0^\omega}{\rho} \right) &= \frac{\eta}{\rho} \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.71)$$

mas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) &= {}^{17} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) - \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z \right] = \vec{\nabla}^2 \vec{U}_\omega(\vec{r}, t) = \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\theta}_\omega \right] \stackrel{(2.44)}{=} \vec{\nabla}^2 \left\{ \vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{\nabla} \psi \right) \times \left( \vec{a} e^{-i\omega t} \right) \right] \right\} = \\ &= e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \left( \psi \vec{a} \right) \right] \stackrel{(2.47)}{=} e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left\{ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \left( \psi \vec{a} \right) \right] - \vec{a} \vec{\nabla}^2 \psi \right\} = \end{aligned}$$

---

<sup>17</sup>Vide a equação que antecede (2.42').

$$= e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left\{ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] \right\} - e^{-i\omega t} \vec{a} \vec{\nabla}^4 \psi. \quad (2.72)$$

Temos, por (2.50) e, como vimos na marcha que levou de (2.60) a (2.61), dado que  $\lambda = 0$ :

$$\vec{\nabla}^4 \psi = \frac{-i\omega \rho}{\eta} \vec{\nabla}^2 \psi,$$

que, substituído em (2.72), fornece:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \left\{ \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] \right\} + \frac{i\omega \vec{a} \rho}{\eta} e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \psi. \quad (2.73)$$

Substituindo (2.73) em (2.71), temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left( \frac{\Phi_{\text{drag}}^{0\omega}}{m} + \frac{p_0^\omega}{\rho} \right) &= \frac{\eta}{\rho} e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \left\{ \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] \right\} + \\ &+ i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Fazendo uma inspeção em (2.69) é fácil verificar que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \frac{\vec{U}^\omega(\vec{r}, t)}{\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}) = {}^{18} \frac{\vec{U}^\omega(\vec{r}, t) - \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} \hat{e}_z}{\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}). \quad (2.75)$$

Notando que  $\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}$  é a velocidade componente de Fourier da esfera, dependente do tempo<sup>19</sup>, denominêmo-la  $u_\omega(t)$  e, obviamente,  $\frac{\partial}{\partial t} (\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}) = \dot{u}_\omega(t)$ , donde reecrevemos (2.75):

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) \frac{\dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} - \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z \stackrel{(2.43)}{=} \frac{[\vec{\nabla} \times \vec{\theta}_\omega]}{u_\omega(t)} \dot{u}_\omega(t) - \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z =$$

<sup>18</sup>Vide nota anterior.

<sup>19</sup>E notando que  $\dot{h}_\omega = \dot{h}_\omega(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{h}^0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$  é uma função exclusiva de  $\omega$ , porém  $\omega$  ainda é fixo, pois *ainda estamos considerando o caso de oscilação da esfera unidirecionalmente em  $Oz$ , com frequência  $\omega$ .*

$$\begin{aligned}
(2.44) \quad & \frac{\dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[ \left( \vec{\nabla} \psi \right) \times \left( \vec{a} e^{-i\omega t} \right) \right] \right\} - \vec{\nabla} \left( z \dot{u}_\omega(t) + \widehat{\gamma(t)} \right) \\
& = e^{-i\omega t} \left[ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) \right] \frac{\dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} - \vec{\nabla} (z \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t)) = \\
(2.47) \quad & \frac{e^{-i\omega t} \dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} \left\{ \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] - \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) \right\} - \vec{\nabla} (r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t)) \therefore \\
& \frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i\omega t} \dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] - \frac{e^{-i\omega t} \dot{u}_\omega(t)}{u_\omega(t)} \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) + \\
& - \vec{\nabla} (r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t)). \tag{2.76}
\end{aligned}$$

Então (vide a nota de rodapé 19),  $\dot{u}_\omega(t) = \dot{h}_\omega(-i\omega) e^{-i\omega t} = -i\omega u_\omega(t)$ ,  
donde a equação (2.76) torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \vec{U}^\omega(\vec{r}, t) & = -i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] + i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) + \\
& - \vec{\nabla} (r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t)). \tag{2.77}
\end{aligned}$$

Substituindo (2.77) em (2.74), temos:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \left( \frac{\varphi_{\text{drag}}^{0\omega}}{m} + \frac{p_0^\omega}{\rho} \right) & = \frac{\eta}{\rho} e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \left\{ \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] \right\} + i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) + \\
& + i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] - i\omega e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 (\psi \vec{a}) + \vec{\nabla} (r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t)) \Rightarrow \\
& \vec{\nabla} \left( \frac{\varphi_{\text{drag}}^{0\omega}}{m} + \frac{p_0^\omega}{\rho} \right) = \\
\vec{\nabla} \left\{ \frac{\eta}{\rho} e^{-i\omega t} \vec{\nabla}^2 \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] + i\omega e^{-i\omega t} \left[ \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) \right] + r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + \gamma(t) \right\} \therefore \\
p_0^\omega & = \eta e^{-i\omega t} \vec{a} \cdot \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}^2 \psi \right) \right] + i\omega \rho e^{-i\omega t} \vec{a} \cdot \left( \vec{\nabla} \psi \right) + \\
& + \rho r \cos \theta \dot{u}_\omega(t) + p_c(t) - \frac{\rho}{m} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega}, \tag{2.78}
\end{aligned}$$

estando determinado, então, o campo de pressão no fluido para a esfera que oscila unidirecionalmente com frequência  $\omega$ , ao longo de  $Oz$ , componente de Fourier, no transitório, sendo  $p_c(t)$  uma função exclusiva do tempo - sendo, pois, a cada instante, de mesmo valor *em todo o fluido*<sup>20</sup>, o que não influenciará, como veremos, o cálculo da força sobre a esfera. Precisamos determinar  $\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}^2 \psi \right)$  e  $\vec{\nabla} \psi$ , para colocarmos em (2.78). De (2.56), temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla}^2 \psi \right) &= \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right) = \\ &= \hat{e}_r \left[ -\frac{A}{r} \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} (1-i) e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} - \frac{A}{r^2} e^{-(1-i)r(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right] = \\ &\stackrel{(2.67)}{=} \hat{e}_r \left[ \frac{3\dot{h}_\omega R}{2a r} \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} (1-i) e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\dot{h}_\omega R}{2a r^2} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

e, substituindo (2.67) e (2.68) em (2.62), temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi &= \frac{\hat{e}_r}{r^2} \left\{ -\frac{\dot{h}_\omega R^3}{2a} \left[ 1 + \frac{6\eta}{\rho\omega(1-i)^2 R^2} + \frac{3}{(1-i)R} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\eta}{\rho\omega(1-i)^2} \frac{3\dot{h}_\omega R}{2a} \left[ 1 + \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} (1-i)r \right] e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Substituindo (2.79) e (2.80) em (2.78), e levando em consideração que  $\vec{a} \cdot \hat{e}_r = a\hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = a \cos \theta$ , temos:

$$\begin{aligned} p_0^\omega &= \eta \overbrace{\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}}^{=u_\omega(t)} \cos \theta \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{3R}{2r} \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} (1-i) e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} + \frac{3R}{2r^2} e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right] + \end{aligned}$$

<sup>20</sup>A rigor, em toda região do fluido em que a equação diferencial é integrável.

$$\begin{aligned}
& + \rho \underbrace{i\omega \dot{h}_\omega e^{-i\omega t}}_{=-\dot{u}_\omega(t)} \cos\theta \left\{ -\frac{R^3}{2r^2} \left[ 1 + \frac{6\eta}{\rho\omega(1-i)^2 R^2} + \frac{3}{(1-i)R} \left( \frac{2\eta}{\rho\omega} \right)^{1/2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{3R\eta}{\rho\omega(1-i)^2 r^2} \left[ 1 + \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} (1-i)r \right] e^{(1-i)(R-r)(\rho\omega/2\eta)^{1/2}} \right\} + \\
& + \rho r \cos\theta \dot{u}_\omega(t) + p_c(t) - \frac{\rho}{m} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega}. \tag{2.81}
\end{aligned}$$

Como calcularemos da força de arrasto no caso aqui tratado nesta seção e também posteriormente, quando da análise do nosso problema concreto de iminência da crise do arrasto, façamos uma pausa aqui para abrirmos uma nova seção destinada à dedução da expressão geral para o cálculo da força de arrasto, antes de continuarmos.

## 2.4 Determinação Geral da Expressão para o Cálculo da Força de Arrasto

Seja agora a equação da continuidade, ainda tomada no caso mais geral, para que possamos interpretar o que se fará no seguimento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = 0. \tag{2.82}$$

O momento linear por unidade de volume de um elemento de fluido é dado por  $\rho \vec{v}$ , donde a taxa de variação do momento por unidade de volume é (taxa de variação temporal):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j). \tag{2.83}$$

A equação mais geral, (2.3):

$$\begin{aligned}
\rho \dot{\vec{v}} - \rho \vec{f} + \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \Gamma = \vec{0} & \Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} - \rho \vec{f} + \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} \cdot \Gamma = \vec{0} \therefore \\
\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \rho f_j + \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_k} & = 0. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

De (2.82), temos que:  $\partial \rho / \partial t = -\partial (\rho v_k) / \partial x_k$ , o que, substituído em (2.83), fornece:

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} - v_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) \Rightarrow \rho \frac{\partial v_j}{\partial t} = v_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j),$$

que, substituído em (2.84), fornece:

$$v_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \delta_{jk} (\rho f_k) + \delta_{jk} \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_k} = 0. \quad (2.85)$$

Supondo que o vetor  $\rho \vec{f}$  seja irrotacional, como no nosso caso, podemos reescrever (2.85):

$$v_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) + \rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \delta_{jk} \frac{\partial \varphi_{\rho \vec{f}}}{\partial x_k} + \delta_{jk} \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad (2.86)$$

onde  $\rho \vec{f} = \vec{\nabla} \varphi_{\rho \vec{f}}$ . Portanto, de (2.86), determinemos  $\partial (\rho v_j) / \partial t$ :

$$\begin{aligned} \left( v_j \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} + \rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \delta_{jk} \varphi_{\rho \vec{f}} - \delta_{jk} p + \Gamma_{jk} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_j v_k) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \delta_{jk} \varphi_{\rho \vec{f}} - \delta_{jk} p + \Gamma_{jk} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \delta_{jk} \varphi_{\rho \vec{f}} - \delta_{jk} p + \Gamma_{jk} - \rho v_j v_k \right) \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{1} \varphi_{\rho \vec{f}} - \mathbf{1} p + \Gamma - \rho (\vec{v} \circ \vec{v}) \right]. \quad (2.87)$$

Integrando (2.87) num volume arbitrário fixo não-deformável<sup>21</sup>, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = \int \vec{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{1} \varphi_{\rho \vec{f}} - \mathbf{1} p + \Gamma - \rho (\vec{v} \circ \vec{v}) \right] dV = \oint \tilde{\Pi} \cdot \hat{n} dS, \quad (2.88)$$

<sup>21</sup>Sob tal hipótese, os limites de integração não variarão com o tempo, permitindo, assim, que comutemos os operadores  $\int dV(\dots)$  e  $(\partial/\partial t)(\dots)$ , ao integrarmos a equação (2.87) para a obtenção de (2.88).

onde  $\tilde{\Pi}$  é o tensor:

$$\tilde{\Pi} = \mathbf{1}\varphi_{\rho\vec{f}} - \mathbf{1}p + \Gamma - \rho(\vec{v} \circ \vec{v}). \quad (2.89)$$

O lado esquerdo da igualdade (2.88) é a variação temporal instantânea do momento linear total do volume arbitrário<sup>22</sup> considerado. Para interpretarmos o lado direito, façamos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = \oint \left( \mathbf{1}\varphi_{\rho\vec{f}} \right) \cdot \hat{n} dS + \oint \Pi \cdot \hat{n} dS. \quad (2.90)$$

Vimos da análise do referencial da esfera, por (2.14), que  $\vec{f} = \vec{g}_0 = -\vec{F}_{\text{drag}}/m$ , onde  $\vec{F}_{\text{drag}}$  é a força que o fluido faz na esfera, donde:

$$\begin{aligned} \oint \left( \mathbf{1}\varphi_{\rho\vec{f}} \right) \cdot \hat{n} dS &= \int \vec{\nabla} \cdot \left( \mathbf{1}\varphi_{\rho\vec{f}} \right) dV = \int \vec{\nabla} \cdot \left( \varphi_{\rho\vec{f}} \right) dV = \\ &= \int \rho \vec{f} dV \stackrel{(11)}{=} \int -\rho \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} dV. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ficando tácito, então, que tomaremos (2.90) no referencial da esfera, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = - \int \rho \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} dV + \oint \Pi \cdot \hat{n} dS,$$

onde  $\Pi$  é o tensor:

$$\Pi = -\mathbf{1}p + \Gamma - \rho(\vec{v} \circ \vec{v}). \quad (2.92)$$

Com  $\vec{F}_{\text{drag}}$  não dependendo da posição, somente do tempo, pois  $\vec{F}_{\text{drag}}$  é a força resultante do fluido na esfera a cada instante, reescrevemos:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{F}_{\text{drag}}}{m} \int \rho dV &= \oint \Pi \cdot \hat{n} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV \therefore \\ \vec{F}_{\text{drag}} &= \frac{m}{\int \rho dV} \left( \oint \Pi \cdot \hat{n} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV \right). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Reiteramos que  $m$  é a massa da esfera,  $\rho$  é a densidade no interior do volume

---

<sup>22</sup>Leia-se arbitrário, porém fixo não-deformável.



de integração - não necessária e somente a do fluido ou da esfera<sup>23</sup>, nas duas integrais de volume na expressão (2.93). A equação (2.93) é a expressão geral para o cálculo da força total que o fluido faz na esfera, adotando-se volume de controle<sup>24</sup> fixo, no referencial da esfera, e indeformável.

## 2.5 Continuação da Seção 2.3

Calculemos, então,  $\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}$ , a força de arrasto que deverá ser integrada em  $\omega$ , pelo princípio da superposição, reiteramos, dada a linearidade de (2.41), para que obtenhamos  $\vec{F}_{\text{drag}}^0$ , i.e., a força de arrasto no início do regime transitório.

Façamos uma observação aqui que deixaríamos para o final. O que na realidade estamos chamando de força de arrasto  $\vec{F}_{\text{drag}}$  é a força total que o fluido faz na esfera, incluindo o termo de empuxo. Isso não será problema algum, pois ao final ficará trivial a determinação do arrasto puro. Entenda-se, portanto, até que separemos arrasto em arrasto puro + empuxo, como força de arrasto a que o fluido exerce na esfera.

Então, de (2.95), tomando o volume de integração (volume de controle) como sendo o volume ocupado pela esfera, sendo que no referencial da esfera a mesma está em repouso, donde a velocidade do fluido no interior do volume de controle (o fluido no interior do volume de integração é a própria esfera) é nula, sendo a densidade dentro do volume de controle a densidade da esfera, que denominaremos por  $\rho'$ , temos:

$$\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} = \frac{m}{\int_{V_S} \rho' dV} \left( \oint_{\partial V_S} \Pi \cdot \hat{n} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_S} \rho' \vec{0} dV \right) \therefore$$

$$\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} = \oint_{\partial V_S} \Pi \cdot \hat{n} dS \stackrel{(2.92)}{=} \oint_{\partial V_S} \left[ -\mathbf{1}p_0^{\omega} + \Gamma^{0\omega} - \rho \left( \vec{U}^{\omega}(\vec{r}, t) \circ \vec{U}^{\omega}(\vec{r}, t) \right) \right] \cdot \hat{n} dS, \quad (2.94)$$

onde  $\partial V_S$  e  $V_S$  são a superfície e o volume da esfera respectivamente.  $\Gamma^{0\omega}$  é o tensor de cisalhamento no regime transitório para a velocidade componente de Fourier, i.e., para o caso que estamos analisando de oscilação translacional com frequência  $\omega$ .

<sup>23</sup>Podendo ser, por exemplo, como mais adiante o faremos, a densidade da esfera mais a da camada limite aderida a ela, em seus respectivos volumes, obviamente.

<sup>24</sup>Volume de controle fixo e indeformável em um referencial é uma região volumétrica em repouso desse referencial, rígida e sem fluido.

Ao calcularmos (2.94), devemos tomar o campo de velocidades na superfície da esfera, o qual, pela condição de *não escorregamento*, é nulo. Então, (2.94) torna-se:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} &= - \oint_{\partial V_S} p_0^\omega \hat{n} dS + \oint_{\partial V_S} \begin{pmatrix} \gamma_{rr}^{0\omega} & \gamma_{r\theta}^{0\omega} & \gamma_{r\phi}^{0\omega} \\ \gamma_{\theta r}^{0\omega} & \gamma_{\theta\theta}^{0\omega} & \gamma_{\theta\phi}^{0\omega} \\ \gamma_{\phi r}^{0\omega} & \gamma_{\phi\theta}^{0\omega} & \gamma_{\phi\phi}^{0\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dS \therefore \\ \vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} &= - \oint_{\partial V_S} p_0^\omega \hat{n} dS + \oint_{\partial V_S} \begin{pmatrix} \gamma_{rr}^{0\omega} \\ \gamma_{\theta r}^{0\omega} \\ \gamma_{\phi r}^{0\omega} \end{pmatrix} dS = \\ &= - \oint_{\partial V_S} p_0^\omega \hat{n} dS + \oint_{\partial V_S} \left( \gamma_{rr}^{0\omega} \hat{e}_r + \gamma_{\theta r}^{0\omega} \hat{e}_\theta + \gamma_{\phi r}^{0\omega} \hat{e}_\phi \right) dS, \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde  $p_0^\omega$  é o campo de pressão dado por (2.81) e  $\gamma_{rr}^{0\omega}$ ,  $\gamma_{\theta r}^{0\omega} = \gamma_{r\theta}^{0\omega}$ ,  $\gamma_{\phi r}^{0\omega} = \gamma_{r\phi}^{0\omega}$ , são componentes do tensor de cisalhamento que, em coordenadas esféricas, são dadas por<sup>25</sup>

$$\gamma_{rr}^{0\omega} = 2\eta \left. \frac{\partial}{\partial r} U_r^\omega(\vec{r}, t) \right|_{r=R}; \quad (2.96)$$

$$\gamma_{\theta r}^{0\omega} = \eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} U_r^\omega(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial r} U_\theta^\omega(\vec{r}, t) - \frac{1}{r} U_\theta^\omega(\vec{r}, t) \right) \Big|_{r=R}; \quad (2.97)$$

$$\gamma_{\phi r}^{0\omega} = \eta \left( \frac{\partial}{\partial r} U_\phi^\omega(\vec{r}, t) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} U_r^\omega(\vec{r}, t) - \frac{1}{r} U_\phi^\omega(\vec{r}, t) \right) \Big|_{r=R}. \quad (2.98)$$

De (2.69), temos a componente em  $\theta$  de  $U^\omega(\vec{r}, t)$ , i.e.,  $U_\theta^\omega(\vec{r}, t)$ , e a componente em  $r$  de  $U^\omega(\vec{r}, t)$ , i.e.,  $U_r^\omega(\vec{r}, t)$ , que, com (2.32), para a profundidade de penetração, permitem, após algumas manipulações triviais de diferenciação e álgebra, obter:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} U_\theta^\omega(\vec{r}, t) \right|_{r=R} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{R} - \frac{i}{\delta} \right) u_\omega(t) \sin\theta; \quad (2.99)$$

<sup>25</sup>Vide Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics* Course of Theoretical Physics, Vol.6. English Edition. Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt, 1959, 536 pp.

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta} U_r^\omega(\vec{r}, t) \right|_{r=R} = 0; \quad (2.100)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} U_r^\omega(\vec{r}, t) \right|_{r=R} = 0; \quad (2.101)$$

$$U_\theta^\omega(\vec{r}, t)|_{r=R} = 0. \quad (2.102)$$

Então, de (2.96) e (2.101), vemos que:

$$\gamma_{rr}^{0\omega} = 0. \quad (2.103)$$

De (2.97), (2.99), (2.100) e (2.102), temos:

$$\gamma_{\theta r}^{0\omega} = \frac{3\eta}{2} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{1}{R} - \frac{i}{\delta} \right) u_\omega(t) \sin\theta. \quad (2.104)$$

De (2.81), obtemos o campo de pressão na superfície da esfera para o caso de oscilação unidirecional que estamos analisando, i.e.,  $p_0^\omega|_{r=R}$ , o que, com a utilização de (2.32) para a profundidade de penetração, e após algum rearranjo, permite que obtenhamos:

$$p_0^\omega|_{r=R} = \left( \frac{3}{2\delta} + \frac{3}{2R} - \frac{3i}{2\delta} \right) \eta u_\omega(t) \cos\theta + \frac{3}{2} \rho R \dot{u}_\omega(t) \cos\theta + p_c(t) - \frac{\rho}{m} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega}. \quad (2.105)$$

Temos, obviamente, por (2.69), que  $\gamma_{\phi r}^{0\omega} = 0$  em (2.98)<sup>26</sup>. Podemos, então, por (2.105), (2.103) e (2.104), dado que  $\gamma_{\phi r}^{0\omega} = 0$ , reiteramos, calcular (2.95):

$$\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} = - \oint_{\partial V_S} \left[ \left( \frac{3}{2\delta} + \frac{3}{2R} - \frac{3i}{2\delta} \right) \eta u_\omega(t) \cos\theta + \right.$$

---

<sup>26</sup>Lembremos que a simetria do problema aqui tratado impõe que o campo de velocidades não tenha componente em  $\phi$ , nem dependa de  $\phi$ , confira a equação (2.69), donde, dada a equação (2.98),  $\gamma_{\phi r}^{0\omega} = 0$ .

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} \rho R \dot{u}_\omega(t) \cos \theta + p_c(t) - \frac{\rho}{m} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} \Big] \hat{e}_r dS + \\
& + \oint_{\partial V_S} \frac{3\eta}{2} \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} \right] u_\omega(t) \sin \theta \hat{e}_\theta dS \Rightarrow \dots^{27} \Rightarrow \quad (2.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} &= -\frac{4\pi R^2}{3} \eta \left( \frac{3}{2\delta} + \frac{3}{2R} - \frac{3i}{2\delta} \right) u_\omega(t) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{3} \frac{3}{2} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
& + \frac{\rho}{m} \oint_{\partial V_S} \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} \hat{n} dS - \frac{8\pi R^2}{3} \frac{3\eta}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\delta} - \frac{i}{\delta} \right) u_\omega(t) \hat{e}_z = \\
& - \frac{4\pi R^2}{3} \eta \left( \frac{3}{2\delta} + \frac{3}{2R} + \frac{3}{R} + \frac{3}{\delta} \right) u_\omega(t) \hat{e}_z + \\
& - \frac{4\pi R^3}{3} \rho \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \frac{\rho}{m} \oint_{\partial V_S} \vec{\nabla} \left( \varphi_{\text{drag}}^{0\omega} \right) dV + \\
& - \frac{4\pi R^2}{3} \eta \left( -\frac{3i}{2\delta} - \frac{3i}{\delta} \right) u_\omega(t) \hat{e}_z = \\
& = -\frac{4\pi R^2}{3} \eta \left( \frac{9}{2\delta} + \frac{9}{2R} \right) u_\omega(t) \hat{e}_z - m_{\text{liq}} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
& + \rho \frac{\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega}}{m} V_{\text{esfera}} - \frac{4\pi R^2}{3\omega} \eta \left( -\frac{3}{2\delta} - \frac{3}{\delta} \right) \overbrace{i\omega u_\omega(t)}^{-\dot{u}_\omega(t)} \hat{e}_z,
\end{aligned}$$

onde  $m_{\text{liq}}$  é a massa de fluido incompressível contida num volume igual ao da esfera, e  $V_{\text{esfera}}$  é o volume da esfera. Portanto:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} &\stackrel{(2.21')}{=} -6\pi\eta R u_\omega(t) \left( 1 + \frac{R}{\delta} \right) \hat{e}_z - m_{\text{liq}} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
& - m_{\text{liq}} \vec{g}_{0\omega} + \frac{2\pi R^2}{3} \frac{2\eta}{\omega} \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \left( -\frac{3}{2} - 3 \right) \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z \stackrel{(2.14)}{=}
\end{aligned}$$

<sup>27</sup>O cálculo de (106) segue trivialmente sobre a esfera. Tomam-se os versores  $\hat{e}_r = \sin\theta \cos\phi \hat{e}_x + \sin\theta \sin\phi \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z$ ,  $\hat{e}_\theta = \cos\theta \cos\phi \hat{e}_x + \cos\theta \sin\phi \hat{e}_y - \sin\theta \hat{e}_z$  e o elemento de superfície em coordenadas esféricas  $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ , sendo os limites de integração  $\theta \in [0; \pi]$  e  $\phi \in [0; 2\pi]$ .

$$\begin{aligned}
&= -6\pi\eta R u_\omega(t) \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \hat{e}_z - m_{\text{liq}} (-\vec{g}_{0\omega} + \vec{g}) - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
&\quad - m_{\text{liq}} \vec{g}_{0\omega} - \frac{9}{2} \frac{2\pi R^2}{3} \frac{2\eta}{\omega} \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z \dots \\
\vec{F}_{\text{drag}}^{0\omega} &= -6\pi\eta R u_\omega(t) \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
&\quad - \frac{9}{2} \frac{2\pi R^2}{3} \frac{2\eta}{\omega} \left(\frac{\rho\omega}{2\eta}\right)^{1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - m_{\text{liq}} \vec{g}. \tag{2.107}
\end{aligned}$$

Conforme dissemos anteriormente, o que chamamos de força de arrasto é a força total que o fluido faz na esfera, que é a força viscosa mais o empuxo. Como queremos determinar o que passaremos a chamar de efeito eminentemente viscoso (todos os efeitos, descontado o empuxo hidrostático), chamar-se-á  $\vec{F}$ , sem o subíndice drag, o que, no caso em questão, será denotado  $\vec{F}^{0\omega}$  e que, então, notando que  $m_{\text{liq}}\vec{g}$  é o empuxo, permite que reescrevamos (2.107):

$$\begin{aligned}
\vec{F}^{0\omega} + (-m_{\text{liq}}\vec{g}) &= -6\pi\eta R u_\omega(t) \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \hat{e}_z - \frac{4\pi R^2}{6} \rho R \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\
&\quad - 3\pi R^2 \left(\frac{2\eta\rho}{\omega}\right)^{1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - m_{\text{liq}} \vec{g} \quad \dots \tag{2.32}
\end{aligned}$$

$$\vec{F}^{0\omega} = -6\pi\eta R u_\omega(t) \left(1 + \frac{R}{\delta}\right) \hat{e}_z - 3\pi R^2 \left(\frac{2\eta\rho}{\omega}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{2R}{9\delta}\right) \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z. \tag{2.108}$$

Notemos que para a força acima que chamamos de efeito eminentemente viscoso, força eminentemente de arrasto, e dado que num movimento oscilatório de frequência  $\omega$  a velocidade e a aceleração não estarão sempre apontando no mesmo sentido, haverá momentos em que a segunda parcela da mesma realiza trabalho motor. Isso pode parecer contraditório à nomenclatura que usamos acima, efeito eminentemente viscoso, para  $\vec{F}^{0\omega}$ , pois remete à idéia de dissipação. Lembremos que o que chamamos de força eminentemente de arrasto é a força que o fluido faz na esfera sem o empuxo. Obviamente, ao retirarmos o empuxo não estaremos retirando todos os efeitos

do tensor de pressões sobre a superfície da esfera. O tensor de cisalhamento  $\Gamma^{0\omega}$ , esse sim, é totalmente dissipativo, porém, o de pressões, em determinados momentos, será o que introduzirá energia proveniente do fluido à esfera. Ratifique-se, então, que a força de arrasto que buscamos, a força eminentemente de arrasto, é a força total que o fluido faz na esfera, sem o empuxo.

Resolvemos, então, o problema oscilante. Precisamos, agora, aplicar o princípio da superposição à (2.108) para todas as frequências possíveis, pois nossa velocidade desconhecida da esfera, está dada por (2.42) no início do regime transitório. Notemos que, de (108):

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \vec{F}^{0\omega} &\stackrel{(2.32)}{=} \lim_{\delta \rightarrow \infty} \vec{F}^{0\omega} = \\ &-6\pi\eta R u_0(t) \hat{e}_z + \left[ -3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} u_0(t) \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( -\frac{i\omega}{\sqrt{\omega}} \right) + \right. \\ &\left. -3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} u_0(t) \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{2R}{9} \right) \left( \frac{\rho\omega}{2\eta} \right)^{1/2} \frac{(-i\omega)}{\sqrt{\omega}} \right] \hat{e}_z = -6\pi\eta R u_0(t) \hat{e}_z, \end{aligned}$$

ou seja<sup>28</sup>, temos o regime de Stokes a baixas velocidades quando  $\omega \rightarrow 0$ , i.e., na iminência do movimento, conforme esperado.

Devemos escrever (2.108) em função de  $\omega$ , para que apliquemos o princípio da superposição. Então, reescrevendo (2.108), temos:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{0\omega} &\stackrel{(2.32)}{=} -6\pi\eta R u_\omega(t) \hat{e}_z - 6\pi\eta R^2 u_\omega(t) \left( \frac{\rho}{2\eta} \right)^{1/2} \omega^{1/2} \hat{e}_z + \\ &-3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z + \\ &-3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} \left( \frac{2R}{9} \right) \left( \frac{\rho}{2\eta} \right)^{1/2} \omega^{1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Utilizando, novamente,  $\dot{u}_\omega(t) = -i\omega u_\omega(t)$ , temos, para (109):

$$\begin{aligned} \vec{F}^{0\omega} &= -6\pi\eta R u_\omega(t) \hat{e}_z - 6\pi\eta R^2 \frac{(-i\omega u_\omega(t))}{(-i\omega)} \left( \frac{\rho}{2\eta} \right)^{1/2} \omega^{1/2} \hat{e}_z + \\ &-3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z - 3\pi R^2 \rho \left( \frac{2R}{9} \right) \dot{u}_\omega(t) \hat{e}_z = \end{aligned}$$

---

<sup>28</sup>Deve ser notado que aplicamos a identidade:  $\dot{u}_\omega(t) = -i\omega u_\omega(t)$ , no cálculo do limite acima.

$$\begin{aligned}
&= -6\pi\eta R u_{\omega}(t) \hat{e}_z - 6\pi\eta R^2 \left( \frac{\rho}{2\eta} \right)^{1/2} \dot{u}_{\omega}(t) i \omega^{-1/2} \hat{e}_z + \\
&- 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} \dot{u}_{\omega}(t) \hat{e}_z - 3\pi R^2 \rho \left( \frac{2R}{9} \right) \dot{u}_{\omega}(t) \hat{e}_z = \\
&= -6\pi\eta R u_{\omega}(t) \hat{e}_z - 3\pi R^2 \left( \frac{4\eta^2 \rho}{2\eta} \right)^{1/2} i \dot{u}_{\omega}(t) \omega^{-1/2} \hat{e}_z + \\
&- 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} \dot{u}_{\omega}(t) \hat{e}_z - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \dot{u}_{\omega}(t) \hat{e}_z. \therefore \\
\vec{F}^{0\omega} &= -6\pi\eta R \dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t} \hat{e}_z - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \frac{d}{dt} (\dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t}) \hat{e}_z + \\
&- 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \omega^{-1/2} (1+i) \frac{d}{dt} (\dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t}) \hat{e}_z. \quad (2.110)
\end{aligned}$$

Retornemos às equações (42):

$$(2.47) : \left\{ \begin{array}{l} \dot{h}^0(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t} d\nu; \\ \dot{h}_{\omega} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{h}^0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \end{array} \right.$$

Notemos que, na realidade, ainda que a tenhamos feito uma alusão heurística a uma velocidade componente de Fourier,  $\dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t}$  é uma densidade de velocidade por freqüência  $\nu$  (velocidade/ $\nu$ ), com dimensão de comprimento. Temos, então, que (2.110) nos fornece, na realidade, a densidade de força de arrasto viscoso por freqüência  $\nu$ , i.e.,

$$\frac{d\vec{F}^0}{d\nu} = \vec{F}^{0\omega} = 2\pi \frac{d\vec{F}^0}{d\omega} \Rightarrow d\vec{F}^0 = \frac{1}{2\pi} \vec{F}^{0\omega} d\omega. \quad (2.111)$$

Então, substituindo (2.110) em (2.111), integrando de  $-\infty$  a  $\infty$  nas freqüências de Fourier<sup>29</sup>:

<sup>29</sup> A representatividade dos campos por suas respectivas integrais de Fourier necessita de todas as freqüências para que haja completude e, portanto, convirjam as integrais representativas. Note-se que na interpretação de que  $\omega$  seja a freqüência angular de oscilação dos elementos de fluido no infinito, com velocidade  $\dot{h}_{\omega} e^{-i\omega t}$ , temos que  $\omega = 2\pi/T > 0$ , pois o período  $T$  é fisicamente uma grandeza positiva. Isso será levado em conta logo em seguida, no cálculo da integral sobre

$$\begin{aligned}
\vec{F}^0 &= -6\pi\eta R \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \hat{e}_z + \\
&\quad - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right) \hat{e}_z + \\
&\quad - 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} (1+i) \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^{1/2}} \frac{d}{dt} (\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}) d\omega \hat{e}_z. \quad (2.112)
\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\frac{d}{dt} (\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}) = -i\omega \dot{h}_\omega e^{-i\omega t} = \dot{u}_\omega = (-i\omega \dot{h}_\omega) e^{-i\omega t} = (\dot{u})_\omega e^{-i\omega t},$$

sendo, obviamente,  $(\dot{u})_\omega$  os coeficientes da representação de  $\dot{u}(t)$  por uma integral de Fourier, i.e.:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M (\dot{u})_\omega e^{-i\omega t} d\omega; \\ (\dot{u})_\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \dot{u}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \end{array} \right. \quad (2.113)$$

donde, levando isso em consideração, e usando (2.42), reescrevemos (2.112):

$$\begin{aligned}
\vec{F}^0 &= \left[ -6\pi\eta R \dot{h}^0(t) - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \ddot{h}^0(t) + \right. \\
&\quad \left. - 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} (1+i) \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^{1/2}} (\dot{u})_\omega e^{-i\omega t} d\omega \right] \hat{e}_z \stackrel{(2.113)}{=} \\
&= \left[ -6\pi\eta R \dot{h}^0(t) - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \ddot{h}^0(t) + \right. \\
&\quad \left. - 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} (1+i) \frac{1}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^{1/2}} \dot{u}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \right] \hat{e}_z \dots \\
\vec{F}^0 &= \left[ -6\pi\eta R \dot{h}^0(t) - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \ddot{h}^0(t) - 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} (1+i) \frac{1}{2\pi} \cdot \right.
\end{aligned}$$



$$\cdot \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^{1/2}} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \Big] \hat{e}_z. \quad (2.114)$$

Tomando a parte real de (2.114), temos a solução física da força. Mantendo a notação  $\vec{F}^0$  para a força de arrasto no transitório, temos, então:

$$\vec{F}^0 = \left\{ -6\pi\eta R \dot{h}^0(t) - \frac{2\pi R^3}{3} \rho \ddot{h}^0(t) - 3\pi R^2 (2\eta\rho)^{1/2} \Re \left[ (1+i) \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^{1/2}} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\tau d\omega \right] \right\} \hat{e}_z, \quad (2.115)$$

onde  $\Re$  retorna a parte real do conteúdo entre colchetes em (2.115), donde está, assim, dentro das considerações até aqui feitas, resolvida a equação (2.23) para o transitório. Na esteira do que foi discutido na nota de rodapé 29, temos que os termos de velocidade  $\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}$  tornar-se-ão  $\dot{h}_\omega e^{-i(-\omega)t}$ , à medida que tomarmos valores negativos para  $\omega$  quando da integração nas freqüências de Fourier, mudando a forma anterior se mantivermos  $\omega > 0$ , este, na condição de ser fisicamente positivo. Assim, temos que permitir a representação dos campos, o que impõe  $\omega \in [-\infty; \infty]$ , e, concomitantemente, a forma  $\dot{h}_\omega e^{-i\omega t}$  com  $\omega$  positivo. Para lidarmos com essa idéia, retornemos à equação (2.110). Essa equação foi deduzida em termos das oscilações físicas no fluido, portanto  $\omega > 0$  nessa equação. Porém, ao integrarmos essa equação, na marcha da equação (2.110) à (2.112),  $\omega$  deverá percorrer a reta real, sem que tal operação matemática interfira no problema físico. A única maneira de conciliar as duas necessidades, manter  $\omega > 0$  na integranda, o que garante coerência física, e permitir que  $\omega$  percorra os reais na integração, mantendo a forma da integranda neste percurso, é tomando  $|\omega|$  na integranda. Definamos a integral:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i|\omega|(t-\tau)} d\omega d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 (-\omega)^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i(-\omega)(t-\tau)} d\omega d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Tomando o intervalo de integração em  $\tau$  como  $(-\infty; t] \cup [t; \infty)$ , reescrevemos (2.116):

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} \omega^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau + \\
 &+ 2 \int_t^{\infty} \int_0^{\infty} \omega^{-1/2} \ddot{h}(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega d\tau. \quad (2.117)
 \end{aligned}$$

Fazendo a transformação  $x = i\omega(t - \tau)$  em (2.117), reecreemos (2.117):

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^t \left( \int_0^{i\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \right) \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{i}} \int_t^{\infty} \left( \int_0^{i\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \right) \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \Rightarrow \\
 I &= \frac{2}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^t \left( \int_0^{i\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \right) \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{i}} \int_t^{\infty} \left( \int_0^{i\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx \right) \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{-1}\sqrt{\tau-t}} d\tau. \quad (2.118)
 \end{aligned}$$

A segunda integral foi reescrita nessa forma pois  $\tau > t$  nesta integral, de modo a manter  $\sqrt{\tau-t} \in \mathbb{R}$ . As duas integrais idênticas entre parênteses na equação (2.118) são integrais na variável complexa  $x$ . Nessa integração, podemos tomar um caminho de integração que coincida com o semi-eixo imaginário  $[0 + \varepsilon; \infty)i$ , o que implicará o mesmo resultado que a integral sobre o semi-eixo real, com, agora,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $[0 + \varepsilon; \infty)$ , com  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mas tal integral é exatamente a função gama de  $1/2$ , i.e., o resultado das duas integrais entre parênteses em (2.118) é  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Assim, reescrevemos (2.118):

$$I = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{i}} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + \frac{2\sqrt{\pi}}{i\sqrt{i}} \int_t^{\infty} \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}} d\tau. \quad (2.119)$$

Agora lembremos que as raízes quadradas nessa integral são provenientes da equação (2.32) para a profundidade de penetração, introduzida nessa integranda quando das passagens da equação (2.106) à (2.109). Tal raiz somente deve considerar a raiz sem o sinal negativo, pois o sinal a ser tomado já fora definido na marcha que leva da equação (2.31) à (2.32). Assim,

tomando somente a raiz positiva de  $i$ , na equação anterior, e dado que tal raiz é  $\sqrt{i} = (\sqrt{2}/2)(1 + i)$  (confira o cálculo de dessa raiz na marcha (2.28)  $\rightarrow$  (2.29)). Assim, reescrevemos (2.119)

$$I = \frac{2\sqrt{2\pi}}{1+i} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau - i \frac{2\sqrt{2\pi}}{1+i} \int_t^{\infty} \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{\tau-t}} d\tau. \quad (2.120)$$

O termo que requer a parte real, na equação (2.115), é  $\Re[(1+i)I]$ , sendo, então, dado por:

$$\frac{1}{2\pi} \Re[(1+i)I] \stackrel{(2.120)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \quad (2.121)$$

Substituindo esse resultado em (2.115), obtemos a força de arrasto no regime transitório para o escoamento dentro das hipóteses de validade de linearidade, validade da equação (2.27), conforme discutimos anteriormente. Assim, temos:

$$\vec{F}^0 = - \left[ 6\pi\eta R \dot{h}^0(t) + \frac{2\pi R^3}{3} \rho \ddot{h}^0(t) + 6\sqrt{\pi} R^2 (\eta\rho)^{1/2} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{h}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] \hat{e}_z. \quad (2.122)$$

## 2.6 Aplicação da Equação (2.122) a MRU Instantâneo

Seja um referencial inercial que, aqui, nesta subseção, será chamado de referencial inercial do chão, onde se prescreve um campo  $\vec{g}$ , referencial inercial este preenchido com um fluido em repouso e com uma esfera imersa, esta também em repouso (podendo haver, ou não, um vínculo ideal que segure a esfera sem perturbar o fluido). Coloquemos todo o fluido a subir nesse referencial com velocidade<sup>30</sup>  $v(t)\hat{e}_z$ , com  $v$  positiva, sem que a esfera saia do repouso, e apliquemos a equação (2.122) nesse caso. Alguém poderia argumentar se poderíamos utilizar o método que temos adotado, dado que a situação aqui proposta, do ponto-de-vista de uma queda da esfera, dado que a esfera não estaria caindo em relação ao referencial inercial do solo, não seria análoga. Quando a esfera é colocada no fluido, para que fique sempre em repouso no referencial inercial do chão, deve haver o somatório

<sup>30</sup>O caso especial de MRU será tratado somente ao final desta subseção, como caso particular do que aqui se explanará.

nulo de forças  $\vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho_mV\vec{g} + \vec{D} = \vec{0}$ , onde  $\vec{F}^0$  é a força eminentemente viscosa que o fluido faz na esfera,  $-\rho_{\text{liq}}V\vec{g}$  o empuxo hidrostático sentido pela esfera,  $\rho_mV\vec{g}$  o peso da esfera e  $\vec{D}$  a força que um vínculo, um dinamômetro, eventualmente, faz, além das outras, para manter a esfera em repouso no referencial do chão. Ainda,  $\rho_{\text{liq}}$  é a densidade do fluido,  $\rho_m$  a densidade da esfera de massa  $m$ ,  $V$ , o volume da esfera<sup>31</sup>, e  $\vec{g}$  a aceleração local da gravidade no referencial do chão. Suponhamos que alterássemos a densidade da esfera até o valor  $\rho_q$  de modo a ter uma situação em que  $\vec{D} = \vec{0}$ , situação de queda, i.e., esfera somente sujeita ao campo e ao fluido. A situação de equilíbrio de forças agora seria  $\vec{F}^{0'} - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho_qV\vec{g} = \vec{0}$ . Agora, se a força eminentemente viscosa for equivalente nas duas situações, deveremos ter  $\vec{F}^0 = \vec{F}^{0'} \Rightarrow \vec{D} = (\rho_q - \rho_m)V\vec{g}$ . Isso quer dizer que, se a natureza se comportasse de modo a serem equivalentes as tais duas situações, então o dinamômetro teria de medir  $(\rho_q - \rho_m)V\vec{g}$ , sempre que utilizássemos uma esfera de massa  $\rho_m$  que tivesse apresentado valor nulo no dinamômetro na situação em que fosse  $\rho_q$  a sua densidade, mas não podemos garantir isso. Porém, a recíproca é suficiente para que garantamos equivalência nos tratamentos. Se medirmos  $\vec{D} \neq \vec{0}$  em um dinamômetro para a esfera de densidade  $\rho_m$ , teremos que  $\vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho_mV\vec{g} + \vec{D} = \vec{0}$ , garantido pela segunda lei de Newton. Assim, tomemos uma esfera<sup>32</sup> com densidade tal que  $\vec{D} = D\hat{e}_z = -(\rho_q - \rho_m)Vg\hat{e}_z \Rightarrow \rho_q = \rho_m - D/(Vg)$  e coloquemos o experimento de modo a que um sensor imaginário medindo a força eminentemente viscosa mude o regime de escoamento até que a força eminentemente viscosa agora medida, mantendo-se  $\rho'_m = \rho_q$  fixo, seja a mesma que a da situação com densidade  $\rho_m$ , i.e.,  $\vec{F}^{0'} = \vec{F}^0$ . Nessas condições,  $\vec{F}^{0'} - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho'_mV\vec{g} + \vec{D}' = \vec{0}$ ,  $\vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + (\rho_m - D/(Vg))V\vec{g} + \vec{D}' = \vec{0} \Rightarrow (\vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho_mV\vec{g} + \vec{D}) + \vec{D}' = \vec{0}$ . O termo entre parênteses do lado esquerdo da igualdade na equação anterior é nulo, donde  $\vec{D}' = \vec{0}$ , ou seja, temos a situação de queda, sem o vínculo  $\vec{D}'$ . Ainda que haja equivalência em relação à força de arrasto, o escoamento mudou, pois o tal dispositivo imaginário teria de modificar o escoamento para que, à medida que alterássemos o vínculo, mantendo a situação de equilíbrio, a força eminentemente viscosa se tornasse a da situação em que a densidade da esfera era  $\rho_m$ . Assim, poderíamos ter que a situação de queda em que a densidade da esfera é  $\rho_q$ , ainda que equivalente quanto ao cálculo da força de arrasto, não o seria em relação ao campo de velocidades. No referencial do chão, na situação

<sup>31</sup> Tomaremos esferas de mesmo volume  $V$  nos dois casos que aqui se elencam.

<sup>32</sup> Vide nota de rodapé 30.

em que  $\rho'_m = \rho_q$ , se alterarmos o vínculo, para que se mantenha a situação de equilíbrio, teremos de modificar o arrasto viscoso, o que, a princípio, demanda a alteração do campo de velocidades, alterando as condições de contorno. Assim, a nova condição de contorno no infinito, no referencial do chão para o problema que aqui nesta subseção tratamos, teria de ser, na ausência de vínculo,  $v'\hat{e}_z$ . A condição de contorno na superfície da esfera, com ou sem vínculo, é de velocidade nula, pois a esfera está em repouso, com ou sem vínculo, no referencial do chão. Mas, como sabemos, a força de arrasto depende do número de Reynolds  $Re = 2Rv'\rho/\eta$ , onde  $\rho$  é a densidade do fluido, independente da densidade da esfera. Como a força de arrasto é invariante nas duas situações, temos que  $v' = v$ , donde não se alteraram as condições de contorno (mesma equação diferencial, teorema da existência e unicidade), e os campos serão os mesmos nas duas situações. Tudo isso poderia ser simplesmente demonstrado pelo fato de que não há como o fluido distinguir a natureza do vínculo nas duas situações, seja ele exercido por um dinamômetro ou pelo excedente de força peso que se pôs ao se variar a densidade da esfera. Assim, será sempre reproduzível a situação de repouso com vínculo externo por outra em queda sem vínculo sem que se altere a situação física do escoamento, i.e., equivalentemente, se utilizarmos, para a situação de queda, esfera de mesmo volume mas com densidade  $\rho_q = \rho_m - D/(Vg)$ , onde  $\rho_m$  e  $D$  são obtidos da situação em que há equilíbrio com o vínculo  $\vec{D} = D\hat{e}_z$ . Note-se que o que denominamos referencial do chão aqui nesta subseção é o próprio referencial da esfera, pois a mesma estará em repouso em relação ao mesmo, com ou sem ausência de vínculo. Em toda a nossa discussão nas seções anteriores, chamamos de referencial do chão, em relação ao qual a esfera cai, àquele referencial em que os elementos de fluido no infinito estão em repouso. Como, no exemplo desta subseção, a esfera está num referencial inercial com campo externo prescrito  $\vec{g}$  onde o fluido, ocupando todo o referencial, sobe com velocidade  $v\hat{e}_z$ , não teríamos a mesma condição de contorno em que os elementos de fluido devem estar no referencial inercial com campo prescrito externo  $\vec{g}$  e com condição de contorno de velocidade nula dos elementos no infinito. Ou seja, o referencial que era tomado como inercial nas seções anteriores não era o da esfera, ainda que este pudesse ser inercial eventualmente (como no caso de velocidade terminal). Nós vimos, do cálculo que nos fez chegar à equação (2.93), que o campo não-inercial medido na nossa balança imaginária é dado por  $-\vec{F}_{\text{drag}}/m$ , obviamente na situação em que o referencial inercial é o externo à esfera, atado ao chão, e com condição de contorno de velocidade nula dos elementos de fluido no infinito. Seja o referencial  $S'$  que sobe juntamente

com o fluido com a mesma velocidade do fluido no infinito, no exemplo desta subseção. Se os elementos de fluido no infinito estiverem acelerados,  $S'$  será não-inercial, pois estará acelerado em relação ao referencial do chão, que é inercial na ausência de  $\vec{g}$  e do fluido. Como  $v\hat{e}_z$  é a velocidade de subida dos elementos de fluido no infinito, temos que o campo  $\vec{g}'$  será  $\vec{g} - v\hat{e}_z$ . Agora, esse referencial pode ser tratado como inercial com campo externo prescrito  $\vec{g}'$ . Tudo o que concluímos nas seções anteriores será válido em  $S'$  quanto à aplicação da equação de (2.93). De fato. A segunda lei de Newton em  $S$  requer que  $\vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g} + \rho_qV\vec{g} = \vec{0}$ . Em  $S'$ , dado que os efeitos de inércia serão inseridos a  $\vec{g}$  para definir  $\vec{g}'$ , a segunda lei de Newton em  $S'$  requer que  $\vec{F}^{0'} - \rho_{\text{liq}}V\vec{g}' + \rho_qV\vec{g}' = \vec{F}^{0'} - \rho_{\text{liq}}V(\vec{g} - v\hat{e}_z) + \rho_qV(\vec{g} - v\hat{e}_z) = m_q(-v\hat{e}_z)$ . Das duas equações anteriores concluímos que  $\vec{F}^{0'} - \rho_{\text{liq}}V\vec{g}' = \vec{F}^0 - \rho_{\text{liq}}V\vec{g}$ , ou seja, a força total que o fluido faz na esfera, empuxo mais efeito eminentemente viscoso, é a mesma nos dois referenciais. O lado esquerdo da equação anterior é a força total exercida pelo fluido na esfera, no referencial onde a esfera cai. Porém, o empuxo não será mais o mesmo, conforme se depreende da equação anterior, donde  $\vec{F}^{0'} - \vec{F}^0 = -\rho_{\text{liq}}Vv\hat{e}_z$ . O que essa equação quer dizer é que se tomarmos o referencial da esfera como inercial, o referencial  $S$ , considerando o fluido subindo, não é equivalente, para efeitos eminentemente viscosos medidos nos respectivos referenciais inerciais, a considerar o referencial da esfera em queda (referencial da esfera agora não-inercial), método que usamos nas seções anteriores, em que o fluido também sobe de maneira idêntica<sup>33</sup>. A razão é muito simples: Se num caso for inercial o referencial adotado atado à esfera, no outro será não-inercial, donde, a menos de grandezas que sejam invariantes, como a força total que o fluido faz na esfera, por exemplo, não serão esses dois referenciais equivalentes. Obviamente, os dois tratamentos serão equivalentes se o fluido subir com velocidade constante. Resolvamos o problema desta subseção. Da equação anterior,  $\vec{F}^0 = \vec{F}^{0'} + \rho_{\text{liq}}Vv\hat{e}_z$ , e da equação (lembre-se que o referencial  $S'$ , que sobe junto com o fluido, para o problema nesta subseção tratado, é o das seções anteriores<sup>34</sup>) (2.122), temos:

$$\vec{F}^0 = - \left[ 6\pi\eta R(-v(t)) + \frac{2\pi R^3}{3}\rho(-\dot{v}(t)) + \right.$$

<sup>33</sup>Note-se que a força total que o fluido faz na esfera é invariante.

<sup>34</sup>Ainda que não-inercial aqui, considerado como tal, pois prescrevemos o efeito não-inercial ao campo  $\vec{g}$ , algumas linhas acima, resultando no campo que se chamou  $\vec{g}' = \vec{g} - v\hat{e}_z$ . Portanto, leia-se  $\vec{F}^{0'}$ , em (2.122).

$$+ 6\sqrt{\pi}R^2 (\eta\rho)^{1/2} \int_{-\infty}^t \frac{(-\dot{v}(\tau))}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \Big] \hat{e}_z + \rho V \dot{v} \hat{e}_z. \quad (2.123)$$

Agora consideremos o caso particular do fluido subindo instantaneamente com velocidade constante  $v_0 \hat{e}_z$ . Para  $t < 0$ , temos que velocidade do fluido é nula, i.e.,  $v(t) = 0$ . Para  $t > 0$ , temos que a velocidade do fluido é  $v_0$ . A aceleração  $\dot{v}(t)$  do fluido é nula, exceto em  $t = 0$ , quando é infinita. A variação da velocidade  $dv$  do fluido no intervalo de tempo  $dt$ ,  $t \in (0 - |dt|/2; 0 + |dt|/2)$ , é dada por  $v_0$ . Assim

$$v_0 = \int_{0-|dt|/2}^{0+|dt|/2} \dot{v}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t) dt, \quad (2.124)$$

onde se estenderam as integrais até o infinito pois  $\dot{v}(t)$  é nulo  $\forall t$ , exceto em  $t = 0$ . Podemos interpretar a integral anterior dentro do escopo de teoria de distribuições, dado que está filtrando o valor  $v_0$ , donde vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \delta(t) dt = v_0 = v_0 \cdot 1 = v_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v_0 \delta(t) dt \quad \therefore$$

$$\dot{v}(t) = v_0 \delta(t). \quad (2.125)$$

Onde  $\delta(t)$  é a função Delta de Dirac. De (2.125) e (2.123), temos, para  $t > 0$ ,

$$\vec{F}^0 = \left[ 6\pi\eta R v_0 + \frac{2\pi R^3}{3} \rho v_0 \delta(t) + 6\sqrt{\pi} R^2 (\eta\rho)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} - \int_t^{\infty} \right) \frac{v_0 \delta(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \right] \hat{e}_z + \frac{4}{3} \pi R^3 \rho v_0 \delta(t) \hat{e}_z. \quad (2.126)$$

Como estamos considerando  $t > 0$ , podemos desprezar as deltas de Dirac. Também, por causa disso, a segunda integral entre parênteses em (2.126) é nula. A primeira integral é tão somente  $v_0/\sqrt{t}$ . Assim, temos que a força de arrasto na esfera que foi posta instantaneamente em MRU em  $t > 0$  é dada por

$$\vec{F}^0(t) = 6\pi\eta R v_0 \left( 1 + R \sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta t}} \right) \hat{e}_z, \quad t > 0. \quad (2.127)$$

Note-se que, ainda que a a esfera esteja em MRU, o fluido não entrou no

regime estacionário, sendo, pois, que se atinge o regime estacionário de Stokes cessado o termo de decaimento para  $t \rightarrow \infty$ .



### 3 A CRISE DO ARRASTO

#### 3.1 O Problema Concreto

<sup>1</sup>O número de Reynolds local é dado por:

$$Re = \frac{2Rv_{\infty}\rho}{\eta}, \quad (3.1)$$

onde o índice  $\infty$  refere-se ao regime estacionário de escoamento, sendo  $R$  o raio da esfera em queda. Estaremos interessados na análise do escoamento do ar/fluido em torno da esfera em queda quando da fase estacionária do escoamento sob altos números de Reynolds. A principal diferença entre a equação de Navier-Stokes e a equação de Euler é a presença da viscosidade naquela e a ausência nesta, sendo esta obtida daquela quando da imposição de nulidade da viscosidade. É resultado por nós conhecido da análise da equação de Navier-Stokes para baixos números de Reynolds que a vorticidade  $\vec{\nabla} \times \vec{v}$  satisfaz à equação diferencial parcial do calor, sendo, assim, que tem uma queda exponencial proporcional ao afastamento da superfície da esfera. Tanto para baixos quanto para altos números de Reynolds, há a condição de contorno de não-escorregamento na superfície da esfera, imposição que exige o anulamento do vetor velocidade na superfície da esfera, não somente da componente normal, como no caso não-viscoso. Assim, deve haver o decréscimo obrigatório da velocidade até o anulamento na superfície da esfera, nos escoamentos viscosos, independentemente do número de Reynolds. Quando o número de Reynolds é baixo, essa condição de contorno é mais suave do que quando o número de Reynolds é alto, perfazendo regiões tão mais próximas da superfície da esfera que contenham menor suavidade de gradiente de velocidades à proporção do incremento no número de Reynolds, i.e., perfazendo uma camada limite de borda exponencialmente distante da superfície tão menos espessa quanto maior o número de Reynolds. Nessa região, camada limite, há maior intensidade de vorticidade. Com número de Reynolds suficientemente alto, os efeitos cisalhantes e rotacionais estarão confinados a uma região próxima da superfície da esfera e a região mais afastada com escoamento aproximadamente irrotacional, ou seja, potencial. Esperamos que um escoamento onde é alto o número de Reynolds seja, em grande parte do fluido, exceto nas imediações da esfera, e em regiões não-lineares, semelhante a um escoamento com baixa viscosidade. A rigor, quando nos referimos a

---

<sup>1</sup>Vide gráfico referente à crise do arrasto (queda brusca da força de arrasto) na página 51.

ser um escoamento com baixa viscosidade, estamos nos referindo ao baixo cisalhamento nas regiões mais afastadas da esfera, além da camada limite, o que retira a parcela que contém  $\Gamma$  na equação (2.3) nessas regiões, mas não pelo que seria nula a viscosidade  $\eta$  nessas regiões, dado que  $\eta$  é constante. Matematicamente, o escoamento mais afastado é tratado como irrotacional, pois no infinito, quando do estacionário, o campo de velocidades do fluido é constante, sendo nulo o rotacional no infinito. Assim, a circulação em torno desse ponto irrotacional no infinito é, pelo teorema de Stokes,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{\alpha} = \vec{0}$ , onde  $\vec{\alpha}$  é a área circundada pelo contorno infinitesimal adotado. Como no infinito será válida a equação de Euler pelo baixo cisalhamento quando é alto o número de Reynolds, não haverá efeitos relacionados à fricção interna no infinito e também nos locais de validade aproximada da equação de Euler, sendo pois que o fluxo será adiabático nessas regiões, isentrópico, sendo, portanto, válido o teorema de conservação da circulação e, assim, será nula a vorticidade ao longo de todas as linhas de corrente que estejam na região de validade aproximada da equação de Euler, ou seja, em toda essa região fora da camada limite (não incluindo o *wake*<sup>2</sup>, pois neste não é válida a equação de Euler). Portanto, a região fora da camada limite é irrotacional e passível de ser tratada em termos de potencial. Há uma diferença fundamental entre o tratamento que daremos aqui e o que de praxe é adotado em relação às condições de contorno na região potencial: não adotaremos que o campo seja o da solução potencial apenas no infinito; adotaremos que o campo seja potencial numa distância  $\delta$  da superfície da esfera que permita, dentro de critério a ser adotado, tomar o campo de velocidades para<sup>3</sup>  $r \geq R + \delta$  como sendo o obtido pelo tratamento potencial, i.e., pela solução da equação de Euler. Isso posto, pelo que sendo suficientemente alto o número de Reynolds, teremos a região potencial mais próxima da superfície da esfera do que matematicamente a teríamos caso a puséssemos no infinito e resolvêssemos as equações de camada limite (Prandtl). Tomemos, então, uma região muito próxima da superfície da esfera, de modo que tenhamos o plano formado pelos versores  $\hat{e}_\theta$  e  $\hat{e}_\phi$ . Tomemos o eixo local normal ao plano com versor  $\hat{e}_r$ . Temos, então, que, nessa região diminuta, podemos tomar a equação de Navier-Stokes em coordenadas cartesianas com eixo  $Oy$  ao longo de  $\hat{e}_r$ , com escoamento de parte da camada limite de espessura  $\delta$  no plano dos versores  $\hat{e}_\theta$  e  $\hat{e}_\phi$ , que será, para a análise que brevemente faremos, o plano  $xOz$ . Na fig. 3 está es-

<sup>2</sup>Esteira de vórtices que se forma atrás da esfera devido a efeitos não-lineares, quando do alto número de Reynolds.

<sup>3</sup> $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas esféricas com origem no centro da esfera e plano azimutal paralelo ao chão.

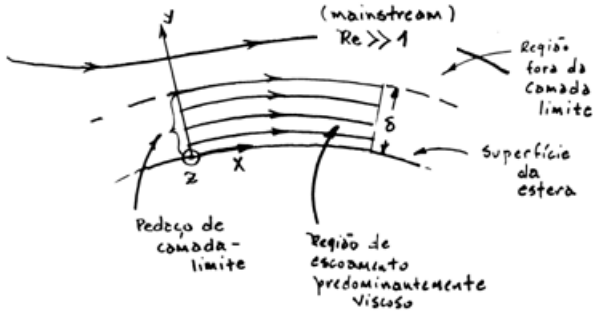


Figura 3: Desenho esquemático de parte da camada-limite.

quematizado o que se expôs.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right); \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right); \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Em (3.2) (LANDAU; LIFSHITZ, 1959) está a equação de Navier-Stokes para o escoamento planar localmente considerado e também a condição de incompressibilidade. Omitimos o termo  $\partial \vec{v} / \partial t$ , pois estamos aqui considerando o regime estacionário<sup>4</sup>. Também omitimos o termo de campo não-inercial, dado que o mesmo não influenciará<sup>5</sup> na análise que agora fazemos. Estando

<sup>4</sup> Mesmo que tenhamos um processo de turbulência na camada limite, como consideraremos mais adiante, teremos, caso não haja convencimento, por força de hipótese, que o escoamento turbulento médio será estacionário, i.e., feito sobre o *ensemble* dos campos turbulentos de velocidade

<sup>5</sup> A rigor, devemos inseri-lo como o gradiente de um campo potencial, i.e.,  $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi_{\vec{F}}$ , pois  $\vec{F}$  é irrotacional. Feito isso, na análise que se sucede para  $p$ , obteríamos  $\partial p' / \partial y \cong 0$ , onde  $p' = \rho \varphi_{\vec{F}} / m + p$ . Assim,  $(\rho \varphi_{\vec{F}} / m + p)^{ext} = (\rho \varphi_{\vec{F}} / m + p)^{int} \Rightarrow \rho \varphi_{\vec{F}}^{int} / m + p^{int} = (\rho \varphi_{\vec{F}} / m + p)^{ext}$ , onde os índices *ext* e *int* referem-se ao exterior e ao interior da camada limite, respectivamente.

num regime em que a camada limite seja suficientemente fina, i.e.,  $\delta \ll R$ , torna-se claro que o fluxo será predominantemente paralelo à superfície da esfera, dentro da camada limite. Temos, então, que  $v_y/v_x \ll 1$ . Por causa da condição de não-eskorregamento na superfície da esfera, e do alto número de Reynolds, a velocidade variará muito rapidamente com  $y$ , ao nos afastarmos ligeiramente da superfície da esfera, com variação apreciável a distâncias da ordem da largura da camada limite  $\delta$ , por hipótese. Já ao longo do eixo  $Ox$ , a velocidade variará muito mais lentamente, i.e., somente a distâncias comparáveis à dimensão da esfera. Esperamos, então, que as variações de velocidade em relação a  $y$  sejam muito maiores que as em relação a  $x$  e vemos que, nesta aproximação, pelas equações (3.2):

$$\frac{\partial p}{\partial y} \cong 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial p}{\partial r} \cong 0, \quad (3.3)$$

na região da camada limite. Há dois pressupostos essenciais para a validade da equação (3.3), necessariamente: camada limite suficientemente fina e escoamento tangencial dos elementos de fluido interiores à camada limite em relação à superfície da esfera. Se o escoamento for laminar, uma camada limite suficientemente fina terá necessariamente que possuir escoamento de seus elementos de fluido tangenciais à superfície da esfera. Porém, se o escoamento não for laminar, uma camada limite suficientemente fina laminarmente pode não o ser não laminarmente para efeitos de tangência de seus elementos de fluido. Assim, poderia haver discrepância entre o campo de pressões na borda da camada limite em contato com o escoamento potencial e o campo de pressões interno à camada limite, nesses casos de não-laminaridade, ainda que a espessura da camada limite seja suficientemente fina para um caso laminar, reiteramos. Porém, pode haver um valor de espessura de camada limite que, mesmo em sendo turbulenta a camada limite, tal espessura seja suficientemente fina para que os campos de pressão externo e interno sejam os mesmos, ainda que não tenhamos tangência dos elementos de fluido internamente à camada limite. A equação (3.3) não é uma condição suficiente para a tangência dos elementos de fluido da camada limite. No caso laminar, porém não suficientemente fina a camada limite, teremos discrepância entre os campos externo e interno à camada limite. Nós veremos da análise termodinâmica que faremos da estabilidade do equilíbrio do ponto de separação na iminência da crise do arrasto que deverá haver um aumento na desordem

---

Isso é exatamente o que faremos com o campo de pressões, tomando o campo de pressões externo à camada limite, porém adotando o potencial não-inercial na expressão para o campo de pressões externo como sendo o potencial não-inercial interno.

dos elementos, primeiramente, nas regiões próximas à superfície da esfera e, depois, nas regiões mais afastadas em direção à borda da camada limite. Isso significa, dentro das considerações que aqui faremos neste trabalho, que a camada limite, quando da crise do arrasto, fica turbulenta, primeiramente, nas regiões mais próximas à superfície da esfera, como deveríamos esperar, dado que aí estarão mais fortemente concentradas as vorticidades e os efeitos não-lineares devidos ao cisalhamento mais intenso na superfície da esfera. Assim, no momento da crise do arrasto, esperamos que os elementos de fluido mais próximos à borda externa da camada limite continuem tangenciais à mesma, e, portanto, à direção paralela à superfície da esfera, pois a camada limite será supostamente fina dado o alto número de Reynolds, donde, nessa região interna à camada limite, e próxima da borda externa, teremos a validade de (3.3). Já nas regiões mais próximas da superfície da esfera, não teríamos a validade de (3.3), a rigor, a menos que a camada limite fosse suficientemente fina para tal. Isso não será empecilho para nós, pois tomaremos nossa superfície de controle na região onde poderemos aplicar a equação (3.3), sendo que ainda que não saibamos o campo de pressões na superfície da esfera, na região da camada limite, obteremos o resultado correto para a força de arrasto. A equação (3.3), dentro da validade para sua aplicabilidade, nos diz que haverá um baixo gradiente radial de pressão, sendo as variações de energia cinética dos elementos de fluido facilitadas tangencialmente, não radialmente. O escoamento externo à camada limite onde o fluxo é potencial será denominado *mainstream*.

Seja, para a análise que faremos por algumas linhas, o escoamento inicial de nossa esfera que cai, i.e., que ainda não tenha sido atingido o estacionário<sup>6</sup> de velocidade limite na iminência da crise do arrasto. Ao se afastar do equador (nossa esfera cai verticalmente para baixo com seus pólos sul→norte na vertical e direcionados para cima), em direção ao pólo norte, um elemento de fluido na camada limite sentirá um aumento de pressão, o que comunicará ao elemento um decréscimo em sua energia cinética. Efeito oposto ocorrerá do pólo sul ao equador. Eventualmente, para um dado número de Reynolds, toda a energia cinética de tal elemento de fluido poderá ser retirada no pólo norte. Nesse instante, a camada limite estará na iminência de iniciar seu descolamento da esfera, sendo o ponto inicial de descolamento o pólo norte da esfera.

---

<sup>6</sup>Quando falamos estacionário, queremos dizer *estado* estacionário.

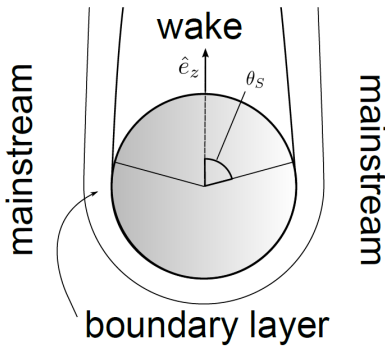


Figura 4: Esfera em queda. Camada-limite (*boundary layer*), pontos de separação, *wake*, *mainstream* e ângulo de separação  $\theta_S$ .

separação. Os elementos de fluido para cima dos pontos de estagnação têm inversão de velocidades, gerando um *backflow* nas partes da região acima do pólo norte da esfera, denominada *wake*. Haverá formação de vórtices, rarefação e zonas de baixa pressão no *wake*. O descolamento da camada limite se estabiliza num ângulo  $\theta_S$  próximo ao equador. Desde o momento do descolamento do ponto no pólo norte até a sua gradual, porém rápida, estabilização nas proximidades do equador, a camada limite é laminar com número de Reynolds suficientemente baixo para isso. Quando o ângulo de descolamento se estabiliza, o número de Reynolds continuará aumentando até um valor que tornará iminente a crise do arrasto (pois estamos sob a hipótese de que o estacionário dar-se-á na iminência da crise do arrasto, onde é alto o número de Reynolds). Nesse processo, ainda sob o ângulo de descolamento fixo  $\theta_S$ , a camada limite sofrerá transição de laminar à turbulenta. No estacionário, na iminência da crise do arrasto, o escoamento terá três zonas

Com o aumento do número de Reynolds, o descolamento se sucede até um valor limite  $\theta_S$  nas proximidades do equador da esfera, sendo os pontos de descolamento sobre a esfera, pontos de velocidade nula para elementos na camada limite que se descolam, denominados pontos de estagnação/separação instantânea nas vizinhanças da superfície da esfera<sup>7</sup>. Assim, as derivadas do campo de velocidades nessa vizinhança serão nulas, implicando a nulidade do cisalhamento na vizinhança do ponto de

<sup>7</sup>Note-se que *na superfície da esfera* todos os pontos relativos a elementos de fluido terão velocidade nula - pela condição de não-escorregamento, inclusive no ponto de separação. A inversão no campo de velocidades que gera a separação dá-se nos elementos de fluido dentro da camada limite que escoam, i.e., que não estão em contato direto com a superfície da esfera. Assim, o ponto de separação encontra-se na vizinhança da superfície da esfera neste ponto. Nessa vizinhança, na hipótese de velocidade tangencial à superfície da esfera, teremos  $\vec{v}(S) = v_\theta(S)\hat{e}_\theta + 0\hat{e}_r + 0\hat{e}_\phi = \vec{0}$ , plausível dentro de condições de laminaridade nessa vizinhança da separação, onde  $S$  designa a vizinhança do ponto de separação.

bem características, com a camada limite descolada ainda sob o ângulo  $\theta_S$  perto do equador: o *wake*, ou esteira de vórtices na parte superior acima dos pontos de separação, extensão de camada limite descolada separando o *wake* do *mainstream* e o *mainstream*. Nessas condições a camada limite ainda possuirá uma zona laminar nas imediações de fronteira com o *mainstream*, mas conterà região turbulenta nas imediações da superfície da esfera. Tem-se então um equilíbrio delicado que será analisado no escopo da termodinâmica, sendo que a quebra de tal equilíbrio faria com que a camada limite ficasse turbulenta em sua totalidade pela convecção de vorticidade oriunda do *wake* quando da quebra de separação entre as duas regiões (*wake*) na crise do arrasto. Essa mistura por convecção entre *wake* e camada limite ocorre durante um intervalo de tempo pequeno em que o ponto de separação sobe para mais próximo do pólo norte, tempo suficiente para que a turbulência se instale na totalidade da camada limite, fazendo com que caia drasticamente o arrasto ( $\theta_S$  diminui). Início de turbulência na camada limite é essencial para o início da crise do arrasto e é exatamente nesse ponto de regime de escoamento que poremos o nosso estacionário sob análise. Isto é, suporemos a iminência da crise do arrasto, com camada limite colada no ponto de separação laminar assintótico  $\theta_S$ , com elementos de fluido no interior da camada limite com perda de laminaridade por turbulência nas proximidades da superfície da esfera e ainda com laminaridade nas proximidades da borda externa da camada limite em contato com o *mainstream*.

### 3.2 Cálculo do Ângulo de Separação $\theta_S$

(SCHLICHTING, 1979) Como estaremos aqui interessados na determinação do ângulo assintótico (vide fig. 3 abaixo) laminar de separação, pois o mesmo desenvolve-se rapidamente ainda quando de números de Reynolds baixos e, conforme colocado anteriormente, será esse o ângulo em que se encontrará descolada a camada limite quando da iminência da crise do arrasto, segue-se o cálculo de camada limite laminar baseado nas equações de Prandtl com condições de contorno no infinito. As equações de Prandtl para a camada limite foram adaptadas para o caso de corpos axissimétricos com eixo de simetria paralelo ao fluxo no infinito por E. Boltze. Seja  $x$  o comprimento de arco de circunferência medido em relação ao pólo sul da esfera até um ponto arbitrário  $Q$  sobre a esfera tal que  $x_Q \in [0; \pi R]$ . Seja  $y$  a altura radial a partir desse ponto. Seja o plano ortogonal ao eixo de simetria da esfera paralelo ao fluxo no infinito e passando por  $Q$ . A intersecção desse plano com a esfera é uma circunferência de raio  $r(x)$ . Denotando

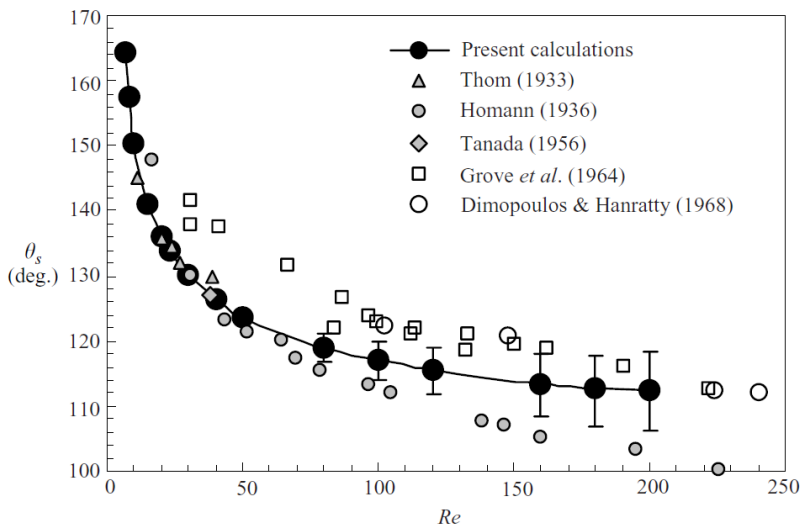


Figura 5: Desenvolvimento assintótico para o ponto de separação. Assíntota já em baixos números de Reynolds onde o regime ainda é laminar. Ângulo medido a partir do pólo sul. (WU CHIH-YUNG WEN, 2004) (SCHLICHTING, 1979) (ACHENBACH, 1972).



as componentes de velocidade paralela e normal à esfera em  $Q$  por  $u$  e  $v$ , respectivamente, e o fluxo potencial por  $U(x)$  nas imediações da superfície da esfera, E. Boltze determinou as equações de Prandtl para a camada limite de corpos axissimétricos com eixo de simetria paralelo ao fluxo no infinito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial(ur)}{\partial x} + \frac{\partial(vr)}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$y = 0: u = v = 0; \quad y = \infty: u = U(x, t). \quad (3.5)$$

Podemos, sem perda de generalidade, analisar o caso laminar estacionário, pois estamos interessados, aqui, no ângulo de separação laminar. Para isso, introduz-se uma função de corrente  $\psi(x, y)$  tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Tal função de corrente transforma a equação (16) em:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \psi \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (3.7)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$y = 0: \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \quad y = \infty: \frac{\partial \psi}{\partial y} = U(x). \quad (3.8)$$

Expandem-se o campo de velocidades local nas imediações da superfície da esfera para o fluxo potencial  $U(x)$  numa série de potências na coordenada curvilínea  $x$ , bem como o contorno da esfera  $r(x)$ , sendo a função de corrente  $\psi(x, y)$  escrita como uma série em  $x$  com coeficientes variáveis dependentes de  $y$  (série de Blasius), sendo que as funções coeficientes na série de Blasius, funções de  $y$ , são previamente escritas independentemente de quaisquer

parâmetros particulares do problema em análise, pelo método devido a N. Froessling. Obtém-se, assim, para o caso da esfera, a distribuição de velocidades  $u/U_\infty = u(x/R; (y/R) \sqrt{U_\infty R \rho / \eta}) / U_\infty$ . Da condição de anulamento do cisalhamento no ponto de separação  $\partial u / \partial y|_{x=x_S} = 0$ , obtém-se:

$$1 - 0,3925 (x_S/R)^2 + 0,0421 (x_S/R)^4 - 0,00259 (x_S/R)^6 = 0 \Rightarrow$$

$$x_S/R = 1,913 \text{ rad} \quad \therefore \quad (3.9)$$

$$x_S/R = \pi - \theta_S = 1,913 \text{ rad} \Rightarrow \theta_S = 1,229 \text{ rad} = 70,4^\circ. \quad (3.10)$$

### 3.3 Análise Termodinâmica da Estabilidade Mecânica do Ponto de Separação

(LANDAU; LIFSHITZ, 1959) Sabe-se que um fluido pode estar em equilíbrio mecânico, não existindo movimento macroscópico, sem que esteja em equilíbrio térmico.

Consideremos a equação de Navier-Stokes para o nosso problema de queda da esfera, i.e., a equação (2.22). A condição de equilíbrio mecânico para uma região do fluido requer que:

$$\rho \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\nabla} p = \vec{0}, \quad (3.11)$$

pois  $\vec{v} = \vec{0}$  em tal região, por hipótese; sendo que essa condição expressa pela equação (3.11) pode ser satisfeita, conforme já o dissemos, mesmo que a temperatura não seja constante em tal região. Pensemos na instabilidade do equilíbrio mecânico em tal região como sendo consequência da necessidade de convecção, i.e., da necessidade de se misturarem diferentes partes do fluido na região mencionada para que seja estabelecido o equilíbrio térmico. Assim, a condição de estabilidade do equilíbrio mecânico passa a ser a de ausência de convecção.

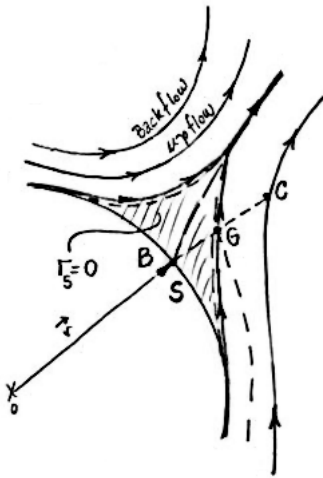


Figura 6: Desenho esquemático da vizinhança do ponto de separação.

Ao lado, encontra-se esquematizada a vizinhança do ponto de separação assintótico laminar, ponto  $S$ , bem como destacado o valor nulo do tensor de cisalhamento nas vizinhanças de  $S$ ,  $\Gamma_S = 0$ . A região hachurada encontra-se supostamente em equilíbrio mecânico com os elementos de fluido em repouso nessa região. Há uma suposta descontinuidade do campo de velocidades nas bordas da referida região em contato com o fluido, conforme se infere do desenho esquemático ao lado. Consideremos um elemento de fluido num ponto  $P$  da região hachurada. Consideremos o eixo normal local no ponto  $S$ , que denominaremos de eixo  $\tilde{z}$ . Assim, a altura local desse elemento de fluido será  $\tilde{z} = r - R$ . Suponhamos agora que esse elemento de fluido sofra um deslocamento brusco do equilíbrio,  $\delta\tilde{z}$ , i.e., adiabaticamente, dentro da região hachurada. Em  $\tilde{z}$ , seu volume específico (recíproco da densidade) é  $V(p, s)$ , onde  $p$  é a pressão em  $\tilde{z}$  e  $s$  a entropia específica (entropia por unidade de massa do elemento de fluido), também em  $\tilde{z}$ . Em  $\tilde{z} + \delta\tilde{z}$ , seu volume específico, quando da repentina e suposta expansão adiabática, é  $V(p', s)$ , onde  $p'$  é a pressão em  $\tilde{z} + \delta\tilde{z}$ . Para que o equilíbrio seja estável, será necessária a existência de uma força restauradora que tenda a trazer o elemento de fluido adiabaticamente deslocado para uma posição hidrostaticamente equivalente à sua posição original. Isso significa que o elemento deslocado deve ser mais pesado do que o fluido por ele deslocado na nova posição. Seja  $V(p', s')$  o volume específico do elemento deslocado de sua posição em  $\tilde{z} + \delta\tilde{z}$ , onde  $s'$  é a entropia de equilíbrio mecânico em  $\tilde{z} + \delta\tilde{z}$ . Assim, temos a condição de estabilidade:

$$V(p', s') - V(p', s) > 0. \quad (3.12)$$

Expandindo essa diferença em potências de  $s' - s$ , utilizando o fato de que  $s' - s = (ds/d\tilde{z}) \delta\tilde{z}$ , a relação termodinâmica  $(\partial V/\partial s)_p = (T/c_p) (\partial V/\partial T)_p$ , onde  $c_p = (T\partial s/\partial T)_p$  é o calor específico à pressão constante, quantidade

positiva, assim como  $T$ , temos a condição de estabilidade mecânica:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{ds}{dz} > 0. \quad (3.13)$$

Para fluidos não-anômalos em relação ao comportamento de aumento de densidade com a diminuição da temperatura, a condição de estabilidade torna-se simplesmente<sup>8</sup>:

$$\frac{ds}{dz} > 0, \quad (3.14)$$

i.e., a entropia deve crescer com a distância à superfície imersa. Assim, espera-se que na iminência da crise do arrasto a entropia seja maior na superfície do que em região subseqüentemente mais afastada, nas vizinhanças do ponto de separação. A condição de estabilidade expressa pela equação (3.14) nos diz que a entropia deve ser maior nas regiões mais afastadas do ponto de estagnação em sua vizinhança. Os efeitos não-lineares turbulentos dentro da camada limite estão relacionados à vorticidade que é mais intensa na superfície da esfera, portanto mais interiormente à camada limite. Isso se sucede dentro da camada limite, mas não nas vizinhanças do ponto de estagnação ainda em equilíbrio, pois contrariaria (3.14). Assim, deve haver uma transferência contínua de vorticidade de regiões externas à vizinhança do ponto de separação para dentro desta que, em virtude de seu confinamento (figura 3.2), torna insustentável a situação de equilíbrio, de maneira que, desfeito o equilíbrio, desfaz-se (3.14). A vorticidade está relacionada ao cisalhamento nos fluidos viscosos, sendo o cisalhamento mais intenso na superfície da esfera (nas vizinhanças do ponto de separação, o que acontece é o oposto, i.e., o cisalhamento é nulo na situação de equilíbrio desta região, portanto baixa a vorticidade, esta, a vorticidade, aumentando para pontos mais afastados da vizinhança do ponto de separação). Assim, na camada limite, em regiões mais distantes do ponto de separação, o que acontece é o inverso de (3.14) e essas regiões não estão em equilíbrio mecânico. Assim, as regiões próximas à superfície da esfera devem tornar-se mais caóticas antes das regiões laminares mais afastadas, desfazendo-se, quando da instalação da turbulência na superfície da esfera, a condição de estabilidade dada pela equação (3.14), pelo que o excesso de caoticidade transferida para a vizinhança do ponto de separação tornaria insustentável o equilíbrio mecânico até então

---

<sup>8</sup>Para fluido anômalo basta inverter a desigualdade.

lá estabelecido. Parece que temos, então, uma condição físico-matemática para a crise do arrasto. Representando a entropia específica em termos das variáveis intensivas temperatura absoluta e campo de pressão,  $s = s(T, p)$ , utilizando uma das relações de Maxwell  $(\partial s / \partial p)_T = -(\partial V / \partial T)_p$ , tem-se:

$$\frac{d}{d\tilde{z}}s(T, p) = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{d\tilde{z}} - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{d\tilde{z}} > 0. \quad (3.15)$$

Da equação (3.11) temos que  $dp/dz + (\rho/m)F = 0$ , onde  $z$  é a coordenada vertical usual<sup>9</sup>  $z = r \cos \theta_S$  atada à esfera, donde  $dz = \cos \theta_S dr = \cos \theta_S d(\tilde{z} + R)$ , e com a utilização do coeficiente de expansão térmica  $\alpha = (1/V)(\partial V / \partial T)_p$ , lembrando que  $V = 1/\rho$  é o volume específico (densidade recíproca), reescrevemos a condição de estabilidade mecânica (3.15):

$$\frac{dT}{d\tilde{z}} > -\frac{\alpha T \cos \theta_S}{mc_p} F. \quad (3.16)$$

Sendo a equação (3.16) condição de estabilidade mecânica, temos por condição de crise do arrasto a negativa de (3.16), i.e.:

$$\frac{dT}{d\tilde{z}} \leq -\frac{\alpha T \cos \theta_S}{mc_p} F. \quad (3.17)$$

Como  $(\alpha T \cos \theta_S) / (mc_p) > 0$  (pois estamos considerando fluidos não-anômalos,  $\theta_S = 70,4^\circ$ ), a temperatura deverá decrescer de uma quantidade igual ou superior à quantidade  $(\alpha T \cos \theta_S) / (mc_p) d\tilde{z}$  ao nos afastarmos da superfície da esfera, na situação de crise do arrasto. Supondo que haja continuidade para regimes estacionários com número de Reynolds inferiores ao número de Reynolds crítico de crise do arrasto, i.e., que  $dT$  vá continuamente diminuindo mais intensamente em quantidades que tendam à quantidade crítica  $(\alpha T \cos \theta_S) / (mc_p) d\tilde{z}$  à medida que se tomam estacionários com números de Reynolds próximos do crítico, chegar-se-á a um momento em que teremos um regime estacionário tal que  $dT$  diminuirá tão intensamente quanto o valor crítico  $(\alpha T \cos \theta_S) / (mc_p) d\tilde{z}$ , sendo pois a crise do arrasto instalada, não mais sendo possível, sob esta hipótese de continuidade, ter-se uma diminuição maior de  $dT$  que a crítica tal que:

---

<sup>9</sup>Na vizinhança de  $S$ , os pontos têm coordenada esférica  $\theta$  aproximadamente fixa sob o ângulo de separação  $\theta = \theta_S$ .

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\alpha T \cos \theta_S}{mc_p} F, \quad (3.18)$$

pois a crise do arrasto já estaria instalada. Assim, a equação (3.18) nos fornece uma condição para a crise do arrasto que pode ser testada em laboratório. Para exemplificar, se tomarmos o fluido como sendo um gás ideal<sup>10</sup>,  $\alpha = 1/T$ , diatômico,  $U = 5nR_{gas}T/2 \Rightarrow C_V = dU/dT = 5nR_{gas}/2 \Rightarrow C_p = nR_{gas} + C_V = 7nR_{gas}/2 \Rightarrow c_p = 7R_{gas}/2M_{mol}$ , onde  $n$  é o número de moles de um elemento de fluido,  $R_{gas}$  a constante universal dos gases,  $C_V$  a capacidade térmica a volume constante do gás,  $C_p$  a capacidade térmica a pressão constante do gás e  $M_{mol}$  a massa molar do gás. Assim, a equação (3.18) integrada nessas condições dentro da camada limite permite obter a diferença crítica de temperatura entre a superfície da esfera e a borda externa da camada limite, quando da instalação da crise do arrasto:

$$\int_{T_{esfera}}^{T_{CL}} dT = -\frac{2M_{mol} \cos \theta_S F}{7mR_{gas}} \int_R^{R+\delta} dz. \quad (3.19)$$

$$T_{esfera} - T_{CL} = (\Delta T)_{Crít} = \frac{2M_{mol} \cos \theta_S F \delta}{7mR_{gas}}, \quad (3.20)$$

onde  $T_{esfera}$  é a temperatura na superfície da esfera,  $T_{CL}$  a temperatura da borda externa da camada limite (temperatura de *mainstream*),  $(\Delta T)_{Crít}$  a diferença crítica de temperatura e  $\delta$  a espessura da camada limite, todos quando da crise do arrasto.

### 3.4 Determinação Analítica da Força de Arrasto Iminência da Crise do Arrasto

O problema da solução para um escoamento potencial no *mainstream*, estacionário, reduz-se ao de se encontrar uma função potencial  $K(\vec{r})$ , pois:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_\infty = \vec{\nabla} \times \vec{v}_\infty(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty(\vec{r}) = \vec{\nabla} K(\vec{r}), \quad (3.21)$$

<sup>10</sup>Alguém poderia argumentar da impossibilidade de tratarmos um gás, pela compressibilidade inerente. Porém, estamos analisando as vizinhanças do ponto de separação onde  $\vec{v} \approx \vec{0}$  em toda a região de vizinhança, donde o termo de compressibilidade na equação mais geral (2.9), esta integrada nesta vizinhança, torna-se desprezível ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \approx 0$ ).

onde  $\vec{v}_\infty(\vec{r})$  é o campo de velocidades no *mainstream*, sendo que o índice  $\infty$ , conforme já mencionado, refere-se ao estacionário (tempo infinito). Para um *mainstream* incompressível, temos também:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_\infty(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} K(\vec{r})) = 0 \therefore$$

$$\vec{\nabla}^2 K(\vec{r}) = 0. \quad (3.22)$$

A condição de contorno no infinito, é dada por

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{v}_\infty(\vec{r}) = -\dot{h}^\infty(t) \hat{e}_z, \quad (3.23)$$

pois estamos no referencial em queda, sendo a outra condição de contorno de impenetrabilidade na borda da camada limite:

$$\vec{v}_\infty \cdot \hat{e}_r|_{r=R+\delta} \cong 0, \quad (3.24)$$

conforme já referido como sendo tratamento diferente do usualmente adotado na solução da equação de Prandtl (SCHLICHTING, 1979), este último com condição de contorno potencial somente no infinito; i.e., forçaremos a solução potencial numa borda externa de camada limite, distante  $\delta$  da superfície da esfera, onde os efeitos cisalhantes sejam desprezíveis segundo algum critério conveniente. Da condição de contorno no infinito para o *mainstream*:

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \vec{v}_\infty(\vec{r}) = -\dot{h}^\infty(t) \hat{e}_z \therefore$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \left( v_\infty^r \hat{e}_r + v_\infty^\theta \hat{e}_\theta \right) = -\dot{h}^\infty(t) (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta),$$

donde temos, então, no infinito, por (3.21), que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} K(r \rightarrow \infty) &= -\dot{h}^\infty(t) \cos \theta \hat{e}_r + \dot{h}^\infty(t) \sin \theta \hat{e}_\theta \therefore \\ \frac{\partial K}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \theta} \Big|_{r \rightarrow \infty} \hat{e}_\theta &= -\dot{h}^\infty(t) \cos \theta \hat{e}_r + \dot{h}^\infty(t) \sin \theta \hat{e}_\theta, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial K}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = -\dot{h}^\infty(t) \cos \theta \Rightarrow K(r \rightarrow \infty) = -r\dot{h}^\infty(t) \cos \theta + g(\theta), \quad (3.25)$$

onde  $g(\theta)$  é uma função arbitrária de  $\theta$ . Temos, da componente em  $\theta$ :

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} \stackrel{(3.25)}{=} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r\dot{h}^\infty(t) \cos \theta + g(\theta)) = \dot{h}^\infty(t) \sin \theta + \frac{g'(\theta)}{r},$$

donde inferimos que  $g'(\theta) = 0 \Rightarrow g(\theta) = cte$ , donde:

$$K(r \rightarrow \infty) \cong -r\dot{h}^\infty(t) \cos \theta + cte. \quad (3.26)$$

Como a constante não influenciará no campo de velocidades do *mainstream* no infinito, pois  $\vec{v}_\infty = \vec{\nabla} K$  no *mainstream*, podemos escrever assintoticamente que:

$$K(\vec{r}) \rightarrow -r\dot{h}^\infty(t) \cos \theta, \quad (3.27)$$

quando  $r \rightarrow \infty$ . Dado o exposto, tentaremos o potencial de *mainstream*:

$$K(r, \theta) = f(r) \cos \theta. \quad (3.28)$$

Substituindo (3.28) em (3.22), temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 K &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial K}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial K}{\partial \theta} \right) = 0 \Rightarrow \stackrel{(3.28)}{\dots} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 f''(r) + 2r f'(r) - 2f(r) = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Procurando solução de (3.29) na forma  $f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^n$  e substituindo-a em (3.29), encontramos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [n(n-1) + 2n - 2] \alpha_n r^n = 0. \quad (3.30)$$

Facilmente concluímos que  $\alpha_n = 0 \forall n \notin \{-2, 1\}$ . Temos, então que  $f(r)$  é dada por:



$$f(r) = \alpha_1 r + \frac{\alpha_{-2}}{r^2}. \quad (3.31)$$

Então, pela equação (3.28), temos que:

$$K(r, \theta) = \left( \alpha_1 r + \frac{\alpha_{-2}}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (3.32)$$

com  $\alpha_1, \alpha_{-2}$  constantes. Substituindo o (3.32) em (3.21), temos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_\infty = \vec{\nabla} \left[ \left( \alpha_1 r + \frac{\alpha_{-2}}{r^2} \right) \cos \theta \right] &= \left[ \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \left( \alpha_1 r + \frac{\alpha_{-2}}{r^2} \right) \cos \theta \Rightarrow \dots \\ \vec{v}_\infty(\vec{r}) &= \left( \alpha_1 - \frac{2\alpha_{-2}}{r^3} \right) \cos \theta \hat{e}_r - \left( \alpha_1 + \frac{\alpha_{-2}}{r^3} \right) \sin \theta \hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Pela condição de impenetrabilidade na borda externa da camada-limite, temos:

$$\vec{v}_\infty \cdot \hat{e}_r|_{r=R+\delta} \cong 0, \quad (3.34)$$

donde, por (3.33) e (3.34) temos:

$$\left[ \alpha_1 - \frac{2\alpha_{-2}}{(R+\delta)^3} \right] \cos \theta = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow \alpha_1 = \frac{2\alpha_{-2}}{(R+\delta)^3},$$

que, substituído em (3.33), fornece o campo de velocidades no *mainstream*:

$$\vec{v}_\infty(\vec{r}) \cong \left[ \frac{2\alpha_{-2}}{(R+\delta)^3} - \frac{2\alpha_{-2}}{r^3} \right] \cos \theta \hat{e}_r - \left[ \frac{2\alpha_{-2}}{(R+\delta)^3} + \frac{\alpha_{-2}}{r^3} \right] \sin \theta \hat{e}_\theta.$$

Aplicando a condição de contorno  $\vec{v}_\infty(\text{mainstream}, r \rightarrow \infty) = -\dot{h}^\infty(t) \hat{e}_z = -\dot{h}^\infty(t) \cos \theta \hat{e}_r + \dot{h}^\infty(t) \sin \theta \hat{e}_\theta$  à equação anterior, obtemos  $\alpha_{-2} = -(R+\delta)^3 \dot{h}^\infty(t)/2$  e, assim:

$$\vec{v}_\infty(\vec{r}) = -\dot{h}^\infty(t) \left[ 1 - \frac{(R+\delta)^3}{r^3} \right] \cos \theta \hat{e}_r + \dot{h}^\infty(t) \left[ 1 + \frac{(R+\delta)^3}{2r^3} \right] \sin \theta \hat{e}_\theta. \quad (3.35)$$

Retornando à equação de Navier-Stokes (2.22):

$$\begin{aligned} \rho \vec{\dot{v}}_{\infty}(\vec{r}) + \frac{\rho}{m} \vec{F}^{\infty} + \vec{\nabla} p_{\infty} - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}_{\infty}(\vec{r}) &= \vec{0} \Rightarrow \\ \rho (\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{\infty} + \rho \frac{\partial \vec{v}_{\infty}}{\partial t} + \frac{\rho}{m} \vec{F}^{\infty} + \vec{\nabla} p_{\infty} - \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}_{\infty} &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando a identidade:

$$(\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_{\infty} = \vec{\nabla} \left( \frac{v_{\infty}^2}{2} \right) - \vec{v}_{\infty} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}_{\infty}) = \vec{\nabla} \left( \frac{v_{\infty}^2}{2} \right), \quad (3.37)$$

e a identidade:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{v}_{\infty} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_{\infty}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}_{\infty}) = \vec{0}, \quad (3.38)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \rho \vec{\nabla} \left( \frac{v_{\infty}^2}{2} \right) + \frac{\rho}{m} \vec{F}^{\infty} + \vec{\nabla} p_{\infty} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \left( \rho \frac{v_{\infty}^2}{2} + \frac{\rho}{m} \varphi^{\infty} + p_{\infty} \right) &= \vec{0} \therefore \\ p_{\infty} = p_{\infty}^0 - \frac{\rho}{m} \varphi^{\infty} - \rho \frac{v_{\infty}^2}{2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

sendo  $p_{\infty}^0$  constante no *mainstream*. Para calcularmos a força que o fluido faz na esfera  $\vec{F}^{\infty}$ , utilizamos as equações (2.92) e (2.93):

$$\vec{F}^{\infty} = \frac{m}{\int_{VC} \rho dV} \left( \oint_{SC} \Pi^{\infty} \cdot \hat{n} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \vec{v}_{\infty} dV \right), \quad (3.40)$$

$$\Pi^{\infty} = [-\mathbf{1} p_{\infty} + \Gamma_{\infty} - \rho (\vec{v}_{\infty} \circ \vec{v}_{\infty})] \Big|_{SC}. \quad (3.41)$$

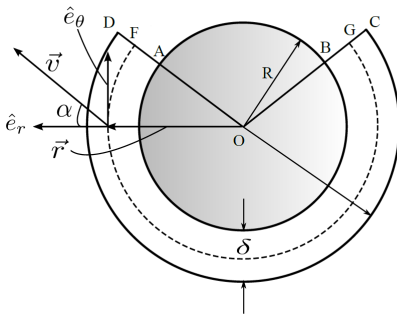


Figura 7: Desenho esquemático com os detalhes para integração no interior da camada-limite.

O termo dependente do tempo na equação (3.40) não pode ser retirado sob o mesmo argumento utilizado para o *mainstream*, pois a integral de volume que o contém em (3.41) será avaliada em região de turbulência dentro da camada limite, dada a iminência suposta da crise do arrasto, sendo que tal região de turbulência somente poderá ser considerada estacionária nos moldes da nota de rodapé 3 desta seção, i.e., sob condição de estacionariedade na média temporal feita

sobre o *ensemble*. Tendo isso em mente, que os cálculos serão feitos sobre a média temporal do *ensemble*, seguimos com nossos cálculos. Definiremos a superfície de controle *SC* como sendo a superfície *AFGBA* (*BA* em contato com o *wake*) esquematizada na figura 3.5. O volume de controle *VC* será o volume interno à superfície de controle *SC*. A turbulência estará instalada no volume *AFGBA* (*BA* em contato com a camada limite) da camada limite, sendo tal superfície uma vizinhança da superfície da esfera nessa região, de forma que as superfícies *BG* e *AF* estejam nas vizinhanças dos pontos de separação na iminência de satisfazer a condição de arrasto (3.18). Note-se a superfície *BG* esquematizada na figura 3.2 como interna à vizinhança de separação, onde os elementos de fluido estão sob condição suposta de anulamento de cisalhamento e de velocidade (o mesmo para *AF*, porém esta não esquematizada na figura 3.2). Estando os efeitos de cisalhamento confinados à superfície da esfera, pelo elevado valor do número de Reynolds (ainda que a turbulência esteja distribuída dentro da vizinhança da superfície de controle, o cisalhamento pode estar confinado somente à região superficial, i.e., pode haver baixo cisalhamento em *FG*, porém alto em *AB*, pelo que a turbulência em *FG* é propagada de *AB*, sendo a geração de turbulência relacionada ao alto gradiente de velocidade em *AB* na superfície, não havendo necessidade de um alto gradiente em *FG*, ainda que com turbulência em *FG*<sup>11</sup>) e pela desprezibilidade dos efeitos cisalhantes frente aos efeitos de pressão na su-

<sup>11</sup> Pode existir turbulência sem cisalhamento num fluido de Euler, por exemplo, pois é possível haver vorticidade em superfícies de separação com descontinuidade no campo de velocidades.

perfície de controle é lícito que se reescreva, pelas equações (3.40) e (3.41):

$$\vec{F}^\infty = \frac{m}{\int_{VC} \rho dV} \left\{ \oint_{SC} [-\mathbf{1}p_\infty - \rho (\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty)] \cdot \hat{n} dS \right\}. \quad (3.42)$$

A integral no denominador é simplesmente  $m + m_{CL}$ , ou seja, a soma das massas da esfera e da camada limite. Note-se que o tensor  $\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty$  anula-se na superfície  $BA$  em contato com o *wake*, pela condição de não-escorregamento, e na superfície de vizinhança dos pontos de separação ( $AF$  e  $GB$  na figura 3), pelo suposto anulamento da velocidade nessa vizinhança. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{m + m_{CL}}{m} \vec{F}^\infty = & - \left[ \int_{FG} + \int_{GB} + \int_{BA} + \int_{AF} \right] \mathbf{1}p_\infty \cdot \hat{n} dS + \\ & - \int_{FG} [\rho (\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty)] \cdot \hat{n} dS. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Como na vizinhança da superfície da esfera  $AFGBA$  ( $BA$  em contato com a camada limite) haverá turbulência, os elementos de fluido não serão mais tangenciais à superfície da esfera, donde não poderemos aplicar a equação (3.3), i.e., não poderemos dizer que o campo de pressões é o mesmo de  $CD$  dado pela equação (3.39)  $p_\infty^{DC} = p_\infty^0 - (\rho/m) \phi_{DC}^\infty - (\rho/2) v_\infty^2 (R + \delta, \theta)$ , com  $v_\infty (R + \delta, \theta)$  solução potencial dada por (3.35). Porém, como a região  $FGCDF$  será suficientemente laminar para que  $p_\infty'^{FG} \cong p_\infty'^{DC}$ , radialmente, (vide nota de rodapé 5), pois se sustentam as condições de validade de (3.3), teremos que haverá uma discrepância entre o campo de pressões efetivo na superfície  $AB$  em contato com a camada limite e o campo de pressões efetivo  $p'$  potencial (vide nota de rodapé 3.4)<sup>12</sup>. Como a nossa superfície de controle escolhida não passa pela região de discrepância do campo de pressões, não incorreremos em erro ao adotar a utilização de (3.3) na camada limite, pois será válida em GF. Temos que, pela nota de rodapé 5, por (3.39) e por (3.35):

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{m} \phi_{FG}^\infty + p_\infty^{FG} &= \frac{\rho}{m} \phi_{DC}^\infty + p_\infty^{DC} = \\ &= p_\infty^0 - \frac{\rho}{2} v_\infty^2 (R + \delta, \theta) = p_\infty^0 - \frac{9}{8} \rho (\dot{h}_\infty(t))^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.44)$$

<sup>12</sup>De fato tal discrepância existe (SMITH DAVID K. HILTON, 1999) (CHOI MICHAEL R. SMITH, ) (CONSTANTINESCU, 2004) (YEUNG, 2007), sendo tão menor quanto maior for o número de Reynolds.

$$p_{\infty}^{FG} = -\frac{\rho}{m} \varphi_{FG}^{\infty} + p_{\infty}^0 - \frac{9}{8} \rho (\dot{h}^{\infty}(t))^2 \sin^2 \theta. \quad (3.45)$$

O campo de pressões em *GBAF* (*BA* em contato com o *wake*) será constante, (SCHLICHTING, 1979) (CONSTANTINESCU, 2004)<sup>13</sup>, e pelo que já se encontra instalado o caos no *wake*, donde, ainda que por argumentação heurística, deve-se esperar uma homogeneidade de transferência de quantidade de movimento do *wake* para a esfera nessa região. Para calcular o campo de pressões nessa região, basta que calculemos o campo nas vizinhanças do ponto de separação. De acordo com o esquematizado na figura 3.2, e lá argumentado, a vizinhança de *S*, ponto de separação, tem cisalhamento nulo, sendo que aí valerá a equação de Euler. Os pontos *G* nas figuras 3.2 e 3.3 são os mesmos e estão numa região de descontinuidade suposta do campo de velocidades. Porém, na vizinhança de *G* externa à área hachurada da figura 3.2, onde a velocidade não é nula<sup>14</sup>, temos também cisalhamento nulo, por hipótese de confinamento do cisalhamento à superfície da esfera, dado o alto número de Reynolds e já anteriormente argumentado. Assim, a equação de Euler também seria válida nessa região vizinha do ponto *G*, porém externa à região hachurada da figura 3.2, externa à vizinhança do ponto de separação. Pela descontinuidade, há vorticidade em *G*. Assim a equação de Bernoulli seria válida somente ao longo de uma linha de corrente. Porém, se no momento da crise do arrasto, a vizinhança do ponto de separação que sai do equilíbrio mecânico pela condição (3.18) o fizer convectivamente segundo *SG*<sup>15</sup> na figura 3.2, o que parece ser uma aproximação geométrica plausível pela pequenez da vizinhança de *S*, mantendo-se o baixo cisalhamento e, portanto, a validade da equação de Euler, teremos que *SG* será uma linha de corrente, donde:

$$p_{\infty}^S + \rho \frac{F^{\infty}}{m} R \cos \theta_S = p_{\infty}^G + \rho \frac{F^{\infty}}{m} (R + \delta') \cos \theta_S + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (R + \delta', \theta_S) \Rightarrow$$

---

<sup>13</sup>Vide nota de rodapé 12.

<sup>14</sup>Pela desprezibilidade do cisalhamento nessa vizinhança externa de *G*, as lâminas do fluxo sul (escoamento abaixo da região de separação, na figura 3.2) e do fluxo norte (escoamento acima da região de separação, na figura 3.2) confinantes e em contato com a vizinhança de separação confinada escorregam por sobre esta região interna a *G*, região esta onde há repouso suposto para o fluido aí contido que perfaz a vizinhança de separação.

<sup>15</sup>O ponto *G* na figura 3.2 subirá com a sua lâmina de fluxo sul, quando do início da crise do arrasto, perfazendo com o ponto *S* a nova linha *SG* de crise do arrasto, nova linha esta esquematizada pela linha pontilhada que parte de *S*, na figura 3.2, até ponto de encontro do fluxo sul com o fluxo norte.

$$p_{\infty}^S \cong p_{\infty}^G + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (R + \delta', \theta_S), \quad (3.46)$$

pois  $\delta' \ll R$ , onde  $\delta'$  é a distância radial da superfície da esfera à superfície  $FG$ . Assim, por (3.45) e (3.46), o campo de pressões nas vizinhanças do *wake* ( $AB$  em contato com o *wake* no desenho 3.2) e do ponto de separação, quando da crise do arrasto, é dada por:

$$p_{\infty}^S = -\frac{\rho}{m} \varphi^{\infty} (R + \delta', \theta_S) + p_{\infty}^0 - \frac{9}{8} \rho (\dot{h}^{\infty}(t))^2 \sin^2 \theta_S + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (R + \delta', \theta_S). \quad (3.47)$$

Representando o campo quadrático de velocidades no interior da camada limite, campo médio temporal sobre o *ensemble*, por uma série de Fourier em  $r$ , pois interessa-nos o perfil quadrático de velocidades interno da superfície da esfera à borda da camada limite, para um dado  $\theta$ , e tendo em vista que, pelo alto número de Reynolds quando da crise do arrasto, é plausível se modelar tal perfil quadrático por uma função degrau, temos que:

$$\begin{aligned} v_{\infty}^2 (R + \delta', \theta) &= \frac{1}{2} (v_{\infty}^2 (R, \theta) + v_{\infty}^2 (R + \delta, \theta)) = \\ &= \frac{1}{2} v_{\infty}^2 (R + \delta, \theta) = \frac{9}{8} (\dot{h}^{\infty}(t))^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.48)$$

devido à condição de não-escorregamento e à equação (3.35). Assim, o campo de pressões nas vizinhanças do *wake* e do ponto de separação, por (3.48) e (3.47), é dado por:

$$\begin{aligned} p_{\infty}^S &= -\frac{\rho}{m} \varphi^{\infty} (R + \delta', \theta_S) + p_{\infty}^0 - \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^{\infty}(t))^2 \sin^2 \theta_S = \\ &= -\frac{\rho}{m} \varphi_{GBAF}^{\infty} + p_{\infty}^0 - \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^{\infty}(t))^2 \sin^2 \theta_S, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde  $GBAF$  é a região do *wake* em contato com a esfera mais a região vizinha ao ponto de separação. Em virtude da turbulência em  $FG$ , o campo de velocidades não será tangencial. Na figura 3.3 está esquematizado um elemento de fluido turbulento que atravessa essa superfície num instante arbitrário. Assim,

instantaneamente, antes de efetuarmos a média temporal sobre o *ensemble*, temos o campo turbulento em  $FG$ <sup>16</sup>:

$$\vec{v}_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) = v_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) (\cos \alpha(t) \hat{e}_r + \sin \alpha(t) \hat{e}_\theta). \quad (3.50)$$

Assim, a quantidade convectiva de quantidade de movimento que atravessa  $FG$ ,  $(\vec{v} \circ \vec{v})_{FG} \cdot \hat{n} = \vec{v}_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) (\vec{v}_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) \cdot \hat{n})$ , da equação (3.43), possui média temporal sobre o *ensemble*:

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v} \circ \vec{v})_{FG} \cdot \hat{n} \rangle_t &= (\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty) \cdot \hat{n} = \\ &= \langle v_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) (\cos \alpha(t) \hat{e}_r + \sin \alpha(t) \hat{e}_\theta) \times \\ &\times [v_{FG}(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) (\cos \alpha(t) \hat{e}_r + \sin \alpha(t) \hat{e}_\theta) \cdot \hat{e}_r] \rangle_t. \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v} \circ \vec{v})_{FG} \cdot \hat{n} \rangle_t &= (\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty) \cdot \hat{n} = \langle v_{FG}^2(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) \times \\ &\times (\cos^2 \alpha(t) \hat{e}_r + \cos \alpha(t) \sin \alpha(t) \hat{e}_\theta) \rangle_t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Assumindo ausência de memória, i.e., não-correlação entre o campo quadrático  $v_{FG}^2(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t)$  e o ângulo de ataque  $\alpha(t)$  à superfície  $FG$ , aleatoriedade dos ângulos de ataque de maneira que sejam equiprováveis os ângulos de ataque  $\alpha(t) \in [0; \pi]$ , temos que a média temporal sobre o *ensemble* para a quantidade convectiva de quantidade de movimento dada por (3.53) torna-se:

$$\langle (\vec{v} \circ \vec{v})_{FG} \cdot \hat{n} \rangle_t = (\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty) \cdot \hat{n} = \frac{1}{2} \langle v_{FG}^2(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) \rangle_t \hat{e}_r. \quad (3.53)$$

$\langle v_{FG}^2(\mathbf{R} + \delta', \boldsymbol{\theta}, t) \rangle_t$  é o perfil quadrático médio sobre o *ensemble* temporalmente, o qual foi repre-sentado por uma série de Fourier em  $r$  para um dado  $\boldsymbol{\theta}$

---

<sup>16</sup>Notemos que podemos tratar a média temporal do *ensemble*, quando da instalação da turbulência nas vizinhanças da esfera, até que a turbulência atinja a vizinhança do ponto de separação, quando, instantaneamente, pela condição (3.18), ocorre a crise do arrasto. Todos os cálculos médios sobre os ensambles temporais que temos feito são feitos na iminência da crise do arrasto, não quando da instalação da crise por (3.18).

na equação (3.48), aproximado, conforme lá o supusemos plausível, por uma função degrau, donde reescrevemos (3.53):

$$(\vec{v}_\infty \circ \vec{v}_\infty) \cdot \hat{n} = \frac{1}{2} v_\infty^2 (R + \delta', \theta) \hat{e}_r = \frac{9}{16} (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta \hat{e}_r. \quad (3.54)$$

Calculamos a força que o fluido faz na esfera utilizando os resultados obtidos em (3.45), (3.49) e (3.54) na equação (3.43):

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{m_{CL}}{m}\right) \vec{F}^\infty &= \int_{FG} \left( \frac{\rho}{m} \varphi_{FG}^\infty - p_\infty^0 + \frac{9}{8} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta \right) \hat{e}_r dS + \\ &+ \int_{GBAF} \left( \frac{\rho}{m} \varphi_{GBAF}^\infty - p_\infty^0 + \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta_S \right) \hat{n} dS + \\ &- \int_{FG} \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta \hat{e}_r dS = \frac{\rho}{m} \oint_{SC} \varphi^\infty \hat{n} dS - p_\infty^0 \oint_{SC} \hat{n} dS + \\ &+ \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \int_{FG} \sin^2 \theta \hat{e}_r dS + \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta_S \int_{GBAF} \hat{n} dS = \\ &= \frac{\rho}{m} \int_{VC} \vec{\nabla} \varphi^\infty dV - p_\infty^0 \int_{VC} \vec{\nabla} (1) dV + \\ &+ \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \int_{\theta=\theta_S}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin^2 \theta (\sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \\ &+ \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) (R + \delta')^2 \sin \theta d\theta d\phi + \\ &+ \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta_S \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_S} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} (\sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \\ &+ \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) R^2 \sin \theta d\theta d\phi + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{9}{16} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^2 \theta_S \int_{r=R}^{r=R+\delta'} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} (-\cos \theta_S \cos \phi \hat{e}_x + \\
& \quad - \cos \theta_S \sin \phi \hat{e}_y + \sin \theta_S \hat{e}_z) r \sin \theta_S dr d\phi = \\
& = \frac{\rho}{m} \int_{VC} \vec{F}^\infty dV + \frac{9\pi}{8} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 (R + \delta')^2 \hat{e}_z \int_{\theta=\theta_S}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta + \\
& \quad + \frac{9\pi}{8} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 R^2 \sin^2 \theta_S \hat{e}_z \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_S} \sin \theta \cos \theta d\theta + \\
& \quad + \frac{9\pi}{8} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 \sin^4 \theta_S \hat{e}_z \int_{r=R}^{r=R+\delta'} r dr = \\
& = \text{Empuxo} + \frac{m_{CL}}{m} \vec{F}^\infty + \frac{9\pi}{32} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 R^2 \sin^4 \theta_S \hat{e}_z \therefore \\
& \quad \vec{F}_a = \frac{9\pi}{32} \rho (\dot{h}^\infty(t))^2 R^2 \sin^4 \theta_S \hat{e}_z, \tag{3.55}
\end{aligned}$$

pois  $\vec{F}^\infty/m = -\vec{g}$  quando de velocidade limite (estacionário) e  $\delta' \ll R$ , onde  $\vec{F}_a$  é a força puramente viscosa exercida pelo fluido na esfera, a que queríamos calcular. Para finalizar, calculemos o coeficiente de arrasto  $C_D$  no momento da crise do arrasto:

$$C_D = \frac{2F_a}{\pi \rho R^2 (\dot{h}^\infty(t))^2} = \frac{9}{16} \sin^4 \theta_S = \frac{9}{16} \sin^4 (70,4^\circ) = 0,44, \tag{3.56}$$

parecendo estar em excelente concordância com a experiência (CHOI MICHAEL R. SMITH, ) (SMITH DAVID K. HILTON, 1999) (CHOI WOO-PYUNG JEON, 2006).

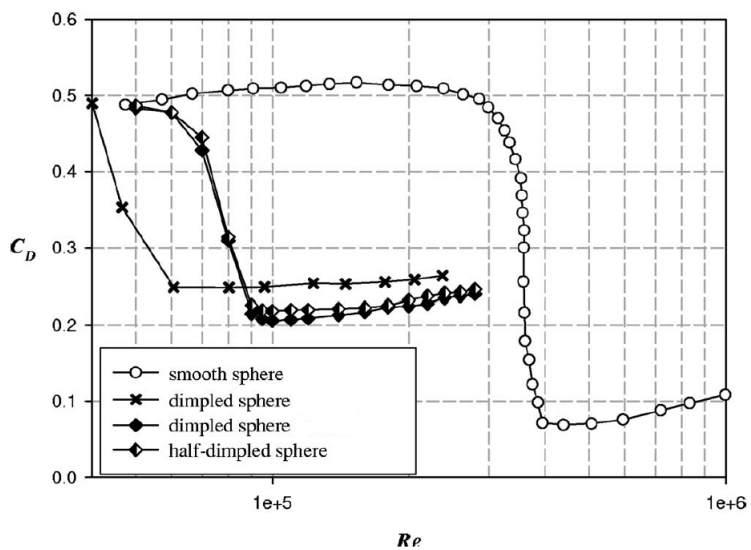


Figura 8: Crise do Arrasto: redução brusca do coeficiente de arrasto. O caso aqui investigado refere-se à esfera lisa (círculos abertos) (CHOI WOO-PYUNG JEON, 2006).

## 4 CONCLUSÕES

No que concerne ao modelo estabelecido neste trabalho para a crise do arrasto, concluimos que o mesmo fornece, de primeiros princípios, ainda que também tecidos sob considerações heurísticas fundamentadas em resultados experimentais aqui citados: a obtenção da dependência funcional da força de arrasto para regimes de escoamento sob altos números de Reynolds como quadrática na velocidade, expressão esta inexistente em toda a literatura exaurida, bem como inexistente em trabalhos já publicados sobre hidrodinâmica, estabelecendo, assim, originalidade ao resultado. A concordância excelente entre os resultados teóricos aqui obtidos e os experimentais é ratificada pela previsão teórica que aqui se fez para o coeficiente de arrasto no momento da crise.



## REFERÊNCIAS

- A., M. J. C. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Primeira. [S.l.]: Springer, 1993.
- ACHENBACH, E. *Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers*. [S.l.]: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 54, pages 465-475, 1972.
- CHOI MICHAEL R. SMITH, S. W. V. S. Y. S. The temperature dependent drag crisis on a sphere in flowing helium ii. *National High Magnetic Field Laboratory*.
- CHOI WOO-PYUNG JEON, H. C. J. Mechanism of drag reduction by dimples on a sphere. *Physics of Fluids*, v. 18, p. 041702/01–041702/04, 2006.
- CONSTANTINESCU, K. S. G. Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical and supercritical regimes. *Physics of Fluids*, v. 16, n. 5, p. 1449–1465, 2004.
- LADYZHENSKAYA, O. *The mathematical theory of viscous incompressible flow. Mathematics and its Appl, Vol.2*. Segunda. [S.l.]: Gordon and Breach, New York-London-Paris. English Edition.
- LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. *Course of Theoretical Physics, Vol.6*. Segunda. [S.l.]: Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt, 1959. English Edition. 536 pp.
- SCHLICHTING, H. *Boundary-Layer Theory*. Segunda. [S.l.]: McGraw-Hill Books, 1979. English Edition.
- SMITH DAVID K. HILTON, S. W. V. S. M. R. Observed drag crisis on a sphere in flowing he i and he ii. *Physics of Fluids Letters*, v. 11, n. 4, p. 751–753, 1999.
- V.I., K. B. A. *Topological methods in hydrodynamics, Applied Mathematical Sciences*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 1998.
- WU CHIH-YUNG WEN, R.-H. Y. M.-C. W. A.-B. W. M.-H. Experimental and numerical study of the separation angle for flow around a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 515, p. 233–260, 2004.

YEUNG, W. Similarity study on mean pressure distributions of cylindrical and spherical bodies. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v. 95, p. 253–266, 2007.