Goldbach' Conjecture (10): The Six Details in the Hardy-Littlewood Conjecture (A)

Tong Xin Ping

Abstract: This paper is to discuss the six details in the Hardy-Littlewood Conjecture (A): ① N/lnN lnN and π(N) π(N) /N; ② pi+(N−pi) and p+(N−p); ③ N＜50 and N⩾50; ④ p=6t+1 and p=6t−1; ⑤ π(pi)～π(N)/(pi−1) and π(pi)=[π(N)/(pi−1)] ±[βπ(N)/(pi−1)]; ⑥ a single detail of details。

"1+1"浅见之十：哈代—李特伍德猜想(A)未揭示的6个细节

童 信 平

关键词 哥德巴赫猜想(A) 答案数量 哈代－李特伍德猜想(A) 细节

摘要 本文指出哈代－李特伍德猜想(A)中的6个细节问题，它们是：①$N/\ln^2N$ 与 $\pi^2(N)/N$；②$p_i+(N-p_i)$与 $p+(N-p)$；③N＜50 与 N⩾50；④$p_+=6t+1$ 与 $p_-=6t-1$；⑤$\pi(p_i)_r \sim \pi(N)_r/(p_i-1)$ 与 $\pi(p_i)_r=[\pi(N)_r/(p_i-1)]\ \pm[\beta\pi(N)_r/(p_i-1)]$；⑥细节中的细节。同时指出，$r_2(N)/\pi(N) > \pi(N)/N$。

1 哈代—李特伍德猜想(A)及其变化。

N——偶数中的复合数。N= 4，6，8，10，……。

p_i、p_r、p_{r+1}——素数，$2\leqslant p_i\leqslant p_r<\sqrt{N}<p_{r+1}<N$ 。i =1, 2, …, r 。r=π($\sqrt{N}$)。

[A]——数值A的整数部分。例如，[5.96]=5。

p——闭区间[p_r+1，$N-p_r-1$]内(以下简称闭区间)的素数。$(p_r+1)<p<(N-p_r-1)$。

$\pi(N)_r$——p 的数量，也就是闭区间内的素数数量。$\pi(N)_r=\pi(N-p_r-1)-\pi(p_r+1)=\pi(N-p_r-1)-r$。N→∞时，$\pi(N)_r\sim\pi(N)$。

"1+1"——偶数哥德巴赫猜想也就是哥德巴赫猜想(A)的简称。

根据以上规定，可能出现 $N=p_i+(N-p_i)=p+(N-p)$=素数+素数="1+1"，下面分别讨论$(N-p_i)$和$(N-p)$中的素数数量。——两类"1+1"的解数。

$N(p,p)_i$——$(N-p_i)$中的"1+1"的解数。实验证明某些N的$(N-p_i)$都是合数，$N(p,p)_i\geqslant0$。

$N(p,p)_r$——$(N, p_1p_2\cdots p_r)=2$ 时，$(N-p)$中的"1+1"的解数[1]。

$N(p,p)_R$——$(N, p_1p_2\cdots p_r)>2$ 时，$(N-p)$中的"1+1"的解数。

已经知道，$N(p,p)_R \sim N(p,p)_r \prod\limits_{\substack{p|N\\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$ 。(见《"1+1"浅见之八：……》引理6。)

$r_2(N)$——"1+1"的答案数量(解数)。$r_2(N)=2N(p,p)_i+N(p,p)_R$。

p_+、p_-——素数。$p_+=6t+1$。$p_-=6t-1$。

$\pi(p_+)$、$\pi(p_-)$——不大于N的素数 p_+、p_-的数量。

哈代－李特伍德猜想(A)是"1+1"的答案数量(解数)的估计公式，如公式(1)[2]所示。

$$(1)\quad r_2(N) \sim 2\frac{N}{\ln N\ln N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2} \sim 1.3202\frac{N}{\ln N\ln N}\prod_{\substack{p|N\\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}$$

根据素数定理，N→∞时，π(N)～N/lnN。可以得到比公式(1)更贴切、更精确的公式(2)。

(2)　$r_2(N) \sim \frac{2\pi(N)\pi(N)}{N} \prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$

下面的公式(3) (也就是《“1+1” 浅见之九: ……》中公式(4)。)则是根据“1+1”的答案数量的容斥公式[1]结合素数个数的容斥公式[3]推导出来的公式。

(3)　$r_2(N) \sim 2N(p,p)_i + \left[\frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N} \prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right] \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$

前者 $2N(p,p)_i$ 目前还没有计算公式。$N\to\infty$ 时，p_i 的数量$(\pi(\sqrt{N})-1)/\pi(N)\to 0$，$p_i$ 的数量可以忽略不计，由 p_i 组成的 $N(p,p)_i$ 也可以忽略不计。或者说，弃前者也可以证明“1+1”成立。

后者就是 $N(p,p)_R$，可以用公式(4)表示。(公式(3)中[]表示取其数值的整数部分，公式(4)取消了[]后，有所增大，增大的部分是不大于 1 的小数点，可以忽略不计。)

(4)　$N(p,p)_R \sim \left[\frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N} \prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\right] \prod_{\substack{p|N \\ 3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}$

2　哈代—李特伍德猜想(A)未揭示的 6 个细节。

1921 年，哈代在英国皇家学会上演讲时指出:“哥德巴赫猜想似乎不能用 Brun 的方法来证明。能够最终证明猜想的方法，应该与我与李特伍德的方法类似。我们不是在原则上没有成功，而是在细节上没有成功。”——细节和原则同样重要，哈代他承认细节可以决定成败。

王元在总结 1920 年(Brun) ~ 1966 年(陈景润)的工作时说:“看来，圆法、筛法均已山穷水尽。用它们几乎是不可能证明猜想(A)的，数学家殷切地期望新思想与新方法的产生。”他还说道:“…我们深信对于进一步研究猜想(A)必须有一个全新的思想。”

历史证明了哈代说的“不能用 Brun 的方法来证明”是正确的判断。公式(2)和(4)明显地与公式(1)相类似。剩下的问题是需要找到哈代所说的“细节上没有成功”的 6 个细节。

细节 1　由参变量组成的 $\pi^2(N)/N$ 较之由参变量的近似值组成的 $N/\ln^2 N$ 更精确。

公式(2)比公式(1)更精确，公式(2)的精确度曲线更容易曝露出 δ 的细节变化(见图 1。)。

再以 100000094 为例，采用公式(2)时的精确度是 1.00191。(见表 2。) 采用公式(4)时的精确度是 1.00174。(见表 1。)可见公式(4)比公式(2)更精确一些。下面的讨论以公式(4)为主。

细节 2　$(N-p_i)$中的素数数量 $N(p,p)_i$ 相对于与$(N-p)$中的素数数量 $N(p,p)_R$ 可以忽略不计。

虽然 $N=p_i+(N-p_i)=$“1+1” 与 $N=p+(N-p)=$“1+1”都是两个素数相加，两者有明显的区别:

① p_i 可以整除 p_i，但不能整除$(N-p_i)$。而 p_i 不能整除 p 以及$(N-p)$;

②$(N-p_i)$中的素数数量 $N(p,p)_i$ 还无法计算，而$(N-p)$中的素数数量 $N(p,p)_R$ 是可以计算的[2];

③虽然$(N-p_i)$中的 $N(p,p)_i$ 还无法计算，但是，$N(p,p)_i$ 相对于 $N(p,p)_R$ 来说相当少，这就使得$(N-p_i)$成为一个细节问题而可以忽略不计。或者说，单用 $N(p,p)_R$ 就可以证明“1+1”成立。

细节 3　用孙子定理求解“1+1”答案时，$N\geqslant 50$ 与 $N<50$ 在细节上的差异。

$N\geqslant 50(r\geqslant 4)$时，$N<p_1p_2\cdots p_r$，用孙子定理求解时，(见《“1+1” 浅见之六: ……》之引理 3 和定理 1。)出现 $p<N<p_1p_2\cdots p_r<p+p_1p_2\cdots p_r$ 这样的关系。例如，$11<50<210<11+210$。

$N<50(r<4)$时，$p_1p_2\cdots p_r<N$，用孙子定理求解时，可以出现 $p<p_1p_2\cdots p_r<p+p_1p_2\cdots p_r<N$ 这样的关系。例如，$w_r=2\times3\times5=30<48$。$11<30<11+30=41<48$。

细节 4　组成“1+1”的是 p_+与 p_+、p_-与 p_-、p_-与 p_+相加，$\pi(p_+)$与 $\pi(p_-)$影响着解数的波动。

除素数 2、3 外，其他素数可表为素数 $p_-=6t-1(=2+3n)$和素数 $p_+=6t+1(=1+3n)$。根据等差数列的素数定理，2+3n 和 1+3n 中的素数个数 $\pi(3)$与常数项无关，$\pi(3)\sim\pi(N)/(3-1)$。已经知道，不大于 N 的素数中，p_-的个数 $\pi(p_-)$要比 p_+的个数 $\pi(p_+)$多一些。即 $\pi(p_-)=(1+\delta)\pi(N)/2$，$\pi(p_+)=(1-\delta)\pi(N)/2$。$N\to\infty$ 时，$\delta\to 0$。

“1+1”的实际答案的组成可分为三类: $N_1=6n+2=p_++p_+'$；(只能由 N_1 中的 p_+组成答

案。)N_2=6n= p_-+ p_+；(N_2中的 p_-或 p_+都可能组成答案。)N_3= p_-+ p_-' =6n−2 。(只能由 N_3中的 p_-组成答案。)实验取的是 N=2^7 ~ 2^{21}，它们刚好是 N_1= p_++ p_+'；N_3= p_-+ p_-'交替地出现的。这才是组成“1+1”的真正的参变量，它们的数量变化决定了“1+1”实际解数低于或高于计算解数。

因为 p_+的数量相对地少一些，N_1= p_++ p_+'的实际解数也会少一些，这就使得精确度=计算解数/实际解数＞1，从而使精确度曲线出现了峰值。理论上需要乘以(1−δ)削峰。

因为 p_-的数量相对地多一些，N_3= p_-+ p_-'的实际解数也会多一些，这就使得精确度=计算解数/实际解数＜1，从而使精确度曲线出现了低谷。理论上需要乘以(1+δ)填谷。

N_2=6n= p_-+ p_+时，起主导作用的是 p_+的数量，理论上需要乘以(1−δ)削峰。

根据等差数列中的素数定理，当 N→∞时，δ→0。即π(p_+)与π(p_-)的数量差异相对地说可以忽略不计，高峰或低谷的现象逐渐消失。这就是说，$N(p,p)_R$的计算公式的$\pi(N)_r$中，应该乘以(1±δ)这样一个理论上可以削峰填谷、实际计算时容许忽略的细节。如公式(5)所示。

$$(5)\quad N(p,p)_R \sim \frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N}\prod_{3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\3\leqslant p\leqslant\sqrt{N}}}\frac{p-1}{p-2}\,(1\pm\delta)$$

表 1 是公式(1)和公式(4)的精确度数值，图 1 是更形象化的公式(1)和公式(4)精确度曲线图，图中的二条精确度曲线在分别在中线或 1.0 两侧振荡，明显地表示出 p_-、p_+所造成的δ的变化规律。需要在公式(5)中用(1±δ)进行修正，不符合这个规律的{1+δ}的只是少数。

表 1　N=128 ~ 100000094 时，公式(1)和公式(4)的计算值、精确度(=计算值/实际值)

N	$N(p,p)_R$实际值	公式(1)计算值	公式(1)精确度	公式(4)计算值	公式(4)精确度
128	6(p_++p_+)	7.36	1.22652	6.85	1.14203(1−δ)
256	14(p_-+p_-)	11.19	0.79929	12.09	0.86370(1+δ)
512	18(p_++p_+)	17.56	0.97556	20.18	1.12097(1−δ)
1024	38(p_-+p_-)	28.32	0.74526	32.79	0.86301(1+δ)
2048	44(p_++p_+)	46.72	1.06182	55.59	1.26332(1−δ)
4096	96(p_-+p_-)	78.40	0.81667	96.03	1.00034{1+δ}
8192	148(p_++p_+)	133.47	0.90182	161.48	1.09110(1−δ)
16384	296(p_-+p_-)	230.02	0.77709	280.36	0.94718(1+δ)
32768	480(p_++p_+)	400.56	0.8345	483.62	1.00755(1−δ)
65536	860(p_-+p_-)	703.93	0.81852	845.74	0.96366(1+δ)
131072	1486(p_++p_+)	1246.85	0.83906	1491.92	1.00399(1−δ)
262144	2596(p_-+p_-)	2224.03	0.85671	2639.42	1.01673{1+δ}
524288	4702(p_++p_+)	3991.83	0.84896	4708.81	1.00145(1−δ)
1048576	8436(p_-+p_-)	7204.82	0.85406	8430.39	0.99933(1+δ)
2097152	14906(p_++p_+)	13069.45	0.87679	15193.65	1.01930(1−δ)
19999996	105725(p_-+p_-)	93426.48	0.88367	106456.17	1.00692(1−δ)
24999998	129461(p_++p_+)	113743.53	0.87589	129373.61	0.99932(1+δ}
100000094	437291(p_++p_+)	389070.89	0.88975	438053.36	1.00174{1+δ}
				精确度平均值	1.01857

注：1)19999996 ~ 100000094 的 $N(p,p)_R$根据四川周定远先生寄来的资料整理。

2){1+δ}表示不符合细节 4，不能用(1±δ)进行修正。

表 2 和图 2 是公式(2)的精确度和精确度曲线。

表 2　N=100000058 ~ 100000100 时，公式(2)的计算值、实际值、精确度(=计算值/实际值)

N	p|N (2＜p＜√N)	$\prod\frac{p-1}{p-2}$	计算值	实际值	精确度
100000058	2, 241	1.0041841	440115.13	438806(p_++ p_+)	1.00298(1−δ)

100000060	2, 5, 83, 107, 563	1.365078387	598288.35	597130 (p_-+p_-)	1.00194 {1+δ}
100000062	2, 3, 29	2.074074074	909027.89	906002 (p_++p_-)	1.00334 (1−δ)
100000064	2, 1201, 1301	1.001604493	438984.51	438050 (p_++p_+)	1.00213 (1−δ)
100000066	2, 41, 919, 1327	1.027534413	450349.10	448864 (p_-+p_-)	1.00331 {1+δ}
100000068	2, 3, 7	2.4	1051875.06	1049540 (p_++p_-)	1.00223 (1−δ)
100000070	2, 5, 941	1.334753284	584997.36	584024 (p_++p_+)	1.00167 (1−δ)
100000072	2, 73	1.014084507	444454.24	443816 (p_-+p_-)	1.00144 {1+δ}
100000074	2, 3, 211	2.009569378	880756.89	876522 (p_++p_-)	1.00483 (1−δ)
100000076	2, 11	1.111111111	486979.36	485356 (p_++p_+)	1.00334 (1−δ)
100000078	2, 19	1.058823529	464062.64	463834 (p_-+p_-)	1.00049 {1+δ}
100000080	2, 3, 5	2.666666667	1168750.34	1167050 (p_++p_-)	1.00146 (1−δ)
100000082	2, 7, 13, 53, 1481	1.335661832	585395.90	584184 (p_++p_+)	1.00207 (1−δ)
100000084	2, 271	1.003717472	439910.81	439806 (p_-+p_-)	1.00024 {1+δ}
100000086	2, 3, 17	2.133333333	935000.54	932058 (p_++p_-)	1.00316 (1−δ)
100000088	2, 109	1.009345794	442377.58	440800 (p_++p_+)	1.00358 (1−δ)
100000090	2, 5, 23	1.396825397	612202.71	609130 (p_-+p_-)	1.00504 {1+δ}
100000092	2, 3, 71	2.028985507	889266.76	886568 (p_++p_-)	1.00304 (1−δ)
100000094	2	1	438281.47	437445 (p_++p_+)	1.00191 (1−δ)
100000096	2, 7, 79, 5651	1.215799601	532862.42	531574 (p_-+p_-)	1.00242 {1+δ}
100000098	2, 3, 11	2.222222222	973958.78	973416 (p_++p_-)	1.00056 (1−δ)
100000100	2, 5, 101, 9901	1.346937401	590337.67	588298 (p_++p_+)	1.00347 (1−δ)
				精确度平均值	1.00248

注：1)表中前二列和第五列“实际值”由四川周定远先生提供。
2) {1+δ}表示不符合细节 4，不能用(1±δ)进行修正。

细节 5 $\pi(p_i)_r \sim \frac{\pi(N)_r}{p_i-1} \sim [\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}]$ 与 $\pi(p_i)_r=[\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}] \pm [\beta\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}]$ 之间的细节差异。

$\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}$ 与 $[\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}]$ 差值不大于 1，但是，它与 $\pi(p_i)$ 必竟有一定的数量差，考虑到这个细节，用 $\pi(p_i)_r=[\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}] \pm [\beta\frac{\pi(N)_r}{p_i-1}]$ 表示更精确。β 的大小因 $\pi(p_i)$、$\pi(p_ip_j)$ 等而异，可取绝对值最大的 β_{max} 统一之。根据等差数列中的素数定理，$N\to\infty$ 时，$\beta_{max}\to 0$。理论上应该如公式(6)所示。

$$(6)\quad N(p,p)_R \sim \frac{2\pi(N)_r(\pi(N)-r+1)}{N} \prod_{3\le p\le\sqrt{N}} \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p|N \\ 3\le p\le\sqrt{N}}} \frac{p-1}{p-2}\,(1\pm\delta)(1\pm\beta_{max})$$

细节 6 细节中的细节。

在(1±δ)规律中出现不能用{1+δ}进行修正的点，见表 1、图 1 和表 2、图 2。可以称为细节中的细节，这是从精确无误的容斥公式(见《“1+1”浅见之四：……》之定理 1。)变换到本文中公式(6)时唯一还说不清楚的地方。但是，就细节反常值的大小而言，可以像 δ 一样忽略不计。

3 结论。

结合《“1+1”浅见之九：证明哈代－李特伍德猜想(A)》，本文讨论了哈代所说的细节问题，某些细节也就是常说的可以忽略的“余项”，如公式(6)中的 δ 与 β_{max}。

$N\to\infty$ 时，$\delta\to 0$，$\beta_{max}\to 0$。$N(p,p)_R \sim r_2(N)$，$\pi(N)_r \sim \pi(N)-r+1 \sim \pi(N)$。由公式(6)可改

为$r_2(N) \sim 1.3202\frac{\pi(N)\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2}$。也就是$\frac{r_2(N)}{\pi(N)} \sim 1.3202\frac{\pi(N)}{N}\prod\frac{p-1}{p-2} > \frac{\pi(N)}{N}$。这个结果告诉我们，无论在何种情况下，$r_2(N)$相对于π(N)之比值(或称占有率、分布密度)大于π(N)相对于N之比值(或称占有率、分布密度)。换句话说，偶数哥德巴赫猜想的答案出现在素数中的机会较之素数出现在正整数中的机会更大一些。偶数哥德巴赫猜想的答案数量随N的增大而增多。

实验更使我们看到了公式(4)和(2)的精确性及其“余项”的具体的变化规律。

参考文献

[1] 童信平,偶数 Goldbach 问题解数的计算公式,右江民族师专学报(自然科学版) ,1997,3,10-12。

[2] [加]R. K. 盖伊著，张明尧译，数论中未解决的问题，科学出版社，1991 年。

[3] 王元，谈谈素数，上海教育出版社，1978 年，32 页。

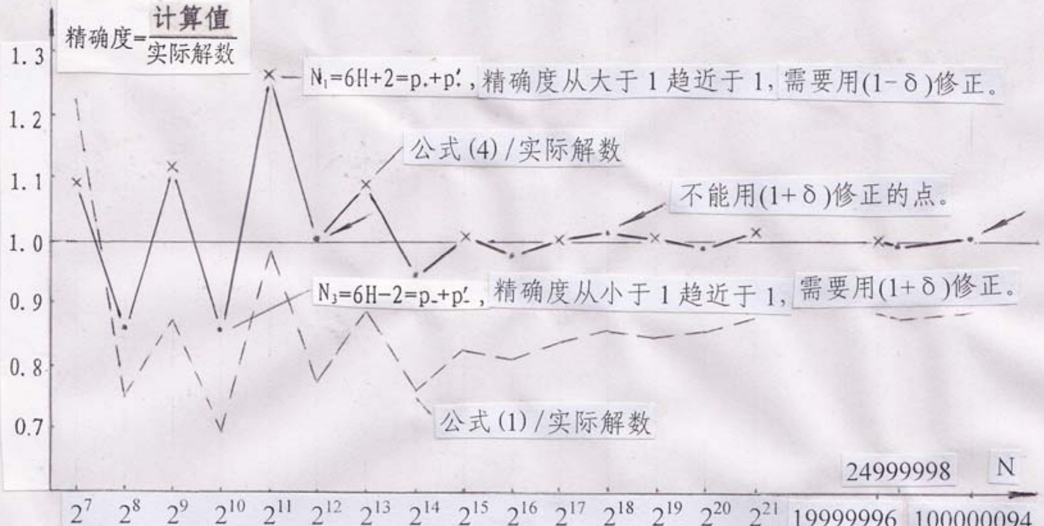
精确度=计算值/实际解数
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
N₁=6H+2=p₊+p′₊，精确度从大于1趋近于1，需要用(1−δ)修正。
公式(4)/实际解数
不能用(1+δ)修正的点。
N₃=6H−2=p₋+p′₋，精确度从小于1趋近于1，需要用(1+δ)修正。
公式(1)/实际解数
24999998
N
2^7 2^8 2^9 2^10 2^11 2^12 2^13 2^14 2^15 2^16 2^17 2^18 2^19 2^20 2^21
19999996
100000094

图 1

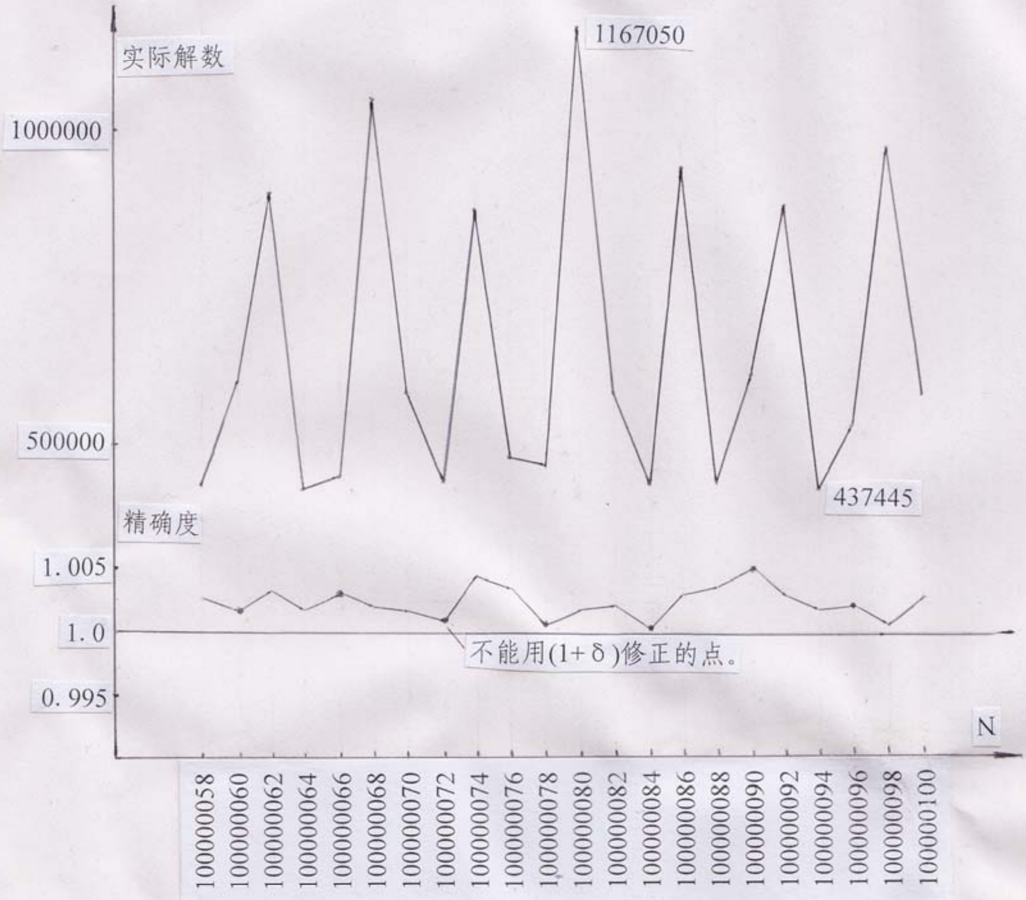
实际解数
1167050
1000000
500000
437445
精确度
1.005
1.0
0.995
不能用(1+δ)修正的点。
N
100000058
100000060
100000062
100000064
100000066
100000068
100000070
100000072
100000074
100000076
100000078
100000080
100000082
100000084
100000086
100000088
100000090
100000092
100000094
100000096
100000098
100000100

图 2

—5—