Author name
Giuliano Bettini

Title
Gravitoelectromagnetism (GEM), Lagrange equations and Faraday induction law

Abstract
Recently gravitoelectromagnetism ("GEM") has been discussed by a number of authors. In this paper, after a brief reminder of viXra:1008.0042 "An interpretation of the laws of gravity and inertia", it is shown that the law of motion and the gravitoelectromagnetic fields can be deduced from the Lagrange function of a non relativistic particle in a non inertial reference frame. The discussion has been extended to the Faraday induction law: a gravity field can be induced in a loop if the gravitomagnetic flux through the loop is changed.

Comments
In Italian, a short English version is included.

Gravitoelettromagnetismo (GEM), equazioni di Lagrange e legge dell'induzione di Faraday

Introduzione

La Relatività Generale propone in prima approssimazione (basse velocità e campi deboli) equazioni simili a quelle dell'elettromagnetismo. Idee di tal genere sono sorte prima ancora che nascesse la teoria della relatività generale (Heaviside, [1]). Sono idee che propongono, in un modo o nell'altro, e con l'impiego di simboli vari, campi "tipo E" gravitoelettrici e "tipo H" gravitomagnetici.
Dennis Sciama [2], riprendendo idee di Mach, ha anche collegato tali teorie e tali campi alla azione della totalità della materia presente nell'universo o anche, come dicono alcuni, alla azione delle stelle fisse. Forward (Hughes Res. Lab.) [3] ha mostrato già nel 1961 che la Relatività Generale, in una approssimazione a campi deboli, rassomiglia alle equazioni di Maxwell.
Lasciate per un po' da parte, queste idee hanno ripreso vigore in tempi recenti.
Alla voce "GEM" (Gravitoelettromagnetismo) sono comparsi studi di vari ricercatori. Una impressionante bibliografia, anche se solo aggiornata all'inizio del 2000, compare in [4].
Tra le varie conseguenze del GEM, ci sarebbe quella che un campo "gravitomagnetico" variabile genererebbe campi gravitazionali, secondo una legge analoga alla legge dell'induzione di Faraday.
Si sono cercate anche verifiche tramite masse poste in rotazione [5], ma gli esperimenti urtano contro la difficoltà che tali campi sarebbero o sono estremamente deboli.

In [6] ho inteso mostrare che un tal genere di idee nasce anche in meccanica classica, ovverosia sono idee implicite nella meccanica classica e anzi sono in un certo senso, se non si introducono arbitrariamente delle ipotesi, le sole *deducibili dagli esperimenti*.
Dedico questo breve scritto ad alcune considerazioni riguardanti i seguenti argomenti:
1) i campi gravitoelettromagnetici e la legge del moto di Lorentz possono essere dedotti dalla funzione di Lagrange per una particella non relativistica in un riferimento non inerziale;
2) la legge dell'induzione di Faraday (campi gravitomagnetici variabili si circondano di campi gravitoelettrici) ammette una semplice interpretazione in un sistema di riferimento rotante.
Preciso che:
1-non mi occupo di relazioni o confronti con la Relatività Generale;
2-faccio l'ipotesi di basse velocità (non relativistiche) e campi deboli;
3-trascuro la presenza di campi "gravitomagnetici" prodotti da masse, che sono ancora oggetto di riscontro sperimentale [5];
4-non faccio ricorso a mezzi di calcolo che vadano oltre l'ordinari calcolo vettoriale.

La legge del moto con i campi $\vec{g}$ e $\vec{\Omega}$ e la forza di Lorentz

Rammento brevemente da [6] le definizioni dei campi $\vec{g}$ e $\vec{\Omega}$ e la legge del moto con la forza di Lorentz.
Seguendo mie idee precedenti, e ispirato da un lavoro di Hestenes [7], ho formulato in [6] la seguente congettura:
le forze gravitazionali e inerziali agiscono tramite un campo bivettoriale che deriva da un potenziale scalare e un potenziale vettore, con le formule tipiche dell'elettromagnetismo.

(1) $\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{U}}{\partial ct}$

(2) $\vec{\Omega} = rot\vec{U}$

Chi è questo potenziale? Considerazioni dimensionali e l'evidenza sperimentale [6] portano a ritenere che il potenziale sia il quadrivettore (circa, per basse velocità e campi deboli):

(3) $U = (\varphi, \vec{U}) \cong (c^2 + \Phi, \vec{U})$

Potenziale scalare:

(4) $\varphi = c^2 + \Phi$

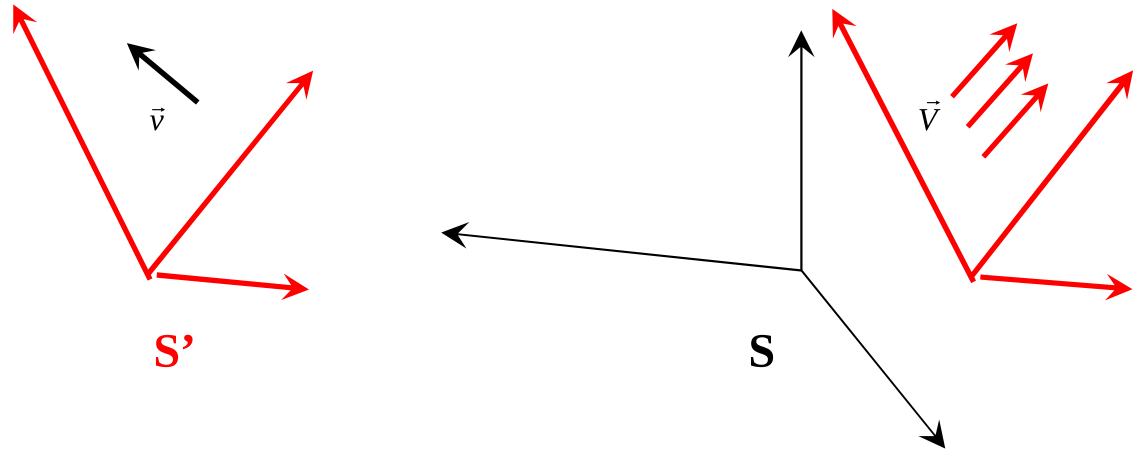
Potenziale vettore:

(5) $\vec{U} = \vec{V}c$

Φ è il potenziale prodotto da eventuali masse presenti. Ad esempio se è presente una massa M a distanza d il potenziale Φ vale :

(6) $\Phi = -k\frac{M}{d}$

$\vec{V}$ è così definita.
Sia m una massa con velocità $\vec{v}$ rispetto ad un arbitrario riferimento S'.
Sia S' in moto rispetto a un riferimento inerziale S (o come sostengono alcuni "rispetto alle stelle fisse").



$\vec{V}$, indipendente da $\vec{v}$, è la velocità dei punti di S' (considerati fissi in S') rispetto al riferimento S.

In completa analogia con l’elettromagnetismo, per una massa m con velocità $\vec{v}$ in S’ la legge del moto sarebbe espressa dalla forza di Lorentz:

$$(7)\; m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\Omega})$$

Una osservazione conclusiva.
Ci si può chiedere quale sia l’origine fisica del potenziale.
Mi limito allo spazio vuoto.
L’ipotesi più semplice che si possa fare è che esista un potenziale scalare c^2 determinato “dalle stelle fisse” o da tutta la materia dell’ universo, e che questo sia la parte scalare di un quadrivettore c^2u_i essendo u_i la quadrivelocità rispetto a un sistema di riferimento a riposo rispetto alle stelle fisse.
Idee simili sono sostenute per esempio in [8], ma le lascio alla immaginazione del lettore.
Preferisco l’atteggiamento di Newton “hipoteses non fingo” e mi limito ad osservare che la tesi sembra essere sostenuta, semplicemente, dai fatti sperimentali.

Deduzione dei campi e della forza di Lorentz dalle equazioni di Lagrange

Si possono ricavare i campi (1), (2) e la forza di Lorentz dalle equazioni di Lagrange

$$(8)\; \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Ragiono come se abitassi in un riferimento che (in analogia alla deduzione e. m.) non è S ma è S’, ossia il riferimento nel quale si avvertono i campi.
Ne segue che L è (o <u>sarebbe</u> senza campi ovvero potenziali)

$$(9)\; L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}$$

Poi a questa si aggiunge una parte che (come nell’analogo caso elettromagnetico, Landau, [9]) proviene dalla presenza in S’ del potenziale vettore $\vec{U}$ più il potenziale scalare φ.
Sia allora, per basse velocità e in completa analogia con l’elettromagnetismo (vedi Appendice):

$$(10)\; L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m}{c}\vec{U}\dot{\vec{r}} - m\varphi$$

Con le (4), (5) risulta

$$(11)\; \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + m\vec{V}$$

$$(12)\; \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L = mgrad(\dot{\vec{r}}\vec{V}) - mgrad\varphi$$

che fornisce per una nota formula e con $\dot{\vec{r}}$ indipendente dalle coordinate

$$(13)\; \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V} + m\dot{\vec{r}}\times rot\vec{V} - mgrad\varphi$$

Dalle equazioni di Lagrange complete otteniamo

$$(14)\ m\ddot{\vec{r}} + m\frac{d\vec{V}}{dt} = m(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V} + m\dot{\vec{r}} \times rot\vec{V} - mgrad\varphi$$

Bisogna ora tenere presente la seguente formula valida per un vettore la cui dipendenza sia $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$

$$(15)\ \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V}$$

e quindi sostituendo si arriva infine alla formula di Lorentz

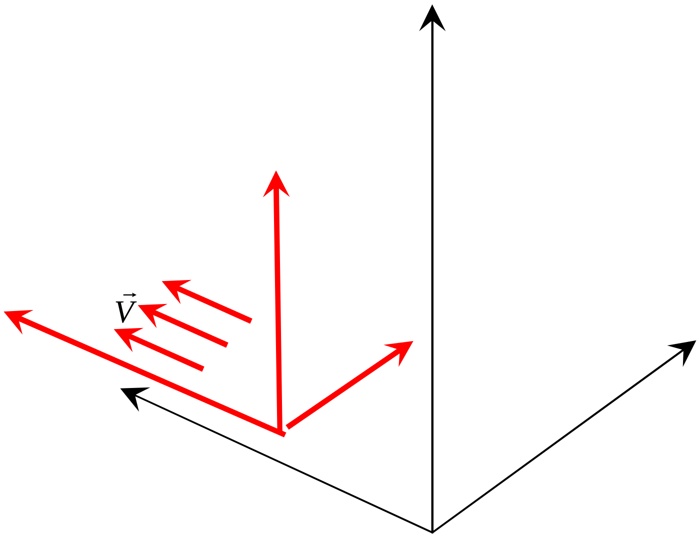
$$(16)\ m\ddot{\vec{r}} = -mgrad\varphi - m\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + m\dot{\vec{r}} \times rot\vec{V}$$

dove compaiono i campi (1) e (2).

Confronto con la legge del moto in meccanica classica
Accelerazione lineare

Supponiamo che S' abbia una accelerazione lineare $\frac{d\vec{V}}{dt}$ rispetto a S.

Sia m una massa a riposo nel punto $P = P(\vec{r})$ di S' ($\vec{v} = \dot{\vec{r}} = 0$).



Seguendo le "istruzioni per l'uso" il potenziale vettore risulta $\vec{U} = \vec{V}c$.
I campi $\vec{g}$ e $\vec{\Omega}$ sono

(17) $\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{U}}{\partial ct} = -\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \equiv -\frac{d\vec{V}}{dt}$

(18) $\vec{\Omega} = rot\vec{U} = 0$

La legge del moto in S' è

(19) $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{\Omega}) = -m\frac{d\vec{V}}{dt}$

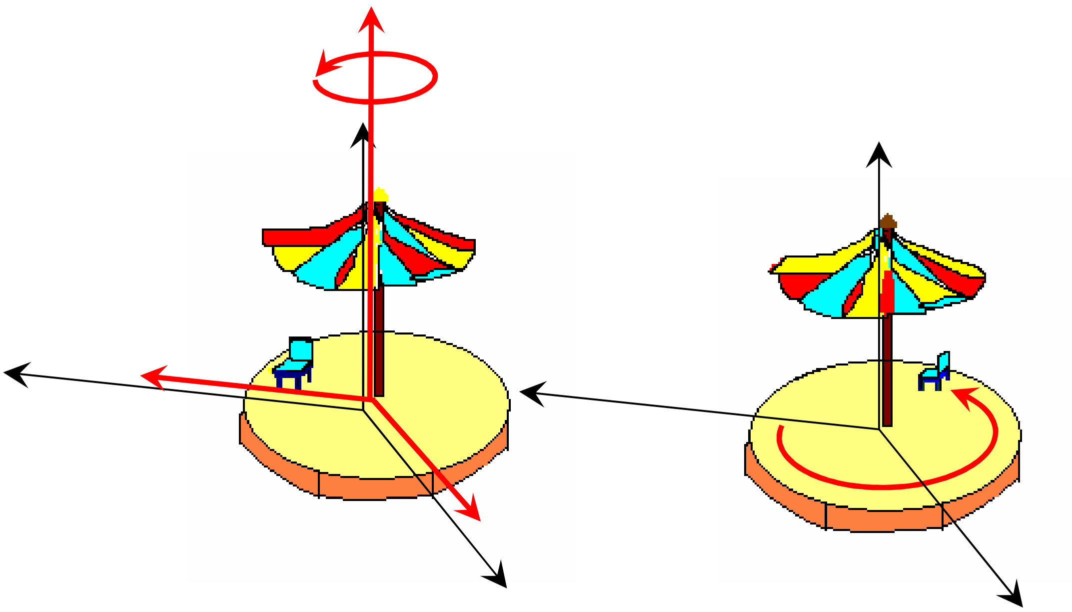
OK, Landau [10]$\rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -m\frac{d\vec{V}}{dt}$

Confronto con la legge del moto in meccanica classica
Riferimento rotante

Rispetto a [6], considero il caso generale in cui anche $\dot{\omega} \neq 0$.
Supponiamo che S' sia in rotazione antioraria rispetto a S.
Prendiamo una origine comune O, un asse z in comune e l'asse x di S' coincida per t=0 con $\hat{i}$, versore dell'asse x di S.
Sia P un punto di S' di coordinate $\vec{r} = (r, \varphi)$ in S'. Sia $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ la velocità angolare di S' attorno all'asse z. La velocità $\vec{V}$ del generico punto P di S' rispetto a S è:

$$(20)\,\vec{V} = \hat{i} e^{i\varphi} i\omega r e^{i\omega t}$$

Ciò determina completamente il quadripotenziale U.



Risulta:

$$(21)\,-\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = \hat{i}\exp(i\varphi)\omega^2 r\exp(i\omega t) - \hat{i}\exp(i\varphi) i\dot{\omega} r\exp(i\omega t)$$

e con qualche calcolo i campi $\vec{g}$ e $\vec{\Omega}$ sono:

$$(22)\,\vec{g} = -\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = \omega^2 \vec{r} + \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}$$

$$(23)\,\vec{\Omega} = rot\vec{V}c = 2\vec{\omega}c$$

La legge del moto in S' è

$$(24)\,m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{\Omega}) = m(\omega^2 \vec{r} + \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}} + 2\vec{v} \times \vec{\omega})$$

OK, Landau [10]$\rightarrow \ddot{\vec{r}} = \omega^2 \vec{r} + 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}$

Ma c'è una importante differenza di interpretazione: il termine $\vec{g} = \vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}$ ora si può scrivere $\vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$, e questo lega la nascita di questo campo $\vec{g}$ ad una variazione $\dot{\vec{\Omega}}$ del campo $\vec{\Omega}$.
Riprenderemo questo argomento dopo una riflessione sulla legge dell'induzione di Faraday.

La legge dell'induzione di Faraday

Rammento brevemente alcune definizioni come si possono trovare in qualunque buon libro di fisica, esempio [11] in unità CGSE.
Forza elettromotrice in un circuito chiuso

$$(25)\; e.m.f. = \int_l \vec{E}d\vec{l}$$

Flusso attraverso una superficie

$$(26)\; \phi = \iint_{dS} \vec{H}d\vec{S}$$

La legge dell'induzione di Faraday stabilisce che la variazione di flusso in un circuito determina nel circuito stesso una forza elettromotrice , secondo la formula:

$$(27)\; e.m.f. = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Sostituendo le prime due nella terza la legge di Faraday si scrive dunque:

$$(28)\; \int_l \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{H}d\vec{S}$$

Applicando il teorema di Stokes al primo membro e scambiando a secondo membro la derivata con l'integrale di superficie si arriva a

$$(29)\; rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

In effetti [11]:
"*In comparison with (27), this equation does not contain anything new physically; it is the same induction law, but rewritten in differential form for an infinitely small circuit (contour)*".

Le corrispondenti equazioni "gravitomagnetiche " sarebbero

$$(30)\; \int_l \vec{g}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\Omega}d\vec{S}$$

$$(31)\; rot\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$$

Calcoliamo la "forza d'inerzia all'avviamento" che è l'analogo della f.e.m. indotta che si genera in una spira nel momento dell'insorgere della corrente. La f.e.m. indotta si oppone al moto. Non mi dilungo. Sfruttando un calcolo già fatto risulta

$$(32)\; \vec{g} = -\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = -\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$$

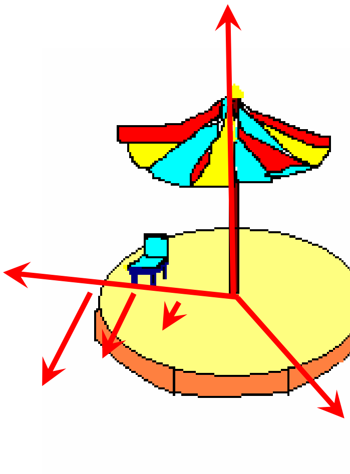
che si può scrivere

$$(33)\; \vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}$$

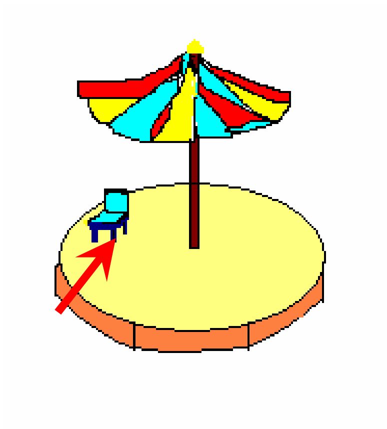
Supponiamo di essere su una giostra e che questa venga bruscamente messa in moto. Al manifestarsi del moto fa seguito una sensazione di forza, una spinta che si avverte tangenzialmente , e con direzione opposta al moto. Un campo $\vec{g}$.

Il campo $\vec{g}$ che nasce ha il valore $\vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$.

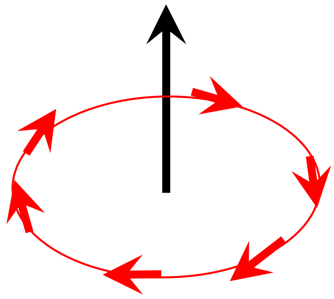
Il risultato si può leggere nel seguente modo: *ad ogni* $\dot{\vec{\Omega}} \neq 0$ *corrisponde un campo* $\vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$ *indotto in un loop (un circuito) a causa del fatto che il flusso di* $\vec{\Omega}$ *nel circuito cambia.*



Velocità alla partenza



Sensazione di forza



Campo $\vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$ indotto

Notare che il campo $\vec{g}$ è definito ovunque nel circuito, indipendentemente dal fatto che sia o no presente una massa sensibile a questa forza. In particolare, il campo è definito rispetto a quale forza *sentirebbe* una massa di prova, se fosse ipoteticamente posta in quel punto.
Possiamo ora verificare che vale la legge di induzione di Faraday.
Integrando sul circuito orientato l

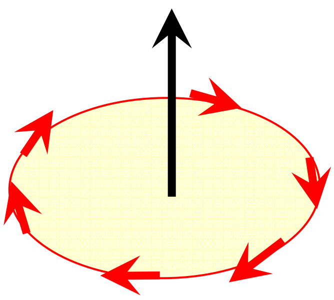
$$(34)\ \int_l \vec{g}d\vec{l} = -\frac{1}{2c} r\dot{\Omega}\int_l dl = -\frac{1}{c}\pi r^2\dot{\Omega}$$

e poi sulla superficie orientata S

$$(35) -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\Omega}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\dot{\Omega}\pi r^2$$

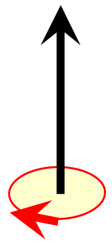
si ottiene precisamente la legge di induzione di Faraday

$$(36)\qquad \int_l \vec{g}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\Omega}d\vec{S}$$



Applicando il teorema di Stokes al primo membro e scambiando a secondo membro la derivata con l'integrale di superficie si arriva a

(37) $$rot\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t}$$



Questa non afferma nulla di nuovo ma è sostanzialmente la precedente, applicata ad un loop infinitamente piccolo.
Si noti che la si può anche dedurre direttamente senza alcun sforzo dalla espressione dei campi tramite i potenziali, ma il ragionamento che abbiamo seguito ne fornisce meglio la interpretazione fisica.

Conclusioni

Come ho già tentato di affermare in [6], sembra possibile riformulare la meccanica classica ovvero le leggi della gravità e dell'inerzia invocando la presenza fisica di campi "tipo E" gravitoelettrici e "tipo H" gravitomagnetici. Si può affermare che organizzando misure di campo con i metodi standard, con una particella di prova, si ritrovano esattamente ed esclusivamente questi campi, e il relativo potenziale. Questi sono i fatti sperimentali. Paradossalmente quindi ogni altra affermazione che affermi qualcosa di diverso è una *ipotesi*; e come diceva Newton ("Principia"): "hipoteses non fingo".
Quanto alla interpretazione fisica di questo potenziale ho detto che l'ipotesi più semplice che si può fare è che esista un potenziale scalare c^2 determinato "dalle stelle fisse" o da tutta la materia dell' universo, e che questo sia la parte scalare di un quadrivettore c^2u_i essendo u_i la quadrivelocità rispetto a un sistema di riferimento a riposo rispetto alle stelle fisse (come viene sostenuto per esempio in [8]). Tuttavia personalmente, per il momento, preferisco ribadire l'atteggiamento "hipoteses non fingo" e mi limito ad osservare che le tesi sembrano essere sostenute, semplicemente, dai fatti sperimentali. Lascio ogni più vasta interpretazione alla immaginazione del lettore.
Ho dedotto qui i campi e la legge del moto a partire da una funzione di Lagrange, così come si fa in elettromagnetismo, ma limitatamente a una particella non relativistica. Ho anche cercato di mostrare che uno degli aspetti più "intriguing" di questa faccenda, vale a dire la validità della legge di induzione di Faraday, è sperimentalmente confermato da una semplice rilettura della meccanica classica. Esiste una "forza gravitomotrice" analoga alla e.m.f. dell'elettromagnetismo, che viene indotta in un loop da una variazione di flusso del campo $\vec{\Omega}$.

Appendice

Devo precisare che questa deduzione dalle equazioni di Lagrange non mi lascia al momento pienamente soddisfatto per le ragioni che seguono.
Esaminiamo come nasce (Landau, [9]) l'espressione della funzione di Lagrange nel caso elettromagnetico.
Landau parte dalla azione:

$$(38)\ S=\int_a^b(-mcds+\frac{e}{c}A_i dx_i$$

Da questa con qualche passaggio si arriva ad un integrale rispetto al tempo:

$$(39)\ S=\int_{t1}^{t2}(-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}-e\varphi)dt$$

La funzione sotto il segno d'integrale (Landau) *n'est pas autre chose que la fonction de Lagrange pour une charge dans un champ électromagnétique:*

$$(40)\ L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}-e\varphi$$

Cette expression diffère de la fonction de Lagrange pour une particule libre par les termes $\frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}-e\varphi$ *, décrivant l'interaction da la charge avec le champ. (....) Pour les vitesses faibles, cas de la mécanique classique, la fonction de Lagrange devient:*

$$(41)\ L=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+\frac{e}{c}\vec{A}\dot{\vec{r}}-e\varphi$$

Quindi gli ultimi due termini a destra rappresentano l'interazione della particella con il campo, mentre il primo è la funzione di Lagrange per particella libera.
Qual'è il problema?
Il problema è che nell'analogia gravitazionale inerziale, nella (10), non dovrebbe esistere alcuna "particella libera" dalla azione di campo. Il campo stesso, tramite i potenziali (4), (5), dovrebbe essere responsabile del termine $\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$, così come è responsabile del termine mc^2 [6].
Solo una formulazione che esprimesse questo fatto sarebbe pienamente soddisfacente.

Fields and law of motion

Conjecture:
Gravity and inertia act on a mass m through a bivector field derived from a scalar potential and vector potential, with the typical formulas of electromagnetism.

$$\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{U}}{\partial ct}$$

$$\vec{\Omega} = rot\vec{U}$$

What is the potential?
The potential is the four vector (low speeds)

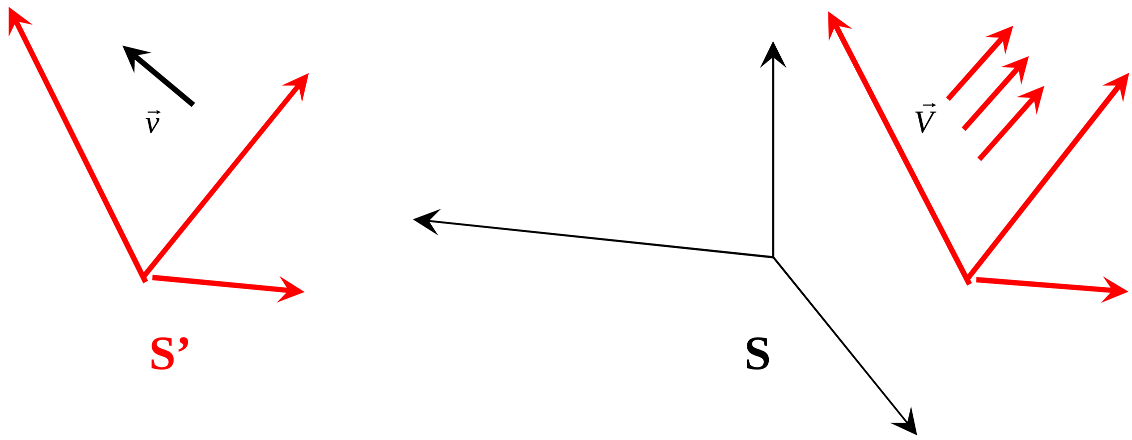
$$U = (\varphi, \vec{U}) \cong (c^2 + \Phi, \vec{U})$$

scalar: $c^2 + \Phi$
vector: $\vec{U} = \vec{V}c$

What is Φ? For a mass M at distance d

$$\Phi = -k\frac{M}{d}$$

What is $\vec{V}$?
Let m a mass with velocity $\vec{v}$ with respect to an arbitrary reference frame S'.
Let reference S' is in motion with respect fixed stars (inertial reference frame S).



$\vec{V}$: velocity of points P of S' with respect to fixed stars (inertial reference frame S).
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$: velocity of mass m in $P = P(\vec{r})$ with respect to the reference frame S'.

Conjecture:
The law of motion in S' is the Lorentz's force formula

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\Omega})$$

Fields and Lorentz force from Lagrange equations

Since we are pursuing the "electromagnetic" analogy for the inertial and gravitational forces we assume as in [9] the Lagrange function for S' reference to be (for non–relativistic particle, low speeds):

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m}{c}\vec{U}\dot{\vec{r}} - m\varphi$$

From Lagrange equations

$$(\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

we have

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + m\vec{V}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \nabla L = mgrad(\dot{\vec{r}}\vec{V}) - mgrad\varphi$$

or:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V} + m\dot{\vec{r}} \times rot\vec{V} - mgrad\varphi$$

Substituting in Lagrange equations we obtain:

$$m\ddot{\vec{r}} + m\frac{d\vec{V}}{dt} = m(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V} + m\dot{\vec{r}} \times rot\vec{V} - mgrad\varphi$$

But for a vector $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{V}$$

so the Lorentz force follows

$$m\ddot{\vec{r}} = -mgrad\varphi - m\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{c} m\dot{\vec{r}} \times rot\vec{V}c$$

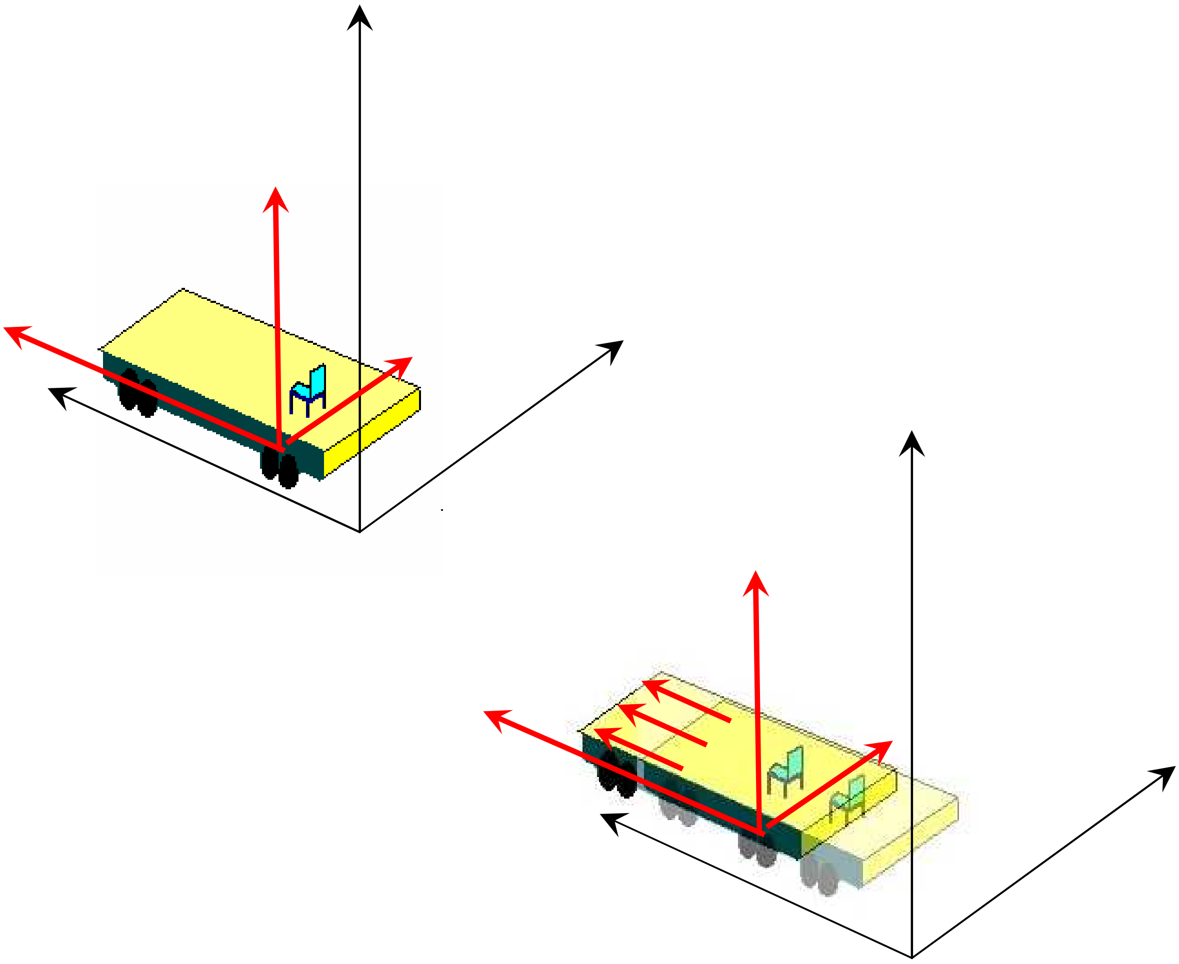
with "gravitoelectric" field $\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ and "gravitomagnetic" field $\vec{\Omega} = rot\vec{V}c$.

But it works?

Test n° 1: motion with linear acceleration

Let S' with linear acceleration $\frac{d\vec{V}}{dt}$

Let m a mass standing in a point P of S' ($\vec{v} = 0$).



Following the instruction we have:

Potential

vector potential: $\vec{U} = \vec{V}c$

Fields

$$\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{U}}{\partial ct} = -\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \equiv -\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{\Omega} = rot\vec{U} = 0$$

Law of motion in S'

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{\Omega}) = -m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

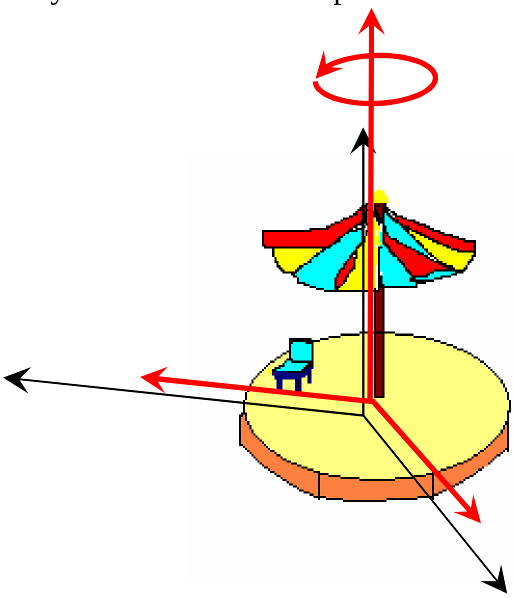
OK, Landau [10] $\rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -m\frac{d\vec{V}}{dt}$

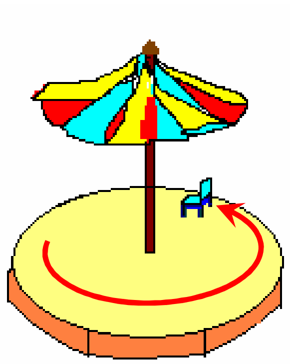
Test n° 2: motion in rotating reference frame

Let S'a reference rotating counterclockwise with respect to inertial space (reference S).
Take a common origin O, a common z-axis and x-axis of S' coincides for t = 0 with $\hat{i}$, x-axis of S.
Let P be a point S' of coordinates $\vec{r} = (r, \varphi)$ in S'. Let $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ the angular velocity of S' around the z-axis. The speed $\vec{V}$ of generic point P of S' is:

$$\vec{V} = \hat{i} e^{i\varphi} i\omega r e^{i\omega t}$$

This completely determines the four-potential U.





Fields

$$\vec{g} = -\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = \hat{i}\exp(i\varphi)\omega^2 r \exp(i\omega t) = \omega^2 \vec{r}$$

$$\vec{\Omega} = rot\vec{V}c = 2\vec{\omega}c$$

Law of motion in S'

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\Omega}) = m\omega^2\vec{r} + 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$$

OK, Landau [10] $\rightarrow \ddot{\vec{r}} = \omega^2\vec{r} + 2\dot{\vec{r}}\times\vec{\omega}$

Test n° 3: motion in rotating reference frame at start up

At start up we have a sudden acceleration of ω.
So by first we need the law of motion for $\omega = \omega(t)$.
If $\omega = \omega(t)$ the fields are

$$\vec{g} = -\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = \hat{i}\exp(i\varphi)\omega^2 r\exp(i\omega t) - \hat{i}\exp(i\varphi)i\dot{\omega}r\exp(i\omega t) = \omega^2\vec{r} + \vec{r}\times\dot{\vec{\omega}}$$

$$\vec{\Omega} = rot\vec{V}c = 2\vec{\omega}c$$

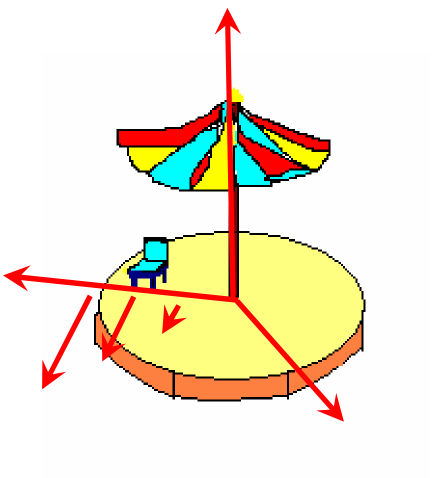
Law of motion in S'

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\Omega}) = m(\omega^2\vec{r} + \vec{r}\times\dot{\vec{\omega}} + 2\vec{v}\times\vec{\omega})$$

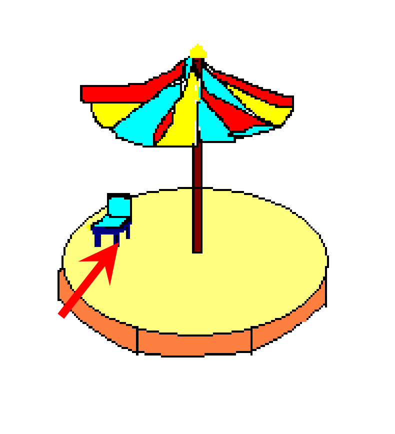
OK, Landau [10] $\rightarrow \ddot{\vec{r}} = \omega^2\vec{r} + 2\dot{\vec{r}}\times\vec{\omega} + \vec{r}\times\dot{\vec{\omega}}$

At start up ($\omega = 0, \vec{v} = 0$) a force is experienced

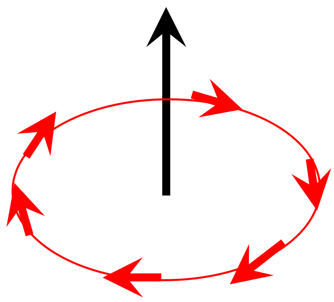
$$m\vec{g} = -m\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = -m\hat{r}i\dot{\omega}r = m\vec{r}\times\dot{\vec{\omega}} = m\frac{1}{2c}\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}$$



Velocity at start up



Force



g field $\quad \vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r}\times\dot{\vec{\Omega}}$

We can say: *"A $\vec{g}$ field can be induced in a loop if the gravitomagnetic flux through the loop is changed"*.
Obviously the same holds for any change $\dot{\vec{\Omega}} \neq 0$.

Test n° 4: Faraday induction law

We have found that for any change $\dot{\vec{\Omega}} \neq 0$ a $\vec{g}$ field can be induced in a loop if the gravitomagnetic flux through the loop is changed, whose value is.

$$\vec{g} = \frac{1}{2c}\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}}$$

Note that the $\vec{g}$ field is defined everywhere in the loop, regardless of whether or not a mass is present to experience the force. In particular, the field is defined with respect to what force a test mass would feel, if it were hypothetically placed there.

Integrating along the oriented loop l

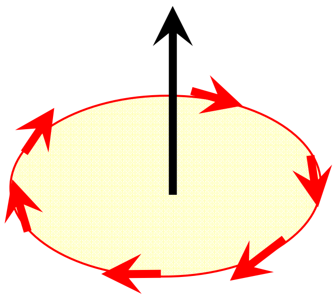
$$\int_l \vec{g}d\vec{l} = -\frac{1}{2c}r\dot{\Omega}\int_l dl = -\frac{1}{c}\pi r^2\dot{\Omega}$$

and along the oriented surface S

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\Omega}d\vec{S} = -\frac{1}{c}\dot{\Omega}\pi r^2$$

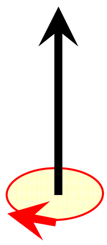
the Faraday induction law follows

$$\int_l \vec{g}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\Omega}d\vec{S}$$



Of course with an infinitesimal small loop we have the formula (Maxwell equation):

$$rot\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t}$$



Note that this formula can also be found directly from $\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{U}}{\partial ct}$ and $\vec{\Omega} = rot\vec{U}$, but the deduction appears rather formal and seems to hold no significant appeal for physical intuition.

References

[1] O. Heaviside, “Electromagnetic Theory”, Vol. 1, The Electrician, London, (1894), pp. 455-65. Reproduction of Heaviside's article in www.wbabin.net/historical/heaviside.pdf

[2] D. W. Sciama, “The Unity of the Universe”, Faber and Faber, London, (1959); translated in “L’unità dell’Universo”, Einaudi, (1965)

[3] R. L. Forward,“General Relativity for the Experimentalist”, Proceedings of the IRE 49, (1961)

[4] D. Bini, R.J. Jantzen, in “Reference Frames and Gravitomagnetism”, edited by J.-F. Pascual-Sanchez, L. Floria, A. San Miguel and F. Vicente (World Scientific, Singapore, 2001), pp. 199-224; D. Bini, R. T. Jantzen, “A List of References on Spacetime Splitting and Gravitoelectromagnetism”, arXiv:gr-qc/0010070v1 19 Oct 2000

[5] Tajmar, M., Plesescu, F., Marhold, K., and de Matos, C.J., "Experimental Detection of the Gravitomagnetic London Moment”, http://arxiv.org/abs/gr-qc/0603033, (2006)

[6] G. Bettini, “An Interpretation of the Laws of Gravity and Inertia”, viXra:1008.0042 (2010), see also PSTJ, Vol. 1, Issue 6 http://prespacetime.com/index.php/pst.

[7] D. Hestenes, “Spacetime Physics with Geometric Algebra”, Am. J. Phys. (2003)

[8] C. S. Unnikrishnan, “Cosmic Relativity: The Fundamental Theory of Relativity, its Implications, and Experimental Tests”, gr-qc/0406023

[9] L.Landau, E. Lifchitz, “Théorie du champ”, Edition de la paix, Moscou

[10] L.Landau, E. Lifchitz, Phisique Theorique, Tome I, “Mecanique”, Edition MIR, Moscou, (1966)

[11] A. S. Kompaneyets, “Theoretical Physics”, MIR Publishers, Moscow, Second Printing, (1965)