

Moto:” O nouă idee vine din comparația a două lucruri  
ce n-au fost comparate încă ” Cl. A. Helvetius

## **NOU ÎN GEOMETRIA SACRĂ JAPONEZA :**

### **TEOREMA ȘI A BISECTOARELOR UNUI PATRULATER INSCRIPTIBIL ȘI TEOREMELE ȘI ALE TRIUNGHIULUI**

#### **1. INTRODUCERE LA PROBLEMELE SANGAKU :**

O scurta istorie de pe **Wikipedia** despre **Sangaku** sau **San Gaku** arată că, din anul 1639 și până la 1854, Japonia a trăit în strictă izolare auto-impusă de către Occident. Accesul la toate formele de cultură occidentale a fost suprimat, iar afluxul de idei occidentale științifice a fost efectiv redus.

În această perioadă de izolare, a apărut în Japonia un fel de matematică nativă înfloritoare.

Acest **Sangaku** este un cuvânt care înseamnă literal **comprimate/tăblițe matematice**, și au fost acte de omagiu aduse unui spirit director creator.

**Sangaku** sau **San Gaku** sunt puzzle-uri japoneze geometrice în geometria euclidiană, scrise pe tablete de lemn, sau de bronz, care au fost dedicate altarului **Shinto** în timpul perioadei **Edo** (1603-1867) de către membrii tuturor claselor sociale, evident, adepții ai matematicii: samurai, comercianți și agricultori.

**Sangaku** au fost pictate în culori pe tablete de lemn și spânzurate/atârinate în incinta templelor budiste și ale altarelor **Shinto** ca ofrande aduse zeilor sau, ca provocări pentru credincioși sau public ca probleme/întrebări de rezolvat: **Rezolvă aceasta dacă poți!**

Multe dintre aceste comprimate s-au pierdut în cursul perioadei de modernizare, care a urmat perioada **Edo**, dar cam de 900 au rămas cunoscute până în zilele noastre.

Olandez japanologist **Isaac Titsingh** a introdus târziu, pentru prima dată **Sangaku** spre vest, atunci când s-a întors în Europa în anii 1790, după mai mult de douăzeci de ani în Extremul Orient.

În această perioadă, Japonia a aplicat reguli stricte pentru comerț și în relațiile externe pentru țările vestice, astfel încât comprimatele/tablețele au fost create folosind matematica japoneză, (wasan), dezvoltată în paralel cu matematica occidentală. De exemplu, legătura fundamentală între o parte integrantă și derivata ei au fost necunoscute, astfel încât problemele **Sangaku** privind ariile și volumele au fost rezolvate de ei prin extinderi/dezvoltări în serie infinită și calculate termen cu termen.

Japanese Temple Geometry Problem

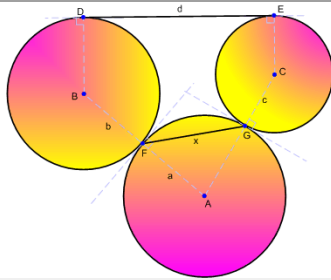
# 算額

SANGAKU



# 和算の館®

創業平成八丙子歳

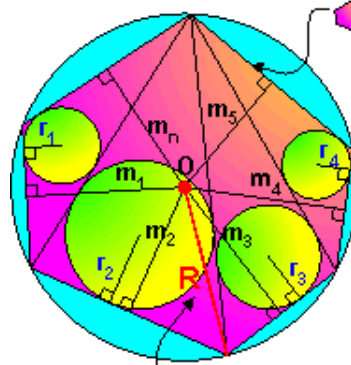
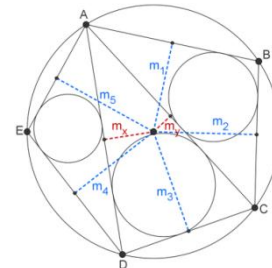
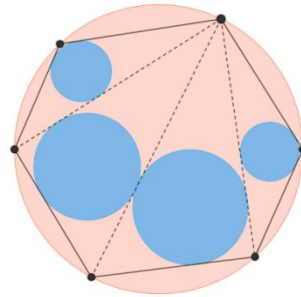
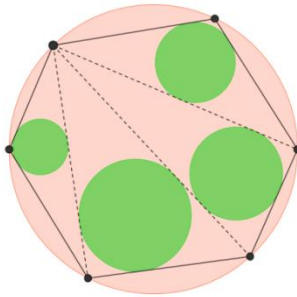
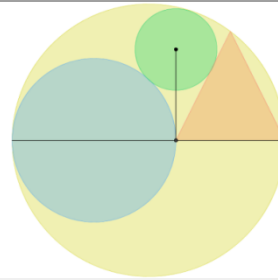


**Hypothesis**  
D, E, F, G: tangency points  
a, b, c: radii  
d: exterior tangent

To Prove:

$$x^2 = \frac{a^2 \cdot d^2}{(a+b)(a+c)}$$

© Antonio Gutierrez  
www.gogeometry.com



convex inscribed polygon  
n sides

(n-2) triangles  
irradii:  $r_1, r_2, \dots, r_{(n-2)}$

To Prove:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{(n-2)} = m_1 + m_2 + \dots + m_n - (n - 2)R$$

R: circumradius  
O: circumcenter

Fig. 1,a Ilustrații Wikipedia ș.a. la prima teoremă japoneză SANGAKU - Mikami-Kobayachi

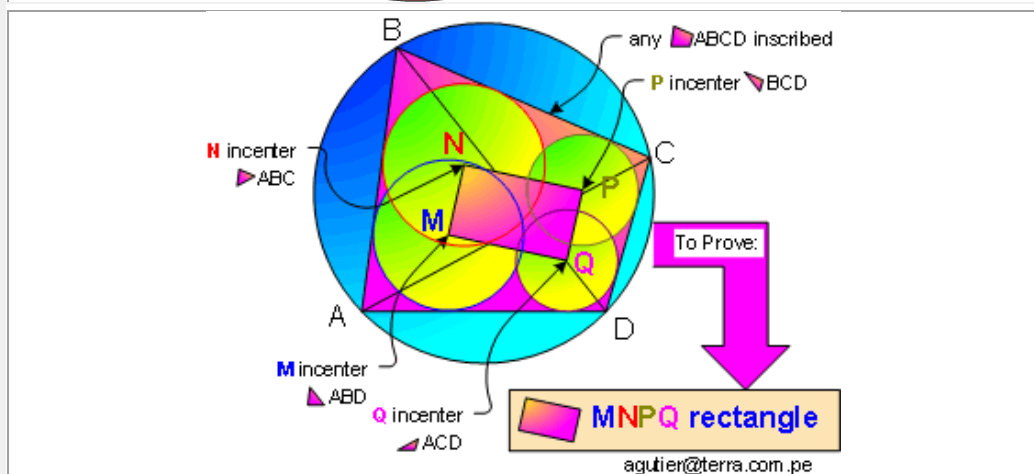
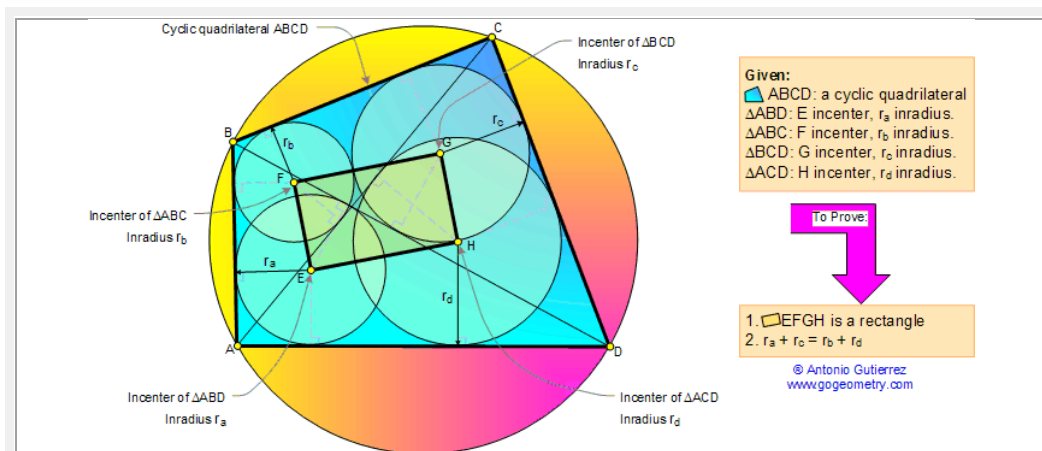


Fig. 1,b Ilustrații la a doua teoremă japoneză SANGAKU - Mikami-Kobayachi

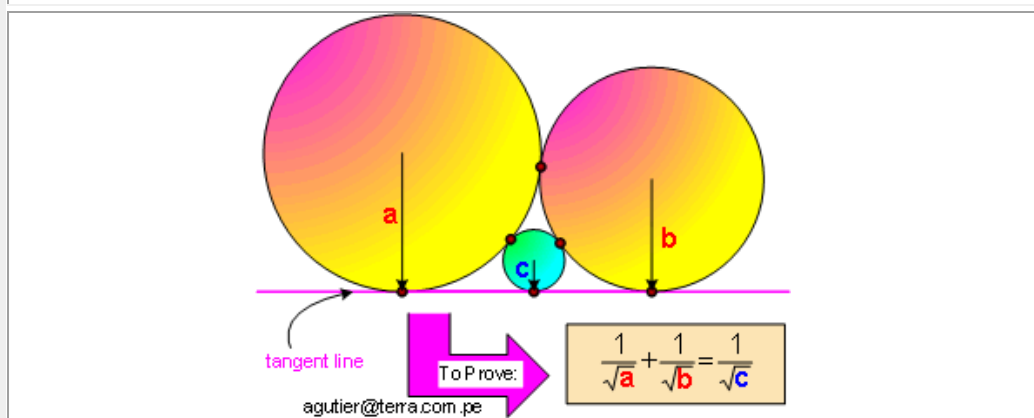


Fig. 1c Ilustrații la a treia teoremă japoneză SANGAKU

Problemele sunt izbitor de diferite de cele găsite, în mare, la un curs tipic de geometrie școală. Cercuri și elipse joacă aici un rol mult mai proeminent decât în probleme din Vest: cercuri se transformă în elipse, elipsele în cercuri. Unele dintre exerciții sunt destul de simple și ar putea fi rezolvate de către studenții din primii ani de studii. Altele sunt aproape imposibil de rezolvat și în geometria modernă sunt abordate în mod invariabil cu metode avansate, inclusiv prin calculule și transformări afine.

## 2 TEOREMELE Ș A BISECTOARELOR UNUI PATRULATER CONVEX INSCRIPTIBIL OARECARE

**Sangaku** sau **San Gaku**, o teoremă veche japoneză, prevede că centrele cercurilor  $O_A, O_B, O_C, O_D$ , înscrise în cele patru triunghiuri definite, fiecare, de către 2 laturi și câte o diagonală a patrulaterului înscritibil  $ABCD$ , sunt cele patru vârfuri ale unui dreptunghi (Fig.2). Se va denumi acest patrulater regulat **dreptunghi Sangaku**.

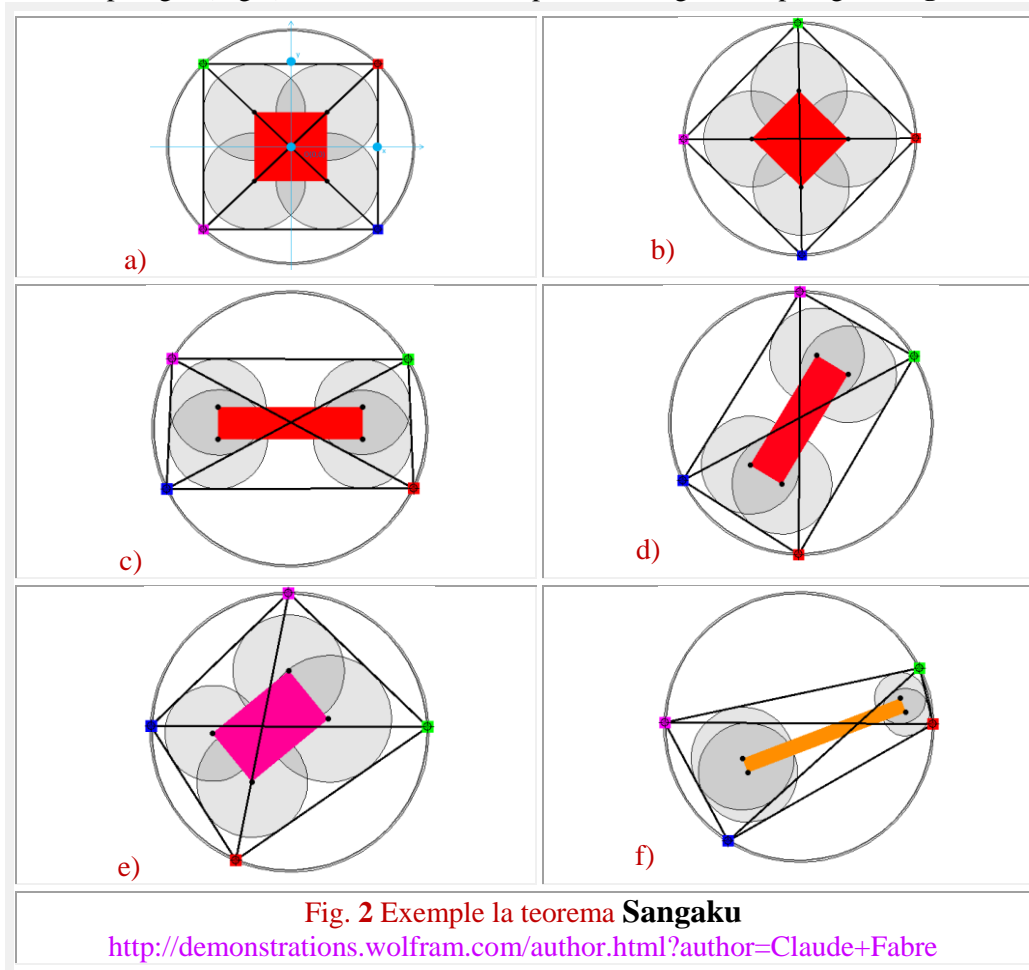


Fig. 2 Exemple la teorema Sangaku

<http://demonstrations.wolfram.com/author.html?author=Claude+Fabre>

În **Wikipedia**, această teoremă este denumită ca fiind a doua teoremă **Mikami-Kobayashi**.

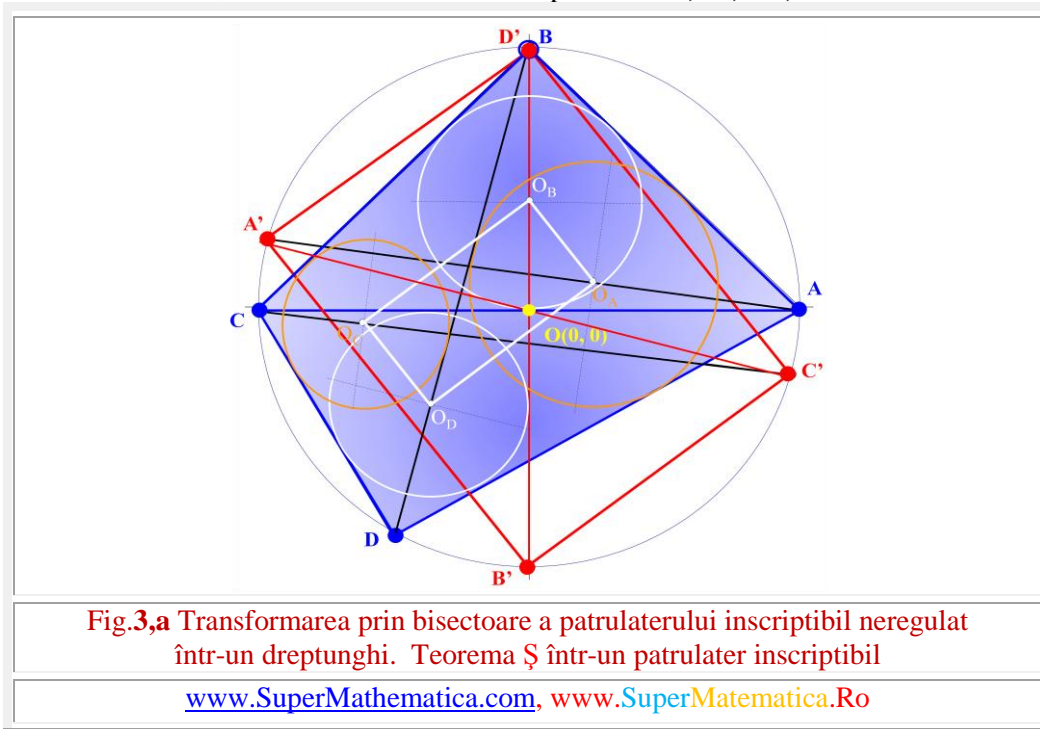
Transformarea unui patrulater inscriptibil neregulat într-un patrulater regulat (dreptunghi **Sangaku**) se va denumi în continuare **transformare Sangaku**.

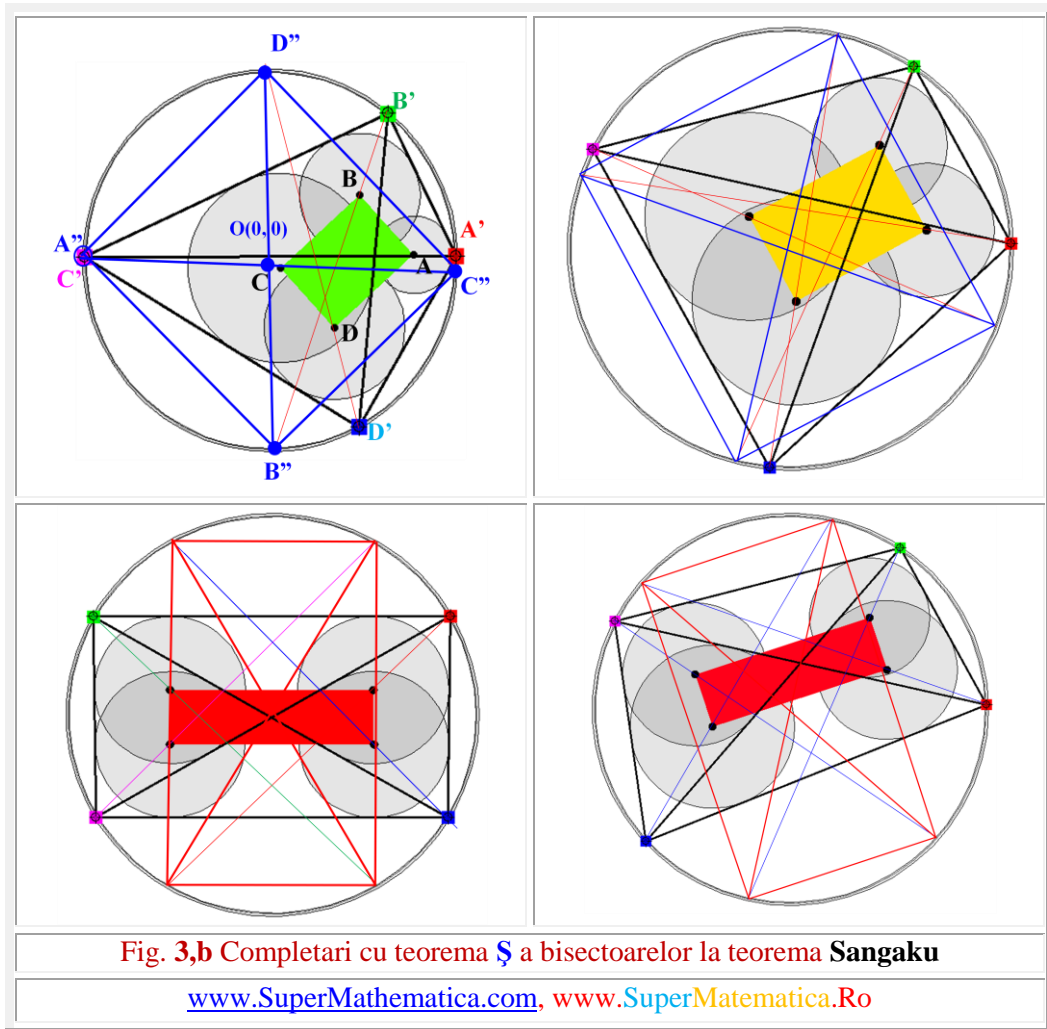
Deoarece, această teoremă este de negăsit în literatura matematică românească, redăm textul ei și în limba engleză : ” The **Sangaku** (old Japanese theorem) states that the centers of the incircles of the four triangles defined by the sides and the diagonals inside any concyclic quadrilateral are vertices of a rectangle”, dată de **Claude Fabre** în **Wolfram Demonstrations Project**, împreună cu exemplele din figura 2.

În figura 2,a și 2,b se observă că pătratele, evident inscriptibile, au centrele **O** tot în vârfurile unui pătrat cu laturile paralele cu ale patrulaterului inițial. La fel și pentru dreptunghiurile din figura 2,c și 2,d care au centrele cercurilor **O** tot în vârfurile unui dreptunghi, cu laturile paralele cu ale dreptunghiului inscriptibil inițial.

Cazurile cu adevărat interesante sunt cele prezentate în figurile 2,e și 2,f, în care, sunt prezentate patrulaterul inscriptibile convexe oarecare, a căror centre ale celor 4 cercuri tangente sunt vârfurile unor dreptunghiuri.

Din teorema **Sangaku sau San Gaku**, sau, poate, a doua teoremă **Mikami-Kobayashi**, se reține că centrele cercurilor, fiind tangente la două laturi adiacente în vârfurile patrulaterului, se situează pe bisectoarea din vârful respectiv . Prolungind aceste bisectoare, ele vor intersecta cercul în punctele **A', B', C', D'**.





**Teorema § a bisectoarelor** unui patrulater convex inscriptibil oarecare / neregulat susține că:

- *punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor duse din vârfurile oricărui patrulater convex inscriptibil, neregulat sau regulat, sunt vârfurile unui dreptunghi § inscriptibil în același cerc, având laturile paralele cu ale dreptunghiului Sangaku.*

Ca urmare

- *Diagonalele dreptunghiului se intersectează în centrul cercului circumscris patrulaterului și, evident, dreptunghiului în același timp.*
- *Diagonalele dreptunghiului § sunt paralele cu perpendicularele duse din cele patru centre ale cercurilor pe diagonalele patrulaterului inițial (dat).*

- Apare o transformare  $\mathcal{S}$ , pe care o denumim **prin bisectoarele unghiurilor**, a unui patrulater inscriptibil oarecare într-un dreptunghi înscris în același cerc, asemănătoare cu transformarea **Sangaku**.

În figura 3,a este prezentat patrulaterul inscriptibil neregulat **ABCD** și punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor din vârfurile patrulaterului cu cercul în care este înscris patrulaterul, puncte de intersecție notate cu **A', B', C', D'**.

În aceeași figură 3,a este prezentată, pentru comparație, și construcția cercurilor tangente din teorema **Sangaku**. Totodată, se poate observa, astfel, că noua teoremă  $\mathcal{S}$  a bisectoarelor unui patrulater inscriptibil este o prelungire/ extensie sau o completare a teoremei **Sangaku**.

În figura 3,b s-au folosit demonstrațiile lui **Claude Fabre**, cu privire la teorema **Sangaku**, care au fost completate cu ilustrarea teoremei  $\mathcal{S}$  a bisectoarelor într-un patrulater, pentru a reliefa, mai pregnant, cele anterior afirmate.

### 3.TEOREMA $\mathcal{S}$ A BISECTOARELOR UNUI TRIUNGHI SCALEN

În geometrie, una dintre teoremele bisectoarei susține că

- Bisectoarea unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile unghiului adiacente în vârful triunghiului din care s-a dus bisectoarea.

Considerând triunghiul **ABC** cu laturile **a, b, c**, din figura 4,a, bisectoarea unghiului din vârful **A** împarte latura **a** în segmentele **a<sub>1</sub>** și **a<sub>2</sub>**. Atunci, conform acestei teoreme, rezultă raportul

$$(1) \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c}{b}$$

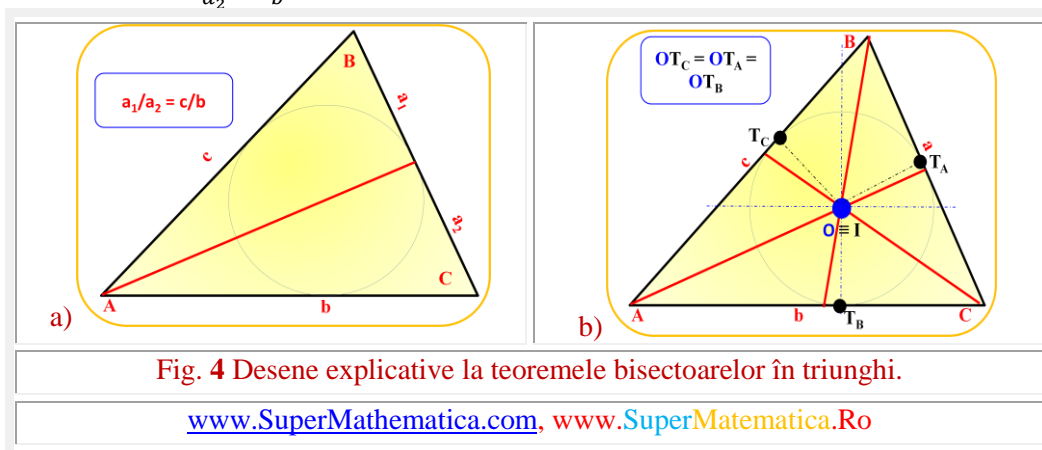


Fig. 4 Desene explicative la teoremele bisectoarelor în triunghi.

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)

O alta teoremă a bisectoarelor într-un triunghi afirmă că:

- Bisectoarele sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghi, conform reciprocei teoremei lui **Ceva** și, ca urmare,

- Orice punct de pe bisectoarea se află la egală distanță de laturile unghiului care sunt adiacente în vârful triunghiului din care s-a dus bisectoarea (Fig. 4,b).

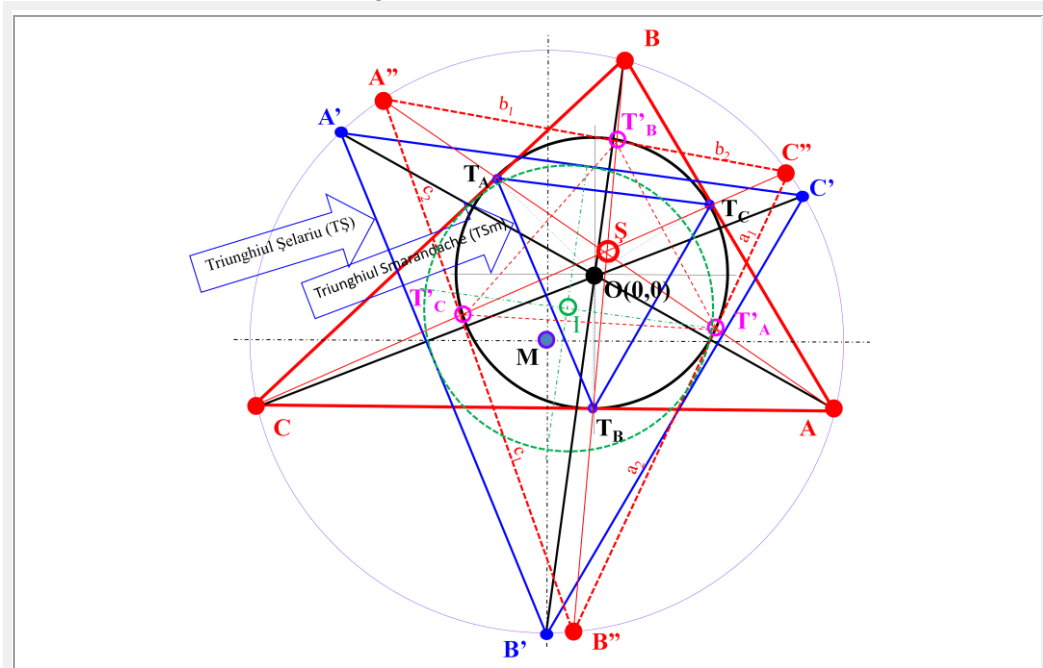


Fig. 5,a Schița explicativă pentru demonstrarea teoremei ȘC a bisectoarelor într-un triunghi scalen

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)

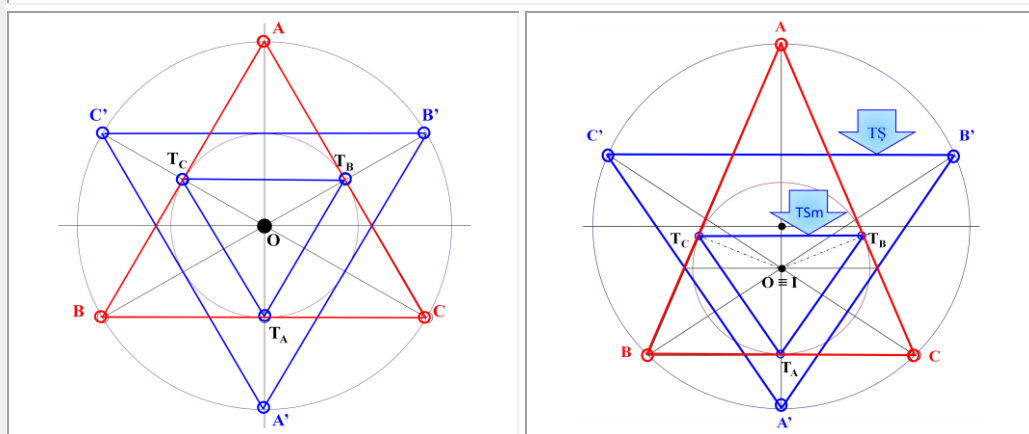


Fig. 5,b Triunghiurile Sm și ȘC în triunghiurile ABC echilateral ◀ și isoscel ▶

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)



Existând mai multe teoreme cu privire la bisectoarele unui triunghi, prezenta teoremă a fost denumită **teorema Ș a bisectoarelor**, pentru a se distinge de celelalte și, justificat, pentru a aminti de autorul ei.

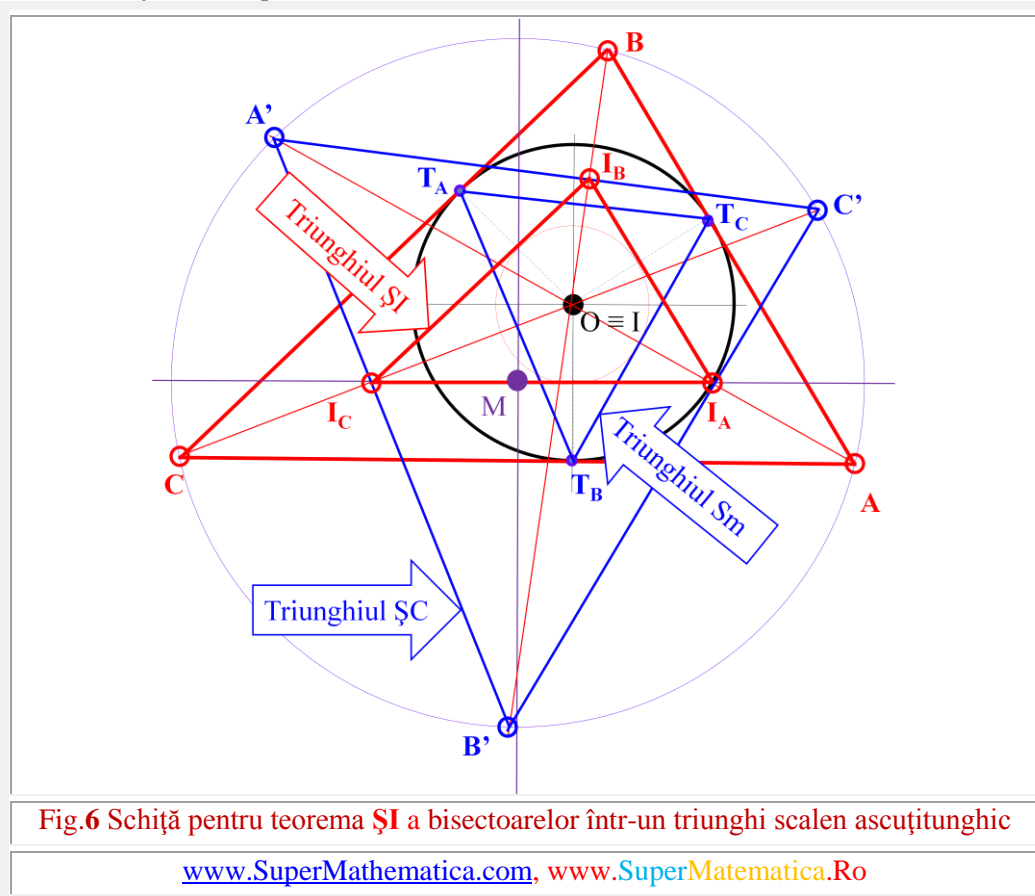


Fig.6 Schiță pentru teorema ȘI a bisectoarelor într-un triunghi scalen ascuțitunghic

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)

Pentru a putea enunța această teoremă, trebuie amintit că pe baza teoremei liniilor concurente într-un poligon înscrisibil, a lui **Florentin Smarandache** [3], liniile care unesc punctele de tangentă ale cercului înscris în poligon, în cazul de față un triunghi, au fost denumite [4], [5] **linii Smarandache (LSm)**, iar triunghiul a căror laturi sunt aceste segmente de dreaptă a fost denumit **triunghi Smarandache (TSm)**.

Fie **ABC** triunghiul scalen înscris în cercul **CC(M, R)** și **CI(O, r)** cercul înscris în triunghiul **ABC**.

Bisectoarele unghiurilor din vârfurile **A, B** și **C** ale triunghiului **ABC** intersectează cercul **CC** în punctele **A', B'** și, respectiv, **C'**. Triunghiul **A' B' C'** se va denumi **triunghi Ș circumscris (TȘC)** de cercul **CC(M, R)**.

**Teorema ȘC a bisectoarelor** într-un triunghi scalen stipulează că:

- *Punctele de intersecție **A', B', C'** ale bisectoarelor unui triunghi **ABC** cu cercul **CC(M, R)** circumscris triunghiului **ABC**, formează un **triunghi Ș circumscris ȘC** ( $A'B'C' \equiv TȘC$ ), în același cerc **CC(M, R)***

ca și triunghiul  $ABC$ , asemnenea cu triunghiul *Smarandache* ( $T_A T_B T_C = TSm$ ), definit de punctele de tangență  $T_A, T_B, T_C$  ale cercului  $CI(O, r)$  înscris în triunghi; cele două triunghiuri rezultând / având cu laturile paralele (Fig. 5).

- Punctele  $A', B'$  și  $C'$  sunt centrele celor 3 cercuri  $\$$  mari, a căror intersecție comună este centrul  $O$  al cercului înscris în triunghiul  $ABC$ , având, fiecare, câte o latură a acestui triunghi scalen drept coardă.
- Punctele  $I_A, I_B$  și  $I_C$  sunt centrele cele 3 cercuri  $\$$  mici care trec fiecare printr-un vârf al triunghiului scalen  $ABC$ , prin centrul  $O$  al cercului înscris în  $ABC$  și prin două dintre punctele de tangență  $T_A, T_B$  și  $T_C$  (Fig. 7).

#### 4. DEMONSTRAREA TEOREMA ȘC A BISECTOARELOR UNUI TRIUNGHI

Triunghiurile  $AT_B T_C, BT_A T_C, CT_B T_A$  sunt triunghiuri isoscele, deoarece cele două tangente, duse din fiecare din punctele exterioare  $A, B$  și  $C$  la cercul înscris cu centrul în  $O$ , sunt egale. Fiecare bisectoare împarte laturile  $TSm$  în două segmente egale, ceea ce demonstrează că:

- Bisectoarele unui triunghi scalen sunt perpendiculare pe laturile corespondente ale  $TSm$ , adică
- Bis.  $A: AA' \perp T_B T_C$ , Bis.  $B: BB' \perp T_A T_C$ , Bis.  $C: CC' \perp T_A T_B$

**Criteriile de asemănare a două triunghiuri sunt următoarele:**

1. **Criteriul unghiurilor:** Două triunghiuri care au două perechi de unghiuri congruente, sunt asemenea; al treia pereche de unghiuri rezultă și ele egale, deoarece suma unghiurilor de  $\pi$  ( $180^\circ$ ) în cele două triunghiuri este aceeași.
2. **Criteriul laturilor și a unui unghi:** Dacă un triunghi are un unghi congruent cu alt unghi al unui alt triunghi și laturile care formează cele două unghiuri sunt respectiv proporționale, atunci triunghiurile sunt asemenea.
3. **Criteriul laturilor:** Dacă două triunghiuri au laturile corespunzătoare proporționale, atunci cele două triunghiuri sunt asemenea.

##### 4.1 ÎN TRIUNGHIUL ECHILATERAL

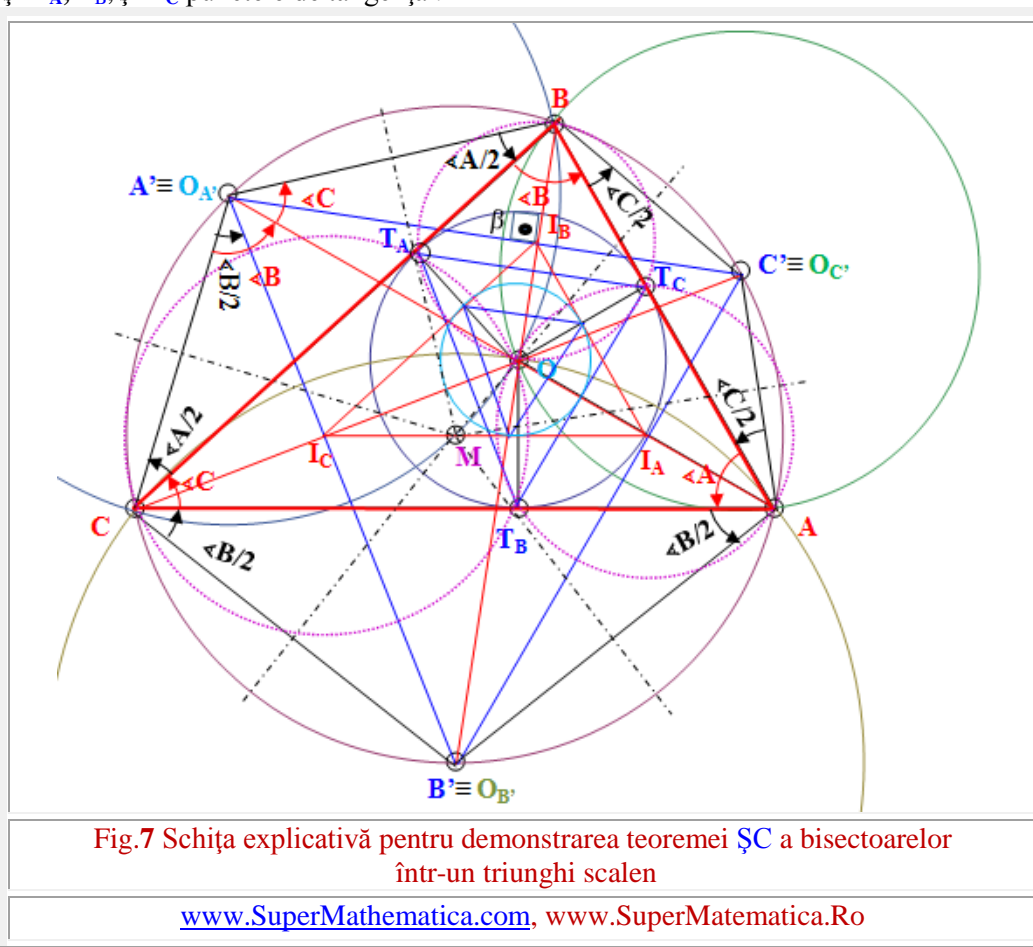
Într-un triunghi echilateral (Fig.5,b ◀), care prezintă un centru de simetrie  $O$ , sunt evidente și imediate toate cele 3 criterii de asemănare ale triunghiului *Smarandache* ( $TSm$ ) cu triunghiul  $\$$ . În acest caz, cele două triunghiuri sunt asemenea și, ca și cele două cercuri circumscris și înscris, sunt concentrice, cu centrul comun în  $O$ . Altfel spus, dacă triunghiul  $ABC$  are un centru  $O$  de simetrie, în el sunt plasate toate punctele de concurență ale liniilor remarcabile din acest triunghi, inclusiv al 5-lea punct de intersecție, punctul  $\$$ . El se păstrează, ca centru de simetrie, pentru toate cercurile, înscrise și circumscrise și pentru ambele triunghiuri  $TSm$  și  $T\$.$

#### 4.2 ÎN TRIUNGHIUL ISOSCEL

Într-un triunghi isoscel (Fig.5,b ►), care are înălțimea drept **axă de simetrie**, ea se păstrează pentru toate entitățile geometrice, enumerate anterior pentru triunghiul echilateral. În consecință, și triunghiurile **TSm** și **TȘ** prezintă aceeași axă de simetrie astfel că și ele sunt triunghiuri isoscele și cu laturile reciproce paralele.

#### 4.3 ÎN TRIUNGHIUL SCALEN

Triunghiul scalen **ABC**, din figura 7, are centrul **O** al cercului înscris **CI(O, r)** și **T<sub>A</sub>**, **T<sub>B</sub>**, și **T<sub>C</sub>** punctele de tangență .



Este evident, de exemplu, că bisectoarea **BB'** este perpendiculară pe latura **T<sub>A</sub>T<sub>C</sub>** a **TSm**, deoarece vârful **B ≡ P** poate fi considerat ca pol **P** și **T<sub>A</sub>T<sub>C</sub>** drept polară **p**. Este cunoscut că, în cerc, polara **p** este perpendiculară pe diametrul cercului suprapus peste bisectoarea **BB'**[8, pag. 702], [9, pag. 606 și 609], adică

- (2) **BOB' ⊥ T<sub>A</sub>T<sub>C</sub>** cu polul **B ≡ P** și, similar

(3)  $\mathbf{AOA'} \perp \mathbf{T_B T_C}$  cu polul  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{P}$

(4)  $\mathbf{COC'} \perp \mathbf{T_A T_B}$  cu polul  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{P}$

Unghiul  $\beta$ , din punctul de intersecție al laturii  $\mathbf{A'C'}$  a triunghiului  $\mathbf{\mathcal{S}}$ , unghi cu vârful în cercul  $\mathbf{CC(M, R)}$ , de exemplu, cu bisectoarea  $\mathbf{BB'}$  este un unghi drept a cărui măsură este semi suma arcelor  $\mathbf{A'B}$  cu  $\mathbf{C'A B'}$  sau a arcelor  $\mathbf{BC'}$  cu  $\mathbf{B'CA'}$ , adică

$$(5) \quad \beta = \frac{m(\widehat{A'B}) + m(\widehat{C'A B'})}{2} = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ca urmare și latura  $\mathbf{A'C'}$ , este perpendiculara pe bisectoarea  $\mathbf{BB'}$ , adică

(6)  $\mathbf{BB' \perp A'C'}$

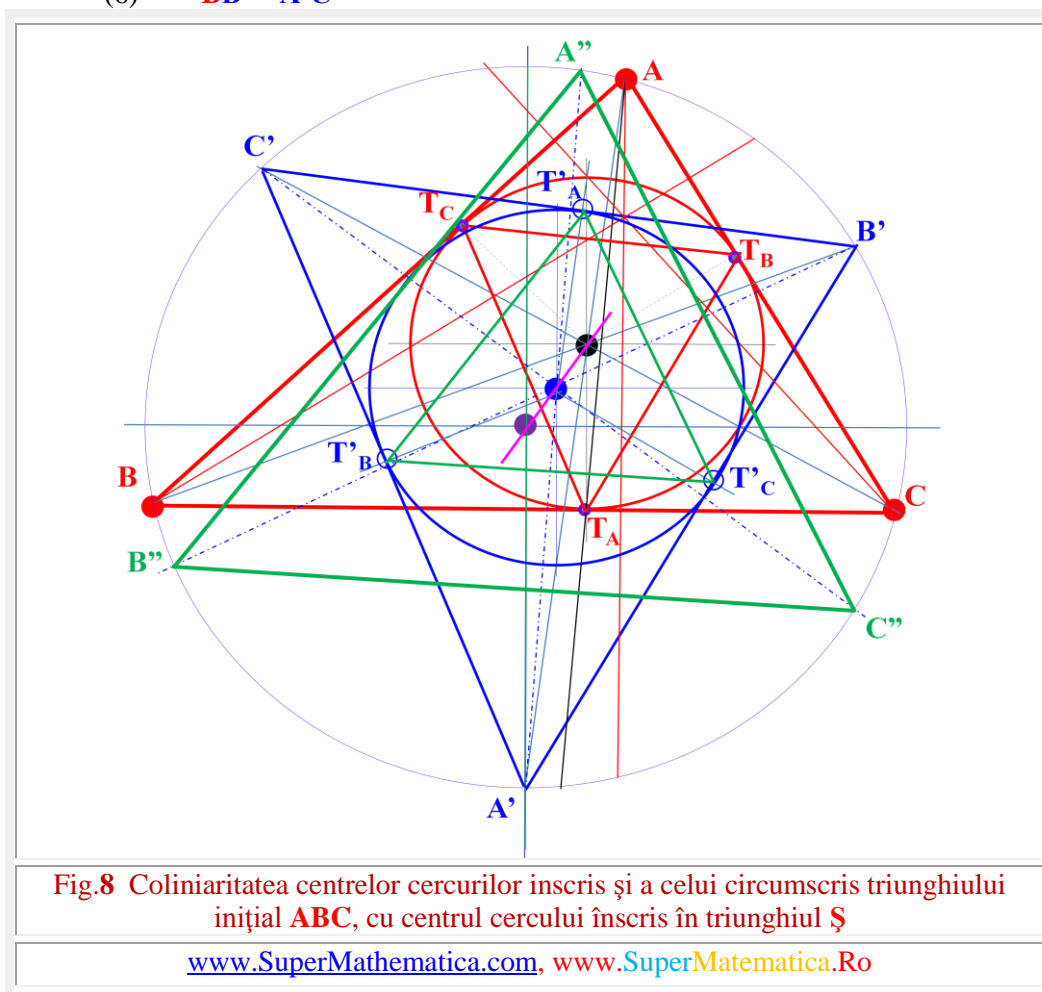


Fig.8 Coliniaritatea centrelor cercurilor înscris și a celui circumscris triunghiului inițial  $\mathbf{ABC}$ , cu centrul cercului înscris în triunghiul  $\mathbf{\mathcal{S}}$

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)

Deoarece ambele laturi ale  $\mathbf{TSm}$  și ale  $\mathbf{TS}$  sunt perpendiculare pe aceeași bisectoare (dreaptă bisectoare  $\mathbf{BB'}$ ) rezultă că aceste două laturi sunt paralele între ele, adică

(7)  $\mathbf{A'C' \parallel T_A T_C}$  și, în mod similar

(8)  $\mathbf{A'B' \parallel T_A T_B}$

(9)  $\mathbf{B'C' \parallel T_B T_C}$

**QED.**

Conform teoremei 1072 din [9, pag. 609], referitoare la polare reciproce, patrulaterul  $T_A B T_C O$  este inscriptibil în cercul  $S - C\mathcal{S}(I, R_S)$  - cu centrul în punctul  $I_B$  de intersecție a bisectoarei din vârful  $B$  cu latura  $A'C'$  a triunghiului  $S$ . În acest caz polul și polara sunt în punctul/vârful  $B$  pe cercul  $C\mathcal{S}(I, R_S)$ . Ca urmare latura  $A'C'$  a triunghiului  $S$  taie bisectoarea din vârful  $B$  în două segmente egale

$$(10) \quad OI_B = I_B B = R_{SB} \quad \text{și, în mod similar}$$

$$(11) \quad OI_A = I_A A = R_{SA}$$

$$(12) \quad OI_C = I_C C = R_{SC}$$

Se poate afirma astfel că, laturile  $T\mathcal{S}$  taie în două segmente egale, segmentele de bisectoare cuprinse între vârfurile triunghiului  $ABC$  și centrul  $O$  al cercului  $OI(O, r)$  înscris în triunghi.

### 5. DEMONSTRAREA TEOREMA ȘI A BISECTOARELOR UNUI TRIUNGHI SCALEN

**Teorema ȘI a bisectoarelor** într-un triunghi scalen stipulează că:

- Punctele de intersecție  $I_A, I_B, I_C$  ale bisectoarelor unui triunghi  $ABC$  cu laturile **triunghi ȘC** ( $A'B'C' = T\mathcal{S}C$ ) formează un **triunghi Ș** înscris ( $T\mathcal{S}I \equiv I_A I_B I_C$ ) asemnenea cu triunghiul  $ABC$  și cu laturile reciproce paralele. Adică, cele două triunghiuri  $ABC$  și  $I_A I_B I_C$  sunt echidistante (Fig. 6 și Fig. 7).

Deoarece, bisectoarele triunghiului  $ABC$  sunt, în același timp, și bisectoare ale triunghiului  $S$  înscris ( $T\mathcal{S}I \equiv I_A I_B I_C$ ), rezultă că cercul înscris în triunghiul  $T\mathcal{S}I$  este concentric, la rândul lui, cu cercul  $CI(O, r)$ , având în consecință același centru  $O \equiv I$ .

Pe baza egalităților anterioare (10)...(12) rezultă imediat că  $T\mathcal{S}I \equiv I_A I_B I_C$  este o transformare homotetică  $H_O^k$  de centru  $O$  și de raport  $k = \frac{1}{2}$  a triunghiului  $ABC$ .

**Q.E.D.**

### 6. DEMONSTRAREA TEOREMEI BISECTOARELOR ÎNTR-UN PATRULATER INSCRIPTIBIL

Un patrulater convex oarecare  $ABCD$  este inscriptibil dacă cele patru vârfuri ale sale sunt puncte conciclice, sau dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente; punctul de concurență fiind chiar centrul  $O(0, 0)$  al cercului în care este înscris patrulaterul (Fig.4 și Fig.9).

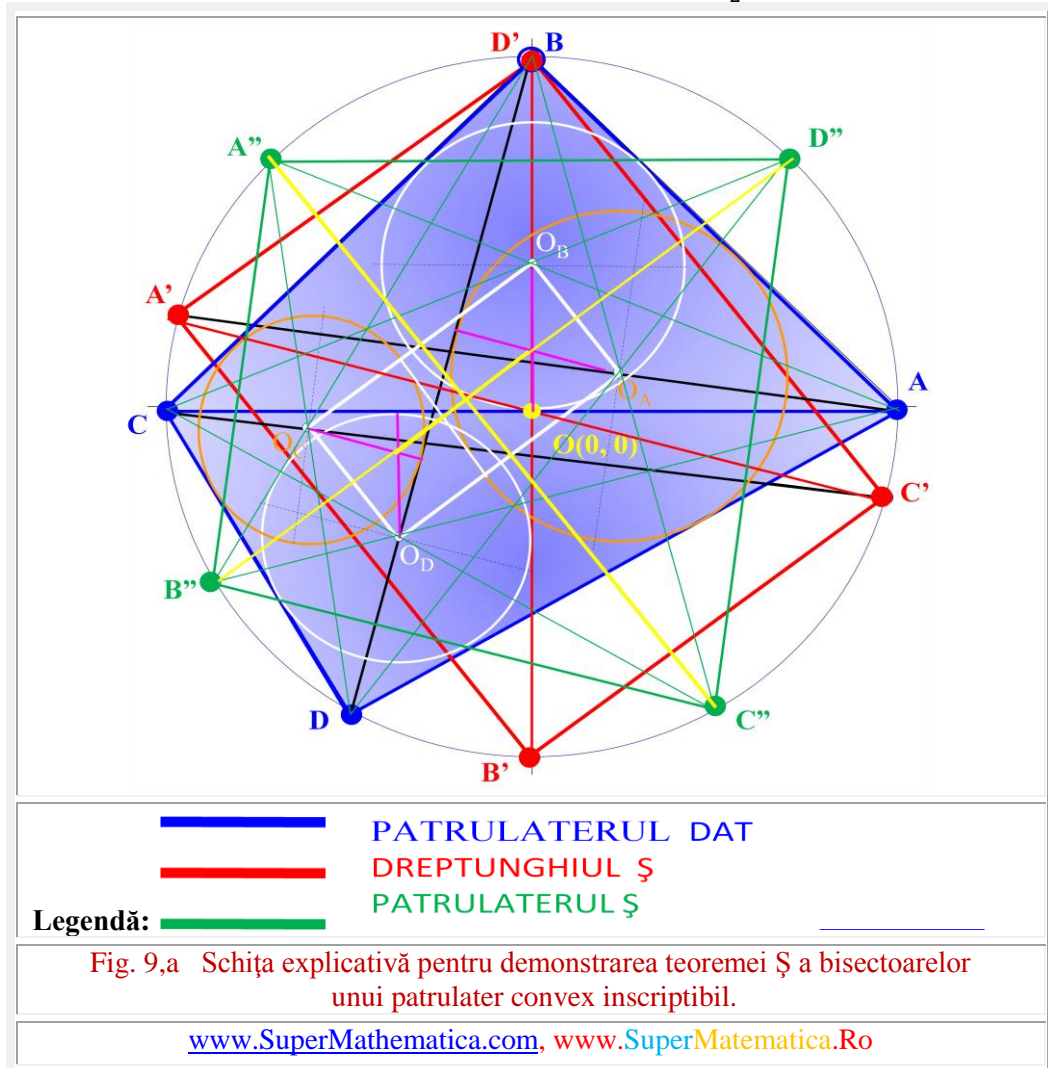
Fie patrulaterul convex inscriptibil  $ABCD$  în cercul de raza  $R$  cu centrul în  $O$ .

Cele patru cercuri  $C_A(O_A, r_A), C_B(O_B, r_B), C_C(O_C, r_C)$ , și  $C_D(O_D, r_D)$  înscrise în triunghiurile formate din câte două laturi și o diagonală a patrulaterului, au centrele cercurilor pe bisectoarele unghiurilor duse din vârfurile patrulaterului (Fig.4) în punctele  $O_A, O_B, O_C$  și  $O_D$  prin care trec bisectoarele ( $A'A, B'B, C'C$  și, respectiv,  $D'D$ ) unghiurilor din vârfurile patrulaterului dat  $ABCD$ .

Dreptunghiul  $O_A O_B O_C O_D$  va fi denumit dreptunghi **Sangaku**, după numele celui care ar fi demonstrat teorema **Sangaku** sau **San Gaku**.

## 6.1 DEMONSTRAREA TEOREMEI SANGAKU SAU SAN GAKU

În triunghiul  $ABD$   $O_A$  este pe bisectoarea unghiului  $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle \frac{ABD}{2}$ , iar în triunghiul  $ACD$   $O_D$  este pe bisectoarea unghiului  $\sphericalangle C_2 = \sphericalangle \frac{ACD}{2}$ , astfel că



$$(13) \quad \sphericalangle B_1 = \sphericalangle ABD = \sphericalangle C_2 = \sphericalangle ACD = \frac{\text{arc}AD}{2}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \sphericalangle AO_A D = \sphericalangle \frac{\pi}{2} + \sphericalangle \frac{B_1}{2} = \sphericalangle \frac{\pi}{2} + \sphericalangle \frac{B}{4} \\ \sphericalangle AO_D D = \sphericalangle \frac{\pi}{2} + \sphericalangle \frac{B_1}{2} = \sphericalangle \frac{\pi}{2} + \sphericalangle \frac{B}{4} \end{cases} \rightarrow \sphericalangle AO_A D = \sphericalangle AO_D D \rightarrow$$

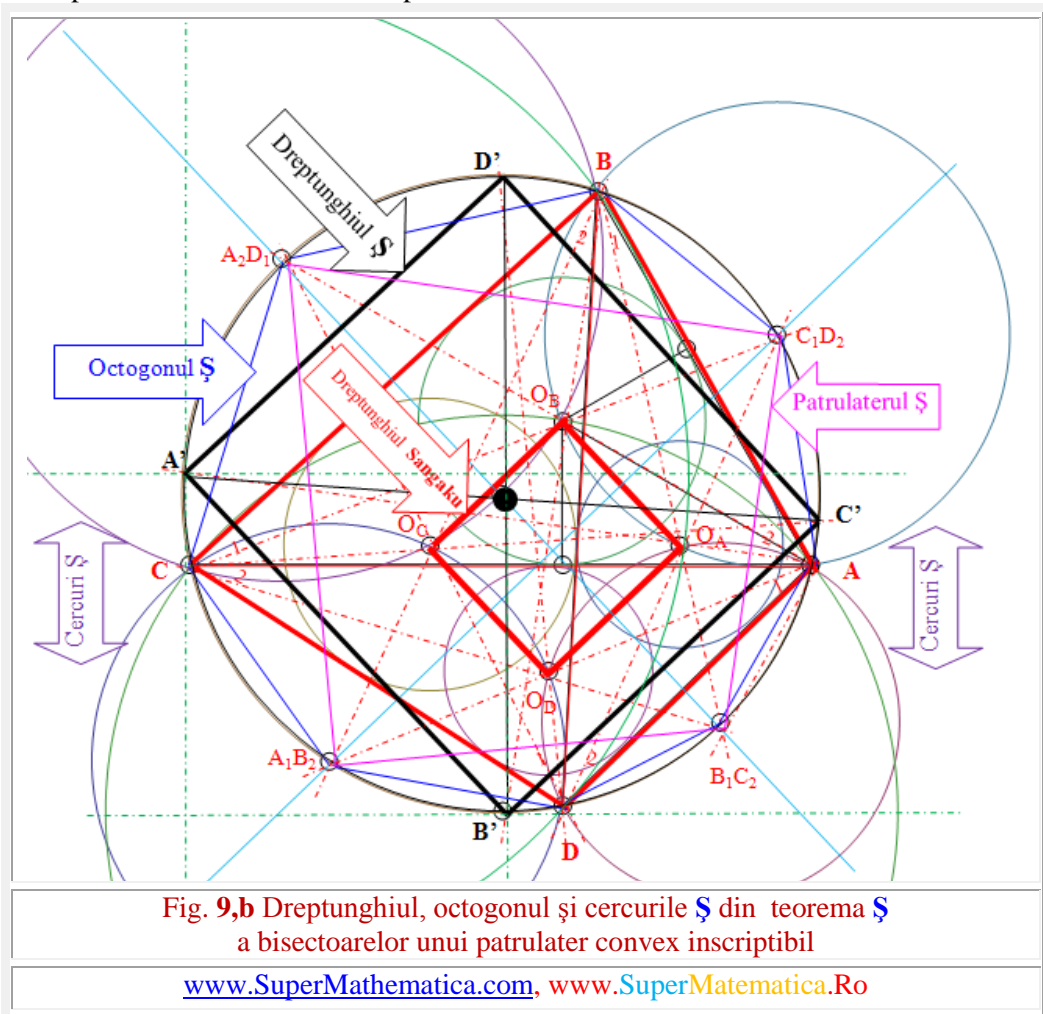
cea ce arată că patrulaterul  $AO_AO_D D$  este inscriptibil în cercul cu centrul în punctul  $B_1C_2$ .

(15) Unghiul  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_2 =$  unghiul  $\sphericalangle ADB = \sphericalangle D_1 = \frac{\text{arc } BC}{2}$ ;

(16) În triunghiul  $\Delta ABC$ :  $AO_A$  și  $AO_D$  sunt bisectoare;

(17) În triunghiul  $\Delta ABD$ :  $DO_A$  și  $DO_D$  sunt bisectoare;

(18) Unghiul  $\sphericalangle AO_A D =$  unghiul  $\sphericalangle DO_D A \rightarrow$  patrulaterul  $AO_AO_D D$  este inscriptibil în cercul cu centrul în punctul  $B_1C_2$ .



Similar

(19) Unghiul  $\sphericalangle AO_A B =$  unghiul  $\sphericalangle BO_B A \rightarrow$  patrulaterul  $AO_AO_B B$  este inscriptibil în cercul cu centrul în punctul  $C_1D_2$ ,

(20) Unghiul  $\sphericalangle BO_B C =$  unghiul  $\sphericalangle CO_C B \rightarrow$  patrulaterul  $BO_BO_C C$  este inscriptibil în cercul cu centrul în punctul  $A_2D_1$ ,

(21) Unghiul  $\sphericalangle \mathbf{CO}_C\mathbf{D}$  = unghiul  $\sphericalangle \mathbf{DO}_D\mathbf{C} \rightarrow$  patrulaterul  $\mathbf{CO}_C\mathbf{O}_D\mathbf{D}$  este inscriptibil în cercul cu centrul în punctul  $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2$ .

Deoarece patrulaterul anterior amintite sunt inscriptibile, unghiurile opuse sunt suplimentare, adică

$$(22) \quad \sphericalangle \mathbf{AO}_A\mathbf{O}_D = \sphericalangle \mathbf{DO}_A\mathbf{O}_D = \frac{\text{arc } O_D\mathbf{DA}}{2}$$

$$(23) \quad \sphericalangle \mathbf{A}_1 = \sphericalangle O_A\mathbf{AD} = \sphericalangle O_A\mathbf{O}_D\mathbf{D}' = \sphericalangle \frac{A}{2}$$

Deoarece  $\mathbf{DO}_D\mathbf{O}_C\mathbf{C}$  este un patrulater inscriptibil (21), rezultă ca

$$(24) \quad \sphericalangle \mathbf{D}'\mathbf{O}_D\mathbf{C} = \sphericalangle \mathbf{C}_2 = \sphericalangle \mathbf{ACD} = \frac{\text{arc } O_D\mathbf{DA}}{2}$$

Se știe că, într-un patrulater inscriptibil, suma unghiurilor opuse este un unghi drept, adică

$$(25) \quad \begin{cases} \sphericalangle \mathbf{A} + \sphericalangle \mathbf{C} = \pi \\ \sphericalangle \mathbf{B} + \sphericalangle \mathbf{D} = \pi \end{cases} \rightarrow \sphericalangle \mathbf{A} + \sphericalangle \mathbf{B} + \sphericalangle \mathbf{C} + \sphericalangle \mathbf{D} = 2\pi$$

$$(26) \quad \sphericalangle O_A\mathbf{O}_D\mathbf{O}_C = \sphericalangle O_A\mathbf{O}_D\mathbf{D}' + \sphericalangle \mathbf{D}'\mathbf{O}_D\mathbf{O}_C = \frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Similar

$$(27) \quad \begin{cases} \sphericalangle O_D\mathbf{O}_C\mathbf{O}_B = \sphericalangle \frac{\pi}{2} \\ \sphericalangle O_C\mathbf{O}_B\mathbf{O}_A = \sphericalangle \frac{\pi}{2} \\ \sphericalangle O_B\mathbf{O}_A\mathbf{O}_D = \sphericalangle \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$\mathbf{O}_A\mathbf{O}_B\mathbf{O}_C\mathbf{O}_D$  este un **dreptunghi Sangaku** sau **San Gaku**.

**Q.E.D.**

O demonstrație animată a teoremei **Sangaku** sau **San Gaku** este disponibilă pe <http://www.gogeometry.com/sangaku2.html>.

Așa cum este ilustrat și în prima figură 10,b, suma razelor cercurilor cu varfurile în colțurile dreptunghiului șangaku este o constantă, adică

$$(28) \quad r_{OA} + r_{OC} = r_{OB} = r_{OD}$$

### 6.3 TEOREMA Ș A BISECTOARELOR UNUI PATRULATER. TRANSFORMAREA PATRULATERULUI CONVEX, INSCRIPTIBIL, OARECARE ÎNTR-UN DREPTUNGHI Ș.

Așa cum s-a mai afirmat, această teoremă este o completare a celei de a 2-a probleme și teoreme **Sangaku**.

Dacă teorema **Sangaku** exprimă o transformare a patrulaterului oarecare, convex, inscriptibil, într-un dreptunghi plasat în interiorul cercului circumscris, teorema **Ș** exprimă o transformare a aceluiași patrulater oarecare, convex, inscriptibil într-un dreptunghi inscriptibil sau înscris/ (circumscris) în același cerc (Fig.9,b).

S-a demonstrat anterior că, cele patru patrulater a căror vârfuri sunt formate din câte două vârfuri ale patrulaterului dat **ABCD** și două centre ale cercurilor înscrise în triunghiurile formate **O<sub>A</sub>, O<sub>B</sub>, O<sub>C</sub> și O<sub>D</sub>** de câte două laturi și câte o diagonală a patrulaterului, sunt patrulater inscriptibile.



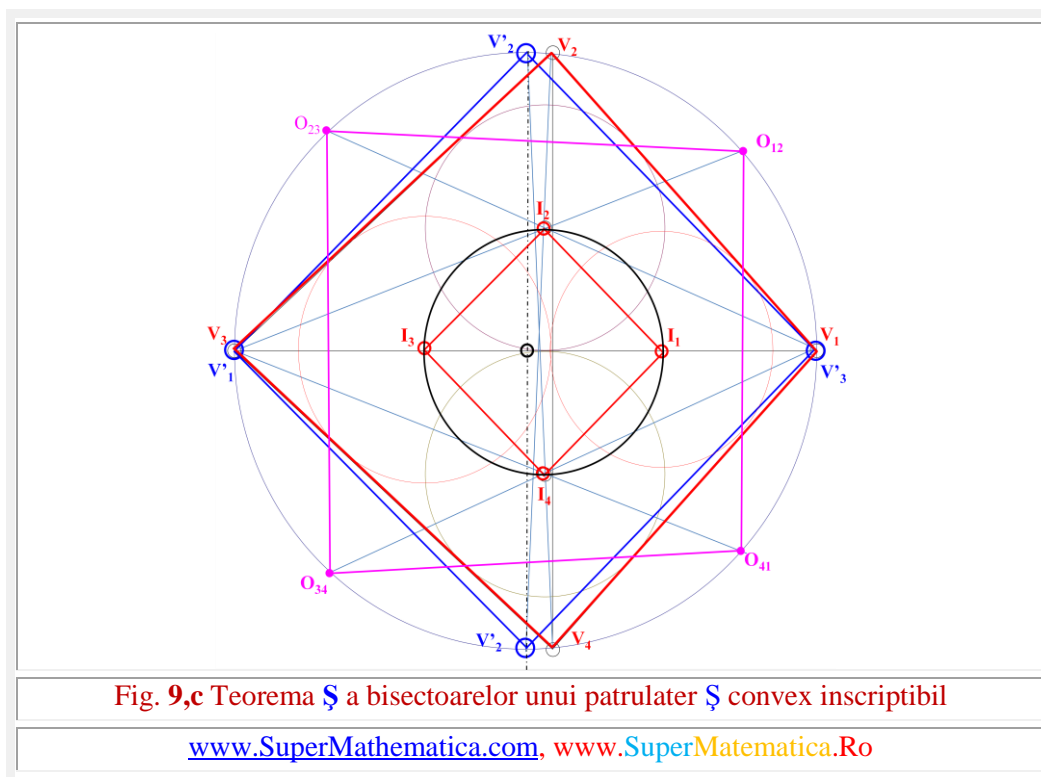


Fig. 9,c Teorema Ș a bisectoarelor unui patrulater Ș convex înscrisibil

[www.SuperMathematica.com](http://www.SuperMathematica.com), [www.SuperMatematica.Ro](http://www.SuperMatematica.Ro)

În plus, în figura 9,b s-au ilustrat aceste patru cercuri Ș, în care, aceste patrulater sunt înscrise; cercuri cu centrele în punctele  $C_1D_2$ ,  $A_2D_1$ ,  $A_1B_2$  și  $B_1C_2$ , centre situate pe cercul  $CC(M, R)$  circumscris patrulaterului  $ABCD$  dat.

Iată câteva dintre completările pe care teorema Ș a bisectoarelor într-un patrulater înscrisibil le aduce celei de a doua probleme **Sagaku** sau teoremei **Sagaku**:

- Segmentele de dreaptă sau dreptele care unesc câte două dintre centre opuse ( $A_1B_2-B_1C_2$  și  $A_2D_1-B_1C_2$ ) sunt perpendiculare între ele și perpendiculare pe mijloacele laturilor dreptunghiului **Sagaku** și perpendiculare pe laturile **dreptunghiului Ș**. Concluzie care rezultă imediat, din faptul că o perpendiculară, dusă din centrul unui cerc ( $C_1D_1$ , de exemplu), împarte o coardă ( $O_AO_B$ ) în două părți egale, sau că este perpendiculară pe mijlocul corzii.
- În plus, ele împart dreptunghiul **Sagaku** în patru dreptunghiuri egale, ca o consecință a ceea ce s-a enunțat anterior, pe ansamblul laturilor dreptunghiului **Sagaku**.
- Punctele  $C_1D_2$ ,  $A_2D_1$ ,  $A_1B_2$  și  $B_1C_2$  situate pe cercul  $CC(M, R)$  circumscris patrulaterului dat  $ABCD$  formează, la rândul lor un alt patrulater, **denumit patrulater Ș**, pentru că are câte două laturi adiacente egale. Laturile sunt adiacente în centrele  $C_1D_2$ ,  $A_2D_1$ ,  $A_1B_2$  și  $B_1C_2$  și sunt egale, două câte două, deoarece patrulaterul este înscris în cerc și diagonalele lui sunt perpendiculare între ele

- Laturile **patrulator**  $\$$  sunt perpendiculare pe mijlocul segmentelor  $AO_A$ ,  $BO_B$ ,  $CO_C$  și  $DO_D$ , pe care, deci, le taie în două părți egale.
- Toate poligoanele care au cel puțin câte două laturi adiacente egale au fost denumite **poligoane**  $\$$ .
- Rezulta că toate poligoane  $\$$  au un număr par ( $2n$ ) de laturi.
- Toate pătratele sunt, ca urmare, **patrulatere**  $\$$ , iar toate poligoanele regulate cu număr par de laturi sunt **poligoane**  $\$$ . Dreptunghiul nu, pentru că laturile egale sunt opuse și nu adiacente.
- Dacă se unesc centrele  $C_1D_2$ ,  $A_2D_1$ ,  $A_1B_2$  și  $B_1C_2$  și cu vârfurile  $ABCD$  ale patrulaterului dat, se obține un **octogon**  $\$$  (Fig. 9,b). Laturile egale ale **octogonului**  $\$$  sunt adiacente în centrele **cercurilor**  $\$$ . Egalitatea laturilor lor este evidentă, deoarece distanțele de la centrele **cercurilor**  $\$$  la punctele / vârfurile patrulaterului dat și la două dintre vârfurile **patratului Sagaku**, care sunt puncte conciclice ale patrulaterului inscriptibil în câte un **cerc**  $\$$ , sunt razele celor patru **cercuri**  $\$$ . În consecință, distanțele de la două dintre vârfurile **dreptunghiului Sagaku** și de la două vârfuri ale patrulaterului inscriptibil dat  $ABCD$  la centrele celor 4 cercuri  $\$$  sunt egale între ele și egale cu razele celor 4 **cercuri**  $\$$ .
- Vârfurile  $A'B'C'D'$  ale **dreptunghiului**  $\$$  sunt conciclice, prin definiție, deoarece se obțin la intersecția bisectoarelor, duse din vârfurile patrulaterului dat, cu cercul. Ele sunt centrele unor **cercuri**  $\$$  secundare, notate  $\$S$ , care trec prin câte două vârfuri ale patrulaterului dat  $ABCD$  și câte un vârf al **patrulaterului Sangaku**, situat pe linia care unește câte două vârfuri ( $O_A \subset AA'$ ,  $O_B \subset BB'$ ,  $O_C \subset CC'$  și, respectiv,  $O_D \subset DD'$ ). Două dintre cele patru cercuri  $\$S$  sunt reprezentate și în figura 9,b în culoarea verde: cele cu centrele în punctele  $A'$  și  $B'$ .
- Atât patrulaterului dat  $ABCD$  cât și **dreptunghiului**  $\$$  ( $A'B'C'D'$ ) are vârfurile pe cercul  $CC(M,R)$ , fiind, deci inscriptibile. Ca urmare, unghiurile lor opuse sunt suplimentare, adică
 
$$(29) \quad m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D) + m(\sphericalangle B) = \pi \text{ și}$$

$$(30) \quad m(\sphericalangle A') + m(\sphericalangle C') = m(\sphericalangle D') + m(\sphericalangle B') = \pi$$
 Urmărind figura 9,b rezulta că
 
$$(31) \quad \text{arc}A'C' = \text{arc}A'B + \text{arc}BC' = 2m(\sphericalangle A_2) + 2m(\sphericalangle C_1)$$

$$(32) \quad \begin{cases} 2m(\sphericalangle A_2) = m(\sphericalangle A) \\ 2m(\sphericalangle C_1) = m(\sphericalangle C) \end{cases} \rightarrow \text{arc}A'C' = \pi$$
 ceea ce arată că diagonala  $A'C'$  a **dreptunghiului**  $\$$  ( $A'B'C'D'$ ) este diametru în cercul  $CC(M,R)$ ,  
 Deoarece diagonalele **dreptunghiului**  $\$$  ( $A'C'$  și  $B'D'$ ) trec prin centrul  $M$  al cercului  $CC(M,R)$ , în care acesta este înscris, rezultă imediat că acest patrulater este un dreptunghi: la intersecția celor două diagonale rezultă un centru de simetrie  $M$ . Dreptunghiul ca și pătratul ș.m.a. figuri geometrice plane sunt figuri cu centru de simetrie. **Q.E.D.**

## 8. CONCLUZII

Se poate considera, la fel de bine cum se poate constata, că **teoremele Ș** pentru triunghiul scalen și pentru patrulaterul convex inscriptibil, cuprinse în prezentul articol, sunt o extensie / completare a problemelor **Sagaku** din **Geometria Sacră Japoneză** și care relevă unele aspecte noi ale acestor probleme, larg răspândite în cultura matematică japoneză.

Există și posibilitatea ca aceste teoreme să fie extinse la un pentagon inscriptibil și, în general, la un poligon inscriptibil oarecare.

Cazul unui patrulater Ș convex inscriptibil este ilustrat în figura 9,c. “dreptunghiul” Ș are vârfurile pe cerc și bisectoarele unghiurilor din aceste vârfuri intersectează același cerc în punctele **V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>** și **V<sub>4</sub>** care sunt vârfurile **pătratului Ș**.

**I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub>, I<sub>3</sub>** și **I<sub>4</sub>** sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile formate de două laturi adiacente și o diagonală iar **O<sub>ij</sub>** sunt centrele cercurilor Ș în care sunt înscrise câte două vârfuri ale patrulaterului dat și câte două vârfuri ale pătratului **Sagaku**.

Se constată că și “dreptunghiul” **Sagaku** este, în acest caz, tot un pătrat.

## 9. BIBLIOGRAFIE

1	Smarandache, Florentin	<b>Eight Solved and Eight Open Problems in Elementary Geometry</b>	arXiv.org, Cornell University, NY, USA
2	Smarandache, Florentin	<b>Problèmes avec et sans... problèmes!</b>	Problem 5.36, p. 54, Somipress, Fés, Morocco, 1983.
3	Khoshnevisan, M.	<b>Smarandache Concurrent Lines Theorem</b>	NeuroIntelligence Center, Australia
4.	Șelariu, Mircea Eugen	<b>NOI LINII CONCURENTE ȘI UN NOU PUNCT DE INTERSECȚIE ÎNTR-UN TRIUNGHI</b>	<a href="http://www.cartiAZ.ro">www.cartiAZ.ro</a> , Șelariu, pag 2
5	Șelariu, Mircea Eugen	<b>PUNCTUL, LINIILE, TRIUNGHIURILE ȘI CERCIURILE Ș</b>	<a href="http://www.cartiAZ.ro">www.cartiAZ.ro</a> , Șelariu, pag 2
6	Șelariu, Mircea Eugen	<b>FUNȚII CIRCULARE EXCENTRICE ȘI EXTENSIA LOR</b>	Buletin Șt. și Tehn. Al I. P.”TV” Timișoara, Seria Mecanică, Tom. 25(39), Fasc.I, 1980, pag. 189...196
7	Șelariu, Mircea Eugen	<b>SUPERMATEMATICA. Fundamente. Vol.I</b>	Editura “POLITEHNICA” din Timișoara, 1907
8	Gellert, W ș.a.	<b>MICA ENCICLOPEDIIE MATEMATICA</b>	Ed.Tehnica, Buc. 1981.
9	F.G-M.	<b>MANUEL DE GÉOMÉTRIE</b>	Imprimeures-Éditeurs Maison A. Mame & Fils, Paris, 1919
10	Géry Huvent	Sagaku: <b>LE MYSTÈRE DES ÉNIGMES GÉOMÉTRIQUES JAPONAISES</b>	<a href="http://books.google.com">books.google.com</a> Paris2008: Dunod. 13- <b>ISBN 9782100520305/10</b> -ISABN 210052030X; <b>OCLC 470626755</b>

[www.eng.upt.ro/~mselariu](http://www.eng.upt.ro/~mselariu)