# Numeros felizes e sucessoes de Smarandache: digressoes com o Maple

## by Delfim F.M. Torres


Resumo

Dando jus a matematica experimental, mostramos como o Maple pode ser usado na investigacao matematica de algumas questoes actualmente sem resposta na Teoria dos Numeros. A tese defendida e que os alunos de um curso de Matemetica podem facilinente usar o computador como um lunar onde se excites e exercita a imaginacao.


1 Introducao


**Related Results**

- On the Smarandache sequences
- On the hybrid mean value of the Smarandache kn-digital sequence and...
- Connectivity of Smarandachely line splitting graphs
- Infinite Smarandache groupoids
- Smarandache's ratio theorem


Albert Einstein e conhecido por to dito que "a imaginaqcao e mais importante que o conhecimento". Se assim e, porque esperar pelo mestrado ou doutoramento para comecar a enfrentar problemas em aberto? Nao e a criatividade prerrogativa dos mais novos? Em [3] mostrei como com muito pouco conbecimento e possivel debrucar-mo-nos sobre algumas questoes actualmente sem resposta na Teoria de Computacao. Aqui, e a proposito do ano 2003 ter sido escolhido pela APM como o ano da Matematica e Tecnologia, vou procurar mostrar como o computador e um ambiente moderno de computacao algebrica, como seja o Maple, podem ser excelentes auxiliares ua abordagem a "quebra-cabecas" que a matematica dos numeros actualmente nos coloca. A minha escolha do sistema Maple prende-se com o facto de ser este o programa informatico actualmente usado ua cadeira de Computadores no Ensino da Matematica, no Departamento de Matematica da Universidade de Aveiro. Desta maneira os meus alunos serao prova viva de que basta um semestre de "tecnologias na educacao matematica", para nos podermos aventurar por "mares ainda nao navegados". O leitor que queira aprender sobre o Maple podera comecar por consultar o nosso site de Computadores no Ensino da Matematica: http://webct.ua.pt/public/compensmat/index.html.> 2 Numeros felizes

Seja n [elemento de] [??] um numero natural com representacao decimal n = [d.sub.k] ... [d.sub.0], 0 [menor que o igual a] di [menor que o igual a] 9 (i = 0,..., k), e denotemos por [sigma](n) a soma dos quadrados dos digitos decimais de n: [sigma](n) = [[suma].sup.ksub.i=0][([d.sub.i]).sup.2]. Dizemos que n e um numero feliz se existir um r [elemento de] [??] tal [EXPRESSION MATEMATICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII.](n) = 1. Por exemplo, & e um numero feliz (r = 5), r vszss

[sigma](7) = 49, [sigma](49) = 97, [sigma](97) = 130, [sigma](130) = 10, [sigma](10) = 1;

enquanto 2 nao:

[sigma](2) = 4, [sigma](4) = 16, [sigma](16) = 37, [sigma](37) = 58, [sigma](58) = 89, [sigma](89) = 145, [sigma](145) = 42, [sigma](42) = 20, [sigma](20) = 4 ...

Vamos definir em Maple a funcao caracteristica Booleana dos numeras felizes. Comecamos por definir a funcao digitos que nos devolve a sequencia de digitos de uma dado numero n

```
> digitos := a -> seq(iquo(irem(n,10^i),10^(i-1)),i=1..length(n)):
> digitos(12345);
```

```
                              5, 4, 3, 2, 1
```

A funcao [sigma] e agora facilmente construida

```
> sigma := n -> add(I^2,i=digitos(n)):
> sigma(24);
```

```
                                   20
```

O processo de composicao da funcao [sigma] e obtido usando o operador @ do Maple:

```
> s :- (n,r) -> seq((sigma(@@i) (n), i=1..r):
> s(7,5);
```

```
                           49, 97, 130, 10, 1
```

```
> s(2,9);
```

```
                    4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4
```

Para automatizarmos o proc.-so de decisao se um numero e feliz ou nao, recorremos a alguma programacao. O seguinte procedimento dove ser claro.

```
> feliz := proc(n)
>   local L, v:
>   L := {}:
>   v := sigma(n):
>   while (not (member(v,L) or v=1)) do
>     L := L union {v}:
>     v := sigma(v):
>   end do:
>   if (v = 1) then true else false end if:
> end proc:
```

Podemos agora questionar o sistema Maple acerca da felicidade de um determinado numero.

```
> feliz(7) ;
                              true
> feliz(2) ;
                              false
```

A lista de todos os numeros felizes ate 100 e dada por

```
> select(feliz,($1..100]);
            [1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31, 32, 44, 49, 68, 70, 79, 82,
             86, 91, 94, 97, 100]
```

Concluimos entao que existem 20 numeros felizes de entre os primeiros 100 naturais

```
> nops(select(feliz,[$1..100]));
                                      20
```

Existem 143 numeros felizes nao superiores a 1000; 1442 nao superiores a 10000; e 3038 nao superiores a 20000:

```
> nops(select(feliz,[$1..1000]));
                                      143
> nops(select(feliz,[$1..10000]));
                                      1442
> nops(select(feliz,[$1..20000]));
                                      3038
```

Estas ultimas experiencias com o Maple permitem-nos formular a seguinte conjectura.

Conjectura 1. Cerca de um setimo de todos os numeros sao felizes.

Uma questao iuteressante e estudar numeros felizes consecutivos. De entre os primeiros 1442 numeros felizes podemos encontrar 238 pares de numeros felizes consecutivos (o mais pequeno e o (31,32));

```
> felizDezMil := select(feliz,[$1..10000]):
> nops(select(i->member(i,felizDezMil) and
                    member(i 1,felizDezMil),felizDezMil));
                                       238
```

onze ternos de numeros felizes consecutivos, o mais pequeno dos quais e o (1880,1881,1882);

```
> select(i->member(i,felizDezMil) and
            member(i 1,felizDezMil) and
            member(i 2,felizDezMil),felizDezMil);

         [1880, 4780, 4870, 7480, 7839, 7840, 8180, 8470, 8739,
         8740, 8810]
```

dois quaternos de numeros felizes consecutivos, o mais pequeuo dos quail e o (7839, 7840, 7841, 7842);

```
> se1ect(i->member(i,felizDezMil) and
            member(i 1,felizDezMil) and
            member(i 2,felizDezMil) and
            member(i 3,felizDezMil),felizDezMil);

                          [7839, 87391
```

e nenhuma sequencia de cinco numeros felizes consecutivos.

```
> select(i->member(i,felizDezMil)   and
            member(i 1,felizDezMil) and
            member(i 2,felizDezMil) and
            member(i 3,felizDezMil) and
            member(i 4,felizDezMil),felizDezMil);
```

Sabf-se que a primeira sequencia de cinco numeros felizes consecutivos comeca com O 44488.

```
feliz(44488) and feliz(44489) and feliz(44490) and
                 feliz(44491) and feliz(44492);

                                true
```

E tambem conhecida uma sequencia de 7 numeros felizes consecutivos, que comeca com o numero 78999999999999959999999996 (vide [4]).

3 Sucessoes de Smarandache

Dada uma sucessao de inteiros {[u.sub.n]), a correspondente sucessao de Smarandache {[s.sub.n]} e definida por concatencao de inteiros como se segue:

[s.sub.1] = [u.sub.1], [s.sub.2] = [u.sub.1][u.sub.2],..., [s.sub.n] = [u.sub.1] ... [u.sub.n], ...

Fstamos interesados na sucessao de Smarandache associada aos numeros felizes. Os primeiros elementos desta sucessao sao:

1, 17, 1710, 171013, 17101319, 1710131923, 171013192328, 17101319232331, ...

Comecamos por implementar a concatenacao de inteiros em Maple.

```
> conc :- (a,b) -> a*10^length(b) b:
```

```
> conc(12,345);
```

```
12345
```

Formando a lista dos numeros felizes ate um certo n, e usando a funcao conc acima definida, a correspondents sucessao de Smarandache e facilmente obtida.

```
> sh := proc(n)
>     local L, R, i:
>     R := array(1..nops(L),L):
>     for i from 2 by 1 while i < = nops(L) do
>       R[i] := conc(R[i-1],L[i]):
>     end do:
>     return(R):
> end proc:
```

Como

```
> select(feliz,[$1..31]);
```

```
[1, 7, 10, 13, 19, 23, 28, 31]
```

os primeiros 8 valores da sucessao de Smarandache sao entao

```
> print(sh(31));
```

```
[1, 17, 1710, 171013, 17101319, 1710131923, 171013192328,
17101319232831]
```

Existem muitas quastoes em aberto associadas a sucessao de Smarandache dos numeros felizes (vide [2]). Umas dizem respeito a existencia de numeros primos na sucessao; outras a existencia de numeros felizes. Facamos agora alguma investigacao a este respeito. Usando o Maple e facil concluir que de entre os primeiros 143 termos da sucessao de Smarandache dos numeros felizes, apenas 3 sao primos.

```
> primos := select(isprime,sh(1000)):
> nops([seq(primos[i],i=1..143)]);
```

```
3
```

Se fizermos print (primos) vemos que os tres primos sao [s.sub.2] = 17, [s.sub.5] = 17101319 e [s.sub.43] ([s.sub.43] e um primp com 108 digitos decimais).

```
> primos [2] , primos (5);
```

```
17, 17101319
```

```
> length(primos[43]);
```

```
108
```

Apenas sao conhecidos estes numbers primos na sucessao de Smarandache dos numeros felizes. Permanece por esclarecer se eles serao ou nao em numero finito (vide [1]).

Existem 31 numeros felizes de entre os primeiros 143 termos da sucessao de Smarandache dos numbers felizes:

```
> shFelizes := select(feliz,sh(1000)):
> nops([seq(shFelizes[I],i=1..143)]);
```

```
                                31
```

Recorrendo ao comando print (shFelizes) vemos que esses numeros sao o [s.sub.1], [s.sub.11], [s.sub.14], [s.sub.30], [s.sub.31], [s.sub.35], [s.sub.48], [s.sub.52], [s.sub.58], [s.sub.62], [s.sub.67], [s.sub.69], [s.sub.71], [s.sub.76], [s.sub.77], [s.sub.78], [s.sub.82], [s.sub.83], [s.sub.85], [s.sub.98], [s.sub.104], [s.sub.108], [s.sub.110], [s.sub.114], [s.sub.115], [s.sub.117], [s.sub.118], [s.sub.119], [s.sub.122], [s.sub.139] e [s.sub.140]. A titulo de curiosidade, [s.sub.140] tem 399 digitos:

```
   > length(shFelizes[140]);
```

```
                                399
```

Muito existe por esclarecer relativamente a existencia de numeros felizes consecutivos na sucessao de Smaraudache dos numeros felizes. Olhando para os resultados anteriores vemos que o par mais pequeno de numeros felizes consecutivos e o ([s.sub.30], [s.sub.31]); enquanto o terno mais pequeno e o ([s.sub.76], [s.sub.77], [s.sub.78]). Quantos termos consecutivos sao possiveis? E capaz de encontrar exemplos, digamos, de seis numeros felizes consecutivos? Estes e outras questoes estao em aberto (vide [1]). Ferrarmentas como o Maple sao boas auxiliares neste tipo de investigacoes. Fico a espera de algumas respostas da sua parte.